

Chapitre I

Séries entières et fonctions holomorphes

La plupart des fonctions complexes dites élémentaires (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques et hyperboliques) peuvent se définir directement comme des sommes de «séries entières» $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe z . C'est d'ailleurs cette approche qui permet d'en démontrer les principales propriétés de la manière la plus rapide et la plus efficace. Dans ce chapitre, nous suivons cette voie : après une brève description des propriétés générales des séries entières, nous introduisons d'abord la fonction exponentielle complexe, puis à partir de celle-ci, nous déduisons les principales propriétés des autres fonctions élémentaires. Nous introduisons ensuite les définitions de base concernant les fonctions holomorphes et l'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\bar{z}$, et discutons brièvement la notion d'application conforme.

Notations. Tout au long de cet ouvrage, nous désignerons par $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ les ensembles de nombres usuels (entiers naturels, entiers rationnels, nombres rationnels, réels et complexes). Si X est un espace topologique (voir appendice A) et S une partie de X , on notera S° l'intérieur de S , \overline{S} l'adhérence de S et $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ$ la frontière de S (ici \setminus est l'opérateur de «différence ensembliste», ainsi noté pour éviter toute confusion avec la différence algébrique $-$). Enfin, si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty]$, on notera respectivement

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\},$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\},$$

$$\Gamma(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\},$$

le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r , le disque fermé qui en est l'adhérence et le cercle frontière $\Gamma(z_0, r) = \partial D(z_0, r)$.

1. Séries entières

1.1. Rayon de convergence d'une série entière

Rappelons d'abord quelques points de terminologie. Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de nombres réels ou complexes, on appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (ou simplement $\sum u_n$), la suite des sommes partielles

$$s_n = u_{n_0} + \cdots + u_n, \quad n \geq n_0,$$

cette suite pouvant être convergente ou non. Si $n_0 = 0$, la série sera aussi notée $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. On dit que la série est convergente si la limite $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ existe, et on désigne alors par

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n,$$

la somme de la série $\sum u_n$. Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum u_n$ de somme S est par définition

$$\rho_n = S - s_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

Si la suite u_n est une suite de fonctions réelles ou complexes $x \mapsto u_n(x)$ définies pour x dans un ensemble E , on dit que la suite est *uniformément convergente* (resp. *normalement convergente*) sur E si $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in E$ et si

$$\|\rho_n\|_E = \sup_{x \in E} |\rho_n(x)|$$

converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (resp. si la série $\sum \|u_n\|_E$ converge). Comme il est bien connu, la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Une série entière (complexe) est par définition une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où les coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ et la variable $z \in \mathbb{C}$ sont complexes. Le *domaine de convergence* de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge. Lorsque la série converge, nous désignons par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

la valeur de la somme. Le principal résultat concernant le domaine de convergence est le suivant.

Théorème. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière complexe et soit $R \in [0, +\infty]$ défini par

$$(1.1.1) \quad R = \sup \{r \geq 0; \text{ la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie

$$D(0, R) \subset \Delta \subset \overline{D}(0, R).$$

De plus, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé borné $\overline{D}(0, r) \subset D(0, R)$. Le nombre R est appelé *rayon de convergence*. Il est donné par la formule de Hadamard

$$(1.1.2) \quad R = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{|a_n|}},$$

où la limite est calculée dans $[0, +\infty]$, avec la convention $1/0 = +\infty$. Si les coefficients a_n sont non nuls et si le quotient de deux termes consécutifs admet une limite

$$(1.1.3) \quad \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty],$$

alors le rayon de convergence est $R = 1/\ell$ (critère de d'Alembert).

Démonstration. Soit $E = \{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\}$ et $R = \sup E \in [0, +\infty]$. Alors, pour $|z| > R$, on a $|z| \notin E$, donc la suite $(|a_n||z|^n)$ n'est pas bornée, et par suite la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge. Ceci montre que $\Delta \subset \overline{D}(0, R)$.

Soit maintenant $r \geq 0$ un réel positif tel que $r < R = \sup E$. Il existe alors un réel $\rho \geq 0$ tel que $\rho \in E$ et $r < \rho < R$. Il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que $|a_n|\rho^n \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \overline{D}(0, r)$ on en déduit

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

avec $r/\rho < 1$. La série est majorée en module par une série géométrique convergente. Ceci montre que la série converge normalement sur le disque $\overline{D}(0, r)$ pour tout $r < R$, et en particulier $D(0, R) \subset \Delta$. Il ne reste plus qu'à démontrer la formule de Hadamard. C'est presque immédiat : si $r > \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, il y a une infinité d'indices n tels que $1/\sqrt[n]{|a_n|} \leq r'$ pour un certain $r' \in]0, r[$, donc $|a_n|r'^n \geq 1$ et la sous-suite correspondante $|a_n|r^n \geq (r/r')^n$ n'est pas bornée, par conséquent $R \leq r$. Inversement, si $r < \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, nous avons $1/\sqrt[n]{|a_n|} \geq r$ pour $n \geq n_0$ assez grand, donc la suite $|a_n|r^n$ est bornée (majorée par 1 pour $n \geq n_0$), et $R \geq r$. Ceci implique bien l'égalité $R = \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. Enfin, le critère de d'Alembert s'obtient en montrant que l'hypothèse $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = \ell$ implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, ce qui est élémentaire. \square

Exemples. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ admet pour rayon de convergence $R = 1$ et pour domaine de convergence le disque ouvert $\Delta = D(0, 1)$. Les séries $\sum_{n \geq 1} n^{-n} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ admettent respectivement pour rayon de convergence $R = +\infty$ et $R = 0$ (d'où $\Delta = \mathbb{C}$, $\Delta = \{0\}$ respectivement). La formule de Hadamard montre qu'on ne change pas le rayon de convergence en remplaçant a_n par $n^\alpha a_n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Ceci peut néanmoins affecter les points situés sur la frontière du domaine de convergence. Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} n^{-2} z^n$ admet pour domaine de convergence $\Delta = \overline{D}(0, 1)$ (domaine sur lequel elle est normalement convergente), tandis que $\sum_{n \geq 1} n^{-1} z^n$ admet pour domaine de convergence $\Delta = \overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$. En $z = 1$, on obtient en effet la série harmonique $\sum 1/n$ qui est divergente. Pour $z = e^{i\theta}$ de module 1, $z \neq 1$, la série converge, comme on peut le voir à partir du classique lemme d'Abel :

Lemme d'Abel. Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n v_n$ une série à termes complexes. On suppose que $u_n \geq 0$ est une suite décroissante convergeant vers 0 et que les sommes partielles

$$s_n = v_{n_0} + v_{n_0+1} + \dots + v_n$$

sont bornées en module, i.e. $|s_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ et une certaine constante $M \geq 0$. Alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. Pour tous les indices $q > p > n_0$, on peut en effet écrire

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} u_p v_p + \cdots + u_q v_q &= u_p(s_p - s_{p-1}) + u_{p+1}(s_{p+1} - s_p) + \cdots + u_q(s_q - s_{q-1}) \\ &= -u_p s_{p-1} + s_p(u_p - u_{p+1}) + \cdots + s_{q-1}(u_{q-1} - u_q) + u_q s_q. \end{aligned}$$

Comme $|s_n| \leq M$, on déduit de là

$$|u_p v_p + \cdots + u_q v_q| \leq M u_p + M(u_p - u_{p+1}) + \cdots + M(u_{q-1} - u_q) + M u_q = 2M u_p$$

(on a utilisé ici la décroissance de (u_n) pour voir que $u_p - u_{p+1} \geq 0$). Comme $u_p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum u_n v_n$ satisfont le critère de Cauchy, et la convergence s'ensuit. \square

Dans l'exemple considéré plus haut, on a $n_0 = 1$, $u_n = 1/n$, $v_n = z^n = e^{ni\theta}$. Un calcul immédiat montre que la somme

$$v_1 + \cdots + v_n = e^{i\theta} \frac{e^{ni\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

est majorée en module par $M = 2/|e^{i\theta} - 1|$ pour $e^{i\theta} \neq 1$, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ pour $|z| = 1$, $z \neq 1$. \square

1.2. Sommes et produits de séries entières

Considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R' et R'' . Alors la série somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge au moins dans l'intersection $D(0, R') \cap D(0, R'')$ des disques ouverts de convergence respectifs, par conséquent son rayon de convergence R^+ satisfait l'inégalité

$$(1.2.1) \quad R^+ \geq \min(R', R'').$$

L'inégalité peut être stricte. C'est le cas par exemple si nous choisissons $a_n = 2^{-n} + 1$, $b_n = -2^{-n}$, $a_n + b_n = 1$, les rayons de convergence respectifs étant $R' = R'' = 1/2$, $R^+ = 1$. Il est clair néanmoins que l'égalité $R = \min(R', R'')$ a lieu si $R' \neq R''$, puisque la série somme diverge alors pour $|z| \in]R', R''[$, l'une des séries étant convergente et l'autre divergente.

Venons en maintenant à la série produit. On rappelle que le produit $\sum_{p \geq 0} u_p \sum_{q \geq 0} v_q$ des sommes de deux séries numériques absolument convergentes est égal à la somme $\sum_{n \geq 0} w_n$ de la série de terme général

$$(1.2.2) \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p},$$

qui est appelée *série produit* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Pour le voir, on peut observer qu'on a une majoration

$$(1.2.3) \quad \left| \sum_{n=0}^{N'} w_n - \sum_{p=0}^N u_p \sum_{q=0}^N v_q \right| \leq \varrho_N^{(u)} \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q| + \varrho_N^{(v)} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p|$$

où $\varrho_N^{(u)}$, $\varrho_N^{(v)}$ désignent respectivement les restes d'ordre N des séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, et où N' est un entier arbitraire tel que $N' \geq 2N$; en effet, le membre de gauche de (1.2.3) est la somme des termes $u_p v_q$ dont les indices sont tels que $p + q \leq N'$ et ($p > N$ ou $q > N$) ; les termes $u_p v_q$ tels que $p > N$ ont une somme inférieure ou égale en module à

$$\sum_{p=N+1}^{N'} |u_p| \sum_{q=0}^{N'} |v_q| \leq \varrho_N^{(u)} \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|,$$

et on a une majoration analogue pour les termes $u_p v_q$ tels que $q > N$. Si nous appliquons en particulier ce résultat au cas des séries entières $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$, la formule (1.2.2) donne aussitôt $w_n = c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p},$$

et la série $\sum c_n z^n$ est appelée série entière produit (ou parfois produit de Cauchy) des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On sait que la série produit converge dans l'intersection $D(0, R') \cap D(0, R'')$, puisque chacun des facteurs y converge absolument en chaque point. Le rayon de convergence R^\times de la série produit satisfait donc encore l'inégalité

$$(1.2.4) \quad R^\times \geq \min(R', R'').$$

On peut avoir ici l'inégalité stricte, même si $R' \neq R''$. Il suffit de prendre par exemple

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n z^n &= 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} z^n = \frac{1-z}{1-2z}, \\ \sum_{n \geq 0} b_n z^n &= 1 - \sum_{n \geq 1} z^n = \frac{1-2z}{1-z}, \end{aligned}$$

dont la série produit $\sum c_n z^n$ se réduit au seul terme $c_0 = 1$, les rayons de convergence respectifs étant $R' = 1/2$, $R'' = 1$, $R^\times = +\infty$.

1.3. Théorème de dérivation terme à terme

Nous démontrons ici la propriété importante de dérivabilité terme à terme des séries entières.

Théorème. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la dérivée complexe

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe en tout point du disque ouvert de convergence $D(0, R)$, et cette dérivée est donnée par la dérivée « terme à terme » de la série, c'est-à-dire

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Les dérivées successives s'expriment de même sous la forme

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n z^{n-p},$$

et les séries obtenues ont un rayon de convergence égal au rayon de convergence R de la série initiale.

Démonstration. Le fait que les séries dérivées terme à terme admettent le même rayon de convergence R vient de ce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-p+1)} = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Maintenant, la formule du binôme donne

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \sum_{p=2}^n C_n^p h^p z^{n-p}$$

avec $C_n^p = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2}^{p-2} \leq n(n-1) C_{n-2}^{p-2}$, d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| &\leq n(n-1)|h| \sum_{p=2}^n C_{n-2}^{p-2} |h|^{p-2} |z|^{n-p} \\ &= n(n-1)|h|(|z|+|h|)^{n-2}. \end{aligned}$$

Supposons $z \in D(0, R)$ et $z+h \in D(0, R)$. En multipliant la différence ci-dessus par a_n et en sommant sur n , notre inégalité implique

$$(1.3.1) \quad \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| (|z|+|h|)^{n-2}.$$

Si nous prenons $|h| \leq \delta < R - |z|$, alors $|z|+|h| \leq |z|+\delta < R$ et par suite

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| (|z|+|h|)^{n-2} \leq M := \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| (|z|+\delta)^{n-2} < +\infty.$$

Ceci montre que

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in D(0, R)$, et le théorème s'ensuit. \square

Inversement, étant donné une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, il est clair que f admet sur $D(0, R)$ une « primitive complexe »

$$(1.3.2) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n,$$

telle que $F'(z) = f(z)$ au sens complexe. De plus la série entière de F admet encore R comme rayon de convergence, et les autres primitives sont données par $F + C$ où $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire (une fonction G sur $D(0, R)$ admettant une dérivée complexe G' nulle est nécessairement égale à la constante $G(0)$, comme on le voit en regardant les fonctions de variables réelles $u(t) = G(tz)$, $t \in [0, 1]$, dont les dérivées réelles $u'(t)$ sont nulles; on verra plus loin en (2.1.5) un énoncé plus général).

1.4. Continuité à la frontière

Il est souvent utile de connaître le comportement de la somme d'une série entière en un point z_0 de la frontière du disque de convergence. La situation peut être très compliquée (au sens où la somme $f(z)$ n'est pas nécessairement continue en z_0 ni même bornée dans un voisinage). On a cependant le résultat de continuité partielle suivant.

Théorème. Soit $f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ fini, et $z_0 \in \Gamma(0, R)$ un point du cercle de convergence en lequel la série converge. Alors, si $S = S_{z_0, \delta, \eta} \subset D(0, R) \cup \{z_0\}$ est un secteur circulaire fermé de sommet z_0 , non tangentiel, de la forme

$$S_{z_0, \delta, \eta} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \delta, |\text{angle}(z_0 - z, z_0)| \leq \pi/2 - \eta\},$$

on a $\lim_{z \in S, z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Autrement dit, la propriété de continuité attendue a bien lieu pourvu qu'on ne s'approche pas « tangentiellement » de la frontière.

Démonstration. De manière assez analogue à ce que nous avons fait pour la transformation d'Abel (1.1.4), posons $u_n = (z/z_0)^n$, $v_n = a_n z_0^n$ et $\varrho_n = \sum_{p > n} v_p$. Pour $q > p > n_0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n z^n &= u_p v_p + \dots + u_q v_q \\ &= u_p (\varrho_{p-1} - \varrho_p) + u_{p+1} (\varrho_p - \varrho_{p+1}) + \dots + u_q (\varrho_{q-1} - \varrho_q) \\ &= u_p \varrho_{p-1} + \varrho_p (u_{p+1} - u_p) + \dots + \varrho_{q-1} (u_q - u_{q-1}) - u_q \varrho_q. \end{aligned}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, la convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} a_n z_0^n$ assure l'existence d'un entier N_ε tel que $|\varrho_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$. Pour $p, q > N_\varepsilon$, nous avons alors

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n z^n \right| \leq \varepsilon \left(2 + \left| \frac{z}{z_0} - 1 \right| \sum_{n=p}^{q-1} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \right) \leq \varepsilon \left(2 + \frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \right)$$

puisque

$$\sum_{n=p}^{q-1} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{1}{1 - |z|/|z_0|} = \frac{|z_0|}{|z_0| - |z|}.$$

L'hypothèse $z \in S_{z_0, \delta, \eta}$ assure précisément que le quotient $|z - z_0|/(|z_0| - |z|)$ reste borné par une constante indépendante de z ; en effet la condition angulaire $|\text{angle}(z_0 - z, z_0)| \leq \pi/2 - \eta$ équivaut à $\text{Re}(z_0 - z)\bar{z}_0 \geq |z - z_0| |z_0| \sin \eta$, d'où successivement

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 &= |z|^2 - |z_0|^2 + 2 \text{Re}(z_0 - z)\bar{z}_0 \geq |z|^2 - |z_0|^2 + 2 |z_0| |z - z_0| \sin \eta, \\ (2 |z_0| \sin \eta - |z - z_0|) |z - z_0| &\leq (|z| + |z_0|)(|z_0| - |z|) \leq 2 |z_0| (|z_0| - |z|), \end{aligned}$$

ce qui implique, pour $|z - z_0| \leq \delta' := \sin \eta |z_0|$, l'inégalité

$$\frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \leq \frac{2}{\sin \eta}.$$

On en déduit que la série $\sum a_n z^n$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $S_{z_0, \delta, \eta}$. Ceci entraîne la convergence uniforme de la série et la continuité de f sur $S_{z_0, \delta, \eta}$.

□

1.5. Fonctions complexes élémentaires

La fonction complexe la plus fondamentale est d'une certaine façon la fonction exponentielle complexe. On peut la définir au moyen de la fonction exponentielle réelle et des fonctions trigonométriques (à supposer que celles-ci aient déjà été construites de manière rigoureuse). Le procédé le plus simple consiste en fait à la définir directement à partir de sa série entière.

Définition. On pose

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence de la série étant $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, la fonction \exp est dérivable sur \mathbb{C} tout entier et on a $\exp' = \exp$. L'autre propriété fondamentale de cette fonction est la propriété d'homomorphisme de groupe.

Propriété fondamentale. Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+w} = e^z e^w$, et la fonction \exp définit un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) .

Démonstration. On a $e^z e^w = \sum_{p \geq 0} u_p \sum_{q \geq 0} v_q$ avec $u_p = z^p/p!$ et $v_q = w^q/q!$, et la formule (1.2.2) fournit alors une série produit $\sum w_n$ telle que

$$w_n = \sum_{p=0}^n \frac{z^p}{p!} \frac{w^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n C_n^p z^p w^{n-p} = \frac{(z+w)^n}{n!}.$$

L'égalité $e^z e^w = e^{z+w}$ en découle. De là, en particulier, on déduit $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, d'où $e^z \in \mathbb{C}^*$. L'application exponentielle définit donc bien un homomorphisme de groupes $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$. La surjectivité de cette application sera démontrée plus loin. □

À partir de la fonction exponentielle, on définit classiquement les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \operatorname{sh} z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

aussi notées \cosh et \sinh dans le monde anglo-saxon (c'est-à-dire partout sauf en

France !), et les fonctions trigonométriques usuelles

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch}(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\operatorname{sh}(iz)}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Ces séries entières ont un rayon de convergence infini. Comme leurs coefficients sont réels, les fonctions ainsi définies prennent des valeurs réelles sur \mathbb{R} , et vérifient les relations de conjugaison $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$, $\overline{\operatorname{ch} z} = \operatorname{ch} \bar{z}$...

La propriété d'homomorphisme de la fonction exponentielle entraîne toutes les formules trigonométriques usuelles, par exemple les formules «d'addition» $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$... , qui sont valables pour tous $a, b \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, si on écrit $z = x + iy$, il vient

$$(1.5.1) \quad e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

où $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$. De là on déduit le

Théorème.

(i) *La fonction exponentielle réelle induit un isomorphisme de groupes*

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times), \quad x \mapsto e^x.$$

(ii) *La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un plus petit zéro positif qui sera noté $\pi/2$ (c'est donc là une définition de π). La fonction exponentielle complexe est périodique de période $2i\pi$ et induit des isomorphismes de groupes*

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (S^1, \times), & y &\mapsto e^{iy}, \\ (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), & z &\mapsto e^z, \end{aligned}$$

où $S^1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ désigne le cercle unité dans \mathbb{C} .

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que \exp est une bijection continue croissante de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$. C'est clair d'après la théorie élémentaire des fonctions d'une variable réelle : on a par définition même $e^x \geq 1 + x > 0$ pour $x \geq 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, tandis que la relation $e^x = 1/e^{-x}$ implique $e^x > 0$ pour $x \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; enfin \exp est dérivable de dérivée $\exp' = \exp > 0$, donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

(ii) Supposons par l'absurde que la fonction \cos ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$. Comme $\cos 0 = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires entraînerait alors $\cos y > 0$ pour tout $y \in [0, +\infty[$. Comme $\sin' = \cos$, la fonction \sin serait positive et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Le théorème des accroissements finis et l'égalité $\cos' y = -\sin y$ donneraient alors $\cos y \leq \cos 1 - (y - 1) \sin 1$ pour tout $y \geq 1$, par conséquent $\cos y < 0$ pour y assez grand, ce qui est une contradiction. L'ensemble $[0, +\infty[\cap \cos^{-1}(0)$ qui est fermé et non vide, possède

donc un plus petit élément $\pi/2$, on a par suite $\cos \pi/2 = 0$ et $\cos y > 0$ pour $y \in [0, \pi/2[$. Ceci entraîne que la fonction $y \mapsto \sin y$ est une bijection croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et on voit ainsi que l'application $[0, \pi/2] \ni y \mapsto e^{iy}$ paramétrise bijectivement le premier quart de cercle $|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$. Les relations $e^{i\pi/2} = i, e^{i(y+\pi/2)} = i e^{iy}, e^{2i\pi} = 1$ montrent alors facilement que $y \mapsto e^{iy}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ qui est par ailleurs un isomorphisme de groupes («théorème fondamental de la mesure des angles»).

Enfin, le troisième isomorphisme se déduit facilement des deux premiers et du fait que tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho u$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in S^1$, à savoir $\rho = |z|$ et $u = z/|z|$. \square

Nous noterons \ln la fonction logarithme népérien (réel), qui est par définition l'isomorphisme de groupes

$$\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \quad \text{inverse de} \quad \exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times).$$

Par ailleurs si $z = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul, avec $\rho = |z| > 0$, nous noterons $\theta = \arg z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la relation (1.5.1) donne les relations fondamentales

$$(1.5.2) \quad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

$$(1.5.3) \quad \arg(e^z) = y = \operatorname{Im} z \pmod{2\pi\mathbb{Z}}.$$

1.6. Fonction logarithme complexe

Étant donné un nombre complexe $w \neq 0$, la résolution de l'équation complexe $e^z = w$ s'obtient aisément à partir des formules (1.5.2) et (1.5.3). Celles-ci donnent en effet

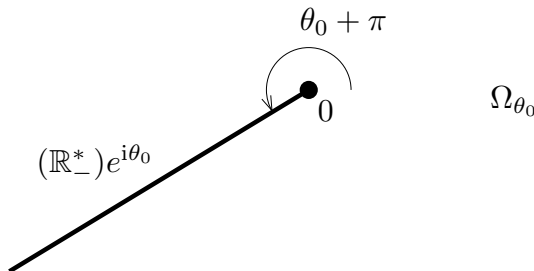
$$|w| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg(w) = \operatorname{Im} z \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

d'où $\operatorname{Re} z = \ln |w|$ et

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = \ln |w| + i \arg w \pmod{2i\pi\mathbb{Z}}.$$

Pour lever l'ambiguïté du choix de l'argument, on procède comme suit. Soit θ_0 un réel fixé et $\Omega_{\theta_0} \subset \mathbb{C}$ l'ouvert constitué des nombres complexes non nuls z dont l'argument n'est pas égal à $\theta_0 + \pi \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire

$$\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R}_-^*)e^{i\theta_0}.$$



Pour $z \in \Omega_{\theta_0}$, on définit alors $\arg_{\theta_0} z$ comme l'unique détermination θ de l'argument de z telle que $\theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$, et on définit la « détermination \log_{θ_0} du logarithme complexe » par

$$(1.6.1) \quad \log_{\theta_0} z = \ln |z| + i \arg_{\theta_0} z, \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}.$$

Il est important de noter que les fonctions \arg_{θ_0} et \log_{θ_0} ne peuvent se prolonger par continuité à \mathbb{C}^* ; en effet, en un point de la demi-droite ouverte $\mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$, les limites des fonctions \arg_{θ_0} et \log_{θ_0} de part et d'autre de la demi-droite diffèrent de 2π (resp. $2i\pi$). Dans la suite de cet ouvrage, on conviendra de noter respectivement Arg et Log les déterminations correspondant au choix $\theta_0 = 0$ (c'est-à-dire que l'argument est choisi dans $] - \pi, \pi[$). Ces déterminations, qui sont définies dans le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de la demi-droite réelle négative, seront appelées les *déterminations principales* de l'argument et du logarithme complexe.

Proposition. *Pour tout θ_0 , la fonction \log_{θ_0} est telle que $\exp \circ \log_{\theta_0} = \text{Id}$ sur Ω_{θ_0} . Elle admet en tout point une dérivée complexe*

$$\log'_{\theta_0} z = \lim_{\mathbb{C} \ni \zeta \rightarrow z} \frac{\log_{\theta_0} \zeta - \log_{\theta_0} z}{\zeta - z} = \frac{1}{z}.$$

Démonstration. La propriété $\exp \circ \log_{\theta_0} = \text{Id}$ résulte directement de la construction. Pour la deuxième, posons $w = \log_{\theta_0} z$ et $\eta = \log_{\theta_0} \zeta$. Quand ζ tend vers z , il est clair que η tend vers w par continuité du logarithme (continuité qui résulte elle-même de la continuité de la fonction \arg_{θ_0} sur Ω_{θ_0}), et par suite le quotient

$$\frac{\log_{\theta_0} \zeta - \log_{\theta_0} z}{\zeta - z} = \frac{\eta - w}{\exp \eta - \exp w} = \left(\frac{\exp \eta - \exp w}{\eta - w} \right)^{-1}$$

converge vers $1/\exp' w = 1/\exp w = 1/z$. □

Considérons maintenant la fonction $\text{Log}(1+z)$, qui bien définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$. Sa dérivée complexe est donnée par $\text{Log}'(1+z) = 1/(1+z)$, et on a donc un développement en série entière

$$\text{Log}'(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots$$

sur le disque ouvert $D(0, 1)$. Comme $\text{Log} 1 = 0$, la formule (1.3.2) donne

$$(1.6.2) \quad \text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots,$$

avec un rayon de convergence encore égal à 1. Comme on l'a vu dans le § 1.1, la série entière (1.6.2) converge en tout point de $\Gamma(0, 1) \setminus \{-1\}$. On en déduit par continuité que l'égalité a lieu en tout point du domaine de convergence $\Delta = \overline{D}(0, 1) \setminus \{-1\}$. En particulier, nous trouvons pour $z = 1$ l'identité classique

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots.$$

Maintenant que nous disposons de la fonction logarithme (ou plutôt des diverses déterminations du logarithme), nous pouvons définir des déterminations correspondantes

$$(1.6.3) \quad z^\alpha = \exp(\alpha \log_{\theta_0} z), \quad z \in \Omega_{\theta_0}$$

de la fonction « puissance complexe », définies pour un exposant $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque. La formule de dérivation des fonctions composées montre que l'on a encore

$$(1.6.4) \quad \frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1} \quad \text{sur } \Omega_{\theta_0}.$$

On prendra cependant garde au fait que les valeurs z^α obtenues peuvent être complètement différentes suivant les déterminations choisies. Ainsi, on obtient $i^i = e^{-\pi/2}$ avec la détermination principale du logarithme, tandis que $i^i = e^{-5\pi/2}$ avec la détermination $\log_{2\pi}$.

La détermination principale $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$ définie sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ admet sur le disque unité $D(0, 1)$ un développement en série entière

$$(1.6.5) \quad (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \dots,$$

connu sous le nom de *formule de Newton*. Pour le voir, notons $f(z)$ la somme de la série. Celle-ci admet un rayon de convergence $R = 1$ d'après le critère de d'Alembert, car

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1} \rightarrow -1 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, une dérivation terme à terme fournit la série $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ avec

$$n a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!} (\alpha-n+1) = \alpha a_{n-1} - (n-1) a_{n-1},$$

d'où $f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$. Ceci implique que la somme $f(z)$ de la série satisfait l'équation différentielle linéaire $(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$. On voit alors d'après (1.6.4) que la fonction quotient $f(z)/(1+z)^\alpha$ admet une dérivée identiquement nulle sur $D(0, 1)$. Le quotient est donc identiquement égal à sa valeur pour $z = 0$, soit 1.

Remarque. Pour développer $(1+z)^\alpha$ en série, on pourrait aussi songer à appliquer la formule de Taylor, mais on se trouve devant une difficulté pour majorer le reste, notamment lorsque z est proche de -1 ; cette difficulté sera complètement résolue par les résultats du Chapitre II (cf. § 3.3, Corollaire), démontrant l'analyticité des fonctions holomorphes.

Conséquence. Les développements en série entière de $(1+z^2)^{-1}$ et $(1-z^2)^{-1/2}$ fournissent par intégration des développements en série entière convergents sur

le disque $D(0, 1)$ de fonctions qui étendent au plan complexe les fonctions réelles correspondantes

$$(1.6.6) \quad \operatorname{Arctan} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$(1.6.7) \quad \operatorname{Arcsin} z = z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

La série de l'Arctan, égale à $\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}$, converge pour tout $z \in \overline{D}(0, 1) \setminus \{+i, -i\}$, tandis que celle de l'Arcsin est absolument convergente sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$.

2. Fonctions holomorphes, condition de Cauchy-Riemann

2.1. Définition des fonctions holomorphes

On a vu dans la section §1 l'importance de la notion de dérivabilité au sens complexe. Ceci justifie la définition suivante.

Définition. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ une partie ouverte du plan complexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est holomorphe si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point, c'est-à-dire si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe en tout point $z \in \Omega$.

Notations. Conformément à l'usage courant (dérivé de l'Italien, où holomorphe se dit *olomorfico*), l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω sera noté $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la dérivée de f sera notée indifféremment $f'(z)$ ou df/dz .

Comme l'existence d'une dérivée implique automatiquement la continuité, on a $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$, où $\mathcal{C}^0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Propriétés élémentaires. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors

$$(2.1.1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

$$(2.1.2) \quad fg \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

$$(2.1.3) \quad \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(\Omega \setminus g^{-1}(0)) \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

$$(2.1.4) \quad \text{Si } f(\Omega) \text{ est contenu dans un ouvert } \Omega' \text{ et si } h \in \mathcal{O}(\Omega'), \text{ alors } h \circ f \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (h \circ f)' = (h' \circ f) f'.$$

$$(2.1.5) \quad \text{Si } f' = 0, \text{ alors } f \text{ est constante sur chaque composante connexe de } \Omega.$$

Démonstration. La démonstration de ces propriétés est presque entièrement analogue à celle des propriétés correspondantes pour les fonctions réelles d'une

variable réelle, nous omettrons donc les détails. En ce qui concerne (2.1.5), on peut supposer Ω connexe. Alors deux points quelconques de Ω peuvent être joints par un chemin polygonal tracé dans Ω , et il suffit donc de montrer que $f(a) = f(b)$ pour tout segment $[a, b] \subset \Omega$. Or ceci résulte du fait que la fonction de variable réelle $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$ a une dérivée $\varphi'(t) = (b - a)f'(a + t(b - a))$ nulle pour tout $t \in [0, 1]$. \square

Il résulte en particulier des propriétés (2.1.2), (2.1.3) que l'ensemble des fonctions holomorphes $(\mathcal{O}(\Omega), +, \times, \cdot)$ a une structure de \mathbb{C} -algèbre pour les lois usuelles d'addition, de multiplication et de produit d'une fonction par un scalaire complexe.

Fonctions entières. On appelle fonctions entières les fonctions qui sont holomorphes sur \mathbb{C} tout entier, c'est-à-dire les fonctions de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Exemples. Nous avons déjà démontré que les sommes de séries entières définissent des fonctions holomorphes sur leur disque ouvert de convergence. Ainsi les fonctions polynômes $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, les fonctions \exp , \cos , \sin , ch , sh définissent des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} tout entier (i.e. des fonctions entières). On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \tan &= \frac{\sin}{\cos} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})), & \cotan &= \frac{\cos}{\sin} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}), \\ \operatorname{th} &= \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})), & \operatorname{coth} &= \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

et de même les déterminations \log_{θ_0} et $z \mapsto z^\alpha = \exp(\alpha \log_{\theta_0} z)$ du logarithme et des fonctions puissances sont holomorphes sur l'ouvert $\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R}_-^*)e^{i\theta_0}$.

Contre-exemples. Il n'est pas très difficile de trouver des exemples de fonctions non holomorphes, on peut même en donner qui soient indéfiniment différentiables au sens réel. Ainsi la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'admet nulle part de dérivée complexe, puisque la limite

$$\lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

n'existe pas (si on pose $h = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{h}/h = e^{-i\theta}/e^{i\theta} = e^{-2i\theta}$ admet des limites différentes suivant chacune des demi-droites issues de l'origine). On vérifiera de même que la fonction $f(z) = |z|^2$ n'admet pas de dérivée complexe, sauf au point $z = 0$ en lequel la dérivée est nulle.

2.2. Rappels sur la notion de différentiabilité

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Étant donné un ouvert Ω dans E , rappelons qu'une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite \mathbb{K} -différentiable en un point $x \in \Omega$ s'il existe une application \mathbb{K} -linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et une fonction ε définie sur un voisinage V de l'origine dans E , telles que pour h dans V on ait

$$(2.2.1) \quad f(x+h) = f(x) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ ($\| \cdot \|$ désigne ici une norme quelconque sur E ; par ailleurs, l'adjectif « différentiable » utilisé seul fera toujours référence à la \mathbb{R} -différentiabilité, si le corps de base n'est pas précisé). L'application linéaire ℓ s'appelle *différentielle* de f au point x et elle est notée $\ell = df_x$. Rappelons par ailleurs les conventions de notations usuelles concernant les O et o , dites conventions de Landau : si $h \mapsto \eta(h)$ est une fonction arbitraire, on écrit

$$\begin{aligned} \eta(h) = O(\|h\|^p) &\iff \exists C > 0, \quad \|\eta(h)\| \leq C\|h\|^p, \\ \eta(h) = o(\|h\|^p) &\iff \exists \varepsilon, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et} \quad \|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h) \|h\|^p. \end{aligned}$$

La formule (2.2.1) peut alors se récrire sous la forme

$$(2.2.2) \quad f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Si f est différentiable sur Ω , on note $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $x \mapsto df_x$, l'application différentielle de f . Étant donné une base (e_1, \dots, e_n) de E et $h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \in E$, une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ s'exprime de manière unique sous la forme

$$(2.2.3) \quad \ell(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j v_j, \quad v_j \in F,$$

avec des vecteurs $v_j = \ell(e_j)$ quelconques. En particulier, la différentielle df s'écrit

$$(2.2.4) \quad df_x(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \forall h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j,$$

où $\partial f / \partial x_j = df_x(e_j) \in F$ est la dérivée partielle de f dans la direction e_j . Si f est linéaire, il est clair que f admet une différentielle en tout point et que sa différentielle coïncide avec f . Les fonctions coordonnées x_j , vues comme des fonctions $E \rightarrow \mathbb{K}$, admettent elles-mêmes des différentielles dx_j telles que $dx_j(h) = h_j$. L'identité (2.2.3) devient alors

$$(2.2.5) \quad \ell = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot v_j = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot \ell(e_j)$$

et, en particulier, (dx_1, \dots, dx_n) est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$. Ceci nous permet d'exprimer la différentielle df sous la forme plus familière

$$(2.2.6) \quad df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

2.3. Opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$

Dans le cas où f prend sa source dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, nous utiliserons l'identification canonique $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pour écrire la variable indifféremment $z = x + iy$ ou $z = (x, y)$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{R} -différentiable, nous avons une différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Comme on travaille sur \mathbb{C} , il est beaucoup plus commode de faire intervenir la variable complexe $z = x + iy$ et sa variable conjuguée $\bar{z} = x - iy$ plutôt que les variables réelles x et y . La propriété de \mathbb{C} -linéarité de la différentiation entraîne

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy, \\ d\bar{z} &= dx - i dy. \end{aligned}$$

Ceci permet de substituer $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ et $dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z})$ dans (2.2.6), ce qui donne

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

L'idée sous-jacente à ce calcul est qu'on dispose de deux bases du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, à savoir (dx, dy) et $(dz, d\bar{z})$, et qu'à bien des égards la deuxième est plus commode que la première. On est alors amené à poser la définition suivante.

Définition. Si $z = x + iy \in \Omega \subset \mathbb{C}$, et si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction \mathbb{R} -différentiable, on note

$$(2.3.1) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

La différentielle de f peut alors s'écrire

$$(2.3.2) \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Remarque. Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ sont conjugués, c'est-à-dire que l'on a

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer l'importante caractérisation suivante des fonctions holomorphes.

Caractérisation des fonctions holomorphes. *Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, il y a équivalence entre*

- (i) f est holomorphe dans Ω .

- (ii) f est \mathbb{R} -différentiable sur Ω et df_z est \mathbb{C} -linéaire en tout point $z \in \Omega$.
- (iii) f est \mathbb{R} -différentiable sur Ω et $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ en tout point $z \in \Omega$ (cette dernière condition est connue sous le nom de condition de Cauchy-Riemann).

Si l'une de ces conditions est réalisée, on a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) En effet, l'existence d'une dérivée complexe $f'(z)$ en tout point $z \in \Omega$ se traduit par l'existence d'une fonction ε définie sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} , telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \varepsilon(h)$$

au voisinage de 0. On a donc

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + h\varepsilon(h),$$

ce qui implique que f admet une différentielle $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, telle que $df_z(h) = f'(z)h$. Cette différentielle est bien \mathbb{C} -linéaire.

(ii) \Rightarrow (iii) L'écriture (2.3.2) équivaut à

$$df_z(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}.$$

On a donc

$$df_z(ih) = i \frac{\partial f}{\partial z} h - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h},$$

et on voit que la condition de \mathbb{C} -linéarité $df_z(ih) = i df_z(h)$ est réalisée pour tout h si et seulement si $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

(iii) \Rightarrow (i) Sous l'hypothèse (iii), la définition de la différentiabilité jointe à l'écriture (2.3.2) fournit

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + o(h).$$

Ceci implique bien l'existence d'une dérivée complexe $f'(z) = \partial f(z) / \partial z$ en tout point $z \in \Omega$. □

Autre formulation de la condition de Cauchy-Riemann. Soit $f = u + iv$ une fonction complexe définie sur un ouvert Ω du plan complexe, avec $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right),$$

donc la condition de Cauchy-Riemann $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ se traduit par les deux conditions de « conjugaison de Cauchy-Riemann » (g et h sont alors dites *conjuguées*)

$$(2.3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cas des fonctions polynomiales dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Les fonctions complexes polynomiales de deux variables x, y et de degré inférieur ou égal à d peuvent s'écrire sous la forme

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq d} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

avec des coefficients complexes $c_{\alpha\beta}$. Lorsqu'on travaille dans \mathbb{C} , il est préférable de substituer $x = (z + \bar{z})/2$ et $y = (z - \bar{z})/2i$, ce qui donne une autre écriture

$$(2.3.4) \quad P(z) = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq d} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

avec de nouveaux coefficients $a_{\alpha\beta}$. Comme

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1,$$

on voit que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont uniquement déterminés par la fonction P à partir de la formule

$$(2.3.5) \quad a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} P(0).$$

Ceci peut se réinterpréter comme un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{C}[x, y] \simeq \mathbb{C}[z, \bar{z}]$. La fonction $z \mapsto P(z)$ est holomorphe si et seulement si $a_{\alpha\beta} = 0$ pour $\beta > 0$, autrement dit si $P \in \mathbb{C}[z]$.

2.4. Opérateur Laplacien et fonctions harmoniques

Supposons, avec les notations précédentes, que $f = u + iv$ soit holomorphe et de classe C^2 (comme on le verra au chapitre II, § 3.1, cette dernière condition est en fait superflue, car l'holomorphic entraîne l'infinie différentiabilité de f). Dans ce cas g et h sont de classe C^2 et nous trouvons

$$(2.4.1') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

$$(2.4.1'') \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

grâce au théorème de Schwarz relatif à la commutation des dérivées partielles.

Le *Laplacien* (agissant sur les fonctions $h(x, y)$ de deux variables réelles) est par définition l'opérateur différentiel Δ d'ordre 2 défini par

$$(2.4.2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{C}). Une fonction $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite harmonique si h est de classe C^2 et $\Delta h = 0$.

Une autre démonstration des propriétés d'harmonicité (2.4.1) consiste à observer que Δ s'écrit comme la composée d'opérateurs

$$(2.4.3) \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}$$

(attention, on utilise ici de nouveau le théorème de Schwarz !). La condition d'holomorphic $\partial f / \partial \bar{z}$ implique donc $\Delta f = 0$, et de là, on déduit $\Delta u + i \Delta v = 0$, d'où $\Delta u = \Delta v = 0$.

Les calculs précédents nous permettent d'énoncer le théorème suivant (nous omettrons ici l'hypothèse C^2 sur les fonctions holomorphes, puisque nous verrons ultérieurement que celles-ci sont automatiquement de classe C^∞). On notera que la conjuguée \bar{g} d'une fonction holomorphe g est harmonique, donc toute fonction h de la forme $h = f + \bar{g}$, avec f et g holomorphes, est harmonique.

Proposition. *Si Ω est un ouvert de \mathbb{C} et si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ sont des fonctions harmoniques et sont liées par les relations de conjugaison de Cauchy-Riemann (2.3.3).*

Inversement, si u et v sont des fonctions de classe C^2 sur Ω liées par les relations de conjugaison de Cauchy-Riemann, alors u et v sont harmoniques et $f = u + iv$ est holomorphe sur Ω . De telles fonctions harmoniques u, v sont appelées fonctions harmoniques conjuguées. □

Corollaire. *Si f est holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et ne s'y annule pas, la fonction $\ln |f|$ est harmonique.*

Démonstration. Pour le voir, on peut utiliser le fait qu'il existe localement des déterminations holomorphes $\log f$ du logarithme complexe de f (si $z_0 \in \Omega$, on se place dans un disque $D(z_0, r)$ assez petit pour que $f(D(z_0, r))$ soit contenu dans un disque $D(f(z_0), \varepsilon)$ de rayon $\varepsilon < |f(z_0)|$; un tel disque est disjoint de la demi-droite issue de 0 passant par $-f(z_0)$). Alors $\ln |f| = \operatorname{Re}(\log f)$ sur $D(z_0, r)$, et par suite $\ln |f|$ est harmonique. Bien entendu, cette propriété pourrait aussi se démontrer par un calcul direct. Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. □

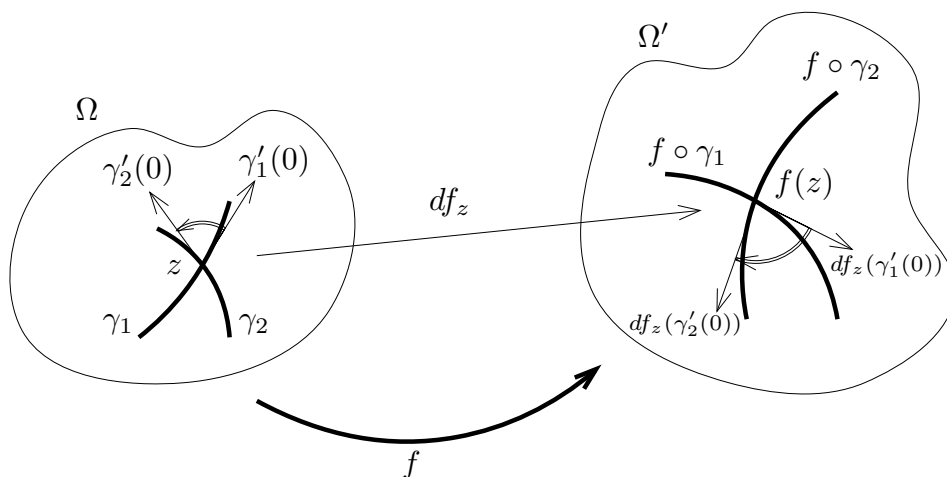
2.5. Applications conformes

Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application \mathbb{R} -différentiable entre deux ouverts Ω, Ω' de \mathbb{R}^2 . On s'intéresse au problème de savoir à quelle condition f « conserve les angles » au sens suivant : étant donné deux courbes régulières γ_1 et γ_2 de classe C^1 tracées dans Ω et passant par un même point z , les courbes images $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ forment entre elles au point $f(z)$ un angle égal à l'angle formé par γ_1 et γ_2 au point z (schéma ci-dessous). On dit alors que f est une *application conforme*. Cette question est apparue historiquement au cours des 16^e et 17^e siècles, en liaison avec des problèmes de cartographie (nous y reviendrons plus en détail au Chapitre ??, à l'occasion de l'étude de la sphère de Riemann).

Soient donc $\gamma_1, \gamma_2 :] - a, a[\rightarrow \Omega$ deux courbes de classe C^1 telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$, admettant des demi-tangentes bien définies $\gamma_1'(0) \neq 0$,

$\gamma_2'(0) \neq 0$. L'angle entre les 2 courbes (orientées) est par définition l'angle de leurs demi-tangentes $\text{angle}(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$. Supposons dans un premier temps que $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ soit un isomorphisme. Alors les courbes images $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ admettent au point $f(z)$ des demi-tangentes bien définies

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = df_z(\gamma_1'(0)) \neq 0, \quad (f \circ \gamma_2)'(0) = df_z(\gamma_2'(0)) \neq 0.$$



Par conséquent, la propriété de conservation des angles évoquée plus haut équivaut à l'hypothèse que l'application linéaire df_z préserve l'angle d'un couple de vecteurs quelconques. Rappelons qu'une application linéaire bijective $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ conserve les angles orientés (resp. conserve l'angle en valeur absolue, mais avec changement de signe), si et seulement si c'est une similitude directe (resp. une similitude indirecte)

$$\ell(h) = ah, \quad (\text{resp. } \ell(h) = a\bar{h}), \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

Pour le voir, il suffit d'observer que ℓ transforme nécessairement une base orthonormée (v_1, v_2) en une base orthogonale, et on doit avoir de plus $\|\ell(v_1)\| = \|\ell(v_2)\|$ pour que la conservation des angles ait lieu (au moins en valeur absolue) ; on obtient alors une similitude directe (resp. indirecte) si $(\ell(v_1), \ell(v_2))$ a même orientation que (v_1, v_2) (resp. une orientation inverse). On peut donc énoncer

Proposition. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application entre ouverts de \mathbb{C} admettant en tout point une différentielle $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ inversible. Alors

- (i) f est une application conforme (préservant l'orientation) si et seulement si f est holomorphe ;
- (ii) f est une application conforme inversant l'orientation si et seulement si f est anti-holomorphe, c'est-à-dire si df_z est une application \mathbb{C} -anti-linéaire en tout point $z \in \Omega$.

Remarque. Même lorsque f est holomorphe, il n'y a en général pas conservation des angles en un point z_0 où df_{z_0} n'est pas inversible (ce qui, dans ce cas, équivaut à $f'(z_0) = 0$). Considérons en effet $f(z) = z^n$, $z_0 = 0$ et $\gamma_1(t) = t e^{i\theta_1}$, $\gamma_2(t) = t e^{i\theta_2}$,

$t \in \mathbb{R}$. Il est clair que la courbe image $f \circ \gamma_j(t) = t^n e^{in\theta_j}$ admet en $t = 0^+$ une demi-tangente d'angle polaire $n\theta_j$. L'angle des demi-tangentes à droite se trouve donc multiplié par n sous l'action de f (alors que cet angle est préservé en tout point $z_0 \neq 0$, d'après l'énoncé précédent).

La notion d'application anti-holomorphe, quant à elle, est précisée par l'énoncé suivant (la démonstration, tout à fait immédiate, sera laissée au lecteur).

Caractérisation des applications anti-holomorphes. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Alors il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

- (i) *la fonction $\bar{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(z)}$, est holomorphe ;*
- (ii) *la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega' = \{\bar{z}; z \in \Omega\}$ miroir de Ω par rapport à la droite réelle;*
- (iii) *f est différentiable et, pour tout point $z \in \Omega$, la différentielle $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est \mathbb{C} -anti-linéaire ;*
- (iv) *f est différentiable et $\partial f / \partial z = 0$ sur Ω .*

3. Exercices

3.1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z),$$

avec convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{C} .

3.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, g : f(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe \mathcal{C}^1 au sens réel.

- a) Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)$.
- b) En déduire que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}$ et que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$.

3.3. Développements limités en z, \bar{z} .

- a) Calculer l'image par $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ de la fonction $z^n(\bar{z})^m$, où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
- b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ possédant un développement limité à l'ordre n en $(0, 0)$, en termes des variables réelles (x, y) . Montrer qu'il existe $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, tels que

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{n+1}).$$

Exprimer $a_{\alpha\beta}$ en fonction des dérivées de f par rapport aux variables z et \bar{z} .

- c) Montrer que lorsque f est analytique réelle* au voisinage de 0, alors elle est holomorphe si et seulement si $a_{\alpha\beta} = 0$ pour tout $\beta > 0$.

3.4. Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

- $f(z) = f(\bar{z})$,
- $\operatorname{Re}(f) = \text{cste}$,
- $\operatorname{Im}(f) = \text{cste}$,
- $|f| = \text{cste}$,
- $\operatorname{Arg}(f) = \text{cste}$.

3.5. Polynômes harmoniques.

- Déterminer tous les polynômes harmoniques réels homogènes de degré 3 sur \mathbb{R}^2 .
- Pour un tel polynôme P déterminer toutes les fonctions holomorphes u dont P est la partie réelle.

3.6. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction \mathbb{R} -différentiable, à différentielle inversible continue. On suppose que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, f envoie l'horizontale et la verticale en (x_0, y_0) sur deux courbes orthogonales en $f(x_0, y_0)$, et on suppose que la même hypothèse est satisfaite pour les bissectrices. Montrer que f est holomorphe ou anti-holomorphe.

3.7. Lemme de la partie réelle.

- Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On écrit $f(z) = U(z) + iV(z)$.
- Montrer que pour $n \geq 1$ on a $c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.
- On note

$$M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad A_f(r) = \sup_{|z| \leq r} \operatorname{Re} f(z) = \sup_{|z| \leq r} U(z),$$

et on suppose dans un premier temps que $f(0) = 0$. En observant que $\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) d\theta = 0$, montrer que $|c_n| \leq 2 A_f(R)/R^n$ pour $n \geq 1$. En déduire que

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R).$$

- Si on ne fait pas d'hypothèse sur $f(0)$, montrer que

$$M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A_f(R).$$

* La définition de l'analyticité réelle sera donnée au Chapitre II, § 3.3.

Nota. Le cas $R = 2r$ est particulièrement utile ...

4. Problèmes

4.1. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

- a) Calculer le jacobien $J(f) = \det(df)$ de f en z (f étant considérée comme une fonction \mathbb{R} -différentiable et df comme un \mathbb{R} -endomorphisme).
- b) Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 1$, f injective sur $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$ et de dérivée non nulle*. Calculer l'aire de $f(D)$.
- c) En déduire que $\text{Aire}(f(D)) \geq \pi |f'(0)|^2$ et traiter le cas d'égalité.

4.2. Fonctions de Bessel. Pour z et t deux nombres complexes, $t \neq 0$, on considère la fonction

$$f(z, t) = \exp \frac{1}{2} z \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

- a) Pour t non nul et z fixé, montrer que l'écriture

$$f(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z),$$

comme série absolument convergente détermine de façon unique les $J_n(z)$. La fonction J_n est appelée *fonction de Bessel* d'ordre n .

- b) Montrer que J_n est développable en série entière en 0, exprimer son développement et calculer son rayon de convergence.
- c) Pour $n \geq 0$, montrer que

$$|J_n(z)| \leq \frac{|z|^n}{2^n n!} \exp \left(\frac{|z|^2}{4(n+1)} \right).$$

- d) Montrer que

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \quad \text{et} \quad J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z).$$

- e) En déduire que

$$\frac{d}{dz} \{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z).$$

- f) Montrer que J_n satisfait l'équation de Bessel d'ordre n :

$$z^2 J''_n(z) + z J'_n(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0.$$

* On verra en fait au Chapitre II, §4.2 et 4.3, que l'hypothèse d'injectivité locale implique déjà la non-annulation de f' .

4.3. Sur la fonction exponentielle. Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects de la dynamique de la fonction exponentielle. On note \exp_n la fonction entière obtenue en itérant n fois la fonction \exp .

Notations : pour $k \geq 1$, on note $B(k)$ la bande horizontale suivante

$$B(k) = \{z \in \mathbb{C}; 2(k-1)\pi < \text{Im}(z) < 2k\pi\}.$$

Si $k \leq -1$, on note

$$B(k) = \{z \in \mathbb{C}; 2k\pi < \text{Im}(z) < 2(k+1)\pi\}.$$

Enfin, on pose $B(0^+) = \mathbb{R}_*^+$ et $B(0^-) = \mathbb{R}_*^-$.

a) *Points fixes de l'exponentielle.*

- Décrire les images par \exp des droites horizontales et verticales.
- Pour $k \neq 0$, montrer que \exp induit un difféomorphisme $B(k) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$.
- Montrer que si z est un point fixe de \exp (i.e. $\exp(z) = z$), alors \bar{z} l'est aussi et z est de partie réelle strictement positive.
- Montrer que si $z = x + iy$ est un point fixe de \exp , alors

$$x = y \cotan y \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \exp(2x).$$

En déduire qu'il existe un unique point fixe de \exp par bande $B(k)$ pour $k \neq 0$, et que chacun est de module strictement supérieur à 1.

b) *Dynamique symbolique de l'exponentielle.*

- Décrire géométriquement la pré-image par \exp des bandes $B(k)$.

Notons A l'ensemble des entiers non nuls auquel on adjoint les symboles 0^+ et 0^- . Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit son « itinéraire » par l'exponentielle de la façon suivante : c'est la suite $s(z)$ indexée par \mathbb{N} et à valeurs dans A , telle que

$$s_n(z) = k \quad \text{si} \quad \exp_n(z) \in B(k), \quad k \in A$$

et

$$s_n(z) = k \quad \text{si} \quad \text{Im} \exp_n(z) = 2\pi k, \quad k \neq 0.$$

- Montrer que si $s_n(z) = 0^+$ ou 0^- , alors $s_m(z) = 0^+$ pour tout $m > n$.
- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un réel positif x tel que

$$\forall n \geq 0, \quad 2\pi |s_n(z)| \leq \exp_n(x).$$

c) *Points à itinéraire prescrit.* Pour s_0, \dots, s_n des entiers non nuls, on note $V(s_0, \dots, s_n)$ l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ dont l'itinéraire commence par $s_0 s_1 \dots s_n$.

- Montrer que $V(s_0, \dots, s_n)$ est non vide et est envoyé surjectivement sur $B(s_n)$ par \exp_n .

- Pour $k \neq 0$ et s_0, \dots, s_n des entiers non nuls, montrer qu'il existe un z dans \mathbb{C} dont l'itinéraire est $s_0 s_1 \dots s_n k k \dots k \dots$
- Montrer qu'il existe une courbe de points dont l'itinéraire est

$$s_0 s_1 \dots s_n 0^- 0^+ \dots \text{ (respectivement } s_0 s_1 \dots s_n 0^+ 0^+ \dots \text{)}.$$

Soit $\underline{s} = s_0 \dots s_n \dots$, où les s_i sont des entiers non nuls, telle qu'il existe un réel $x > 1$ satisfaisant $2\pi |s_n(z)| \leq \exp_n(x)$. On construit une suite de carrés (pleins) C_n de la façon suivante :

- chaque C_n est inclus dans l'adhérence de $B(s_n)$,
- chaque côté de C_n est parallèle aux axes et a pour longueur 2π ,
- la verticale gauche de C_n est sur la droite $\text{Re}(z) = \exp_n(x)$.
- Montrer que pour tout n , $\exp(C_n) \supset C_{n+1}$.
- Montrer que si $|s_{n+1}| \neq 1$, alors l'ensemble

$$\{z \in C_n \mid \exp(z) \in C_{n+1}\}$$

est inclus dans l'intérieur de C_n .

- En déduire que si $|s_n| \neq 1$ pour n assez grand, alors il existe z dont l'itinéraire est \underline{s} .

Nota. La dernière partie de ce problème est extraite de l'article de R. Devaney et M. Krych : Dynamics of $\exp(z)$, *Ergodic theory and dynamical systems*, 4 (1984), 35-52.

Chapitre II

Holomorphie et analyticité

Résultats fondamentaux

Les propriétés fondamentales satisfaites par les fonctions holomorphes sont pour la plupart conséquences de la formule de Cauchy. Cette formule calcule la valeur d'une fonction holomorphe en un point quelconque d'un domaine suffisamment régulier, à partir des seules valeurs prises sur la frontière du domaine. Il en résulte que les fonctions holomorphes vérifient un certain nombre de propriétés de «rigidité» que ne possèdent pas en général les fonctions (indéfiniment) différentiables, et qui sont dues à la nature conforme de la différentielle. La preuve de ces diverses propriétés (inégalités de Cauchy, analyticité, principe du prolongement analytique, principe du maximum...) constitue le coeur de ce chapitre. Quelques rappels sur les intégrales curvilignes seront nécessaires pour commencer.

1. Rappels sur les formes différentielles

1.1. Intégration des formes différentielles de degré 1

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n . Une 1-forme différentielle complexe continue sur Ω est une application continue $\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. D'après I-(2.2.5), si (x_1, \dots, x_n) désignent les coordonnées sur \mathbb{R}^n , l'espace vectoriel complexe $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ admet (dx_1, \dots, dx_n) comme «base canonique», et on peut donc écrire $\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$ où les α_i sont n fonctions continues de Ω dans \mathbb{C} . Un exemple important de 1-forme est donné par la différentielle df d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^p ($p \geq 1$)

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Un chemin de classe \mathcal{C}^p par morceaux tracé dans Ω est une application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ dans Ω telle qu'il existe une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ avec $\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ de classe \mathcal{C}^p (en général, les points $\gamma(\tau_i)$ seront des «points anguleux» du chemin. Sauf précision contraire, on oriente un tel chemin dans le sens des paramètres croissants. Si γ est un tel chemin, on définit sa longueur par

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt$$

où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ est la norme euclidienne de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition. Soit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$ l'écriture de γ et de α en coordonnées. L'intégrale curviligne $\int_\gamma \alpha$ est l'intégrale simple obtenue en effectuant les substitutions $x_i = \gamma_i(t)$ et $dx_i = \gamma'_i(t) dt$:

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_i(t) dt$$

où $\varepsilon = +1$ si on oriente γ dans le sens des paramètres t croissants, et $\varepsilon = -1$ si on oriente γ dans le sens des paramètres décroissants.

Deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^p (resp. de classe \mathcal{C}^p par morceaux) sont dits équivalents s'il existe un changement de variable $\psi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ de classe \mathcal{C}^p (resp. \mathcal{C}^p par morceaux), bijectif, de dérivée à droite et à gauche partout non nulle (i.e. un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^p , resp. de classe \mathcal{C}^p par morceaux), et *strictement croissant*, tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$. On appelle *arc orienté* de classe \mathcal{C}^p (par morceaux) une classe d'équivalence de chemins de classe \mathcal{C}^p (par morceaux); tous les chemins $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ d'une même classe d'équivalence ont bien sûr la même image ensembliste $\gamma([a, b])$.

Remarquons que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \alpha$ ne dépend que de l'arc défini par γ , et non de la paramétrisation. En effet, si $\psi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ est un difféomorphisme définissant une nouvelle paramétrisation, on a $\int_{\gamma \circ \psi} \alpha = \int_\gamma \alpha$ si ψ conserve l'orientation (i.e. ψ croissant et $\psi(a') = a$, $\psi(b') = b$) et $\int_{\gamma \circ \psi} \alpha = -\int_\gamma \alpha$ si ψ renverse l'orientation (i.e. ψ décroissant et $\psi(a') = b$, $\psi(b') = a$). Ceci se voit facilement en effectuant le changement de variable $t = \psi(s)$ dans l'intégrale simple $\int_a^b \sum(\dots) dt$. De même, la longueur $\text{long}(\gamma)$ ne dépend que de l'arc défini par γ . La proposition suivante regroupe les propriétés élémentaires les plus importantes des intégrales curvilignes.

Proposition. Soient α une 1-forme différentielle complexe continue sur Ω et γ un chemin de classe \mathcal{C}^1 par morceaux dans Ω . Alors

(i) Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

en particulier $\int_\gamma df = 0$ si le chemin γ est un « lacet » (on dit aussi un « chemin fermé »), c'est-à-dire si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

(ii) $\left| \int_\gamma \alpha \right| \leq \text{long}(\gamma) \sup_{t \in [a, b]} \|\alpha(\gamma(t))\|$ où $\|\alpha\| = \sqrt{\sum_i |\alpha_i|^2}$,

(iii) $\int_\gamma \alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(\xi_j)) (\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j))$

où la subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ telles que $\sup_j (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \varepsilon$ et où les $\xi_j \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$ sont des points arbitraires.

Démonstration. (i) résulte de la définition des intégrales curvilignes et du fait que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_i(t) = (f \circ \gamma)'(t).$$

(ii) est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui donne

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_i(t) \right| \leq \|\alpha(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|$$

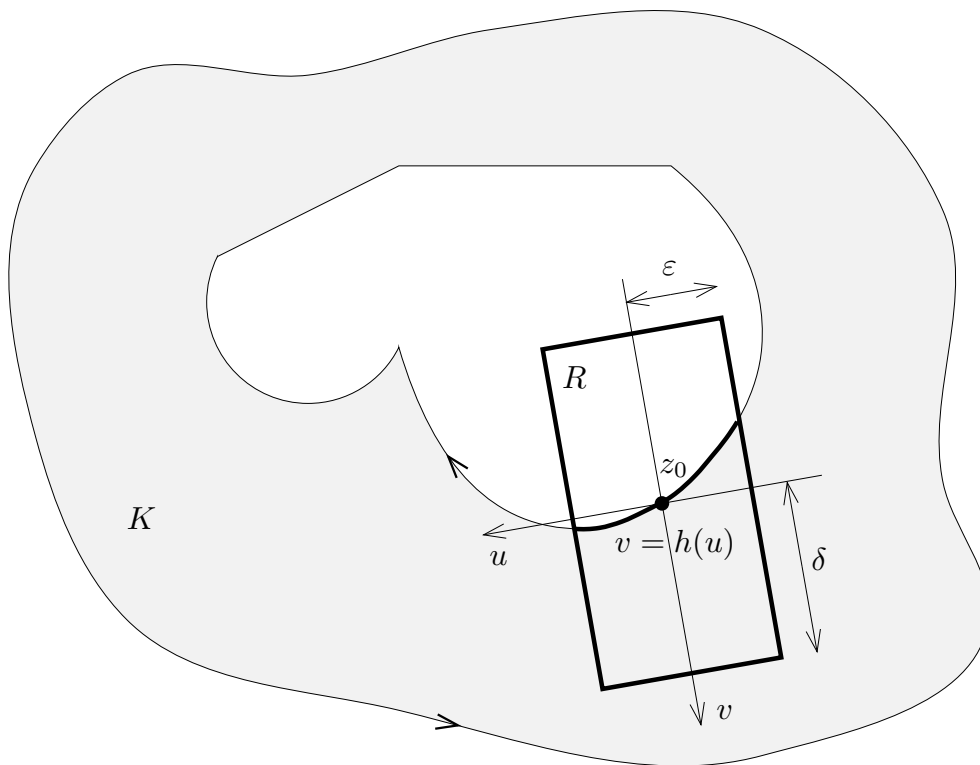
en chaque point $t \in [a, b]$. Enfin, il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_i(t) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(\xi_j)) (\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j)) \right| \\ \leq \omega_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

où $\omega_j = \sup_{t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]} \|\alpha \circ \gamma(t) - \alpha \circ \gamma(\xi_j)\|$. Comme $\max_{0 \leq j < N} \omega_j$ tend vers 0 avec ε par continuité uniforme de $\alpha \circ \gamma$, la propriété (iii) s'ensuit facilement. \square

1.2. Notion de compact à bord régulier par morceaux de \mathbb{R}^2

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 et p un entier positif.



Définition. Le compact K est dit à bord de classe \mathcal{C}^p par morceaux si pour tout point z_0 du bord $\partial K = K \setminus K^\circ$, il existe des coordonnées (u, v) associées à un repère

affine de \mathbb{R}^2 d'origine z_0 , et un rectangle ouvert $R = \{-\varepsilon < u < \varepsilon\} \times \{-\delta < v < \delta\}$ assez petit de sorte que $K \cap R = \{(u, v) \in R; v \geq h(u)\}$, où h est une fonction de classe \mathcal{C}^p par morceaux sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup |h| < \delta$.

Alors $\partial K \cap R = \text{graphe de } h = \{(u, v) \in R; v = h(u)\}$, et la compacité de ∂K entraîne que ∂K peut être recouvert par un nombre fini de rectangles. Par suite, si K est à bord de classe \mathcal{C}^p par morceaux ($p \geq 1$), le bord ∂K est paramétrisable par un nombre fini d'arcs de classe \mathcal{C}^p par morceaux, de la forme $\gamma : u \mapsto (u, h(u))$. De même, ∂K ne possède qu'un nombre fini de points anguleux, et l'angle en chacun de ces points n'est pas nul; en effet, le graphe d'une fonction h de classe \mathcal{C}^1 par morceaux jouit de ces propriétés. Dans tout cet ouvrage, nous adopterons la convention suivante pour orienter le bord d'un compact à bord régulier.

Orientation canonique du bord. *Supposons que les repères intervenant dans la définition ci-dessus soient orientés positivement par rapport à l'orientation définie par la base canonique de \mathbb{R}^2 . On oriente alors le bord ∂K en orientant les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ dans le sens des u croissants.*

Pour que cette orientation soit définie de manière cohérente, on doit bien sûr vérifier le lemme suivant.

Lemme. *Soient R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \emptyset$ et*

$$\partial K \cap R = \{(u, v) \in R; v \geq h(u)\}, \quad \partial K \cap R' = \{(u', v') \in R'; v' \geq h'(u')\},$$

dans des repères affines orientés de \mathbb{R}^2 . Alors les orientations de $\partial K \cap R \cap R'$ définies par les paramètres u et u' coïncident.

Démonstration. Il suffit de se placer au voisinage d'un point $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$ où ∂K admet une tangente (puisque les points anguleux sont en nombre fini). Supposons, après avoir effectué une translation, que z_0 soit choisi comme origine des coordonnées, et soient $(z_0; e_1, e_2), (z_0; e'_1, e'_2)$ les repères définissant les coordonnées $(u, v), (u', v')$. Dans ces conditions, quitte à changer h en $\tilde{h}(u) = h(u) - h'(0)u$ et les coordonnées (u, v) en $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v - h'(0)u)$ (ce qui ne change pas l'orientation, puisque le déterminant de la matrice de passage est 1), on voit qu'on peut supposer $h'(0) = 0$, i.e. que le vecteur de base e_1 est tangent à ∂K en z_0 ; on peut bien sûr faire la même hypothèse pour e'_1 , et le problème est alors de montrer que les vecteurs colinéaires e_1 et e'_1 sont de même sens. Or les vecteurs e_2 et e'_2 se situent dans le même demi-plan ouvert de \mathbb{R}^2 délimité par la tangente (vue comme droite vectorielle), à savoir le demi-plan des vecteurs ξ tels que $z_0 + \lambda\xi \in K$ pour $\lambda > 0$ assez petit. Le fait que les bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) aient la même orientation impose que e_1 et e'_1 soient de même sens. \square

Finalement, introduisons la notion de trou d'un compact.

Définition. *On appelle trou d'un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ toute composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus K$.*

Remarquons alors qu'un compact à bord de classe \mathcal{C}^p par morceaux avec $p \geq 1$ n'a qu'un nombre fini de trous (chacun de ces trous étant bordé par au moins un des arcs constituant ∂K , lesquels sont en nombre fini).

1.3. Formule de Stokes bidimensionnelle

Rappelons d'abord brièvement le formalisme des formes différentielles, en nous limitant pour l'essentiel au cas de la dimension 2 (le lecteur pourra se reporter aux ouvrages traitant du calcul différentiel pour la généralisation en dimension supérieure). Si α et β sont deux formes linéaires sur un plan vectoriel E , on définit le *produit extérieur* $\alpha \wedge \beta$ comme étant la forme bilinéaire alternée $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\alpha \wedge \beta(\xi, \eta) = \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi).$$

On a en général $\alpha \wedge \alpha = 0$ et $\beta \wedge \alpha = -\alpha \wedge \beta$.

Une *forme différentielle de degré p* ou encore *p -forme différentielle* sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est par définition une application $\beta : \Omega \rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{A}_p(E)$ désigne l'ensemble des formes p -linéaires alternées sur l'espace vectoriel E . En dimension 2, on notera (x, y) les coordonnées de \mathbb{R}^2 et dx, dy leurs différentielles vues comme des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire comme éléments de $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^2)$. La paire (dx, dy) forme une base de $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^2)$, donc les seuls produits extérieurs à considérer sont

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Étant donné des vecteurs $\xi = (\xi_1, \xi_2), \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$dx \wedge dy(\xi, \eta) = \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2,$$

de sorte que le produit $dx \wedge dy$ s'interprète comme la forme bilinéaire déterminant dans la base canonique. On peut encore voir $dx \wedge dy(\xi, \eta)$ comme l'aire (algébrique) du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs ξ, η , et pour cette raison on considère $dx \wedge dy$ comme une expression algébrique de la mesure d'aire de Lebesgue dans le plan (souvent notée également $dx dy$).

Une *forme différentielle β de degré 2* sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se réduit donc à une expression du type $\beta = b(x, y) dx \wedge dy$. Étant donné une 1-forme $\alpha = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ et un point $z = (x, y) \in \Omega$, les valeurs prises par α, β au point z sur les vecteurs ξ (resp. ξ, η) sont données par

$$\alpha_z(\xi) = u(x, y)\xi_1 + v(x, y)\xi_2, \quad \beta_z(\xi, \eta) = b(x, y)(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2).$$

Si α est une 1-forme de classe \mathcal{C}^1 , sa différentielle extérieure est par définition la 2-forme $d\alpha$ telle que

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Si α est définie dans un ouvert Ω d'un plan vectoriel E plutôt que dans \mathbb{R}^2 , on peut montrer que la forme $d\alpha$ ne dépend pas du choix des coordonnées x, y de E ; la vérification est immédiate à partir de la formule de définition « intrinsèque » (i.e. ne faisant pas intervenir de coordonnées)

$$(d\alpha)_z(\xi, \eta) = d(\alpha_z(\eta))(\xi) - d(\alpha_z(\xi))(\eta), \quad \forall z \in \Omega, \quad \xi, \eta \in E,$$

dont l'équivalence avec la première définition sera facilement vérifiée par le lecteur. On a alors la formule dite de Green ([Green, 1828], déjà connue d'Euler au 18^e siècle), qui est un cas particulier de la formule générale de Stokes.

Formule de Green. *Soit K un compact du plan complexe, admettant un bord ∂K de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit $\alpha = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de K . Alors, si ∂K est muni de son orientation canonique, on a*

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha, \quad \text{i.e.} \quad \int_{\partial K} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

Démonstration. Par compacité de K , on peut trouver un nombre fini de rectangles ouverts R_j recouvrant K , tels que ou bien $\partial K \cap R_j = \emptyset$ (i.e. $R_j \subset K^\circ$), ou bien $\partial K \cap R_j$ est le graphe d'une fonction h_j , et $K \cap R_j$ est la partie située au dessus du graphe; en effet, d'après la définition initiale de ce paragraphe, chaque point $x \in K = K^\circ \cup \partial K$ admet comme voisinage un tel rectangle. En utilisant une partition de l'unité différentiable (Appendice ??), on peut écrire $\alpha = \sum \alpha_j$, avec des 1-formes α_j de classe \mathcal{C}^1 à support dans R_j (le support est l'adhérence de l'ensemble des points où la forme prend des valeurs non nulles); en particulier $\alpha_j = 0$ aux points de ∂R_j . Il suffit alors de montrer que $\int_K d\alpha_j = \int_{\partial K} \alpha_j$ pour chaque j et de faire la somme. Pour simplifier l'écriture, on supprime l'indice j , ce qui revient à supposer que R est l'un des rectangles R_j et que $\alpha = \alpha_j$ est à support dans R . Supposons également (après changement de coordonnées) que $R = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [\delta, \delta]$. Si $R \subset K^\circ$, on a

$$\int_K d\alpha = \int_R d\alpha = \int_{\substack{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ -\delta \leq y \leq \delta}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

En effet, $u = v = 0$ sur ∂R , donc

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx &= v(\varepsilon, y) - v(-\varepsilon, y) = 0, \\ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy &= u(x, \delta) - u(x, -\delta) = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs le support de α ne rencontre pas ∂K , donc $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$. Dans le cas où $K \cap R = \{(x, y) \in R; y \geq h(x)\}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \int_{h(x)}^{\delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{h(x)}^{\delta} v(x, y) dy \right) + v(x, h(x))h'(x) - (u(x, \delta) - u(x, h(x))) \right], \\ &= \int_{h(\varepsilon)}^{\delta} v(\varepsilon, y) dy - \int_{h(-\varepsilon)}^{\delta} v(-\varepsilon, y) dy + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx, \end{aligned}$$

tandis que

$$\int_{\partial K \cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(x, h(x)) dx + v(x, h(x)) h'(x) dx,$$

puisque l'arc $\partial K \cap R$ peut être paramétrisé par $y = h(x)$. Compte tenu du fait que $\text{Supp } \alpha \subset R$, on a $v(\varepsilon, y) = v(-\varepsilon, y) = 0$, et par conséquent $\int_{K \cap R} d\alpha = \int_{\partial K \cap R} \alpha$.

□

2. Théorèmes de Cauchy et de Goursat

La formule de Cauchy est une formule de représentation des fonctions holomorphes en termes des valeurs prises sur un contour ; c'est un résultat clé dans l'étude des fonctions holomorphes. Le point le plus étonnant est que les propriétés de dérivabilité peuvent souvent se traiter en intégrant !

2.1. Théorème de Cauchy

Le résultat connu sous le nom de «Théorème de Cauchy» a été énoncé par Cauchy en 1825 (avec une justification partielle reposant sur le calcul des variations), puis démontré rigoureusement par Riemann en 1851, sous l'hypothèse supplémentaire que la fonction holomorphe f est de classe \mathcal{C}^1 ; Goursat a montré ultérieurement ([Goursat, 1884, 1900]) que cette hypothèse était en fait inutile.

Théorème de Cauchy. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans Ω , avec l'orientation canonique du bord. Alors, pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

Démonstration (donnée par Riemann sous l'hypothèse supplémentaire $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$). Considérons la forme différentielle $\alpha = f(z) dz$, qui est de classe \mathcal{C}^1 . On a alors

$$d\alpha = df \wedge dz = f'(z) dz \wedge dz = 0$$

car le produit extérieur d'une 1-forme par elle-même est toujours nul. La formule de Green-Riemann implique

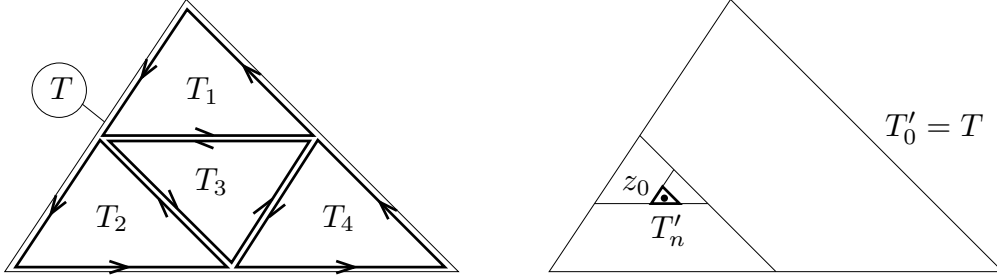
$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha = 0. \quad \square$$

2.2. Théorème de Goursat

Pour démontrer le théorème de Cauchy en toute généralité, on commence par traiter le cas où le compact K est un triangle. On appelle ici triangle du plan l'enveloppe convexe de 3 points non alignés. C'est un compact à bord \mathcal{C}^∞ par morceaux. On utilise ici encore l'orientation canonique du bord.

Lemme de Goursat. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans Ω . Alors

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$



Démonstration. Posons $I = \int_{\partial T} f(z)dz$. On découpe T en 4 triangles T_1, \dots, T_4 dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T . Du fait des orientations deux à deux opposées des arêtes des triangles T_k intérieures au triangle T , on a $I = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_k} f(z)dz$ et il existe donc un indice k tel que $|\int_{\partial T_k} f(z)dz| \geq |I|/4$. De cette façon, on construit par récurrence une suite de triangles T'_n emboîtés telle que $T'_0 = T$, $T'_1 = T_k$, $\text{diam}(T'_n) = \text{diam}(T)/2^n$ et $|\int_{\partial T'_n} f(z)dz| \geq |I|/4^n$. Dans ces conditions, l'intersection décroissante des T'_n est réduite à un point que l'on note z_0 . Exprimons alors la condition de \mathbb{C} -différentiabilité de f en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z),$$

où $\varepsilon(z)$ tend vers 0 quand z tend vers z_0 . Comme

$$(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz = d\left(f(z_0)z + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f'(z_0)\right)$$

est d'intégrale nulle sur le lacet fermé $\partial T'_n$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T'_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial T'_n} (z - z_0)\varepsilon(z)dz \right| \leq \text{long}(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0| |\varepsilon(z)| \\ &\leq 3(\text{diam}(T'_n))^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|. \end{aligned}$$

De là on déduit

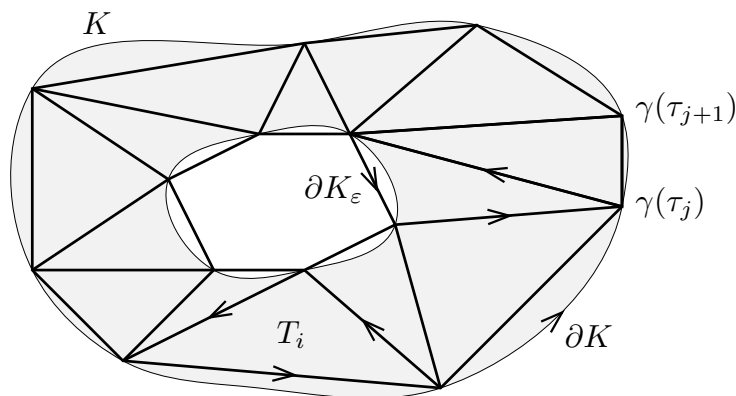
$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T'_n} f(z)dz \right| \leq 3(\text{diam}(T))^2 \sup_{\partial T'_n} |\varepsilon(z)|.$$

Or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, donc $I = 0$. \square

Le lemme de Goursat admet une réciproque que nous verrons au paragraphe 3.1 (théorème de Morera). Pour l'instant, nous sommes en mesure de prouver le

Théorème de Goursat. *Le «théorème de Cauchy» affirmant la nullité des intégrales $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$ est vrai pour toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (sans supposer de plus que l'on ait $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$).*

Comme on le verra ultérieurement, ce résultat permet de démontrer que toute fonction holomorphe f est en fait automatiquement de classe \mathcal{C}^∞ . La preuve se fait en utilisant une approximation de K par des compacts à bords polygonaux.



Démonstration. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. On paramétrise ∂K par un nombre fini d'arcs \mathcal{C}^1 par morceaux, et pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, on utilise une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ de sorte que $\|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)\| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Par suite, chacun des segments $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)]$ est inclus dans Ω . Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. Un tel compact est naturellement triangulable, de sorte que $K_\varepsilon = \bigcup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et que le lemme de Goursat donne :

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)dz = 0.$$

La première égalité vient du fait que chacun des segments composant les ∂T_i et ne figurant pas dans ∂K_ε apparaît deux fois avec des orientations opposées (cf. schéma). Maintenant, d'après la partie (iii) de la proposition du § 1.1, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz$, d'où le résultat. \square

2.3. Formule de Cauchy

On démontre maintenant la formule de Cauchy. À nouveau, Ω désigne un ouvert de \mathbb{C} .

Formule de Cauchy. *Soient $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et K un compact à bord orienté \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans Ω . Alors, pour tout z dans K° ,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

En particulier, les valeurs de f à l'intérieur de K sont déterminées par les valeurs de f sur le bord ∂K .

Démonstration. Soit $\rho > 0$ tel que $\overline{D}(z, \rho) \subset K^\circ$. On note $K_\rho = K \setminus D(z, \rho)$. Alors K_ρ est un compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux dont le bord est $\partial K_\rho = \partial K \cup \Gamma^-(z, \rho)$, où Γ^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D}(z, \rho)$. Considérons alors la fonction $g(w) = f(w)/(w - z)$. Cette fonction est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Comme K_ρ est un compact dans $\Omega \setminus \{z\}$, le théorème de Cauchy appliqué à la fonction g donne :

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

Mais alors en posant $w = z + \rho e^{it}$ il vient

$$\int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt,$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque ρ tend vers 0, par continuité de f au point z . \square

2.4. Formule de Pompeiu

La formule de Pompeiu (appelée aussi formule de Cauchy avec reste) est une généralisation de la formule de Cauchy pour le cas des fonctions non nécessairement holomorphes.

Théorème. *Soit K un compact du plan complexe, admettant un bord ∂K de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On désigne par $d\lambda(z) = dx dy$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.*

(i) *Pour toute fonction $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 , on a*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda(z).$$

(ii) *Si z est dans l'intérieur K° de K , alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\lambda(w).$$

Démonstration. (i) Considérons la forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 $\alpha = f(z) dz$. On a alors

$$d\alpha = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

et

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2i dx \wedge dy = 2i d\lambda(z).$$

L'égalité cherchée résulte de formule de Green-Riemann $\int_{\partial K} \alpha = \iint_K d\alpha$.

(ii) Comme pour la formule de Cauchy du § 2.3, on applique la formule (i) à la fonction

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - z}$$

sur le compact $K_\rho = K \setminus D(z, \rho)$. Puisque la fonction $w \mapsto 1/(w - z)$ est holomorphe, nous obtenons

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}.$$

Or g est de classe \mathcal{C}^1 sur K_ρ , il vient donc

$$\int_{\partial K_\rho} g(w) dw = 2i \iint_{K_\rho} \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} d\lambda(w),$$

et comme $\partial K_\rho = \partial K \cup \Gamma(z, \rho)$ ceci donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2i \iint_{K_\rho} \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\lambda(w).$$

Nous avons ici encore

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i f(z)$$

par continuité de f en z , tandis que la fonction $w \mapsto 1/|w - z|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur un voisinage du point z dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ (ceci résulte de l'intégrabilité de $\|x\|^{-\alpha}$ pour $\alpha < n$ dans \mathbb{R}^n). La formule de Pompeiu s'ensuit en faisant tendre ρ vers 0, parce que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \iint_{K_\rho} \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\lambda(w) = \iint_K \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\lambda(w)$$

grâce au théorème de convergence dominée. □

3. Conséquences de la formule de Cauchy

Dans cette partie, on développe les applications les plus fondamentales de la formule de Cauchy (il y en a beaucoup d'autres !)

3.1. Infinité différentiabilité des fonctions holomorphes

La première application spectaculaire de la formule de Cauchy est le résultat affirmant l'infinité différentiabilité des fonctions holomorphes.

Théorème. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans Ω . Alors toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω . Pour tout z dans K° , ses dérivées sont données par les formules

(i) $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$

(ii) $\forall n \geq 0, \forall m > 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0.$

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire, et les dérivées $f^{(n)}$ sont elles aussi holomorphes.

Démonstration. En découpant le bord de K en N arcs γ_j de classe \mathcal{C}^1 , la formule de Cauchy s'écrit :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t)-z} \gamma_j'(t) dt.$$

Comme f est holomorphe, elle est continue et la dernière intégrale est considérée comme une intégrale dépendant du paramètre z . Comme la fonction $w \rightarrow 1/(w-z)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur K° , le résultat découle par récurrence des formules

$$\frac{\partial^n (1/w-z)}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{(w-z)^{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{n+m}(1/w-z)}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} = 0 \quad \text{si} \quad m > 0 \quad \square$$

On déduit aisément de ce résultat une réciproque du théorème de Goursat.

Théorème de Morera. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . On suppose que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans Ω . Alors f est holomorphe sur Ω .*

Démonstration. Soient z_0 dans Ω et $r > 0$ de sorte que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on définit $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) dw$ où $[z_0, z]$ désigne le segment joignant z_0 à z . Soient $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z+h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z+h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, on a

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw = \int_0^1 f(z+th) dt.$$

En utilisant la continuité de f au point z , il en découle facilement

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Ainsi, F est holomorphe sur $D(z_0, r)$, et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. □

3.2. Inégalités de Cauchy, fonctions entières à croissance polynomiale

Soient $K = \overline{D}(z, r) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. D'après le paragraphe précédent, on a dans cette situation

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) e^{-int} dt.$$

On en déduit de suite les

Inégalités de Cauchy ([Cauchy, 1844]). *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si $\overline{D}(z, r) \subset \Omega$, alors*

$$(3.2.1) \quad \forall n \geq 0, \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\Gamma(z,r)} |f|.$$

Ces inégalités ont pour conséquence le résultat suivant.

Fonctions entières à croissance polynômiale. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière à croissance polynômiale à l'infini, c'est-à-dire telle que

$$\exists A, B \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B.$$

Alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à B .

Démonstration. Soit $E(B)$ la partie entière de B et $n = E(B) + 1 > B$. Alors l'hypothèse implique $\sup_{\Gamma(z,r)} |f| \leq A(1 + |z| + r)^B$ et les inégalités de Cauchy entraînent $|f^{(n)}(z)| \leq n!A(1 + |z| + r)^B/r^n$, quels que soient $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. En faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que $f^{(n)}(z) = 0$ et donc que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1 = E(B)$. \square

Le cas $B = 0$ du résultat précédent est le théorème de Liouville (énoncé par Cauchy en 1844 et quelque peu généralisé par Liouville, vers 1847...).

Théorème de Liouville. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, bornée sur \mathbb{C} . Alors f est constante.

Cet énoncé permet de redémontrer immédiatement le « théorème fondamental de l'algèbre », ou théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $d \geq 1$ admet une racine dans \mathbb{C} .

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0$ ne s'annule pas, la fonction $f = 1/P$ est holomorphe sur \mathbb{C} et $|f(z)| \sim 1/(|a_d| |z|^d)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur \mathbb{C} et elle donc est constante d'après le théorème de Liouville. Par suite $P = 1/f$ est constant, contradiction. \square

En utilisant la division euclidienne des polynômes et le fait que toute racine z_0 permet de factoriser un facteur $(z - z_0)$, on déduit par récurrence sur le degré que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré d admet une factorisation unique

$$(3.2.2) \quad P(z) = a_d \prod_{1 \leq j \leq s} (z - z_j)^{m_j}$$

avec $m_1 + \dots + m_s = d$. L'entier m_j est appelé multiplicité de la racine z_j .

3.3. Équivalence entre holomorphic et \mathbb{C} -analyticité

Pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, deux notions d'analyticité naturelles apparaissent, suivant qu'on adopte un point de vue réel ou complexe.

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction de Ω dans \mathbb{C} .

- (i) On dit que f est \mathbb{R} -analytique si pour tout $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de z_0 tel que $f(z) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2} a_{\alpha, \beta} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$ pour tout $z = (x, y)$ dans V , avec convergence normale sur V .

(ii) On dit que f est \mathbb{C} -analytique si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage V de z_0 tel que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ pour tout z dans V , avec convergence normale sur V .

La condition de convergence normale de la série dans un voisinage V de z_0 équivaut à l'existence de constantes $M, A \geq 0$ telles que $|a_{\alpha,\beta}| \leq M A^{\alpha+\beta}$, resp. $|a_n| \leq M A^n$. On voit, dans le cas \mathbb{R} -analytique comme dans le cas \mathbb{C} -analytique, que les séries sont dérivables terme à terme, et que les coefficients sont uniquement déterminés par les formules

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}.$$

En décomposant $(z - z_0)^n = ((x - x_0) + i(y - y_0))^n$ par la formule du binôme, on voit facilement que la \mathbb{C} -analyticité implique la \mathbb{R} -analyticité. Il est clair néanmoins que les deux notions sont distinctes : la fonction $f(z) = \bar{z}$ est \mathbb{R} -analytique mais n'est pas \mathbb{C} -analytique.

Théorème. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction complexe sur Ω . Alors, il y a équivalence entre

- (i) f est holomorphe sur Ω ,
- (ii) f est \mathbb{C} -analytique sur Ω .

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) a déjà été démontré au Chapitre I, § 1.3.

(i) \Rightarrow (ii) Supposons que f soit holomorphe sur Ω et soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(w - z_0)} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_0, r)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Si $w = z_0 + re^{it}$, alors

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \quad \text{avec } |z - z_0|/r < 1.$$

Il en découle que la série converge normalement lorsque t décrit $[0, 2\pi]$, d'où

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

et la série entière converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. □

La démonstration ci-dessus montre le résultat plus précis suivant.

Corollaire. *Soient $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Alors le rayon de convergence du développement en série entière de f en z_0 est supérieur ou égal à la distance de z_0 au complémentaire de Ω .*

Nous préciserons bien davantage ce corollaire à la section 3.5.

3.4. Zéros des fonctions holomorphes

Le caractère \mathbb{C} -analytique des fonctions holomorphes a une conséquence directe importante sur la structure du lieu des zéros d'une telle fonction.

Théorème. *Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors, l'ensemble des zéros $f^{-1}(0)$ est constitué de points isolés.*

Rappelons qu'on a la caractérisation suivante simple décrivant la structure d'une telle partie, de sorte en particulier que les zéros de f forment une suite (a_k) finie ou infinie, tendant vers l'infini ou vers le bord de Ω s'il y en a une infinité.

Caractérisation. *Soit A une partie d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Il y a équivalence entre*

- (i) *A est une partie fermée de Ω constituée de points isolés.*
- (ii) *A est localement finie dans Ω , c'est-à-dire que tout point x de Ω admet un voisinage V_x pour lequel $A \cap V_x$ est finie.*
- (iii) *L'intersection $A \cap K$ de A avec toute partie compacte K de Ω est finie.*
- (iv) *L'ensemble A est fini ou dénombrable, et si $A = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est infini alors*

$$\|a_k\| + (d(a_k, \partial\Omega))^{-1} \rightarrow +\infty,$$

autrement dit les points a_k s'éloignent à l'infini ou tendent vers le bord de Ω .

Démonstration. (i) entraîne (ii) (avec $A \cap V$ vide ou réduit à $\{x\}$ si V_x est assez petit), tandis que (ii) implique (iii) par le théorème de Borel-Lebesgue. Il est aisé de voir que (iv) implique (i). Reste à voir que (iii) implique (iv). Pour cela, on considère

$$K_\nu = \{x \in \Omega; \|x\| \leq \nu, d(x, \partial\Omega) \geq 1/\nu\}.$$

C'est une suite de parties compactes de Ω telle que $K_\nu \subset K_{\nu+1}$ et $\Omega = \bigcup K_\nu$ (une telle suite s'appelle «suite exhaustive de compacts»). Alors, pour tout $\nu \geq 0$, la partie $A \cap K_\nu$ est finie par hypothèse, on la numérote sous la forme $a_0, a_1, \dots, a_{k_\nu}$

(en sorte que les points de $A \cap (K_\nu \setminus K_{\nu-1})$ sont $a_{k_\nu-1+1}, \dots, a_{k_\nu}$). Alors pour $k > k_\nu$ on a $a_k \notin K_\nu$, par conséquent $\|a_k\| + d(a_k, \partial\Omega)^{-1} > \nu$. \square

Démonstration du théorème. Soit $E = \{z_0 \in \Omega; \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0\}$. Alors E est fermé dans Ω (comme intersection des ensembles fermés $\{z_0 \in \Omega; f^{(n)}(z_0) = 0\}$) et n'est pas égal à Ω car f n'est pas identiquement nulle. Par ailleurs, E est ouvert car si z_0 est dans E , alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$ est identiquement nulle sur $D(z_0, r_0)$ où $r_0 = d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Comme Ω est connexe, on en déduit que $E = \emptyset$.

Fixons alors z_0 dans Ω tel que $f(z_0) = 0$. D'après ce qui précède, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$; choisissons l'entier m minimal ayant cette propriété. Alors sur $D(z_0, r_0)$ on a $f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z)$. Par construction, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n$ est holomorphe sur $D(z_0, r_0)$, mais étant égale à $f(z)/(z - z_0)^m$ sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, elle est donc holomorphe sur Ω tout entier. Comme $g(z_0) = a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$, la continuité de g implique que g ne s'annule pas dans un certain voisinage V de z_0 et donc $f^{-1}(0) \cap V = \{z_0\}$. \square

La démonstration fournit par ailleurs les informations complémentaires intéressantes qui suivent.

Proposition. Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors, pour tout zéro z_0 de f , il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, i.e.

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

La fonction f possède alors une factorisation

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

où $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annule pas dans un voisinage de z_0 . On dit que f possède un zéro d'ordre m en z_0 .

3.5. Principe du prolongement analytique

Nous abordons ici la question du prolongement des fonctions holomorphe, en commençant par un principe général d'unicité.

Principe du prolongement analytique. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soient f et g dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $f = g$ sur une partie A de Ω possédant un point d'accumulation z_0 dans Ω , alors f est identiquement égale à g sur la composante connexe de Ω contenant z_0 .

Démonstration. Soit Ω_0 la composante connexe de Ω contenant z_0 . Alors $h = f - g$ est holomorphe sur Ω_0 et z_0 est un zéro non isolé de h . C'est donc que h est identiquement nulle sur Ω_0 . \square

Application. Si f et g sont des fonctions entières telles que $f = g$ sur \mathbb{R} , alors $f = g$ sur \mathbb{C} . En particulier, les formules trigonométriques vraies sur \mathbb{R} s'étendent

« par prolongement analytique » à \mathbb{C} . Par exemple

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \text{et} \quad \cos^2 z = \frac{1 + \cos(2z)}{2}.$$

En revanche, on n'a pas $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ sur \mathbb{C} , on ne peut pas déduire que l'identité se prolonge de \mathbb{R} à \mathbb{C} car la fonction $z \mapsto |\cos z|^2 + |\sin z|^2$ n'est pas holomorphe.

Corollaire (unicité des prolongements holomorphes). *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω . Supposons que f admette un prolongement \tilde{f} dans un ouvert connexe $\tilde{\Omega}$ contenant Ω . Alors ce prolongement \tilde{f} est unique.*

Démonstration. Étant donné deux prolongements \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 , la fonction $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$ s'annule sur Ω , qui n'est pas une partie localement finie de $\tilde{\Omega}$, par suite $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$ est identiquement nulle dans l'ouvert connexe $\tilde{\Omega}$.

3.6. Prolongement à la frontière et séries lacunaires

Si nous considérons la somme d'une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

ayant un rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$, nous ne savons pas exactement ce qui se passe sur le cercle de convergence $\Gamma(0, R)$, mais il peut fort bien se produire que la fonction f se prolonge au delà du disque $D(0, R)$ en certains points de la frontière. L'exemple le plus simple est celui de la série géométrique $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, qui se prolonge en fait en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et donc au voisinage de chaque point frontière $z_0 \in \Gamma(0, 1) \setminus \{1\}$ du disque de convergence. On notera que ceci se produit bien que la série diverge en tout point de la frontière.

Définition. *Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe.*

- (i) *On dit que f se prolonge de manière holomorphe au voisinage d'un point z_0 de la frontière $\partial\Omega$ s'il existe un petit disque $D(z_0, \varepsilon)$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega \cup D(z_0, \varepsilon)$ [La connexité de $D(z_0, \varepsilon)$ et le fait que $\Omega \cap D(z_0, \varepsilon)$ soit un ouvert non vide impliquent l'unicité de ce prolongement].*
- (ii) *On dit que $\partial\Omega$ est une frontière naturelle de f si f ne peut se prolonger de manière holomorphe en aucun point de la frontière $\partial\Omega$.*

Si la série entière de $f(z)$ admet un rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$, nous pouvons dire en général qu'il y a au moins un point $z_0 \in \Gamma(0, R)$ au voisinage duquel f ne peut se prolonger en une fonction holomorphe, car sinon f se prolongerait en une fonction holomorphe sur un voisinage Ω du disque fermé $\overline{D}(0, R)$, et le corollaire final du § 3.3 impliquerait que le rayon de convergence serait strictement supérieur à R . Dans le cas des séries dites lacunaires, les conclusions sont beaucoup plus drastiques.

Séries lacunaires. *On appelle ...*

(à compléter !!!)

4. Théorème de l'application ouverte

L'objet de ce paragraphe est d'abord d'étudier le comportement local des fonctions holomorphes au voisinage d'un point non critique, puis au voisinage d'un point critique. De là, on déduit le théorème de l'application ouverte et le théorème d'inversion globale.

4.1. Théorème d'inversion locale holomorphe

On donne ici deux démonstrations du théorème d'inversion locale holomorphe, l'une utilisant l'énoncé réel correspondant, l'autre directe (un cas particulier simple de ce théorème a déjà été vu au chapitre I dans le cas des fonctions exp et log).

Théorème d'inversion locale. *Soient $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que $W = f(V)$ est un ouvert de \mathbb{C} et $f : V \rightarrow W$ est un biholomorphisme (i.e. une bijection holomorphe d'inverse holomorphe).*

Commençons par la démonstration utilisant le théorème d'inversion locale \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Comme $f'(z_0) \neq 0$, la \mathbb{R} -différentielle de f en z_0 , $df_{z_0}(h) = f'(z_0)h$, est un \mathbb{R} -isomorphisme, donc (théorème d'inversion locale \mathcal{C}^∞) il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que $W = f(V)$ est un voisinage ouvert de $f(z_0)$ et $f : V \rightarrow W$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme. De plus, pour tout $z \in V$, $d(f^{-1})_{f(z)} = (df_z)^{-1}$. Mais, f étant holomorphe, df_z est \mathbb{C} -linéaire, donc $d(f^{-1})_{f(z)}$ l'est aussi et f^{-1} est holomorphe. \square

Remarque. La démonstration ci-dessus montre les formules suivantes:

$$\forall z \in V, \quad (f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{et} \quad \forall w \in W, \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Démonstration directe du théorème d'inversion locale. Après translation et homothétie, plus précisément, en remplaçant f par

$$\tilde{f}(z) = f'(z_0)^{-1}(f(z + z_0) - f(z_0)),$$

on peut supposer $z_0 = 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Quitte à changer le signe des coefficients, écrivons

$$w = f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$$

au voisinage de 0. En passant la série dans l'autre membre, on trouve la formule

$$z = w + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

et de l'estimation $w \sim z$ quand $z \rightarrow 0$, on déduit successivement

$$\begin{aligned}
 z &= w + O(w^2) \\
 &= w + a_2(w + O(w^2))^2 + O(w^3) = w + a_2w^2 + O(w^3) \\
 &= w + a_2(w + a_2w^2)^2 + a_3w^3 + O(w^4) = w + a_2w^2 + (a_3 + 2a_2^2)w^3 + O(w^4) \\
 &= w + a_2(w + a_2w^2 + (a_3 + 2a_2^2)w^3)^2 + a_3(w + a_2w^2)^3 + a_4w^4 + O(w^5) \\
 &= w + a_2w^2 + (a_3 + 2a_2^2)w^3 + (a_4 + 5a_2a_3 + 5a_2^3)w^4 + O(w^5), \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi formellement un développement limité à tout ordre

$$z = w + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(a_2, \dots, a_n)w^n,$$

où P_n est un polynôme à coefficients (entiers) positifs ou nuls. Si ce développement converge dans un voisinage de $w = 0$, notons $g(w)$ sa somme. Par construction, on a à l'étape n les estimations $f \circ g(w) = w + O(|w|^n)$ et $g \circ f(z) = z + O(|z|^n)$ si bien que $f \circ g$ et $g \circ f$ doivent être égales à l'application identique au voisinage de 0 (sans quoi, les fonctions holomorphes non nulles $f \circ g(w) - w$ et $g \circ f(z) - z$ auraient un zéro d'ordre infini à l'origine). Pour montrer la convergence, observons qu'il existe un réel $M \geq 0$ assez grand tel que $|a_n| \leq M^n$ pour $n \geq 2$, en raison de la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} a_n z^n$ au voisinage de 0. On a donc

$$|P_n(a_2, \dots, a_n)| \leq P_n(M^2, \dots, M^n),$$

et il suffit de montrer que la série entière

$$w + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(M^2, \dots, M^n)w^n$$

a un rayon de convergence strictement positif en 0. Or cette dernière série est formellement obtenue en résolvant en z l'équation

$$w = z - \sum_{n=2}^{+\infty} M^n z^n = \frac{z - (M + M^2)z^2}{1 - Mz}.$$

Ceci mène à l'équation du second degré en z

$$(M + M^2)z^2 - (1 + Mw)z + w = 0$$

dont la solution est

$$z = \frac{1 + Mw - \sqrt{(1 + Mw)^2 - 4w(M + M^2)}}{2(M + M^2)}.$$

Ici, $\sqrt{\quad}$ est la détermination de la racine carrée holomorphe définie sur le disque $D(1, 1)$, telle que $\sqrt{1} = 1$ (puisque l'on doit avoir $z = 0$ pour $w = 0$). Le

développement en série entière de cette expression par rapport à la variable w a un rayon de convergence $R > 0$. En effet, nous avons $(1+Mw)^2 - 4w(M+M^2) = 1-w'$ avec $w' = (2M+4M^2)w - M^2w^2$ et d'après le dernier corollaire du § 3.3 il suffit de trouver un rayon $R > 0$ tel que $|w'| < 1$ pour tout $w \in D(0, R)$, de façon que

$$w \mapsto \sqrt{(1+Mw)^2 - 4w(M+M^2)} = \sqrt{1-w'}$$

soit définie et holomorphe sur $D(0, R)$. On vérifie facilement que

$$R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M + 4M^2}$$

convient, car $|w| < R$ entraîne successivement

$$\begin{aligned} |M^2w^2| &\leq M^2|w|R \leq M^2|w|/((1+\sqrt{2})M) = (\sqrt{2}-1)M|w| \\ |w'| &\leq (2M+4M^2)|w| + |M^2w^2| \leq ((1+\sqrt{2})M + 4M^2)|w| < 1. \end{aligned}$$

Pour $w \in D(0, R)$ de module $|w| = r$, nous trouvons un nombre z qui est inférieur en module à la valeur calculée pour $w = r \in [0, R[$, qui vérifie

$$z = \frac{1 + Mw - \sqrt{1-w'}}{2(M+M^2)} < \frac{Mw + w'}{2(M+M^2)} < 2w < 2R < \frac{1}{M}.$$

Ceci montre que la série $g(w) = w + \sum_{n \geq 2} P_n(a_2, \dots, a_n)w^n$ est de rayon de convergence au moins égal à R , et que $g(D(0, R)) \subset D(0, 1/M)$, disque sur lequel $f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ est convergente. Par identification de la série entière en 0 et le principe du prolongement analytique, nous voyons que la formule $f \circ g(w) = w$ est valable sur tout le disque $D(0, R)$.

Ce raisonnement montre que g est injective sur l'ouvert $W = D(0, R)$ et que l'image $w = f(z)$ atteint surjectivement le disque W sur la partie connexe $g(W) \subset D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$. Ceci nous permet de choisir comme ouvert V la composante connexe de 0 dans $D(0, 1/M) \cap f^{-1}(W)$, de telle sorte que $f(V) \subset W$ et $g(W) \subset V$. Les ensembles V et W sont bien des ouverts, et on a déjà vu que $f|_V \circ g|_W = \text{Id}_W$ sur W . Par ailleurs on a $g|_W \circ f|_V = \text{Id}_V$ sur V par connexité de V et prolongement analytique. \square

Remarque. La méthode développée ci-dessus est connue sous le nom de « méthode des séries majorantes ». Outre le fait de donner une démonstration directe, son intérêt est de fournir une estimation effective de la taille des voisinages V et W mis en jeu.

4.2. Comportement local en un point critique

Un point critique d'une fonction différentiable est par définition un point où sa différentielle s'annule.

Définition. On appelle point critique d'une fonction holomorphe f un point z_0 où $f'(z_0) = 0$.

Le paragraphe précédent nous a permis de comprendre le comportement de f au voisinage d'un point non critique. On montre dans ce paragraphe le résultat suivant.

Théorème. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non constante au voisinage de z_0 . Alors il existe $m = \min\{n \in \mathbb{N}^*; f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ et un biholomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ d'un voisinage V de z_0 sur un voisinage W de 0 avec $\varphi(z_0) = 0$ tels que

$$\forall z \in V, \quad f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m.$$

Démonstration. Comme f n'est pas constante au voisinage de 0, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*; f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ est non vide et l'entier m est bien défini. Le cas $m = 1$ découle ensuite du théorème d'inversion locale holomorphe en posant $\varphi(z) = f(z) - f(z_0)$. On suppose donc dorénavant que $m \geq 2$. Écrivons alors $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$ avec g holomorphe sur Ω , et $g(z_0) \neq 0$. Comme $g(z_0) \neq 0$, il existe une détermination de la racine m -ième holomorphe au voisinage de $g(z_0)$, et donc une fonction h holomorphe sur un voisinage \tilde{V} de z_0 telle que $g = h^m$. Posons alors $\varphi(z) = (z - z_0)h(z)$. Par construction $\varphi(z_0) = 0$ et

$$\varphi(z)^m = (z - z_0)^m h(z)^m = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - f(z_0) \quad \text{sur } \tilde{V},$$

De plus, $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$ (puisque $h(z_0)^m = g(z_0) \neq 0$). Le théorème d'inversion locale holomorphe montre que φ est un biholomorphisme d'un voisinage $V \subset \tilde{V}$ de z_0 sur un voisinage W de 0. \square

Dans le théorème précédent, on peut toujours se ramener au cas où W est un disque; sinon, on choisit un disque $D(0, r_0)$ contenu dans W , et on remplace W par $W_r = D(0, r)$, $r \in]0, r_0[$, et V par $V_r = \varphi^{-1}(D(0, r))$. Comme φ est un homéomorphisme d'un voisinage de z_0 sur un voisinage de 0, les ensembles V_r forment un système fondamental de voisinages ouverts de z_0 .

Corollaire. Pour tout $w \in D(f(z_0), r^m) \setminus \{f(z_0)\}$, $r \in]0, r_0[$, l'équation $f(z) = w$ possède m solutions distinctes dans V_r (pour $w = f(z_0)$, l'équation $f(z) = w$ admet z_0 comme unique solution de multiplicité m).

Démonstration. Pour $w \in D(f(z_0), r^m)$, l'équation $f(z) = w$ équivaut à $\varphi(z)^m = w - f(z_0) \in D(0, r^m)$ et admet donc m solutions

$$z_k = \varphi^{-1}(e^{2i\pi k/m}(w - f(z_0))^{1/m}) \in V_r, \quad 0 \leq k < m$$

où $(w - f(z_0))^{1/m} \in D(0, r)$ est l'une quelconque des racines m -ièmes de $w - f(z_0)$. Ces solutions sont toutes distinctes si $w \neq f(z_0)$ et confondues (égales à $\varphi^{-1}(0) = z_0$) si $w = f(z_0)$. \square

4.3. Théorème de l'application ouverte et théorème d'inversion globale

L'étude locale de la section § 4.2 fournit les conséquences importantes suivantes.

Théorème de l'application ouverte. *Soient Ω un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une application holomorphe non constante. Alors f est ouverte (i.e. pour tout ouvert $U \subset \Omega$, l'image $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C}).*

Démonstration. D'après le corollaire de § 4.2 et la remarque qui précède, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), \rho(z_0))$ est un certain disque ouvert de centre $f(z_0)$. Par suite $f(U) = \bigcup D(f(z_0), \rho(z_0))$ est un ouvert. \square

Théorème d'inversion globale. *Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une application holomorphe injective. Alors*

- (i) $f(\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{C} ,
- (ii) la dérivée f' ne s'annule pas sur Ω ,
- (iii) $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ est un biholomorphisme.

Démonstration. On sait déjà que f est ouverte, donc $f(\Omega)$ est un ouvert et f une bijection continue ouverte de Ω sur $f(\Omega)$, i.e. un homéomorphisme. Si on avait $f'(z_0) = 0$ en un certain point $z_0 \in \Omega$, alors l'entier m défini en § 4.2 serait supérieur ou égal à 2 et f ne serait donc pas localement injective au voisinage de z_0 . Cette contradiction implique que f' ne s'annule pas. Le théorème d'inversion locale entraîne alors que f^{-1} est holomorphe. \square

5. Principe du maximum, lemme de Schwarz

Le principe du maximum et le lemme de Schwarz sont deux autres manifestations spectaculaires de la «rigidité» des fonctions holomorphes, d'une grande importance en vue de leur étude géométrique et quantitative.

5.1. Principe du maximum

Théorème. *Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors f satisfait les propriétés suivantes.*

- (i) *S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$, alors f est constante sur la composante connexe de Ω qui contient z_0 ,*
- (ii) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on a*

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f| ;$$

de même on a

$$\max_K \operatorname{Re} f = \max_{\partial K} \operatorname{Re} f, \quad \max_K \operatorname{Im} f = \max_{\partial K} \operatorname{Im} f.$$

Démonstration. (i) Supposons f non constante sur la composante connexe Ω_0 de Ω contenant z_0 et $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$ ($= \sup_{\Omega_0} |f|$). Comme f est ouverte sur Ω_0 , l'image $f(\Omega_0)$ serait un voisinage de $f(z_0)$ et contiendrait donc des points de module strictement supérieur à $|f(z_0)|$. Contradiction !

(ii) On le montre par exemple pour $\operatorname{Re} f$. Si on avait $\max_{\partial K} \operatorname{Re} f < \max_K \operatorname{Re} f$, alors il existerait $z_0 \in K^\circ = K \setminus \partial K$ tel que $\operatorname{Re} f(z_0) = \max_K \operatorname{Re} f$. Considérons la composante connexe Ω_0 de z_0 dans l'ouvert K° , et supposons d'abord f non constante dans Ω_0 . Alors $f(\Omega_0)$ serait un ouvert contenant $f(z_0)$ et contenu dans le demi-plan $\{w; \operatorname{Re} w \leq \operatorname{Re} f(z_0)\}$. C'est absurde et cette contradiction entraîne que f est constante sur Ω_0 , de sorte que $\operatorname{Re} f|_{\partial\Omega_0} = \operatorname{Re} f(z_0)$ par continuité de f . Mais comme

$$\emptyset \neq \partial\Omega_0 \subset \partial(K^\circ) = \overline{K^\circ} \setminus K^\circ \subset \overline{K} \setminus K^\circ = \partial K,$$

alors $\max_K \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f(z_0)$ est atteint aussi sur ∂K , contradiction finale ! \square

5.2. Lemme de Schwarz

Le lemme de Schwarz fournit une information quantitative sur le module que peut prendre d'une fonction holomorphe, dès lors qu'on connaît une borne globale du module et l'existence de certains zéros.

Lemme de Schwarz. Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ avec $0 < R < +\infty$. Supposons que

$$\sup_{D(z_0, R)} |f| = M < +\infty \quad \text{et} \quad f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0.$$

Alors :

- (i) $\forall z \in D(z_0, R), |f(z)| \leq M(|z - z_0|/R)^m$,
- (ii) s'il existe un point de $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ où l'inégalité de (i) est une égalité, alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ de module M tel que $f(z) = \mu(|z - z_0|/R)^m$ pour tout $z \in D(z_0, R)$.

Démonstration. Posons $g(z) = f(z)/(z - z_0)^m$. Alors g est holomorphe sur $D(z_0, R)$ et pour $r < R$, le principe du maximum appliqué à g sur $D(z_0, r)$ donne

$$\max_{\overline{D}(z_0, r)} |g| = \max_{\Gamma(0, r)} |g| \leq \frac{M}{r^m}.$$

Par passage à la limite lorsque r tend vers R , on en déduit $\sup_{D(z_0, R)} |g| \leq M/R^m$, d'où (i). S'il y a égalité dans (i), alors $|g|$ atteint son sup en un point de $D(z_0, r)$, donc g est constante et (ii) s'ensuit. \square

5.3. Automorphismes du disque

Nous montrons ici comment on peut utiliser le lemme de Schwarz pour étudier les automorphismes du disque, ou plus généralement les applications holomorphes du disque dans lui-même.

Définition. *Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{C} , on note $\text{Aut}(\Omega)$ l'ensemble des automorphismes (holomorphes) de Ω , c'est-à-dire l'ensemble des applications holomorphes bijectives de Ω sur lui-même.*

Il est clair que $\text{Aut}(\Omega)$ possède une structure de groupe pour la loi \circ de composition des applications. Nous allons maintenant déterminer les automorphismes du disque unité, qui sera noté

$$\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Théorème. *Les automorphismes de \mathbb{D} sont les transformations homographiques de la forme*

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |\lambda| = 1, \quad a \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Le couple $(\lambda, a) \in S^1 \times \mathbb{D}$ est déterminé de manière unique par f ; on a par exemple $a = f^{-1}(0)$, $\lambda = (1 - |a|^2)^{-1} f'(0)$.

Démonstration. On commence par étudier le cas particulier correspondant au choix $\lambda = 1$, en posant

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour $a, z \in \mathbb{D}$ on a $|1 - \bar{a}z| \geq 1 - |a||z| > 0$. Un calcul immédiat donne alors

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_a(z)|^2 &= \frac{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2) - (|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0.$$

Il en résulte que $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Par ailleurs l'équation $w = \varphi_a(z)$ équivaut à $w(1 - \bar{a}z) = z - a$, soit $w + a = z(1 + \bar{a}w)$ ou encore $z = \varphi_{-a}(w)$. On voit donc que $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est un automorphisme de \mathbb{D} , d'inverse $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Ceci entraîne que $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agit *transitivement* sur \mathbb{D} , c'est-à-dire, que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{D}^2$ il existe un automorphisme f tel que $f(a) = b$; comme $\varphi_a(a) = 0$ et $\varphi_{-b}(0) = b$, il suffit en effet de prendre $f = \varphi_{-b} \circ \varphi_a$.

Pour $|\lambda| = 1$, $z = e^{i\theta}$, l'homothétie complexe $h_\lambda(z) = \lambda z$ n'est autre que la rotation d'angle θ , donc $h_\lambda \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, et on en déduit que l'application

$$f(z) = h_\lambda \circ \varphi_a(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

définit bien un automorphisme $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Inversement, soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ un automorphisme quelconque et $a = f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. Alors l'automorphisme

$$g = f \circ \varphi_a^{-1} = f \circ \varphi_{-a} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$$

vérifie $g(0) = f(a) = 0$. D'après le lemme de Schwarz (appliqué sur le disque $D(0, R)$ de rayon $R = 1$ pour la fonction $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ majorée en module par $M = 1$, s'annulant en 0 avec la multiplicité $m = 1$), on en déduit $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme g^{-1} jouit des mêmes propriétés que g , on a aussi $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et par suite $|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$. On a donc en fait $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Le cas d'égalité du lemme de Schwarz montre que $g(z) = h_\lambda(z) = \lambda z$ pour un certain λ de module 1, et on a donc $f = g \circ \varphi_a = h_\lambda \circ \varphi_a$, ce qu'il fallait démontrer. \square

On déduit également du lemme de Schwarz le corollaire intéressant ci-dessous (on en verra ultérieurement au Chapitre V, §2 une interprétation géométrique).

Corollaire. *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe quelconque. Alors la dérivée f' satisfait l'inégalité*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

en tout point $z \in \mathbb{D}$, et l'égalité se produit si et seulement si f est un automorphisme de \mathbb{D} .

Démonstration. Un calcul facile laissé au lecteur montre que

$$\varphi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

en particulier $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$ et $\varphi_a(a) = 1/(1 - |a|^2)$. Fixons maintenant $z_0 \in \mathbb{D}$ et considérons $g = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$, qui est telle que $g(0) = 0$. Comme g envoie \mathbb{D} dans \mathbb{D} , le lemme de Schwarz montre que $|g(z)| \leq |z|$ et $|g'(0)| = \lim_{|z| \rightarrow 0} |g(z)|/|z| \leq 1$. Or,

$$g'(0) = \varphi'_{f(z_0)}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2} f'(z_0) (1 - |z_0|^2).$$

L'inégalité voulue pour $|f'(z_0)|$ s'ensuit immédiatement. Si l'égalité se produit, alors $|g'(0)| = 1$ et la fonction $g(z)/z$ atteint le maximum de son module, à savoir 1, au point $z = 0$. On a donc $g(z)/z = \lambda$ pour un certain λ de module 1, ce qui implique que g (et par suite f) sont des automorphismes de \mathbb{D} . \square

5.4. Théorème de Bloch-Landau

Ce résultat peut être conçu comme une version plus précise et plus quantitative du théorème de l'application ouverte. Notre preuve utilisera les propriétés des automorphismes du disque. L'énoncé original est dû à André Bloch qui l'a obtenu autour des années 1924-1925 (depuis son hôpital psychiatrique où il était interné pour avoir assassiné son frère, sa tante et son oncle à un repas de famille en 1917...), et sa preuve a été mise en forme et publiée par Edmund Landau dans son livre de 1929 *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*.

Théorème de Bloch-Landau. *Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(z_0, r)$, telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $U \subset D(z_0, r)$ tel que la restriction $f|_U$ soit un biholomorphisme de U sur un disque $f(U) = D(w_0, R)$ de rayon $R \geq \frac{1}{12}r|f'(z_0)|$.*

Démonstration. Dans la mesure où la constante $1/12$ ne sera pas optimale, on peut considérer la restriction de f à un disque un peu plus petit, et après avoir ainsi diminué un peu r , supposer que f est holomorphe sur un voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Dans ce cas, en remplaçant $f(z)$ par $g(z) = f(z_0 + rz)$, on se ramène au cas d'une fonction g définie au voisinage du disque unité fermé $\overline{D}(0, 1)$, et on observe qu'on a $|g'(0)| = r|f'(z_0)|$. On pose alors

$$m = \sup_{z \in \overline{D}(0,1)} (1 - |z|^2) |g'(z)| \geq |g'(0)|.$$

Comme $|g|$ est continue sur le disque compact $\overline{D}(0, 1)$, il existe un point $a \in D(0, 1)$ tel que $m = (1 - |a|^2)|g'(a)|$. En remplaçant g par $h = g \circ \varphi_{-a}$, nous avons

$$h(0) = g(a), \quad h'(0) = g'(a)\varphi'_{-a}(0) = (1 - |a|^2)g'(a).$$

Ceci donne en particulier

$$|h'(0)| = m \geq |g'(0)| = r|f'(z_0)|.$$

De plus, en posant $w = \varphi_{-a}(z)$ pour $z \in D(0, 1)$, nous avons

$$(1 - |z|^2)|h'(z)| = \frac{(1 - |z|^2)|\varphi'_{-a}(z)|}{1 - |\varphi_{-a}(z)|^2} (1 - |w|^2)|g'(w)| \leq m$$

du fait que le quotient est égal à 1 d'après le corollaire du §5.3. Le théorème sera démontré si nous prouvons qu'il existe un ouvert $V \subset D(0, 1)$ tel que $h|_V$ soit un biholomorphisme de V sur un disque $D(w, R)$ de rayon $R > \frac{1}{12}m$. Quitte à remplacer h par $\frac{1}{h'(0)}(h - h(0))$, nous pouvons supposer de plus $h(0) = 0$ et $m = h'(0) = 1$, de sorte que

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

pour tout $z \in D(0, 1)$. Nous avons alors un développement en série entière

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

de rayon de convergence au moins égal à 1, et les inégalités de Cauchy appliquées à $h'(z) = 1 + \sum_{n \geq 2} n a_n z^{n-1}$ sur le disque $D(0, \rho)$ entraînent que

$$n |a_n| \leq \frac{1}{(1 - \rho^2)\rho^{n-1}}$$

du fait que na_n est le coefficient de z^{n-1} dans $h'(z)$. Un calcul aisé montre que le maximum de $\rho \mapsto (1 - \rho^2)\rho^{n-1}$ est atteint au point ρ tel que $\rho^2 = \frac{n-1}{n+1}$, par conséquent

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

soit $|a_2| \leq 3^{3/2}/4 \simeq 1,299$ et $|a_n| < e/2$ pour $n \geq 3$, d'où aisément $|a_n| \leq M^n$ pour tout $n \geq 2$, avec $M = 3^{3/4}/2 < 1,14$. A ce point, nous reprenons la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes. Les calculs faits au §4.1 impliquent que h est un biholomorphisme d'un certain ouvert $U \subset D(0, 1)$ sur le disque $D(0, R)$ avec

$$R = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})M + 4M^2} > \frac{1}{12}. \quad \square$$

Remarque. Si on cherche seulement à obtenir la surjectivité de f sur un disque $D(w_0, R)$, on peut raisonner de façon un peu plus élémentaire, sans utiliser la version effective du théorème d'inversion locale. C'est cette approche qui figure en fait dans les travaux originaux de Bloch-Landau.

6. Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre

6.1. Théorème de dérivation sous le signe somme

Soit (E, \mathcal{B}, μ) un *espace mesuré σ -fini*, c'est-à-dire un ensemble E muni d'une tribu \mathcal{B} et d'une mesure positive μ sur la tribu \mathcal{B} , de sorte que E soit réunion au plus dénombrable de parties de \mathcal{B} de mesure finie. On suppose donnée un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et une fonction

$$F : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, t) \mapsto F(z, t),$$

de sorte que

$$(6.1.1) \quad z \mapsto F(z, t) \text{ est holomorphe sur } \Omega \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in E;$$

$$(6.1.2) \quad t \mapsto F(z, t) \text{ est } \mu\text{-intégrable pour tout } z \in \Omega.$$

On considère alors la fonction complexe f définie sur Ω , telle que

$$f(z) = \int_{t \in E} F(z, t) d\mu(t).$$

Théorème. *Outre les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2) ci-dessus, on fait l'hypothèse de majoration uniforme locale suivante: pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de z_0 et une fonction μ -intégrable positive g telle que*

$$(6.1.3) \quad \text{pour tout } z \in V, \text{ on a } |F(z, t)| \leq g(t) \text{ } \mu\text{-presque partout sur } E.$$

Alors $f(z) = \int_E F(z, t) d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω , et ses dérivées sont données par dérivation sous le signe somme:

$$f^{(n)}(z) = \int_{t \in E} \frac{d^n}{dz^n} F(z, t) d\mu(t).$$

La convergence des intégrales précédentes est assurée par la majoration suivante: étant donné un voisinage W de z_0 tel que $\overline{W} \subset V$, on a une majoration uniforme locale

$$\left| \frac{d^n}{dz^n} F(z, t) \right| \leq n! \varepsilon^{-n} g(t), \quad z \in W,$$

μ -presque partout sur E , avec $\varepsilon = d(W, \mathbb{C}V)$.

Démonstration. Soit N_1 l'ensemble exceptionnel μ -négligeable qui intervient dans (6.1.1) et N'_z , $z \in V$, les ensembles μ -négligeables qui interviennent dans (6.1.3). On va commencer par montrer qu'on peut supposer tous les N'_z égaux à un même ensemble négligeable $N_2 \supset N_1$. En effet, soit (z_k) une suite dénombrable dense dans V (il en existe!) et $N_2 = N_1 \cup \bigcup N'_{z_k}$. Alors on a $|F(z_k, t)| \leq g(t)$ pour tout z_k et tout $t \in E \setminus N'_{z_k}$, et donc pour tout $z \in E \setminus N_2$. Un point $z \in V$ quelconque est limite d'une certaine sous-suite de (z_k) . Par continuité de $z \mapsto F(z, t)$, on en déduit $|F(z, t)| \leq g(t)$ pour tout $z \in V$ et $t \in E \setminus N_2$, ce qu'il fallait vérifier. La continuité de f sur V résulte alors du théorème de convergence dominée (étant donné un point $z_1 \in V$ donné et une suite $z_{1,\nu} \rightarrow z_1$, on considère la suite de fonctions intégrables $t \mapsto F(z_{1,\nu}, t)$).

Maintenant, fixons un voisinage W de z_0 tel que $\overline{W} \subset V$ et $\varepsilon = d(W, \mathbb{C}V)$. Alors, pour tout point $z_1 \in W$, le disque fermé $\overline{D}(z_1, \varepsilon)$ est contenu dans V et, comme $z \mapsto F(z, t)$ est holomorphe sur V pour $t \in E \setminus N_2$, la formule de Cauchy permet d'écrire

$$(6.1.4) \quad F(z, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_1, \varepsilon)} \frac{F(w, t)}{w - z} dw$$

pour tout $(z, t) \in D(z_1, \varepsilon) \times (E \setminus N_2)$. Le théorème de Fubini donne alors

$$\int_{t \in E} F(z, t) d\mu(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_1, \varepsilon)} \frac{1}{w - z} \left(\int_{t \in E} F(w, t) d\mu(t) \right) dw,$$

car l'intégrale double est absolument convergente (on majore $1/(w - z)$ par $1/(\varepsilon - |z - z_1|)$ et $|F(z, t)|$ par $g(t)$). Il en résulte

$$(6.1.5) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_1, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

ce qui démontre la \mathbb{C} -analyticité de f (pour cela, on peut utiliser par exemple le même raisonnement que dans le paragraphe § 3.3). La majoration $\left| \frac{d^n}{dz^n} F(z_1, t) \right| \leq n! \varepsilon^{-n} g(t)$ résulte des inégalités de Cauchy (elle s'obtient aussi directement à partir de (6.1.4) après n dérivations sous le signe somme), tandis que (6.1.5) fournit

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_1, \varepsilon)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \\ &= \int_{t \in E} \left(\frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_1, \varepsilon)} \frac{F(w, t)}{(w - z)^{n+1}} dw \right) d\mu(t) = \int_{t \in E} \frac{d^n}{dz^n} F(z, t) d\mu(t) \end{aligned}$$

à l'aide du théorème de Fubini. □

6.2. Fonction Γ d'Euler

On définit la fonction Γ d'Euler par

$$(6.2.1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

où $t^{z-1} = \exp((z-1) \ln t)$. On a $|e^{-t}| \leq 1$ et $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}$, de sorte que l'intégrale est absolument convergente sur le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ (la convergence au voisinage de $+\infty$ ne pose pas de difficulté, on observe par exemple que $t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq e^{t/2}$ pour t assez grand. Pour $0 < \alpha < \beta$ donnés quelconques, on a la majoration uniforme

$$|t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}| \leq g(t) = (t^{\alpha-1} + t^{\beta-1}) e^{-t}$$

sur la bande verticale $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge, on en déduit que la fonction Γ est définie et holomorphe sur tout le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+, A \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^A t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+, A \rightarrow +\infty} \left([t^z (-e^{-t})]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A z t^{z-1} e^{-t} dt \right) = z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

pourvu que $\operatorname{Re} z > 0$. La fonction Γ satisfait donc l'équation fonctionnelle fondamentale

$$(6.2.2) \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re} z > 0.$$

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on en déduit aussitôt par récurrence

$$(6.2.3) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Par ailleurs, on peut prolonger holomorphiquement Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, et ce de manière unique d'après la connexité de cet ouvert, en définissant Γ par

$$(6.2.4) \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}$$

lorsque $\operatorname{Re} z > -n-1$ (l'équation fonctionnelle (6.2.2) implique qu'il s'agit bien d'une identité lorsque $\operatorname{Re} z > 0$). La fonction Γ apparaît donc comme une extrapolation à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ de la fonction factorielle. La formule (6.2.4) nous amène à considérer $\Gamma(z)$ comme infini lorsque $z = -n \in \mathbb{Z}_-$ est un entier négatif ou nul. Comme $\Gamma(1) = 1$, on a l'équivalent

$$(6.2.5) \quad \Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \quad \text{quand } z \rightarrow -n.$$

Les points $z = -n$ sont donc des pôles simples (cf. chapitre IV).

7. Topologie sur l'espace des fonctions holomorphes

Les fonctions holomorphes se comportent particulièrement bien par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Nous introduisons cette dernière et analysons les propriétés fondamentales de convergence des suites de fonctions holomorphes. Rappelons qu'on appelle semi-norme sur un espace vectoriel réel ou complexe E une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ et $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout scalaire λ et tous vecteurs $x, y \in E$.

7.1. Définition de la topologie

Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{C} , on munit l'espace $\mathcal{C}^0(\Omega)$ des fonctions continues à valeurs complexes $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de la famille de semi-normes $(p_K)_{K \subset \Omega}$ suivantes : si K est un compact de Ω et si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, on note $p_K(f) = \sup_K |f|$.

Cette famille de semi-normes (lorsque K décrit les compacts de Ω) fait de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ un « espace vectoriel topologique » : un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les $V_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid p_K(f) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $K \subset \Omega$; de plus, une partie $U \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ est dite ouverte si pour tout élément $f \in U$, il existe un $V_{K,\varepsilon}$ tel que $f + V_{K,\varepsilon} \subset U$. La situation est ici simplifiée du fait que la famille $(p_K)_{K \subset \Omega}$ est une famille filtrante : on entend par là que tout sous-ensemble fini de semi-normes est majoré par une semi-norme de la famille; en effet, il est clair que $\max(p_{K_1}, \dots, p_{K_r}) = p_{K_1 \cup \dots \cup K_r}$.

La topologie ainsi définie sur $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω : une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ si et seulement si f_n converge vers f uniformément sur tout compact K de Ω (ce qui s'exprime en termes des semi-normes par : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_K(f_n - f) = 0$ pour tout K).

On peut bien entendu reprendre ces définitions mot pour mot pour le sous-espace $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ des fonctions holomorphes. On obtient ainsi un espace $(\mathcal{O}(\Omega), (p_K)_{K \subset \Omega})$, qui est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ (c'est-à-dire que sa topologie est la topologie induite par celle de $\mathcal{C}^0(\Omega)$).

Rappelons qu'un espace vectoriel topologique E est *localement convexe* si et seulement si sa topologie peut être définie par une certaine famille (a priori quelconque) de semi-normes, et que l'espace est *métrisable* si et seulement s'il est séparé et si sa topologie peut être définie par une famille au plus dénombrable (p_ν) de semi-normes. On voit que la condition est suffisante en considérant la distance

$$d(x, y) = \sum_{\nu} 2^{-\nu} \min(1, p_\nu(x - y)).$$

Dans l'autre direction, on dispose d'un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts V_ν de 0, qu'on peut supposer convexes et équilibrés (c'est-à-dire que $x \in V_\nu$ et $|\lambda| \leq 1$ impliquent $\lambda x \in V_\nu$). Chaque V_ν est alors la boule unité de la semi-norme « jauge » p_ν telle que $p_\nu(x) = \min\{\lambda > 0; \lambda^{-1}x \in V_\nu\}$.

Dans la situation considérée ci-dessus, la topologie de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ et de $\mathcal{O}(\Omega)$ peut en fait être définie par la famille dénombrable de semi-normes $(p_{K_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ où $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$

est une suite exhaustive de compacts de Ω , i.e. $\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu$, $K_\nu \in K_{\nu+1}^\circ$. En particulier, la topologie de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ et de $\mathcal{O}(\Omega)$ est métrisable.

Rappelons enfin les définitions usuelles concernant les espaces complets et les espaces de Fréchet.

Espaces complets, espaces de Fréchet. Soit E un espace vectoriel topologique.

- (i) On appelle suite Cauchy dans E une suite (x_n) telle que pour tout voisinage V de 0, il existe un entier n_0 tel que $u_p - u_q \in V$ pour $p, q \geq n_0$. Un espace vectoriel topologique métrisable E est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.
- (ii) Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet.

L'espace vectoriel topologique $(\mathcal{C}^0(\Omega), (p_K))$ est un espace de Fréchet (la complétude équivaut au « critère de Cauchy uniforme »). Par ailleurs, il est facile de voir que tout sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.

7.2. Limites uniformes de fonctions holomorphes

Le résultat suivant justifie le fait que la topologie définie précédemment est la « bonne » topologie pour l'étude des fonctions holomorphes.

Théorème. Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{O}(\Omega)$. On suppose que f_n converge vers une fonction complexe f uniformément sur tout compact de Ω . Alors f est holomorphe sur Ω et pour tout entier ℓ , la suite des dérivées $(f_n^{(\ell)})$ converge vers $f^{(\ell)}$ uniformément sur tout compact de Ω .

Démonstration. Évidemment, f est continue comme limite uniforme de fonctions continues. D'autre part, si K est un compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de Ω , on a

$$\forall z \in K^\circ, \quad f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f_n(w)}{w - z} dw.$$

Comme la suite f_n converge uniformément vers f sur le compact ∂K et que $|w - z|$ est minoré par $d(z, \mathbb{C} \setminus K) > 0$, on a par passage à la limite

$$\forall z \in K^\circ, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

En particulier, f est holomorphe sur Ω . Fixons un réel $r > 0$ strictement inférieur à $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Pour tout $z \in K^\circ$, on a :

$$f_n^{(\ell)}(z) = \frac{\ell!}{2i\pi} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f_n(w)}{(w - z)^{\ell+1}} dw \quad \text{et} \quad f^{(\ell)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{\ell+1}} dw.$$

De là, on tire

$$|f_n^{(\ell)}(z) - f^{(\ell)}(z)| \leq \frac{\ell!}{r^\ell} \sup_{\Gamma(z,r)} |f_n - f|.$$

Notons $K_r = \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, K) \leq r\}$. Comme $r < d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, l'ensemble K_r est un compact de Ω et

$$\sup_K |f_n^{(\ell)} - f^{(\ell)}| \leq \frac{\ell!}{r^\ell} \sup_{K_r} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Conséquence. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact, alors $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $F^{(\ell)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\ell)}$.

Le corollaire suivant est essentiellement une reformulation du théorème.

Corollaire. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

- (i) L'espace vectoriel $\mathcal{O}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Fréchet $(\mathcal{C}^0(\Omega), (p_K))$, en particulier $(\mathcal{O}(\Omega), (p_K))$ est un espace de Fréchet.
- (ii) Pour tout entier $\ell \geq 0$, l'opérateur $d^\ell/dz^\ell : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu, et pour tout compact $K \subset \Omega$, tout $r < d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ et tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ on a

$$p_K(f^{(\ell)}) \leq \frac{\ell!}{r^\ell} p_{K_r}(f).$$

7.3. Produits infinis de fonctions holomorphes

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . On note $u_n = \prod_{k=0}^n f_k$ les « produits partiels » associés.

Définition. On dit que le produit infini $\prod f_n$ converge (resp. converge uniformément) si la suite u_n converge (resp. converge uniformément).

Un cas trivial de convergence uniforme du produit infini est celui où le terme général f_n est uniformément majoré en module par une constante $C < 1$ pour n assez grand, auquel cas le produit infini est identiquement nul. On exclura en général ce « cas dénégéré », et on s'intéressera plutôt aux produits infinis de fonctions holomorphes dont le terme général f_n tend uniformément vers 1 sur tout compact K . Dans ce cas, la détermination principale $\text{Log } f_n$ est bien définie sur K pour $n \geq n_0(K)$ assez grand, et il est clair que le produit infini $\prod f_n$ converge si et seulement si la série $\sum \text{Log } f_n$ converge (après que l'on ait éventuellement tronqué les premiers termes non définis). Voici une variante de ce critère.

Théorème. Soit $\prod f_n$ un produit infini de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ sur un ouvert connexe Ω . On suppose que chaque f_n n'est pas identiquement nulle et on écrit $f_n = 1 + g_n$. Si

- (i) $\sum_n |g_n|$ converge uniformément sur tout compact de Ω ,

ou si

- (ii) $\sum_n g_n$ et $\sum_n |g_n|^2$ convergent uniformément sur tout compact de Ω ,

alors le produit infini $\prod f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une limite $P = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ holomorphe sur Ω et non identiquement nulle. De plus, la dérivée logarithmique de P est donnée par

$$\frac{P'}{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f'_n}{f_n}$$

en tout point de Ω qui n'est pas zéro de l'une des fonctions f_n . La convergence de cette série est uniforme sur tout compact K de Ω (si l'on omet les termes en nombre fini pour lesquels f_n s'annule éventuellement sur K).

Démonstration. Soit K un compact de Ω . Dans les deux cas (i) ou (ii), il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\sup_K |g_n| \leq 1/2$. En particulier la fonction $f_n = 1 + g_n$ ne s'annule pas sur K pour $n \geq n_0$ et on peut y écrire

$$\text{Log } f_n = \text{Log}(1 + g_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} g_n^k / k.$$

Ceci est bien légitime puisque la série entière $\text{Log}(1 + w) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} w^k / k$ est de rayon de convergence égal à 1.

Cas (i) : fixons une constante $C > 0$ telle que pour tout $|w| \leq 1/2$, on ait $|\text{Log}(1 + w)| \leq C|w|$. Alors, pour $p, q \geq n_0$, on a

$$\left| \sum_{n=p}^q \text{Log } f_n \right| = \left| \sum_{n=p}^q \text{Log}(1 + g_n) \right| \leq C \sum_{n=p}^q |g_n|.$$

Ainsi, la suite $v_n = \sum_{k=n_0}^n \text{Log } f_k$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur K , donc converge uniformément sur K vers une fonction holomorphe $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \text{Log } f_k$ d'après le paragraphe précédent. On en déduit que

$$u_n = \prod_{k=n_0}^n f_k = \exp v_n$$

converge uniformément sur K° vers la fonction holomorphe $\exp v$, et donc le produit infini $\prod f_n$ converge sur K° vers la fonction holomorphe non identiquement nulle $P = (\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k) \exp v$. Comme le compact K est arbitraire, la convergence a bien lieu sur Ω tout entier, uniformément sur les compacts.

Cas (ii) : fixons une constante $C' > 0$ telle que pour tout $|w| \leq 1/2$, on ait $|\text{Log}(1 + w) - w| \leq C'|w|^2$. Alors, pour $p, q \geq n_0$, on a

$$\left| \sum_{n=p}^q \text{Log } f_n - \sum_{n=p}^q g_n \right| = \left| \sum_{n=p}^q \text{Log}(1 + g_n) - g_n \right| \leq C' \sum_{n=p}^q |g_n|^2.$$

On en déduit à nouveau que la suite $v_n = \sum_{k=n_0}^n \text{Log } f_k$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur K et on conclut comme précédemment.

Dans les deux cas, la dérivée logarithmique de $P = (\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k) \exp v$ est donnée par

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f'_k}{f_k} + v \quad \text{où} \quad v' = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\text{Log } f_k)' = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k}. \quad \square$$

Remarque. Sous les hypothèses du théorème, la démonstration ci-dessus montre que l'ensemble des zéros de $\prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ est égal à l'ensemble $\bigcup_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}(0)$.

Traisons ici un exemple de produit infini.

Une formule d'Euler. Notons

$$P(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Si $f_n(z) = 1 - z^2/n^2\pi^2$ et $g_n(z) = -z^2/n^2\pi^2$, la série $\sum g_n$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{C} , si bien que grâce au théorème précédent, le produit infini converge et $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Les zéros de P sont exactement les $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, chacun étant de multiplicité un. On en déduit que la fonction $g(z) = P(z)/\sin z$ est une fonction entière sans zéros. On calcule maintenant la dérivée logarithmique de P . D'après le théorème principal de ce paragraphe on a

$$(7.3.1) \quad \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right)$$

sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Cette formule montre en outre que la fonction P'/P est périodique de période π : en effet $P'/P = \lim_{N \rightarrow +\infty} s_N$ avec $s_N(z) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - n\pi}$ et

$$s_N(z + \pi) - s_N(z) = -\frac{1}{z - N\pi} + \frac{1}{z + (N + 1)\pi} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \cotg z,$$

admet également π comme période, et c'est de plus une fonction entière (g étant entière et sans zéros).

Soit $A > 0$ fixé et

$$B_A = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, |y| \geq A\}.$$

Sur B_A , la fonction \cotg admet la borne $|\cotg z| \leq \coth A$, comme on le voit à partir des majorations

$$|\cotg z|^2 = \frac{|\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y|^2}{|\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \leq \frac{1 + \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y} = \coth^2 y$$

(pour la deuxième égalité, on utilise la formule $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$). Par ailleurs, pour $z = x + iy \in B_A$, il vient $|1/z| \leq |1/y| \leq 1/A$ et

$$\left| \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} \right| = \frac{2|z|}{|(n\pi - x) - iy| |(n\pi + x) + iy|} \leq \frac{2|z|}{n^2\pi^2/4}.$$

Ainsi, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour tout $z \in B_A$, on ait $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2|z|$. Quitte à changer les constantes, cette inégalité s'étend à la bande $B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$, qui est la réunion de B_A et d'un rectangle compact. La π -périodicité montre que l'inégalité $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2|z|$ a lieu sur \mathbb{C} tout entier. Par les inégalités de Cauchy (§ 3.2), la fonction g'/g est un polynôme (de degré inférieur ou égal à un) périodique, donc constant. Mais (7.3.1) montre que P'/P est une fonction impaire, donc la fonction constante g'/g est impaire, si bien qu'elle doit être identiquement nulle. Par suite g est constante, égale à $g(0) = 1$. On en déduit les formules, dues à Euler :

$$\begin{aligned} \sin z &= z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \\ \cotg z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right), \\ \frac{1}{\sin^2 z} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \end{aligned}$$

La deuxième identité, valable sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, est obtenue par dérivation logarithmique de la première, tandis que la troisième est obtenue en prenant l'opposé de la dérivée de la deuxième.

7.4. Familles normales, théorème de Montel

Rappelons que dans un espace vectoriel topologique E , une partie A de E est dite *bornée* si pour tout voisinage V de 0, il existe un réel positif λ tel que $A \subset \lambda V$. Si la topologie de E est définie par une famille \mathcal{F} de semi-normes p , il suffit de faire décrire à V le système fondamental de voisinages $V_{p,\varepsilon} = \{x \in E; p(x) < \varepsilon\}$, et on voit donc que A est bornée si et seulement si $\sup_{x \in A} p(x)$ est borné pour toute semi-norme $p \in \mathcal{F}$. Il est clair que toute partie compacte $A \subset E$ est fermée et bornée. La réciproque, cependant, est en général fautive, comme le montre l'exemple de la boule unité fermée dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$; en fait, un théorème bien connu de Riesz affirme qu'un espace normé est de Montel seulement dans le cas de la dimension finie.

Dans le cas de $E = \mathcal{O}(\Omega)$, on utilise souvent la terminologie suivante, introduite par P. Montel lui-même au début du 20^e siècle.

Définition. Une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de fonctions $f_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega)$ est dite *normale* si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$. Autrement dit, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ est normale si et seulement si pour tout compact K , il existe une constante C_K telle que pour tout $\alpha \in I$ on ait $\sup_K |f_\alpha| \leq C_K$.

Une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ normale est donc une famille de fonctions *uniformément bornées sur tout compact*.

Théorème de Montel. *Dans $\mathcal{O}(\Omega)$, étant donné une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ formant une famille normale, on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente sur tout compact. Autrement dit, les familles normales sont relativement compactes dans $\mathcal{O}(\Omega)$, ou encore, pour toute partie $A \subset \mathcal{O}(\Omega)$, A est bornée dans $\mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si A est relativement compacte dans $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Définition. *Un espace de Fréchet dont les parties fermées bornées sont compactes est appelé espace de Montel.*

Le théorème de Montel affirme donc que $\mathcal{O}(\Omega)$ est un espace de Montel ! On notera que la notion d'espace de Montel n'est réellement intéressante que pour les espaces de Fréchet généraux, car d'après le théorème de Riesz un espace normé est de Montel si et seulement s'il est de dimension finie ; dans ce cas, la propriété de Montel implique en effet que la boule unité fermée doit être compacte.

Démonstration du théorème de Montel. Soit K un compact de Ω . Choisissons $r < \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ en sorte que les compacts

$$K_r = \{z \in \mathbb{C}; d(z, K) \leq r\} \subset K_{2r}$$

soient encore contenus dans Ω . Nous avons alors $M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_{2r}} |f_n(z)| < +\infty$ par hypothèse. D'après le (ii) du Corollaire 7.2, il vient

$$M_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_r} |f'_n(z)| \leq \frac{M_0}{r} < +\infty.$$

Soient $z_1, z_2 \in K$. Si $d(z_1, z_2) \leq r$, alors le segment $[z_1, z_2]$ est tout entier contenu dans K_r et le théorème des accroissements finis entraîne

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq M_1 d(z_1, z_2).$$

Si $d(z_1, z_2) \geq r$, l'inégalité $|f_n(z_i)| \leq M_0$ entraîne de toute manière

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq \frac{2M_0}{r} d(z_1, z_2).$$

Par suite, les fonctions $f_n : K \rightarrow \overline{D}(0, M_0)$ sont lipschitziennes avec une même constante de Lipschitz $k = 2M_0/r$ (elles forment donc une « suite équicontinue »). Le théorème d'Ascoli (cf. Appendice, § 7.5) montre qu'on peut extraire de la suite (f_n) une sous-suite uniformément convergente sur K . Soit maintenant $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω . D'après ce qui précède, il existe une partie infinie $S_0 \subset \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(f_n)_{n \in S_0}$ converge uniformément sur K_0 . Par récurrence sur ν , on construit une suite de parties infinies emboîtées

$$S_\nu \subset S_{\nu-1} \subset \cdots \subset S_1 \subset S_0 \subset \mathbb{N}$$

telles que la sous-suite $(f_n)_{n \in S_\nu}$ converge uniformément sur K_ν . Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit n_i le $(i+1)$ -ième élément de S_i (procédé dit « d'extraction d'une sous-suite diagonale »). Alors (f_{n_i}) est une sous-suite de $(f_n)_{n \in S_\nu}$ à partir du rang $i = \nu$, et on en déduit donc que la sous-suite (f_{n_i}) converge uniformément sur tous les compacts K_ν . \square

7.5. Appendice: théorème d'Ascoli

Il s'agit d'un résultat général de nature topologique que nous allons formuler dans le cadre général des espaces métriques. Si (E, δ) et (F, δ') sont des espaces métriques, rappelons que par définition une suite d'applications $\varphi_p : E \rightarrow F$ est dite équicontinue s'il existe un « module de continuité » commun à toutes les fonctions de la suite, autrement dit une fonction croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0_+} \omega(t) = 0$ et

$$\delta'(\varphi_p(x), \varphi_p(y)) \leq \omega(\delta(x, y))$$

pour tout indice p et tous $x, y \in E$. Des exemples standards de modules de continuité sont $\omega(t) = kt$, on dit alors qu'on a affaire à des fonctions k -lipschitziennes, ou encore $\omega(t) = Ct^\alpha$, $C \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, auquel cas on dit que les fonctions sont höldériennes d'ordre α .

Théorème (Ascoli). *On suppose que E, F sont des espaces métriques compacts. Soit $\varphi_p : E \rightarrow F$ une suite équicontinue d'applications de E dans F . Alors on peut extraire de (φ_p) une sous-suite $(\varphi_{(p_n)})$ uniformément convergente sur E .*

Soit $\text{EqCont}_\omega(E, F)$ l'ensemble des applications $E \rightarrow F$ continues admettant ω comme module de continuité. Une autre manière d'exprimer le théorème d'Ascoli est la suivante.

Corollaire. *Si E, F sont compacts, alors $(\text{EqCont}_\omega(E, F), d)$ muni de la distance uniforme*

$$d(\varphi, \psi) = \sup_{x \in E} \delta'(\varphi(x), \psi(x))$$

est un espace métrique compact.

Démonstration. L'idée est de construire par récurrence des parties infinies

$$S_0 = \mathbb{N} \supset S_1 \supset \dots \supset S_{n-1} \supset S_n \supset \dots$$

telles que la sous-suite $(\varphi_p)_{p \in S_n}$ ait des oscillations de plus en plus faibles.

Supposons S_{n-1} construite, $n \geq 1$. Comme E, F sont compacts, il existe des recouvrements finis de E (resp. de F) par des boules ouvertes $(B_i)_{i \in I}$, resp. $(B'_j)_{j \in J}$, de rayon $\frac{1}{n}$. Notons $I = \{1, 2, \dots, N\}$ et x_i le centre de B_i . Soit p un indice fixé. Pour tout $i = 1, \dots, N$ il existe un indice $j = j(p, i)$ tel que $\varphi_p(x_i) \in B'_{j(p, i)}$. On considère l'application

$$S_{n-1} \longrightarrow J^N, \quad p \longmapsto (j(p, 1), \dots, j(p, N)).$$

Comme S_{n-1} est infini et que J^N est fini, l'un des éléments $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in J^N$ admet pour image réciproque une partie infinie de S_{n-1} : on note S_n cette partie. Ceci signifie que pour tout $p \in S_n$ on a $(j(p, 1), \dots, j(p, N)) = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ et donc $\varphi_p(x_i) \in B'_{\ell_i}$. En particulier

$$(\forall p, q \in S_n) \quad \delta'(\varphi_p(x_i), \varphi_q(x_i)) \leq \text{diam } B'_{\ell_i} \leq 2/n.$$

Soit $x \in E$ un point quelconque. Il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$, d'où $\delta(x, x_i) < \frac{1}{n}$. L'hypothèse que les φ_p sont continues de module de continuité ω entraîne

$$\delta'(\varphi_p(x), \varphi_p(x_i)) < \omega(1/n), \quad \delta'(\varphi_q(x), \varphi_q(x_i)) < \omega(1/n).$$

L'inégalité triangulaire implique alors ($\forall p, q \in S_n$)

$$\delta'(\varphi_p(x), \varphi_q(x)) \leq 2/n + 2\omega(1/n).$$

Désignons par p_n le n -ième élément de S_n . Pour $N \geq n$ on a $p_N \in S_N \subset S_n$, donc

$$\delta'(\varphi_{p_n}(x), \varphi_{p_N}(x)) \leq 2/n + 2\omega(1/n). \quad (*)$$

Ceci entraîne que $\varphi_{p_n}(x)$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $x \in E$. Comme F est compact, F est aussi complet, donc $\varphi_{p_n}(x)$ converge vers une limite $\varphi(x)$. Quand $N \rightarrow +\infty$, l'inégalité (*) implique à la limite $d(\varphi_{p_n}, \varphi) \leq 2/n + 2\omega(1/n)$. On voit donc que φ_{p_n} converge uniformément vers φ . Il est facile de voir que $\varphi \in \text{EqCont}_\omega(E, F)$. \square

8. Exercices

8.1. Intégrales de Fresnel.

a) Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

b) En intégrant la fonction $f(z) = \exp(-z^2)$ sur le bord ∂K_R du secteur angulaire

$$K_R = \{z = r e^{i\theta}; 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/4\},$$

calculer les valeurs de I et J à partir de l'intégrale de Gauss

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(qu'on peut par exemple calculer en évaluant l'intégrale double $G^2 = \iint_{x,y \geq 0} e^{-x^2-y^2} dx dy$). *Indication* : l'intégrale de f sur le quart de cercle bordant K_R est majorée par

$$\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin t} dt$$

et on pourra utiliser la minoration $\sin t \geq 2t/\pi$, $t \in [0, \pi/2]$.

8.2. Noyau de Bergman. Soit f holomorphe dans $D(0, R)$, montrer que pour tout $\xi \in D(0, R)$ on a

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,R)} \frac{f(z)}{(R^2 - \bar{z}w)^2} dx dy \quad \forall w \in D(0, R).$$

Indication : passer en coordonnées polaires $z = x + iy = r e^{i\theta}$ et développer $1/(1 - \bar{z}w/R^2)$ en série.

8.3. Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n(z)| d\lambda(z) = 0,$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} . Montrer qu'alors la suite f_n converge uniformément vers 0 sur tout compact de Ω . *Indication :* utiliser le noyau de Bergman sur les disques $D(z_0, r) \subset \Omega$.

8.4. Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, R)$ (si $R = +\infty$, on considère que $D(z_0, R) = \mathbb{C}$).

- a) Montrer que f admet sur ce disque une primitive holomorphe F , unique à l'addition près d'une constante complexe.
- b) On suppose que f ne s'annule pas sur $D(z_0, R)$. Montrer l'existence d'une fonction holomorphe g sur $D(z_0, R)$ telle que $e^g = f$. Étudier l'unicité de g . *Indication :* utiliser une primitive de f'/f .
- c) Si f ne s'annule pas sur $D(z_0, R)$ et si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer à l'aide de b) l'existence d'une fonction holomorphe h telle que $h^m = f$.

8.5. Lemme de la partie réelle. (Voir aussi l'exercice 3.7 du Chapitre I). Soit f une fonction holomorphe non constante sur le disque $D(0, R)$, telle que $\operatorname{Re} f(z) \leq M$.

- a) On pose $g(z) = (f(z) - f(0))/(M - \operatorname{Re} f(0))$ et $h = g/(2 - g)$. Montrer que g et h sont holomorphes sur $D(0, R)$ et qu'on a les inégalités $\operatorname{Re} g \leq 1$, $|h| \leq 1$.
- b) À l'aide du lemme de Schwarz, démontrer que g satisfait la majoration $|g(z)| \leq 2|z|/(R - |z|)$ et en déduire que

$$|f(z)| \leq |f(0)| + (M - \operatorname{Re} f(0)) \frac{2|z|}{R - |z|}.$$

8.6. Soit f une fonction entière.

- a) Montrer, en utilisant l'exercice 8.5, que s'il existe deux constantes positives A et B positives telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $\operatorname{Re} f(z) \leq A(1 + |z|)^B$, alors f est un polynôme de degré au plus B .

Soit f une fonction entière non constante d'ordre fini, i.e. il existe A et B tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $|f(z)| \leq \exp(A(1 + |z|)^B)$.

- b) Montrer que si f ne s'annule pas, alors il existe un polynôme P de degré $d \leq B$ tel que $f = e^P$. *Indication* : combiner a) avec 8.4 b).
- c) Montrer que soit f est surjective, soit f «rate» une valeur a , mais alors pour tout $\omega \neq a$, l'équation $f(z) = \omega$ possède une infinité de racines (on peut voir ce résultat comme le cas particulier du théorème de Picard pour les fonctions d'ordre fini).

8.7. Théorème de Thron. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction entière f telle que $f \circ f = \exp$. On raisonne par l'absurde : soit donc f une telle fonction.

- a) Montrer que l'image de f est \mathbb{C}^* .
- b) Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que $f = \exp \circ g$.
- c) Montrer qu'il existe une constante C telle que $g \circ f = \text{Id} + C$.
- d) Conclure.

8.8. Soit f holomorphe dans le disque unité. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $f(1/n) \in \mathbb{R}$. Montrer que les coefficients de la série de Taylor de f en 0 sont réels.

8.9. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe propre (i.e. $|f(z)| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$).

- a) Montrer que f s'annule nécessairement, et en déduire que f est en fait surjective. *Indication* : considérer les fonctions $1/f$ et $\varphi_a \circ f$, $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.
- b) Prouver que f n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{D}$, et que si m_1, \dots, m_N sont leurs multiplicités respectives, alors il existe une constante λ de module 1 telle que $f = \lambda \prod_{1 \leq j \leq N} \varphi_{a_j}^{m_j}$.
- c) Soit $m = \sum m_j$. Alors, pour tout $w \in \mathbb{D}$ l'équation $f(z) = w$ admet exactement m racines dans \mathbb{D} (comptées avec multiplicité). *Indication* : si m_w est le nombre de racines pour w , alors $m_w \leq m = m_0$. Échanger les rôles de 0 et w à l'aide d'un automorphisme du disque.

8.10. Théorème des 3 cercles de Hadamard. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de la couronne $C = \{z; r_1 < |z| < r_2\}$. Pour $r_1 \leq r \leq r_2$, on note $M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que la fonction $\log M_f(r)$ est une fonction convexe de la variable $\log r$, i.e. pour tout $r_1 \leq r \leq r_2$:

$$M_f(r)^{\log(r_2/r_1)} \leq M_f(r_1)^{\log(r_2/r)} M_f(r_2)^{\log(r/r_1)}.$$

Indication : on pourra appliquer le principe du maximum à $z^p f(z)^q$, où p est dans \mathbb{Z} et q est dans \mathbb{N} .

8.11. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0, r)$, telle que $f(0)$ ne soit pas nul. On note $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de f !) telle que le nombre de zéros de f dans $D(0, r/3)$ est inférieur ou égal à $C \log(M/|f(0)|)$. *Indication* : considérer la fonction $g(z) = f(z) / \prod_{m=1}^n (1 - z/z_m)$ où les z_m sont les zéros de f dans $D(0, r/3)$.

8.12. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité, continue jusqu'au bord. On suppose qu'il existe $M_1 > 0$ tel que si z est de module 1, de partie imaginaire positive, alors $|f(z)| \leq M_1$. On suppose de même qu'il existe $M_2 > 0$ tel que si z est de module 1, de partie imaginaire négative, alors $|f(z)| \leq M_2$. Montrer que $|f(0)| \leq \sqrt{M_1 M_2}$.

8.13. Soit une suite (f_n) de fonctions holomorphes convergeant simplement vers f dans Ω . Montrer en se servant du théorème de Baire, que dans tout disque U de Ω , il existe un disque ouvert V inclus dans U sur lequel $\sup_n |f_n|$ est borné. En déduire que f est holomorphe sur un ouvert dense de Ω .

9. Problèmes

9.1. Version originale du théorème de Bloch-Landau. Le but de cet exercice est de montrer que l'image $f(D(z_0, r))$ d'un disque $D(z_0, r) \subset \mathbb{R}$ par une fonction holomorphe f contient un disque ouvert de rayon $r|f'(z_0)|/16$.

On dira qu'une fonction est holomorphe sur un disque fermé si elle est holomorphe dans un voisinage de ce disque. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$, telle que $|f'(0)| \geq 1$. Il s'agit de montrer que $f(\mathbb{D})$ contient un disque ouvert de rayon $1/16$. On pose :

$$M(\rho) = \max_{|z| \leq \rho} |f'(z)|, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

a) Si k est un entier positif ou nul, on pose $r_k = 1 - 2^{-k}$. Montrer que l'ensemble des entiers $k \geq 0$ tels que $2^{-k} M(r_k) \geq 1$ est fini et non vide. On note k_0 son plus grand élément.

Pour la suite, on pose $r = 2^{-k_0}$.

b) Établir qu'il existe z_0 avec $|z_0| = 1 - r$ et $|f'(z_0)| \geq 1/r$.

c) Soit $g(z) = f(z + z_0) - f(z_0)$. Pour $|z| \leq r/2$, montrer que $|g'(z)| < 2/r$, puis que $|g(z)| \leq 1$.

d) Soit w un nombre complexe tel que $g(z) \neq w$ pour tout $|z| \leq r/2$. Utiliser 8.4 pour justifier l'existence d'une fonction h holomorphe sur $D(0, r/2)$ telle que $h^2 = 1 - g/w$.

e) On pose $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Prouver les inégalités

$$|a_1| = |h'(0)| \geq \frac{1}{2r|w|}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \leq 1 + \frac{1}{|w|}.$$

f) Établir que $|w| \geq 1/16$ et conclure.

9.2. Principe de Phragmén-Lindelöf. Le but de ce problème est de montrer que le principe du maximum peut s'appliquer à certaines fonctions holomorphes définies sur des ouverts non bornés, sous des hypothèses adéquates de croissance à l'infini. Ce principe est connu sous le nom de *principe de Phragmén-Lindelöf*. Soit α un réel strictement supérieur à $1/2$, et U_α la région du plan complexe comprise entre les demi-droites d'origine 0 et d'angles $\pm\pi/2\alpha$.

- a) Montrer que pour tout réel γ , on peut définir dans U_α une unique fonction holomorphe z^γ qui étend la fonction x^γ de \mathbb{R}_+^* .
- b) Soit f une fonction holomorphe dans U_α , continue sur \overline{U}_α . On suppose que f est bornée par une constante $M \geq 0$ sur les demi-droites d'origine 0 et d'angles $\pm\pi/2\alpha$, et que f satisfait une majoration de la forme $|f(z)| \leq Ce^{|z|^\beta}$ pour $|z| \geq R_0$ assez grand. Montrer que f est bornée par M dans U_α . *Indication* : appliquer le principe du maximum à la fonction $f_\varepsilon(z) = f(z)e^{-\varepsilon z^\gamma}$, $\gamma \in]\beta, \alpha[$, sur le secteur circulaire compact $\overline{U}_\alpha \cap \overline{D}(0, R)$.

9.3. Dans tout l'exercice, on pose

$$G(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

- a) Montrer que G définit une fonction entière, et que G admet sur \mathbb{C} tout entier une majoration de la forme

$$|G(z)| \leq A \exp(B|z| \ln(1 + |z|)), \quad A, B \geq 0.$$

Indication : considérer le développement limité de $w \mapsto (1+w)e^{-w}$ à l'origine, et scinder le produit infini en $\prod_{n \leq |z|} \times \prod_{n > |z|}$.

- b) Montrer que :

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

- c) Relation avec la fonction Γ d'Euler.

- Comparer les zéros de $G(z)$ et $G(z-1)$, et montrer qu'il existe une fonction entière γ telle que :

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z).$$

- Exprimer la dérivée logarithmique G'/G sous forme de la somme d'une série uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.
- Montrer que γ est constante. *Indication* : calculer $\gamma'(z)$. On notera encore γ cette constante (traditionnellement appelée constante d'Euler).
- Montrer que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

- d) Soit $h(z) = ze^{\gamma z}G(z)\Gamma(z)$ où Γ est la fonction Γ d'Euler. Montrer que h est périodique de période 1 et s'étend en une fonction entière sur \mathbb{C} tout entier, n'ayant aucun zéro, telle que $h(0) = 1$. Démontrer à l'aide de a) et de la périodicité que l'on a une majoration de la forme

$$|h(z)| \leq A' \exp(B' |\operatorname{Im} z| \ln(1 + |\operatorname{Im} z|)), \quad A', B' \geq 0.$$

- e) En utilisant 8.6 b), montrer que h est constante. En déduire que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

ainsi que la formule dite «formule des compléments»

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

9.4. Lemme de Koenigs. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda$ où $0 < |\lambda| < 1$.

- a) On désigne par $f^{[n]}$ l'itérée n -ième $f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe un disque $D(0, r_\varepsilon)$ assez petit, sur lequel

$$(|\lambda| - \varepsilon)^n |z| \leq |f^{[n]}(z)| \leq (|\lambda| + \varepsilon)^n |z|$$

pour tout $z \in D(0, r_\varepsilon)$.

- b) On pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f^{[n]}$. A partir de l'estimation $|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$, montrer que la série $\sum(\varphi_{n+1} - \varphi - n)$ est normalement convergente sur $D(0, r_\varepsilon)$, si ε est choisi assez petit.

- c) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe φ au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z).$$

(on a donc $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda z$ près de 0, on dit que f est conjuguée à l'homothétie de rapport λ par φ).

9.5. Ensembles de Julia et de Mandelbrot. Pour $c \in \mathbb{C}$, on note f_c le polynôme $f_c(z) = z^2 + c$. Soit K_c l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite des itérées $|f_c^{[n]}(z)|$ ne tend pas vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$: on appelle cet ensemble l'ensemble de Julia rempli de f_c .

- a) Déterminer K_0 .
 b) Montrer que :

$$K_c = \{z \in \mathbb{C}; \forall n \geq 0, |f_c^{[n]}(z)| \leq 1 + |c|\}.$$

En déduire que K_c est compact.

- c) Montrer que le complémentaire de K_c est connexe (on dit que K_c est un compact *plein* ou *sans trous*).

Soit $M = \{c \in \mathbb{C}; 0 \in K_c\}$. Cet ensemble est l'*ensemble de Mandelbrot* de la famille de polynômes quadratiques $(f_c)_{c \in \mathbb{C}}$.

- d) Montrer qu'il existe une suite de polynômes P_n telle que :

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C}; P_n(c) \text{ ne tend pas vers l'infini}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C}; \forall n \geq 0, |P_n(c)| \leq 1 + |c|\}. \end{aligned}$$

- e) Montrer que $M \subset \overline{D}(0, 2)$ et que M est un compact plein.

Chapitre III

Points singuliers, fonctions méromorphes et résidus

Ce chapitre constitue ce qui peut être considéré à bon droit comme le cœur de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous établissons l'existence du développement en série de Laurent pour les fonctions holomorphes définies sur une couronne, puis nous développons la théorie des points singuliers et de leurs résidus. Les singularités qui sont des pôles donnent lieu à ce qu'on appelle des « fonctions méromorphes », qui sont aux fonctions holomorphes ce que les fractions rationnelles sont aux polynômes. La formule dite des résidus permet de relier les intégrales sur un contour à la somme des résidus aux points intérieurs à ce contour. Ceci donne un moyen puissant pour évaluer des intégrales qui ne peuvent pas s'obtenir par des calculs de primitives explicites.

Notations. On désignera par $C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ la couronne ouverte de centre z_0 , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 (avec $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$). On convient que la couronne est vide si $R_1 \geq R_2$. On notera que l'on n'exclut pas le cas où le rayon intérieur R_1 est nul, ni le cas où le rayon extérieur R_2 vaut $+\infty$.

1. Développement en série de Laurent

1.1. Définitions

On appelle *série de Laurent* de la variable complexe z toute série de la forme

$$(1.1.1) \quad S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

avec des coefficients a_n complexes et $z \in \mathbb{C}^*$. On peut bien entendu décomposer une telle série en deux séries entières indexées sur les entiers positifs ou nuls, en posant $p = -n$ si $n < 0$ et $w = 1/z$:

$$(1.1.2) \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{p > 0} a_{-p} w^p.$$

On dit que la série de Laurent converge si les deux séries entières ainsi obtenues convergent. Si $R \in [0, +\infty]$ est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

et R' le rayon de convergence de la série $\sum_{p < 0} a_{-p} w^p$, alors la série de Laurent (1.1.1) converge pour tout nombre complexe z tel que $1/R' < |z| < R$, c'est-à-dire sur la couronne ouverte $C(0, 1/R', R)$ (celle-ci est vide si $1/R' \geq R$, c'est-à-dire si $R' \leq 1/R$). D'après la théorie des séries entières, on voit que la convergence est uniforme sur toute couronne compacte $\overline{C}(0, r_1, r_2) \Subset C(0, 1/R', R)$. Les sommes $F(z)$ et $G(w)$ des séries entières sont des fonctions holomorphes sur leurs disques ouverts de convergence respectifs, donc la somme $S(z) = F(z) + G(1/z)$ de la série de Laurent est bien une fonction holomorphe sur la couronne $C(0, 1/R', R)$, ayant pour dérivée complexe

$$S'(z) = F'(z) - \frac{1}{z^2} G'(1/z).$$

Comme $G'(w) = \sum_{p > 0} p a_{-p} w^{p-1}$, on voit, d'après le théorème I.1.3 de dérivation terme à terme des séries entières, que les séries de Laurent sont également dérivables terme à terme sur la couronne ouverte où elles convergent, et que

$$(1.1.3) \quad S'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$$

avec convergence uniforme sur toute couronne compacte $\overline{C}(0, r_1, r_2) \Subset C(0, \frac{1}{R'}, R)$.

1.2. Existence du développement en série de Laurent

Le théorème suivant garantit l'existence du développement en série de Laurent dans de nombreuses situations.

Théorème. *Si f est holomorphe dans une couronne $C(z_0, R_1, R_2)$ du plan complexe avec $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, alors f y est développable comme somme d'une série de Laurent de la variable $z - z_0$, soit*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

avec convergence normale sur tout compact de $C(z_0, R_1, R_2)$. De plus, pour tout $r \in]R_1, R_2[$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient a_n est déterminé de manière unique par l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-nit} dt.$$

Démonstration. Quitte à effectuer un changement d'origine et à poser $z' = z - z_0$, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$. Considérons une couronne compacte

$$K = \overline{C}(0, r_1, r_2) \Subset C(0, R_1, R_2). \quad R_1 < r_1 < r_2 < R_2.$$

Son bord ∂K est constitué de la réunion des deux cercles $\Gamma(0, r_1)$ $\Gamma(0, r_2)$, le premier étant orienté positivement et le second négativement. La formule de Cauchy II.2.3 donne par conséquent pour tout $z \in C(0, r_1, r_2)$ l'égalité

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Pour $w \in \Gamma(0, r_2)$ nous avons $|z| < r_2 = |w|$ et nous écrivons donc

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-z/w} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}.$$

Cependant, lorsque $w \in \Gamma(0, r_1)$ nous avons $|z| > r_1 = |w|$ et nous écrivons alors plutôt

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-w/z} = -\frac{1}{z} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^p = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{w^p}{z^{p+1}}.$$

Dans les deux cas il y a convergence normale sur le cercle $w = r_j e^{it}$, puisque les modules des quotients $|z/w| = |z|/r_2$ (resp. $|w/z| = r_1/|z|$) sont strictement inférieurs à 1 et indépendants de $t \in [0, 2\pi]$. Par substitution dans les intégrales et interversion des symboles \int et \sum , la propriété de convergence uniforme entraîne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw\right) z^n + \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_1)} f(w) w^p dw\right) z^{-p-1}.$$

Si nous introduisons $n = -p-1 \leq -1$ (soit encore $p = -n-1$), ceci peut se récrire $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad \text{si } n \geq 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_1)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad \text{si } n \leq -1.$$

Nous affirmons que l'intégrale $\int_{\Gamma(0, r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ est en fait indépendante de $r \in]R_1, R_2[$. En effet, le théorème de Cauchy appliqué à la fonction holomorphe $g(w) = \frac{f(w)}{w^{n+1}}$ et au compact

$$K = \overline{C}(0, r_1, r_2) \Subset C(0, R_1, R_2)$$

implique $\int_{\partial K} g(w) dw = \int_{\Gamma(0, r_2)} g(w) dw - \int_{\Gamma(0, r_1)} g(w) dw = 0$ pour tous $r_1 < r_2$ dans l'intervalle $]R_1, R_2[$. Ceci démontre la validité du développement en série de Laurent dans toute la couronne $C(0, R_1, R_2)$, du fait que $r_1 \in]R_1, R_2[$ peut être pris arbitrairement proche de R_1 et $r_2 \in]R_1, R_2[$ arbitrairement proche de R_2 . L'expression de a_n comme coefficient de Fourier s'obtient en posant $w = r e^{it}$, $dw = i r e^{it} dt$. Enfin, si une autre série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$ convergerait vers f sur $C(0, R_1, R_2)$, il y aurait convergence normale sur tout compact et la formule intégrale donnant les coefficients montrerait aussitôt que $a_n = b_n$. \square

Remarque. Il résulte de la convergence de la série de Laurent sur la couronne $C(z_0, R_1, R_2)$ que le rayon de convergence R'_2 de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ est au moins égal à R_2 , tandis que celui de la série entière $\sum_{p > 0} a_{-p} w^p$ vérifie $\rho'_1 \geq 1/R_1$ (en posant $w = 1/(z - z_0)$). Si l'une des inégalités sur les rayons de convergence est stricte, on voit que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur une couronne $C(z_0, 1/\rho'_1, R'_2)$ contenant strictement $C(z_0, R_1, R_2)$.

1.3. Point singuliers, pôles, points singuliers essentiels

Nous examinons ici la situation d'une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert V d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, sauf peut-être au point z_0 lui-même.

Définition. Si V est un voisinage ouvert d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(V \setminus \{z_0\})$ on dit que

(1.3.1) z_0 est un point régulier de f si f peut se prolonger en une fonction holomorphe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$.

(1.3.2) z_0 est un point singulier de f dans le cas contraire, c'est-à-dire si f ne peut se prolonger en une application holomorphe \tilde{f} définie sur V tout entier.

Dans les deux cas, on peut supposer que $V = D(z_0, \varepsilon)$ est un disque assez petit, de sorte que $V \setminus \{z_0\} = C(z_0, 0, \varepsilon)$ est un couronne de rayon intérieur nul et de rayon extérieur ε . Ceci entraîne que f admet un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

avec rayon de convergence au moins ε pour la partie positive $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ (et un rayon de convergence $+\infty$ pour la partie négative $\sum_{p > 0} a_{-p} w^p$). Si f peut se prolonger en une fonction holomorphe \tilde{f} sur le disque $D(z_0, \varepsilon)$, on a un développement en série entière

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n \quad \text{sur } D(z_0, \varepsilon).$$

D'après l'unicité des coefficients de la série de Laurent, nous devons avoir dans ce cas $a_n = b_n$ pour $n \geq 0$ et $a_n = 0$ pour $n < 0$. Par conséquent :

Proposition. Une fonction $f \in \mathcal{O}(V \setminus \{z_0\})$ admet z_0 comme point régulier si et seulement si les coefficients a_n de sa série de Laurent en z_0 vérifient $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

Corollaire. Une fonction $f \in \mathcal{O}(V \setminus \{z_0\})$ admet z_0 comme point régulier si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0 .

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, car si f se prolonge holomorphiquement en z_0 alors ce prolongement est continu et donc borné au voisinage de z_0 . Inversement, si $|f(z)| \leq M$ sur un certain disque $D(z_0, \delta)$ assez petit, alors en choisissant $r < \delta$, l'intégrale donnant a_n comme coefficient de Fourier implique

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt \right| \leq M r^{-n},$$

(par un raisonnement analogue à celui des inégalités de Cauchy), d'où il résulte que $a_n = 0$ pour $n < 0$ en faisant tendre r vers 0. \square

Supposons maintenant que z_0 soit un *point singulier*. La partie négative $\sum_{n < 0} a_n(z - z_0)^n$ est alors non identiquement nulle. Deux cas se présentent suivant que cette série se réduit ou non à une somme finie.

Cas d'un « pôle ». Si la partie négative $\sum_{n < 0} a_n(z - z_0)^n$ se réduit à une somme finie, soit m le maximum des entiers positifs $|n|$ pour lesquels $a_n \neq 0$, de sorte que

$$(1.3.3) \quad f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$$

On dit alors que z_0 est un *pôle d'ordre m* (ou *pôle de multiplicité m*) de f et que

$$\frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}$$

est la *partie polaire* de f . Il est immédiat dans ce cas que

$$(1.3.4) \quad a_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

et que $f(z)$ admet au voisinage de z une majoration de la forme

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z - z_0|^m}$$

pour une certaine constante $C > 0$. De plus, on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, où

$$g(z) = a_{-m} + a_{1-m}(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^{n+m} + \dots$$

est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 vérifiant en outre $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$, de sorte que $f(z) \sim a_{-m}(z - z_0)^{-m}$ quand z tend vers z_0 .

Cas d'une « singularité essentielle ». Si la partie négative $\sum_{n < 0} a_n(z - z_0)^n$ est une série infinie, la fonction $g_m(z) = (z - z_0)^m f(z)$ est non bornée au voisinage de z_0 , et ceci quel que soit l'entier $m > 0$, sinon g_m se prolongerait en une fonction holomorphe en z_0 et on verrait alors à partir du développement en série entière $g_m(z) = \sum_{n \geq 0} b_n(z - z_0)^n$ que la série de Laurent de $f(z) = g_m(z)/(z - z_0)^m$ aurait, contrairement à l'hypothèse, une partie négative finie. On dit alors que z_0 est un *point singulier essentiel*, ou *singularité essentielle* de f .

Exemple. La fonction $f(z) = \exp(1/z)$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* et admet en $z_0 = 0$ une singularité essentielle. Sa série de Laurent est en effet trivialement donnée par

$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

dont la partie négative est infinie.

Le résultat suivant fournit une autre dichotomie permettant de distinguer les points singuliers essentiels des pôles.

Théorème (Weierstrass-Casorati). *Soit $f : V \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe admettant un point singulier en z_0 .*

- (i) *Si z_0 est un pôle, alors $|f(z)| \rightarrow +\infty$ lorsque $z \rightarrow z_0$.*
- (ii) *Si z_0 est un point singulier essentiel, alors tout point de \mathbb{C} est valeur d'adhérence de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow z_0$, autrement dit $f(W \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ pour tout voisinage W de z_0 .*

Démonstration. (i) résulte de (1.3.4). Si la conclusion de (ii) était inexacte, il existerait un voisinage connexe W de z_0 tel que $f(W \setminus \{z_0\}) \neq \mathbb{C}$, par suite si $a \in \mathbb{C} \setminus f(W \setminus \{z_0\})$ nous aurions $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in W \setminus \{z_0\}$. Ceci implique que la fonction holomorphe $g(z) = 1/(f(z) - a)$ vérifie $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ sur $W \setminus \{z_0\}$, par conséquent g se prolonge en une fonction holomorphe non nulle sur W . Nous avons alors $f(z) = a + 1/g(z)$. Si g admet un zéro d'ordre m en z_0 , il est facile de voir que f admet un pôle d'ordre m , donc la singularité de f n'est pas une singularité essentielle. \square

2. Fonctions méromorphes

2.1. Définitions

De même que les fonctions rationnelles sont par définition des quotients de polynômes, on introduit les fonctions méromorphes comme étant (au moins localement) des quotients arbitraires de fonctions holomorphes :

Définition. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On dit que f est méromorphe sur Ω si pour tout point $z_0 \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert connexe V de z_0 et des fonctions holomorphes g, h dans V telles que $f = g/h$ dans V , avec h non identiquement nulle. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω .*

Théorème. *Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe si et seulement si elle est holomorphe en dehors d'une suite de points singuliers (a_k) localement finie dans Ω , et si tous ses points singuliers sont des pôles.*

Démonstration. Si f s'écrit $f = g/h$ avec $g, h \in \mathcal{O}(V)$, l'hypothèse que h soit non identiquement nulle implique l'existence d'un disque $D(z_0, \varepsilon) \subset V$ et d'une factorisation $h(z) = (z - z_0)^m u(z)$ sur où u est holomorphe et sans zéros sur $D(z_0, \varepsilon)$. On en déduit $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) u(z)^{-1}$ avec une fonction $g(z) u(z)^{-1}$ qui est holomorphe sur $D(z_0, \varepsilon)$. Par suite z_0 est un pôle d'ordre $\leq m$. Inversement, si f n'admet que des points singuliers isolés qui sont des pôles, on a déjà vu que f pouvait s'écrire sous la forme $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ avec g holomorphe au voisinage d'un tel point z_0 , donc f est méromorphe. \square

Exemples. Les fractions rationnelles $P(z)/Q(z)$ sont des fonctions méromorphes

sur \mathbb{C} tout entier. La fonction $f(z) = (\sin(1/\pi z))^{-1}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus A$ où $A = \{0\} \cup \{1/k; k \in \mathbb{N}^*\}$. Les points $z = 1/k$ sont des pôles, donc f est méromorphe sur \mathbb{C}^* , mais f n'est pas méromorphe sur \mathbb{C} du fait que la suite des pôles $\{1/k\}$ n'est pas localement finie au voisinage de 0.

Définition. On appelle *diviseur* sur un ouvert Ω de \mathbb{C} une application $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que l'ensemble $\text{Supp}(\delta) = \{z \in \Omega; \delta(z) \neq 0\}$ forme une suite localement finie $\{a_\nu\}$ dans Ω . Si $m_\nu = \delta(a_\nu)$, on dit que m_ν est la multiplicité du point a_ν dans le diviseur δ . On convient de noter

$$\delta = \sum_{\nu} m_\nu [a_\nu]$$

un tel diviseur.

L'ensemble des diviseurs a une structure de groupe additif (preuve évidente laissée au lecteur...)

Théorème et définition. Si Ω est un ouvert et si f est une fonction méromorphe qui ne s'annule identiquement dans aucune composante connexe de Ω , alors l'ensemble Z des zéros de f est une suite localement finie dans Ω , l'ensemble P des pôles de f est également une suite localement finie. On associe à f le diviseur

$$\text{div}(f) = \sum_{\nu} m_\nu [a_\nu]$$

où $\{a_\nu\} = Z \cup P$, $m_\nu > 0$ si a_ν est un zéro, $m_\nu < 0$ si a_ν est un pôle, $|m_\nu|$ étant la (valeur absolue) de la multiplicité du zéro ou du pôle.

Il est clair que le produit de deux fonctions méromorphes f_1, f_2 est méromorphe, et que $\text{div}(f_1 f_2) = \text{div}(f_1) + \text{div}(f_2)$ si aucune ne s'annule identiquement dans l'une des composantes connexes de Ω . De même, si f est une telle fonction méromorphe, alors $1/f$ est méromorphe et $\text{div}(1/f) = -\text{div}(f)$. Une fonction méromorphe f non identiquement nulle est holomorphe si et seulement si $\text{div}(f) \geq 0$.

Démonstration. Le théorème résulte aussitôt du fait que les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont isolés. □

2.2. Théorème de factorisation de Weierstrass

Pour tout entier $p \geq 0$, on introduit la fonction W_p appelée *facteur principal de Weierstrass d'ordre p* , telle que

$$(2.2.1) \quad W_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right) \quad \text{si } p \geq 1$$

et $W_0(z) = 1 - z$ si $p = 0$. Par construction, la fonction W_p admet $z = 1$ comme zéro simple, et on a au point $z = 0$ le développement en série entière

$$\text{Log } W_p(z) = \text{Log}(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p} = - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

de rayon de convergence 1, où Log est la détermination principale du logarithme. Ceci entraîne la majoration

$$(2.2.2) \quad |\text{Log } W_p(z)| \leq \frac{1}{p+1} \frac{|z|^{p+1}}{1-|z|},$$

et en particulier $|\text{Log } W_p(z)| \leq 2^{-p}$ si $|z| \leq 1/2$.

Théorème. *Pour tout diviseur $\delta = \sum m_\nu [a_\nu] \geq 0$ dans un ouvert Ω , il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\text{div}(f) = \delta$, autrement dit une fonction holomorphe f qui admet pour zéros précisément les points a_ν avec les entiers m_ν comme multiplicités.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que les points a_ν sont tous non nuls (sinon, on a par exemple $a_0 = 0$ et on ajoutera un facteur supplémentaire z^{m_0} à la fonction construite pour les $(a_\nu)_{\nu \geq 1}$).

On commence par démontrer le résultat dans le cas plus simple où $\Omega = \mathbb{C}$. Dans ce cas, l'hypothèse que la suite (a_ν) est localement finie signifie que $\lim |a_\nu| = +\infty$. On pose alors

$$f(z) = \prod_{\nu \in \mathbb{N}} W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)^{m_\nu}.$$

D'après les observations du II 7.3, il suffit de montrer que la série

$$\sum m_\nu |\text{Log } W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)|$$

(convenablement tronquée) converge uniformément sur tout compact. Or, si $z \in \overline{D}(0, R)$, il existe un entier ν_0 tel que $|a_\nu| \geq 2R$ pour $\nu \geq \nu_0$. L'inégalité (2.2.2) nous donne alors

$$|\text{Log } W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)| \leq 2^{-(\nu+m_\nu)}$$

pour $z \in \overline{D}(0, R)$ et $\nu \geq \nu_0$, ce qui implique la convergence uniforme de la série $\sum m_\nu |\text{Log } W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)|$ sur $\overline{D}(0, R)$, et donc celle du produit infini $f(z) = \prod W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)^{m_\nu}$ sur tout compact de \mathbb{C} . Il est clair que f a les zéros prescrits.

Dans le cas d'un ouvert $\Omega \neq \mathbb{C}$, l'hypothèse de locale finitude signifie que $\max(|a_\nu|, d(a_\nu, \partial\Omega)^{-1}) \rightarrow +\infty$. On effectue une partition $\mathbb{N} = P \cup Q$ des indices en sorte que

$$\nu \in P \Leftrightarrow |a_\nu| \geq d(a_\nu, \partial\Omega)^{-1}, \quad \nu \in Q \Leftrightarrow |a_\nu| < d(a_\nu, \partial\Omega)^{-1}.$$

On a alors $\lim_{P \ni \nu \rightarrow +\infty} |a_\nu| = +\infty$. Le raisonnement précédent montre que la fonction $g(z) = \prod_{\nu \in P} W_{\nu+m_\nu}(z/a_\nu)^{m_\nu}$ converge (sur \mathbb{C} tout entier), et qu'elle admet pour zéros les points $(a_\nu)_{\nu \in P}$ avec multiplicités m_ν .

Nous avons d'autre part $\lim_{Q \ni \nu \rightarrow +\infty} d(a_\nu, \partial\Omega) = 0$. Choisissons un point $b_\nu \in \partial\Omega$ tel que $|a_\nu - b_\nu| = d(a_\nu, \partial\Omega)$. On pose alors

$$h(z) = \prod_{\nu \in Q} W_{\nu+m_\nu}((a_\nu - b_\nu)/(z - b_\nu))^{m_\nu},$$

en se basant sur le fait que $W_{\nu+m_\nu}((a_\nu - b_\nu)/(z - b_\nu))$ s'annule en l'unique point $z = a_\nu$ pour lequel $(a_\nu - b_\nu)/(z - b_\nu) = 1$. Soit K une partie compacte de Ω et $\delta = d(K, \partial\Omega)$. Pour $\nu \geq \nu_0$ assez grand, nous avons $|a_\nu - b_\nu| = d(a_\nu, \partial\Omega) \leq \delta/2$, donc

$$\left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right| \leq \frac{\delta/2}{\delta} = \frac{1}{2} \quad \text{pour } z \in K.$$

Ceci implique $|\text{Log } W_{\nu+m_\nu}((a_\nu - b_\nu)/(z - b_\nu))| \leq 2^{-(\nu+m_\nu)}$ sur K , et on conclut comme précédemment que le produit infini h converge uniformément sur tout compact de Ω , avec les $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Q}}$ comme zéros. La fonction $f = gh$ répond à la question. \square

Remarque. Le choix des indices $\nu + m_\nu$ dans la preuve du théorème de factorisation de Weierstrass est souvent inutilement précautionneux. Par exemple, si (a_ν) est une suite localement finie de points de \mathbb{C} telle que

$$\sum \frac{m_\nu}{|a_\nu|^{p+1}} < +\infty,$$

alors le produit infini $\prod W_p(z/a_\nu)^{m_\nu}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} , sans qu'il soit besoin de faire tendre les indices p vers l'infini. Ceci résulte de (2.2.2), qui implique la majoration

$$|\text{Log } W_p(z/a_\nu)| \leq \frac{|z|^{p+1}}{|a_\nu|^{p+1}}$$

pour $z \in \overline{D}(0, R)$ et $|a_\nu| \geq 2R$. En particulier, si la série $\sum \frac{m_\nu}{|a_\nu|}$ converge, alors $\prod (1 - z/a_\nu)^{m_\nu}$ est la solution du problème.

Corollaire. *Si f est une fonction méromorphe dans un ouvert Ω de \mathbb{C} , il existe une écriture globale de f comme fraction $f = g/h$, où g et h sont des fonctions holomorphes dans Ω , et où h admet pour seuls zéros les pôles de f , et comme multiplicités les multiplicités correspondantes des pôles.*

Démonstration. Considérons le diviseur $\delta = \text{div}(f)$, que nous écrivons sous la forme

$$\delta = \sum_{\nu \in Z} m_\nu [a_\nu] + \sum_{\nu \in P} m_\nu [a_\nu]$$

où $\{a_\nu\}_{\nu \in Z}$ est l'ensemble de zéros ($m_\nu > 0$), et $\{a_\nu\}_{\nu \in P}$ est l'ensemble des pôles ($m_\nu < 0$). On peut appliquer le théorème de Weierstrass pour trouver une fonction holomorphe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ dont le diviseur est $\delta_- = \sum_{\nu \in P} |m_\nu| [a_\nu]$. Il est alors évident que le produit $g = fh$ est holomorphe dans Ω , et que g a pour diviseur $\delta_+ = \sum_{\nu \in Z} m_\nu [a_\nu]$. \square

Corollaire. *Si Ω est un ouvert connexe, alors l'espace des fonctions holomorphes $\mathcal{O}(\Omega)$ constitue un anneau intègre, et $\mathcal{M}(\Omega)$ est son corps des quotients.*

3. Formule des résidus

3.1. Définition et invariance

On considère ici une fonction holomorphe f sur un voisinage pointé $V \setminus \{z_0\}$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ (présentant ou non un point singulier au point z_0). On lui associe la 1-forme holomorphe $\beta = f(z)dz$ sur $V \setminus \{z_0\}$.

Définition. On appelle *résidu en z_0 de la 1-forme holomorphe β définie sur $V \setminus \{z_0\}$, la valeur de l'intégrale*

$$(3.1.1) \quad \text{Res}(\beta, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, r)} \beta,$$

calculée sur un "petit cercle" tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset V$.

D'après le Théorème 1.2, on a aussi

$$(3.1.2) \quad \text{Res}(f(z)dz, z_0) = \text{coefficient } a_{-1} \text{ de la série de Laurent de } f \text{ en } z_0.$$

Le résidu est *nul* si z_0 est un point régulier, comme il résulte du théorème de Cauchy. En pratique, dans le cas où f est méromorphe en z_0 , soit $f = u/v$, on calcule des développements limités (i.e. des développements en série tronqués) de u et v en z_0 , et on en déduit celui de f . Dans le cas d'un pôle simple pour lequel $u(z_0) \neq 0$, $v(z_0) = 0$ et $v'(z_0) \neq 0$ on a bien entendu

$$v(z) \sim v'(z_0)(z - z_0), \quad f(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \sim \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}(z - z_0)^{-1}.$$

On a donc en général

$$(3.1.3) \quad \text{Res}\left(\frac{u(z)}{v(z)}dz, z_0\right) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \quad \text{si } v(z_0) = 0, v'(z_0) \neq 0$$

(puisque le point z_0 est en fait régulier si $u(z_0) = 0$). On remarquera qu'il n'est pas nécessaire d'intégrer sur un cercle pour obtenir le résidu. En fait, si $\overline{U} \subset V$ est un voisinage compact de z_0 possédant un bord ∂U de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on a aussi

$$\text{Res}(\beta, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \beta$$

puisque le théorème de Cauchy appliqué au compact $K = \overline{U} \setminus D(z_0, r) \subset V \setminus \{z_0\}$ implique

$$0 = \int_{\partial K} \beta = \int_{\partial U} \beta - \int_{\Gamma(z_0, r)} \beta$$

pour r assez petit. De là on déduit la propriété fondamentale d'invariance qui suit.

Invariance par biholomorphisme. Si $\beta = f(z)dz$ est une 1-forme holomorphe avec un point singulier éventuel en z_0 et si $z = \varphi(w)$ est un changement de variable

biholomorphe d'un voisinage de w_0 sur un voisinage de z_0 , avec $z_0 = \varphi(w_0)$, alors la forme $\varphi^*\beta = f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$ obtenue par substitution de variable vérifie

$$(3.1.4) \quad \text{Res}(\varphi^*\beta, w_0) = \text{Res}(\beta, z_0).$$

Démonstration. En effet, pour W voisinage à bord \mathcal{C}^1 assez petit de w_0 , l'ouvert image $U = \varphi(W)$ est un voisinage à bord \mathcal{C}^1 de z_0 , et on a

$$\text{Res}(\varphi^*\beta, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(\varphi(w))\varphi'(w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f(z)dz = \text{Res}(\beta, z_0)$$

par changement de variable dans l'intégrale curviligne. Pour être tout à fait complet, il faut noter que l'orientation directe du bord est préservée du fait de l'orientation positive de la différentielle de φ . \square

3.2. Formule des résidus

Soit f une fonction qu'on suppose holomorphe sur un ouvert Ω , sauf peut-être en une suite de points isolés. On a alors la formule fondamentale suivante.

Formule des résidus. *On suppose que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_\nu\}$ où $\{a_\nu\}$ est une suite localement finie dans Ω . Alors pour tout compact K à bord de classe \mathcal{C}^1 tel que $\partial K \cap \{a_\nu\} = \emptyset$, l'intégrale de la 1-forme $\beta = f(z)dz$ est donnée par*

$$\int_{\partial K} \beta = 2\pi i \sum_{a_\nu \in K} \text{Res}(\beta, a_\nu).$$

Démonstration. La preuve est une conséquence quasi-immédiate du théorème de Cauchy. Les hypothèses entraînent en effet que $K \cap \{a_\nu\}$ est constituée d'un nombre fini de points qui n'appartiennent pas au bord ∂K . Il existe des rayons $r_\nu > 0$ tel que $\overline{D}(z_\nu, r_\nu) \subset K^\circ$, et alors $K' = K \setminus \bigcup \overline{D}(z_\nu, r_\nu)$ est un compact à bord \mathcal{C}^1 au voisinage duquel f est holomorphe. On a donc

$$0 = \int_{\partial K'} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz - \sum_{a_\nu \in K} \int_{\Gamma(a_\nu, r_\nu)} f(z)dz,$$

ce qui équivaut à la formule. \square

4. Technologie de calcul des intégrales à l'aide de la formule des résidus

L'objet de cette section est d'expliquer comment la formule des résidus peut être utilisée pour évaluer certaines intégrales mettant en jeu des fonctions holomorphes, même dans des situations où l'on n'est pas capable d'explicitement des primitives de ces fonctions. Il arrive aussi assez souvent que le calcul d'une primitive soit possible, mais que la formule des résidus conduise au résultat de façon beaucoup plus rapide.

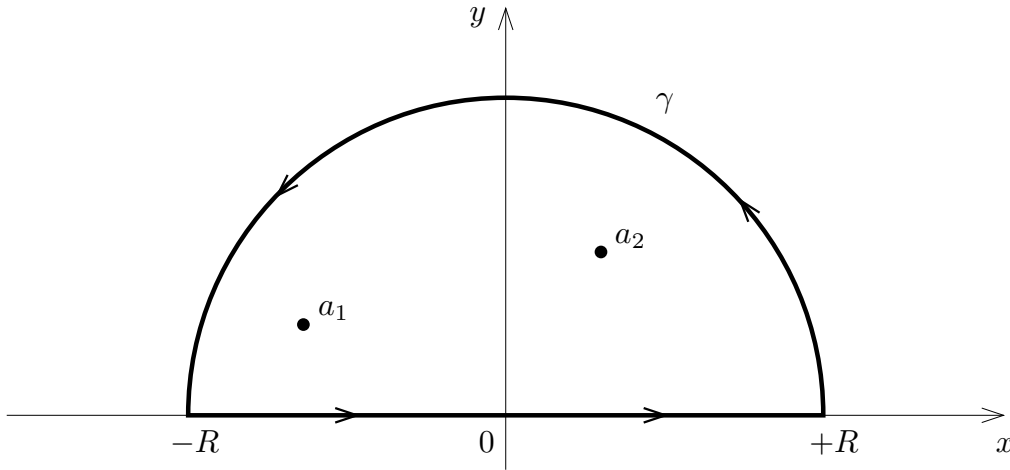
4.1. Intégrales de fractions rationnelles sur $]-\infty, +\infty[$

On se propose de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ où $f(x) = P(x)/Q(x)$ est une fraction rationnelle sans pôle sur l'axe réel. Soit c le rapport des coefficients directeurs des polynômes P et Q et $d = \deg Q - \deg P$. Comme on a $R(x) \sim cx^{-d}$ à l'infini, l'intégrale converge absolument si et seulement si $d = \deg Q - \deg P \geq 2$. Pour évaluer l'intégrale, on considère l'intégrale de la forme méromorphe $f(z)dz$ sur le contour γ donné par le bord du demi-disque $K = \overline{D}(0, R) \cap \{\text{Im } z \geq 0\}$, lorsque le rayon R tend vers $+\infty$.

Comme $|f(z)| \sim |c||z|^{-d}$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$, l'intégrale sur le demi-cercle $\Gamma(0, R) \cap \{\text{Im } z \geq 0\}$ admet une majoration

$$\left| \int_{\Gamma(0,R) \cap \{\text{Im } z \geq 0\}} f(z) dz \right| \leq \pi R (|c| + 1) R^{-d} = CR^{1-d}$$

pour R assez grand, de sorte que cette intégrale tend vers 0.



Comme

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma(0,R) \cap \{\text{Im } z \geq 0\}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_j \in K} \text{Res}(f(z) dz, a_j),$$

on en déduit à la limite quand $R \rightarrow +\infty$

$$(4.1.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}(f(z) dz, a_j).$$

On aurait pu également considérer le demi-disque situé dans le demi-plan inférieur $\{\text{Im } z \leq 0\}$, et dans ce cas, l'orientation de l'axe réel étant opposée, on aurait trouvé

$$(4.1.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) < 0} \text{Res}(f(z) dz, a_j).$$

Dans la situation considérée ici (c'est-à-dire $\deg Q - \deg P \geq 2$, pas de pôles sur l'axe réel), la conjonction des deux formules (4.1.1) et (4.1.2) entraîne que la somme de tous les résidus est nulle. C'est en fait un résultat général, pour peu qu'on veuille bien introduire les notions de singularité, pôle et résidu «à l'infini».

Définition. Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de l'infini, c'est-à-dire sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)} = C(0, R, +\infty)$ pour R assez grand, et soit $\beta = f(z)dz$. Le changement de variable involutif $w = \varphi(z) = 1/z$ nous ramène au cas d'une fonction $w \mapsto f(1/w)$ définie au voisinage de 0, et on a $\varphi^*\beta = -f(1/w)w^{-2}dw$. On définit alors

$$\text{Res}(\beta, \infty) = \text{Res}(-f(1/w)w^{-2}dw, 0),$$

c'est-à-dire que $\text{Res}(\beta, \infty)$ est l'opposé du coefficient de $w = 1/z$ dans le développement en série de Laurent de f . On dit que $z = \infty$ est un pôle de $f(z)$ si $w = 0$ est un pôle de $f(1/w)$, ce qui équivaut à dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices $n \geq 0$ pour lesquels $a_n \neq 0$ dans le développement en série de Laurent de f . Sinon, on dit que ∞ est un point singulier essentiel.

Proposition. Soit $\beta = f(z)dz$, avec $f(z) = P(z)/Q(z)$, une forme méromorphe rationnelle sur \mathbb{C} . Alors la somme des résidus étendus à tous les pôles (y compris le point à l'infini) est nulle :

$$(4.1.3) \quad \sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \text{Res}(\beta, a) = 0.$$

Démonstration. On considère un grand disque $D(0, R)$ contenant tous les pôles autres que le point à l'infini. On a alors

$$\int_{\Gamma(0, R)} \beta = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}} \text{Res}(\beta, a).$$

D'autre part, le changement de variable $w = 1/z$ renverse le sens d'intégration sur le cercle, ce qui donne

$$\int_{\Gamma(0, R)} \beta = - \int_{\Gamma(0, 1/R)} \varphi^*\beta = -2\pi i \text{Res}(\varphi^*\beta, 0) = -2\pi i \text{Res}(\beta, \infty). \quad \square$$

4.2. Cas des fractions rationnelles trigonométriques

On considère ici des intégrales de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$$

où $F(x, y)$ est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Posons $z = e^{it}$. Lorsque t croît de 0 à 2π , z décrit le cercle unité. On a donc

$$I = \int_{\Gamma(0, 1)} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz},$$

de sorte que

$$I = 2\pi \sum_{a \in D(0,1)} \operatorname{Res} \left(F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{z}, a \right).$$

D'après (4.1.3), on peut bien entendu sommer aussi sur les pôles situés hors du disque unité (point infini inclus), et changer le signe.

4.3. Intégrales de Fourier

Le calcul de transformées de Fourier met en jeu des intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

On peut toujours se ramener, quitte à changer le signe de x , à ce que $\omega > 0$. Ce signe est néanmoins à prendre en compte, car si $z = x + iy$, on a $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y}$ et le comportement de l'exponentielle est très différent suivant le signe de ωy . On supposera ici $\omega > 0$ de façon à pouvoir travailler sur le demi-plan supérieur $y \geq 0$.

Proposition. *On suppose que $\omega > 0$ et que $f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe définie au voisinage du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z \geq 0$, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers a_j non réels. On suppose par ailleurs que*

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) = 0.$$

Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_j > 0} \operatorname{Res} (f(z) e^{i\omega z} dz, a_j).$$

Démonstration. On intègre la 1-forme $f(z) e^{i\omega z} dz$ sur le contour déjà décrit au 4.1. Il faut majorer l'intégrale sur le demi-cercle de rayon R . Pour cela, on écrit $z = x + iy = R \cos t + iR \sin t$ et on observe que

$$|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} = e^{-\omega R \sin t}, \quad t \in [0, \pi], \quad \text{et } |dz| = R dt.$$

Ceci donne

$$\left| \int_{\{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \sup_{\{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}} |f(z)| R \int_0^\pi e^{-\omega R \sin t} dt.$$

La concavité de la fonction sin implique $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc on a

$$\int_0^\pi e^{-\omega R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\omega R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\omega R (2/\pi)t} dt = \frac{\pi}{2R\omega}.$$

Ceci donne la majoration explicite

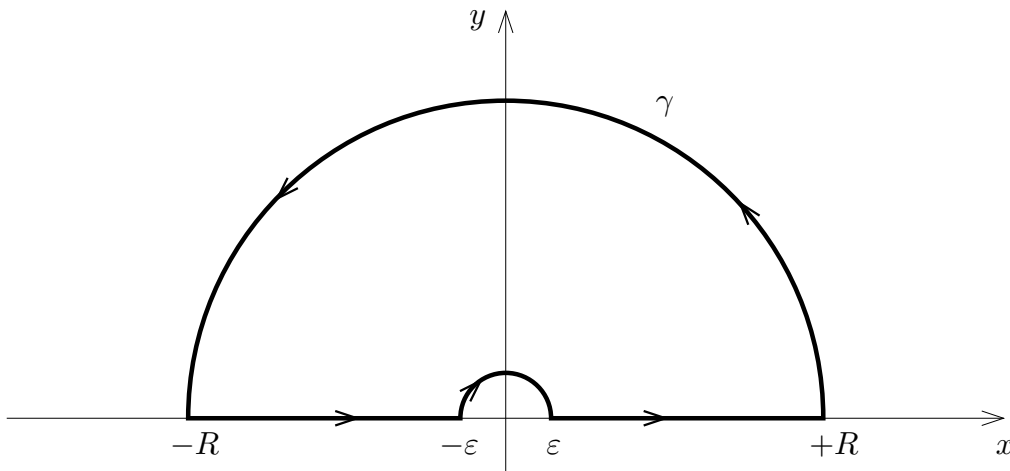
$$(4.3.1) \quad \left| \int_{\{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \frac{\pi}{2\omega} \sup_{\{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}} |f(z)|$$

et l'hypothèse entraîne que cette intégrale tend vers 0. A titre d'application on vérifie immédiatement que $\text{Res}(e^{i\omega z}/(1+z^2), i) = e^{-\omega}/2i$, d'où en général

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\omega|}.$$

Dans ce cas précis, l'intégrande n'admet pas de primitive connue. □

La méthode décrite plus haut fonctionne aussi dans le cas où $f(z)$ admet un ou plusieurs pôles simples sur l'axe réel. On se contentera de traiter l'exemple classique de l'intégrale semi-convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Pour la calculer, on intègre la forme méromorphe e^{iz}/z sur le contour ci-dessous.



Il n'y a aucun pôle à l'intérieur du contour, et $1/z$ tend vers 0 à l'infini, donc d'après (4.3.1) on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\{|z|=\varepsilon, \text{Im } z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = 0.$$

La dernière intégrale du membre de gauche se calcule en effectuant le développement limité

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i + O(z),$$

de sorte que la substitution $z = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ fournit

$$\int_{\{|z|=\varepsilon, \text{Im } z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_0^\pi (\varepsilon^{-1} e^{-it} + i + O(\varepsilon)) \varepsilon i e^{it} dt = -i\pi + 2i\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

On en déduit

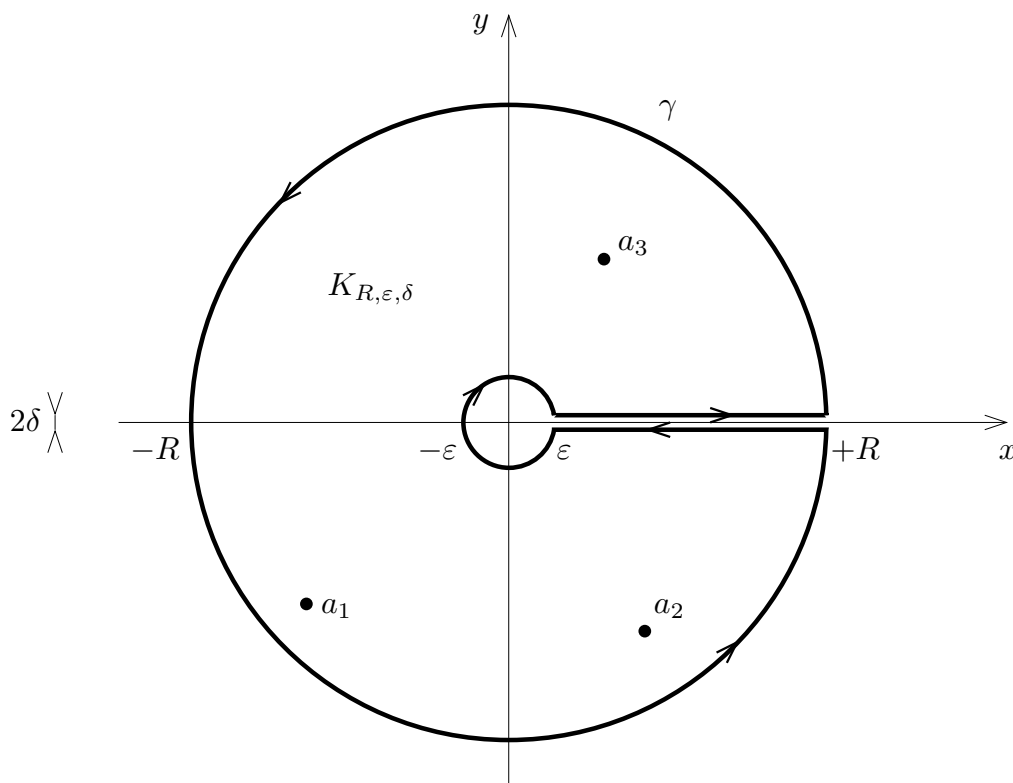
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \\ &= -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{|z|=\varepsilon, \text{Im } z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

4.4. Intégrales contenant un facteur x^α

On s'intéresse ici aux intégrales du type

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)x^\alpha dx$$

où $f(x) = P(x)/Q(x)$ est une fraction rationnelle et α un réel. On supposera que α est non entier, sinon il s'agit de l'intégrale d'une fraction rationnelle qu'on peut intégrer a priori par des méthodes élémentaires (on pourrait aussi atteindre éventuellement le cas d'un entier par passage à la limite sur α). Nous supposons en outre que Q n'admet pas de zéro sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $P(0) \neq 0$ (sinon on factorise la puissance adéquate de x dans $P(x)$). Dans ces conditions, l'intégrale converge au voisinage de 0 dès que $\alpha > -1$, et converge au voisinage de l'infini dès que $\alpha < \deg Q - \deg P - 1$ (on notera que ces conditions ne peuvent se produire simultanément que si $\deg Q > \deg P$).



La méthode de calcul consiste à intégrer la fonction $f(z)z^\alpha$ sur le contour γ constitué d'un arc du cercle $\Gamma(0, R)$ parcouru dans le sens direct, d'un arc du cercle $\Gamma(0, \epsilon)$ parcouru dans le sens indirect, et des segments $[\sqrt{\epsilon^2 - \delta^2}, \sqrt{R^2 - \delta^2}] \pm i\delta$, (avec $\delta \ll \epsilon$ très petit), parcourus dans le sens indiqué par le schéma. Ce contour est le bord d'un compact $K_{R, \epsilon, \delta}$ qui contient tous les pôles de la fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$ si R est assez grand et si $\delta \ll \epsilon$ sont assez petits (ceci n'est vrai bien sûr que parce que $Q(x)$ n'a pas de zéros sur $[0, +\infty[$, par hypothèse).

Un point très important est de choisir la détermination adéquate de la fonction $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$: on choisit ici la détermination définie sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, telle que $0 < \arg z < 2\pi$. Comme α est supposé réel, on a $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ tandis que

$\arg(z^\alpha) = \alpha \arg z$. Dans ces conditions, lorsque δ tend vers 0, la somme des intégrales sur les segments horizontaux $[\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}, \sqrt{R^2 - \delta^2}] \pm i\delta$ converge vers

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_\varepsilon^R f(x)x^\alpha dx.$$

On fait maintenant tendre ε vers 0 et R vers l'infini. La majoration

$$\left| \int_{\Gamma(0,r)} f(z)z^\alpha dz \right| \leq 2\pi r^{1+\alpha} \sup_{\Gamma(0,r)} |f(z)|$$

entraîne que les intégrales sur les cercles $\Gamma(0, \varepsilon)$ et $\Gamma(0, R)$ tendent vers 0 dès lors que $1 + \alpha > 0$ et $1 + \alpha + \deg P - \deg Q < 0$, ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale I en 0 et $+\infty$, respectivement. On aboutit à la formule

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} f(x)x^\alpha dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[} \text{Res}(f(z)z^\alpha, a).$$

4.5. Intégrales contenant un logarithme

Le dernier cas que nous traiterons est celui des intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \ln x f(x) dx$$

où $f(x) = P(x)/Q(x)$ est une fraction rationnelle. L'intégrale converge dès que Q n'a pas de zéros situés sur l'axe réel et que $\deg Q \geq \deg P + 2$. Ici, la méthode consiste à intégrer la forme holomorphe $(\log z - i\pi)^2 f(z) dz$ sur le contour décrit au 4.4 (c'est bien le *carré* d'un logarithme qu'il faut considérer !), avec la détermination telle que $0 < \arg z < 2\pi$. Il n'est pas difficile de voir que les intégrales sur les cercles $\Gamma(0, \varepsilon)$ et $\Gamma(0, R)$ tendent vers 0, sous les hypothèses qui ont été faites. Sur l'axe réel, on est amené à intégrer $(\ln x - i\pi)^2 f(x) dx$ de ε à R , puis $(\ln x + i\pi)^2 f(x) dx$ dans le sens opposé. La somme de ces deux intégrales est égale à

$$-4i\pi \int_\varepsilon^R \ln x f(x) dx.$$

On aboutit alors à la formule

$$\int_0^{+\infty} \ln x f(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[} \text{Res}((\log z - i\pi)^2 f(z), a).$$

On notera que l'intégrale de gauche est encore convergente si f admet un pôle simple au point $x = 1$. Dans ce dernier cas, on évite le point 1 en modifiant un peu le chemin γ , de façon à contourner le point 1 par des arcs situés sur le cercle $\Gamma(1, \varepsilon)$, orientés de manière *indirecte*. Il faut alors évaluer la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma(1,\varepsilon) \cap \{\text{Im } z \geq 0\}} (\text{Log } z - i\pi)^2 f(z) dz + \int_{\Gamma(1,\varepsilon) \cap \{\text{Im } z \leq 0\}} (\text{Log } z + i\pi)^2 f(z) dz$$

où la détermination du logarithme est *cette fois* la détermination principale telle que $\text{Log } 1 = 0$ et $-\pi < \arg z < \pi$. Il est facile de voir que les termes mettant en jeu le logarithme sont bornés en $z = 1$ et ont une contribution nulle du fait que la longueur des arcs tend vers 0, tandis que le terme sans logarithme a pour limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma(1, \varepsilon)} -\pi^2 f(z) dz = -2\pi^3 i \text{Res}(f(z) dz, 1).$$

Il vient alors

$$\int_0^{+\infty} \ln x f(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[} \text{Res}((\log z - i\pi)^2 f(z), a) + \frac{\pi^2}{2} \text{Res}(f(z), 1).$$

On obtient ainsi par exemple $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$. Plus généralement, il serait possible d'évaluer des intégrales de la forme

$$J = \int_0^{+\infty} A(\ln x) f(x) dx$$

où A est un polynôme. Dans cette situation, on intègre la forme holomorphe $B(\log z) f(z) dz$ avec un polynôme B choisi tel que $B(z + 2\pi i) - B(z) = A(z)$, ce qui est toujours possible.

Chapitre IV

Propriétés topologiques et propriétés globales des fonctions holomorphes

Nous introduisons d'abord quelques notions générales de ce qui constitue les rudiments de la topologie algébrique, à savoir la théorie de l'homologie et de l'homotopie – sans aller beaucoup plus loin que les premières définitions. Nous faisons ensuite le lien avec l'intégration des formes fermées et des formes holomorphes, au travers des notions d'intégrales sur des 1-cycles, d'indice d'un lacet par rapport à un point. La démarche s'appuie sur l'invariance homotopique ou homologique des intégrales de formes fermées. Le chapitre s'achève avec le principe de l'argument, le théorème de Rouché. Le chapitre s'achève avec la preuve de quelques résultats globaux importants : théorème d'approximation de Runge, théorèmes de Picard, zéros et factorisation des fonctions entières d'ordre fini.

1. Intégration de formes fermées sur des chaînes

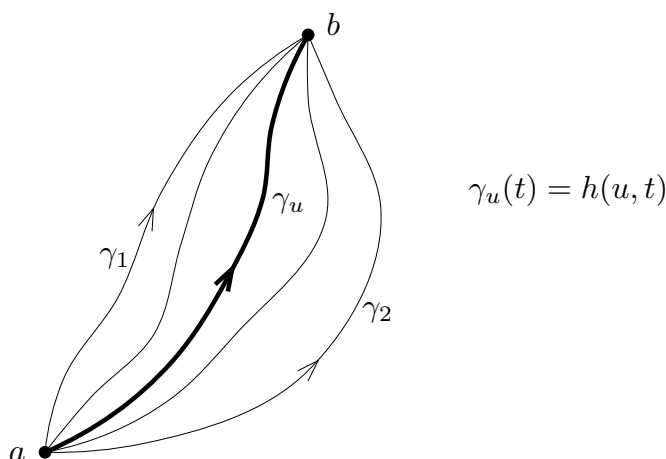
1.1. Homotopie et groupe fondamental

On se place ici dans un espace topologique X a priori arbitraire (le plus souvent, le cas d'un ouvert $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nous suffira dans cet ouvrage...). Le but de cette section est d'étudier la déformation des *chemins* (continus) $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, $t \mapsto \gamma(t)$. On s'intéresse particulier aux *lacets*, c'est-à-dire par définition les chemins fermés ($\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$). En procédant à un changement de paramètre, il n'est pas restrictif de supposer que $[\alpha, \beta] = [0, 1]$.

Définition. Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ sont dit *homotopes* (« avec extrémités fixes »), s'ils ont mêmes extrémités $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$, et s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$(1.1.1) \quad h(0, t) = \gamma_1(t), \quad h(1, t) = \gamma_2(t), \quad h(u, 0) = a, \quad h(u, 1) = b$$

pour tous $t \in [0, 1]$, $u \in [0, 1]$. On dit que h est une homotopie de γ_1 à γ_2 .



Autrement dit $\gamma_u(t) := h(u, t)$ est une *déformation continue* de γ_1 en γ_2 , gardant les extrémités fixes. Il est facile de voir que la relation d'homotopie $\gamma_1 \sim \gamma_2$ est une relation d'équivalence: en effet la relation est clairement réflexive et symétrique, de plus si h' est une homotopie de γ_1 à γ_2 et h'' une homotopie de γ_2 à γ_3 , alors

$$\begin{cases} h(u, t) = h'(2u, t) & \text{si } u \in [0, 1/2] \\ h(u, t) = h''(2u - 1, t) & \text{si } u \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de γ_1 à γ_3 .

Un cas très particulier est celui où $\gamma_2(t) = \gamma_1 \circ \varphi(t)$ est un reparamétrage du chemin γ_1 par une bijection continue croissante $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. On construit alors une homotopie évidente en posant $h(u, t) = \gamma_1((1-u)t + u\varphi(t))$. En particulier, la classe d'homotopie d'un lacet ne dépend pas du paramétrage, pourvu que l'orientation en soit fixée.

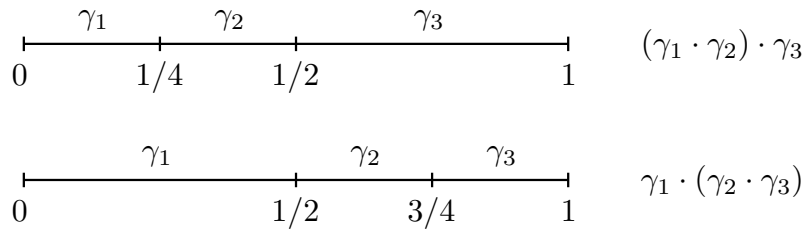
Nous introduisons enfin la notion de *groupe fondamental* de l'espace topologique X relatif à un « point base » $x_0 \in X$. Pour cela, on considère l'ensemble

$$(1.1.2) \quad \pi_1(X, x_0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence d'homotopie} \\ \dot{\gamma} \text{ des lacets d'extrémités } x_0 \end{array} \right\}.$$

On munit $\pi_1(X, x_0)$ d'une structure de groupe (en général non abélien) comme suit : si $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\gamma}_2$ sont deux classes d'équivalence de lacets d'extrémités x_0 , on définit le produit $\dot{\gamma}_1 \cdot \dot{\gamma}_2$ comme étant la classe d'homotopie $\dot{\gamma}$ du lacet composé $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ tel que

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} \gamma(t) = \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \gamma(t) = \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les axiomes des lois de groupe (associativité, existence de l'inverse) sont bien satisfaites – à homotopie près évidemment : l'élément neutre est le chemin constant $e(t) = x_0$, et l'inverse de $\dot{\gamma}$ est donné par le chemin $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ [exercice: montrer que $\gamma \cdot \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma} \cdot \gamma$ sont bien homotopes à e]. Il n'y a pas associativité stricto sensu, comme on le voit sur le schéma ci-dessous montrant les paramétrages de $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ et $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$



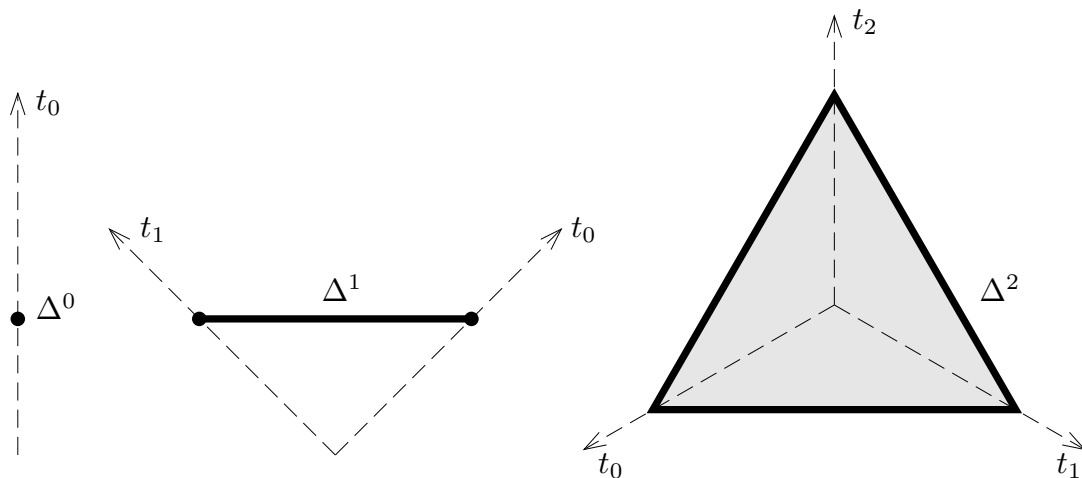
Cependant, il est clair qu'on peut obtenir une homotopie de $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ à $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ en «glissant» la position de l'intervalle central de $[1/4, 1/2]$ en $[1/2, 3/4]$, lorsque le paramètre d'homotopie u croît de 0 à 1.

1.2. Chaînes, cycles, bords et homologie

Nous allons aborder maintenant les rudiments de ce qu'on appelle la théorie de l'homologie singulière, qui permet de considérer des objets de dimension supérieure à 1 et pas seulement des chemins. Pour toute dimension p , on appelle *simplexe fondamental* de dimension p l'ensemble

$$(1.2.1) \quad \Delta_p = \{t = (t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}; t_j \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_p = 1\}.$$

Pour $n = 0, 1, 2$ on obtient successivement



de même Δ^3 est un tétraèdre régulier de dimension 3, etc. Si X est un espace topologique (pour nous, un ouvert $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ suffira...), on pose la

Définition. On appelle ensemble des p -chaînes singulières $C_p(X, \mathbb{Z})$ sur X à coefficients dans \mathbb{Z} l'ensemble des sommes formelles finies

$$(1.2.2) \quad [\sigma] = \sum m_j [\sigma_j], \quad \sigma_j : \Delta_p \rightarrow X,$$

formées avec des coefficients $m_j \in \mathbb{Z}$ et des applications continues arbitraires σ_j (deux à deux distinctes). C'est donc un élément du \mathbb{Z} -module libre ayant pour base l'ensemble $\mathcal{C}^0(\Delta_p, X)$ des applications continues $\Delta_p \rightarrow X$, chacun des éléments de base associé à une telle application σ_j étant noté $[\sigma_j]$ et appelé simplexe de dimension p .

Si $p = 0$, une 0-chaîne est la même chose qu'une combinaison linéaire finie de points $\sum m_j [p_j]$, tandis que si $p = 1$ (cas qui nous intéressera ici le plus), une 1-chaîne peut être identifiée à une combinaison linéaire $\sum m_j [\gamma_j]$ de chemins continus $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow X$, affectés de multiplicités m_j (on convient d'identifier Δ_1 au segment $[0, 1]$ en posant $t_0 = 1 - t$ et $t_1 = t$ si t est la variable paramétrant le chemin). On considère maintenant « l'application bord »

$$\partial_p : C_p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p-1}(X, \mathbb{Z})$$

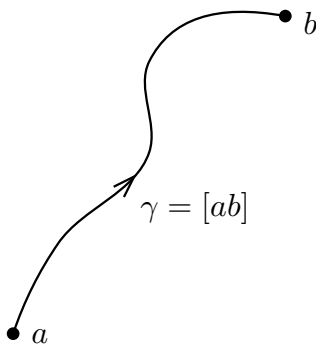
définie comme suit. On pose $C_p(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$ pour $p < 0$, et donc $\partial_p = 0$ pour $p \leq 0$. Pour $p > 0$ on considère chacune des applications « faces »

$$\delta_p^\ell : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p, \quad (t_0, t_1, \dots, t_{p-1}) \mapsto (t_0, t_1, \dots, t_{\ell-1}, 0, t_\ell, \dots, t_{p-1}),$$

qui envoie Δ_{p-1} sur la face d'indice ℓ de Δ_p (c'est-à-dire sur les points dont la coordonnée d'indice ℓ est nulle, $0 \leq \ell \leq p$). Si $\sigma_j : \Delta_p \rightarrow X$ est un simplexe, la composée $\sigma_j \circ \delta_p^\ell : \Delta_{p-1} \rightarrow X$ est la « face d'indice ℓ » de σ_j . On définit ∂_p par

$$(1.2.3) \quad [\sigma] = \sum_j m_j [\sigma_j] \mapsto \partial_p[\sigma] = \sum_j m_j \sum_{\ell=0}^p (-1)^\ell [\sigma_j \circ \delta_p^\ell]$$

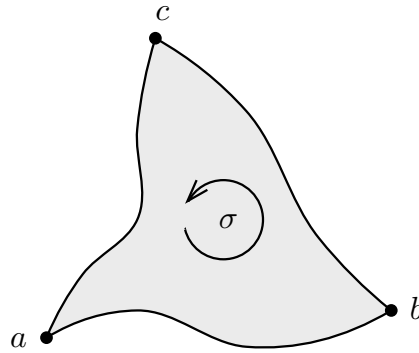
Il est facile de vérifier que ∂_p est \mathbb{Z} -linéaire et que l'on a toujours $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Les cas qui nous intéressent sont les suivants :



exemple de 1-chaîne

$$[\sigma] = [\gamma] = \text{arc orienté } [ab]$$

$$\partial_1[ab] = [b] - [a]$$



exemple de 2-chaîne

$$[\sigma] = \text{triangle orienté } [abc]$$

$$\partial_2[abc] = [bc] - [ac] + [ab]$$

Pour la 2-chaîne $[\sigma]$ figurée sur le schéma, il est clair que

$$\partial_1(\partial_2[\sigma]) = ([c] - [b]) - ([c] - [a]) + ([b] - [a]) = 0.$$

Définition. On appelle ensemble des p -cycles, resp. des p -bords, les sous-groupes de $C_p(X, \mathbb{Z})$ définis par

$$(1.2.4) \quad Z_p(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_p, \quad B_p(X, \mathbb{Z}) = \text{Im } \partial_{p+1}.$$

Autrement dit, un p -cycle est une p -chaîne $[\sigma]$ telle que $\partial_p[\sigma] = 0$, tandis qu'un p -bord est une image $[\sigma] = \partial_{p+1}[\tau]$ d'une $(p + 1)$ -chaîne.

Du fait que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, nous avons toujours $B_p(X, \mathbb{Z}) \subset Z_p(X, \mathbb{Z})$. On définit le p -ième groupe d'homologie de X comme étant le groupe quotient

$$(1.2.5) \quad H_p(X, \mathbb{Z}) = Z_p(X, \mathbb{Z}) / B_p(X, \mathbb{Z}).$$

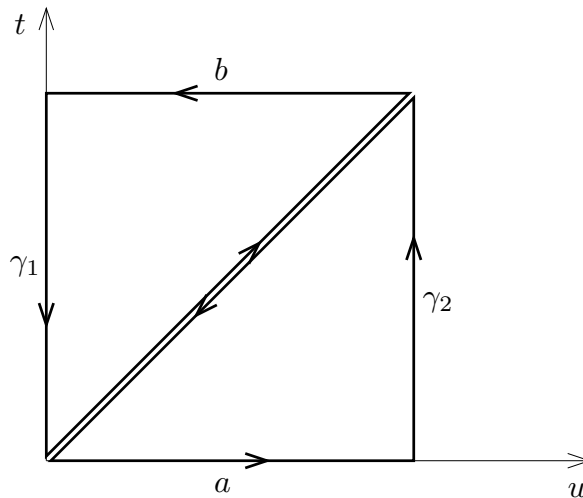
On observera qu'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est un cycle si et seulement si c'est un lacet, c'est-à-dire si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dans ce cas on peut associer à $[\gamma]$ une classe d'équivalence dans $H_1(X, \mathbb{Z})$.

Par ailleurs, un chemin constant $\gamma(t) = c_0$ est toujours un bord (c'est le bord de la 2-chaîne $[c]$ ayant un seul terme constant $c(t_0, t_1, t_2) = c_0$). Si $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ est le chemin γ parcouru en sens inverse, alors $[\gamma] + [\tilde{\gamma}]$ est aussi un bord (le bord de la 2-chaîne $[\sigma]$ telle que $\sigma(t_0, t_1, t_2) = \gamma(t_1)$ vaut $[\tilde{\gamma}] - [\gamma_0] + [\gamma]$ où γ_0 est le chemin constant $\gamma_0(t) = \gamma(0)$, et on a donc $[\tilde{\gamma}] - [\gamma] = \partial_2([\sigma] + [c])$ où c est la 2-chaîne constante $c(t_0, t_1, t_2) = \gamma(0)$). Si γ est un lacet, la classe de $[\tilde{\gamma}]$ dans $H_1(X, \mathbb{Z})$ est donc l'opposée de celle de $[\gamma]$.

Deux cycles $[\gamma']$, $[\gamma'']$ sont dit *homologues*, et on écrira alors $[\gamma'] \sim [\gamma'']$, si $[\gamma'] - [\gamma'']$ est le bord $\partial_2\sigma$ d'une 2-chaîne, c'est-à-dire si $[\gamma']$ et $[\gamma'']$ définissent la même classe d'homologie dans $H_1(X, \mathbb{Z})$. On a le fait important suivant.

Proposition. *Si des chemins γ_1, γ_2 sont homotopes, alors le 1-cycle $[\gamma_2] - [\gamma_1]$ est un bord. En particulier, si γ_1 et γ_2 sont des lacets, alors $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ définissent la même élément de $H_1(X, \mathbb{Z})$.*

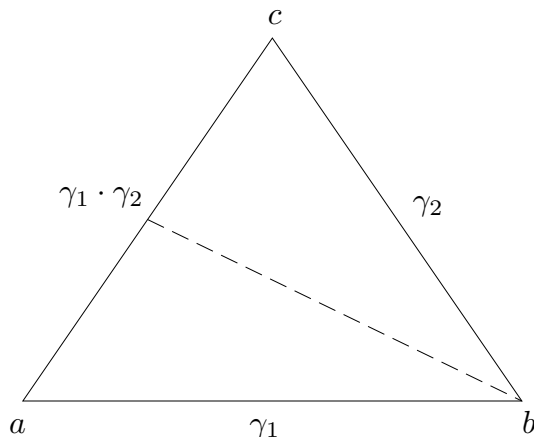
Démonstration. Comme indiqué sur le schéma ci-dessous, on a une homotopie $(u, t) \mapsto h(u, t)$ définie sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, et la différence $[\gamma_2] - [\gamma_1]$ est la somme des bords de deux triangles, plus un certain nombre de bords "triviaux" constitués par des chemins constants et par l'aller-retour sur la diagonale.



D'après la Proposition précédente, on a une application bien définie

$$(1.2.6) \quad \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}), \quad \dot{\gamma} \mapsto [\gamma],$$

et on peut vérifier aisément que c'est un homomorphisme de groupes, autrement dit que la 1-chaîne $[\gamma_1] + [\gamma_2] - [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ est toujours un bord. La preuve peut être visualisée par le schéma ci-dessous :



Si $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ est une 1-chaîne (où figurent seulement les termes tels que $m_j \neq 0$), on définit le *support* de $[\gamma]$ comme étant la réunion

$$\text{Supp}([\gamma]) = \bigcup \text{Im}(\gamma_j)$$

des images des chemins γ_j qui composent la chaîne.

Lemme. *Soit $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ un 1-cycle d'homologie. Alors il existe un 1-cycle $[\hat{\gamma}] = \sum \hat{m}_j [\hat{\gamma}_j]$ ayant même support et définissant la même classe d'homologie que $[\gamma]$, tel que chaque chemin $\hat{\gamma}_j$ composant $[\hat{\gamma}]$ soit un lacet.*

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur $N = \sum |m_j|$. Si $N = 0$, alors $[\gamma] = 0$, et il n'y a rien à montrer. Si $N = 1$, le cycle est constitué d'un seul chemin d'extrémités a et b , on a alors $\partial[\gamma] = [b] - [a] = 0$, par suite $a = b$ et γ est un lacet. Supposons le résultat démontré pour $N' < N$. Quitte à remplacer γ_j par le chemin opposé $\tilde{\gamma}_j$ et m_j par $-m_j$, on peut supposer que tous les coefficients m_j sont positifs. Soient a_j, b_j l'origine et l'extrémité de γ_j , et soit $E = \{a_j\} \cup \{b_j\}$. Nous avons

$$\partial[\gamma] = \sum m_j ([b_j] - [a_j]),$$

ce qui signifie que la somme des coefficients affecté à chaque point $[p]$, $p \in E$, est nul. Fixons un tel point $p \in E$. Comme les coefficients m_j sont positifs, le coefficient de p ne peut être nul que s'il apparaît au moins une fois comme extrémité d'un certain chemin γ_{j_1} et au moins une fois comme origine d'un chemin γ_{j_2} . Si $j_1 = j_2$, alors $[\gamma_{j_1}]$ est un lacet et le cycle $[\gamma'] = [\gamma] - [\gamma_{j_1}]$ a une somme de coefficients $N' = N - 1$, ce qui permet de conclure par l'hypothèse de récurrence. Si $j_1 \neq j_2$, on écrit que $[\gamma_{j_1}] + [\gamma_{j_2}] \sim [\gamma_{j_1} \cdot \gamma_{j_2}]$, de sorte qu'on obtient $[\gamma] \sim [\gamma']$ en remplaçant $[\gamma_{j_1}] + [\gamma_{j_2}]$ par $[\gamma_{j_1} \cdot \gamma_{j_2}]$. Ici encore nous avons $N' = N - 1$, ce qui achève la preuve. \square

Si x_0 est un point quelconque choisi dans la même composante connexe par arcs de X que le lacet $[\hat{\gamma}_j]$, on peut, dans le lemme précédent remplacer $\hat{\gamma}_j$ par un

chemin d'extrémités x_0 , à condition d'oublier l'exigence sur le support de $[\widehat{\gamma}]$. En effet, si $\alpha_j = \beta_j$ sont les extrémités de $\widehat{\gamma}_j$ et si λ_{α_j} est un «chemin de liaison» de x_0 à α_j , on peut remplacer $\widehat{\gamma}_j$ par le lacet d'extrémités x_0 défini par $\lambda_{\alpha_j} \cdot \widehat{\gamma}_j \cdot \widetilde{\lambda}_{\alpha_j}$, puisque

$$[\lambda_{\alpha_j} \cdot \widehat{\gamma}_j \cdot \widetilde{\lambda}_{\alpha_j}] \sim [\lambda_{\alpha_j}] + [\widehat{\gamma}_j] - [\lambda_{\alpha_j}] \sim [\widehat{\gamma}_j].$$

Il résulte alors facilement du lemme précédent que l'homomorphisme (1.2.6) induit un homomorphisme surjectif

$$\bigoplus \pi_1(X, x_j) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}),$$

si l'on choisit exactement un point x_j dans chaque composante connexe par arcs de X . En particulier, l'homomorphisme (1.2.6) est surjectif si X est connexe par arcs (mais il n'a évidemment aucune raison d'atteindre les cycles d'homologie situés hors de la composante connexe par arcs de x_0 , si X n'est pas connexe par arcs). On notera qu'on peut trouver des espaces X connexes par arcs pour lesquels $\pi_1(X, x_0)$ n'est pas un groupe abélien (par exemple $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$). Dans ce cas, l'homomorphisme surjectif (1.2.6) a nécessairement un noyau non trivial puisque celui-ci doit contenir le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x_0)$. Lorsque X est connexe par arcs, un théorème classique dû à Hurewicz affirme qu'en fait (1.2.6) induit un isomorphisme

$$(1.2.7) \quad \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \xrightarrow{\cong} H_1(X, \mathbb{Z})$$

par passage au quotient par le sous-groupe des commutateurs, c'est-à-dire que le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$ est l'abélianisé du groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$.

1.3. Formes exactes et fermées (en degré 1)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et β une 1-forme de classe \mathcal{C}^1 sur Ω . Nous écrivons

$$\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j(x_1, \dots, x_n) dx_j = \sum_{j=1}^n \beta_j dx_j.$$

Par définition, la *différentielle extérieure* de β est la 2-forme donnée par

$$d\beta := \sum_{j=1}^n d\beta_j \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Définition. On dit que la 1-forme β de classe \mathcal{C}^1 est

(i) *fermée* si $d\beta = 0$, c'est-à-dire si pour tous $1 \leq i, j \leq n$ on a

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = 0.$$

(ii) *exacte* s'il existe une fonction F de classe \mathcal{C}^2 dans Ω telle que $\beta = dF$.

Si $\beta = dF$ est exacte, nous avons $\beta_j = \partial F / \partial x_j$ et le théorème de Schwarz implique que β est fermée :

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Réciproquement, on a le résultat important suivant.

Lemme de Poincaré. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n qui est étoilé par rapport à un certain point a , c'est-à-dire tel que $[a, x] \subset \Omega$ pour tout $x \in \Omega$. Alors toute 1-forme β fermée sur Ω est exacte, c'est-à-dire qu'il existe une primitive F de classe \mathcal{C}^2 telle que $\beta = dF$.*

Démonstration. Supposons pour simplifier l'écriture que $a = 0$, quitte à changer l'origine de \mathbb{R}^n . On pose

$$F(x) = \int_{[0, x]} \beta = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \beta_j(tx_1, \dots, tx_n) x_j dt$$

en intégrant β le long du chemin $\gamma(t) = tx$. Le théorème de dérivation sous le signe somme montre que F est différentiable, et que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n t \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_j + \beta_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt.$$

En utilisant l'hypothèse que β est fermée, ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n t \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) x_j + \beta_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \beta_i(tx_1, \dots, tx_n)) dt = \beta_i(x). \end{aligned}$$

Par conséquent $dF = \beta$, et comme β est de classe \mathcal{C}^1 , on voit que F est bien de classe \mathcal{C}^2 . \square

Remarque. Il est important de noter que le lemme de Poincaré n'est en général pas vrai pour des ouverts Ω quelconques, c'est-à-dire qu'il peut exister des formes fermées non exactes. Ainsi la 1-forme $\beta = dz/z$ est fermée sur $\Omega = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, mais elle n'admet pas de primitive F sur Ω tout entier. Si tel était le cas, on aurait en effet

$$\int_{\Gamma(0,1)} \beta = \int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \int_{\Gamma(0,1)} \beta = \int_{\Gamma(0,1)} dF = 0,$$

contradiction. Ceci est bien entendu lié à la non existence d'une détermination du logarithme complexe sur \mathbb{C}^* tout entier. On peut aussi obtenir un exemple de 1-forme *réelle* fermée non exacte en prenant

$$\beta = \operatorname{Im} \left(\frac{dz}{z} \right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2};$$

β est, localement sur \mathbb{C}^* , la différentielle $d\theta$ de l'angle polaire $\theta = \arg z$, qui n'admet pas de détermination globalement définie. \square

Considérons maintenant un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ et une 1-forme β de classe \mathcal{C}^1 , *supposée fermée*. Nous prétendons que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \beta$, qui est a priori bien définie pour γ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, peut se définir également sans difficulté lorsque γ est seulement continu. En effet, si $\delta > 0$ est la distance du compact $\gamma([a, b])$ au fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega$, la continuité uniforme de γ entraîne l'existence d'une subdivision

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$$

de $[a, b]$ telle que $\gamma([\tau_j, \tau_{j+1}])$ soit pour tout $j = 0, 1, \dots, N - 1$ contenu dans la boule B_j de centre $\gamma(\tau_j)$ et de rayon δ . D'après le lemme de Poincaré, il existe une primitive F_j de β définie dans la boule B_j . Il suffit alors de poser par définition

$$\int_{\gamma|_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}} \beta = \int_{\gamma|_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}} dF_j := F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j)),$$

et plus généralement, par la relation de Chasles

$$(1.3.1) \quad \int_\gamma \beta := \sum_{j=0}^{N-1} (F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j))).$$

Il est clair que cette définition coïncide avec celle déjà donnée pour le cas où γ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Par ailleurs, on peut voir aisément que les intégrales ainsi définies sont bien indépendantes de la subdivision et des primitives choisies (si on a deux subdivisions associées à des primitives F_j sur B_j et F'_k sur B'_k , on en choisit une troisième plus fine que les deux précédentes avec des boules B''_ℓ telles qu'on ait des indices $j(\ell), k(\ell)$ pour lesquels $B''_\ell \subset B_{j(\ell)} \cap B'_{k(\ell)}$, et on observe que les différences $F''_\ell - F_{j(\ell)}$ et $F''_\ell - F'_{k(\ell)}$ sont constantes sur chaque boule B''_ℓ). Si $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ est une 1-chaîne quelconque, on définit bien entendu

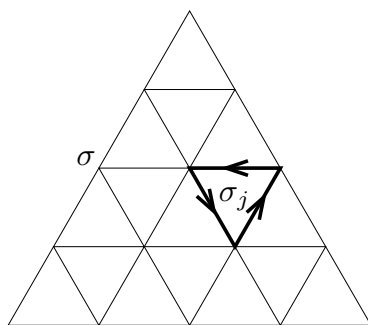
$$(1.3.2) \quad \int_{[\gamma]} \beta := \sum m_j \int_{\gamma_j} \beta.$$

On a dans ce contexte l'observation importante qui suit :

Lemme. *Si $[\gamma] = \partial[\sigma]$ est le bord d'une 2-chaîne dans l'ouvert Ω et si β est une 1-forme fermée sur Ω , alors*

$$\int_{\partial[\sigma]} \beta = 0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat dans le cas où $[\sigma]$ se réduit à un seul triangle.



En utilisant une subdivision barycentrique de ce triangle comme figuré sur le schéma ci-dessus, on trouve $\int_{\partial[\sigma]} \beta = \sum_j \int_{\partial[\sigma_j]} \beta$, et on donc ramené au cas de triangles dont l'image dans Ω est arbitrairement petite. On peut donc supposer qu'on a affaire à des triangles σ_j entièrement contenus dans des boules B_j sur lesquelles β possède des primitives F_j . Si $a_j, b_j, c_j \in \Omega$ sont les sommets du triangle σ_j , on trouve alors

$$\int_{\partial[\sigma_j]} \beta = (F_j(c_j) - F_j(b_j)) - (F_j(c_j) - F_j(a_j)) + (F_j(b_j) - F_j(a_j)) = 0. \quad \square$$

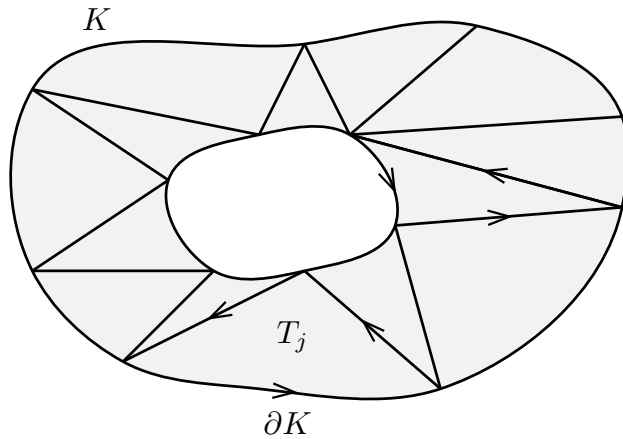
Corollaire. Si β est une 1-forme fermée dans Ω et si γ_1, γ_2 sont deux chemins homotopes dans Ω , alors

$$\int_{\gamma_1} \beta = \int_{\gamma_2} \beta.$$

En particulier, l'intégrale $\int_{\gamma} \beta$ d'une 1-forme fermée sur un lacet γ ne dépend que de la classe d'homotopie ou d'homologie de ce lacet.

Démonstration. On a déjà vu que si γ_1 et γ_2 sont homotopes, alors $[\gamma_1] - [\gamma_2]$ est un bord. Il suffit donc d'appliquer le lemme. \square

Tout ce qui précède s'applique en particulier dans le cas où Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $\beta = f(z)dz$ une 1-forme holomorphe dans Ω . On a en effet déjà observé qu'une telle forme est *fermée*. On notera par ailleurs que si K est à compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux contenu dans Ω alors ∂K peut être vu comme un 1-cycle en homologie (somme de lacets orientés), et que ce 1-cycle est *un bord*. Ceci résulte du fait que K peut être "triangulé", c'est-à-dire couvert par des images \mathcal{C}^1 -difféomorphes de triangles se recollant le long de leurs arêtes. On réinterprète ainsi le résultat du théorème de Cauchy affirmant que $\int_{\partial K} \beta = 0$.



1.4. Intégration sur les ouverts simplement connexes

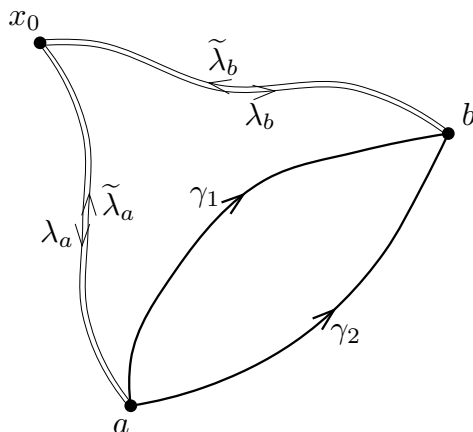
Bien que nous soyons principalement intéressés par les ouverts de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, nous préférons donner d'abord la « bonne » définition générale des espaces simplement connexes, plutôt qu'une définition ad hoc valable seulement en dimension 2.

Définition. *Un espace topologique X est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes qui suivent.*

- (i) *Deux chemins quelconques ayant mêmes extrémités sont homotopes.*
- (ii) *Pour tout $x_0 \in X$, on a $\pi_1(X, x_0) = 0$.*
- (iii) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

Il est clair en effet que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Pour voir que (iii) implique (i), on prend deux chemins γ_1 et γ_2 ayant des extrémités a et b , et on choisit des « chemins de liaison » λ_a reliant x_0 à a et λ_b reliant x_0 à b . Alors $\lambda_a \cdot \gamma_i \cdot \tilde{\lambda}_b$, $i = 1, 2$, sont deux lacets basés en x_0 , l'hypothèse (iii) implique l'existence d'une homotopie h entre ces deux lacets. On obtient une homotopie entre γ_1 et γ_2 en considérant l'homotopie

$$[0, 1] \ni u \mapsto \tilde{\lambda}_a \cdot h(u, \bullet) \cdot \lambda_b$$



qui relie $\tilde{\lambda}_a \cdot \lambda_a \cdot \gamma_1 \cdot \tilde{\lambda}_b \cdot \lambda_b$ et $\tilde{\lambda}_a \cdot \lambda_a \cdot \gamma_2 \cdot \tilde{\lambda}_b \cdot \lambda_b$, et en observant que $\tilde{\lambda}_a \cdot \lambda_a$ et $\tilde{\lambda}_b \cdot \lambda_b$ sont homotopes aux lacets constants $c_a(t) = a$, $c_b(t) = b$, respectivement. \square

Exemple. Tout ouvert *convexe* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est simplement connexe ; en effet on peut « homotoper » deux chemins γ_1, γ_2 quelconques à l'aide de l'homotopie

$$h(u, t) = (1 - u)\gamma_1(t) + u\gamma_2(t).$$

Plus généralement, tout ouvert étoilé est simplement connexe : si Ω est étoilé par rapport au point $x_0 \in \Omega$, l'application $h(u, t) = (1 - u)x_0 + u\gamma(t)$ réalise une homotopie entre un lacet γ quelconque d'extrémités x_0 , et le lacet constant x_0 .

\square

La surjectivité déjà mentionnée de l'homomorphisme $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ entraîne qu'un espace X simplement connexe vérifie $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ automatiquement. On peut cependant donner des exemples d'ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, qui vérifient $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ sans être simplement connexes.

Théorème. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et β une 1-forme fermée de classe \mathcal{C}^1 . Si $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ (en particulier, si Ω est simplement connexe), alors β est exacte, c'est-à-dire qu'il existe une primitive globale F de classe \mathcal{C}^2 sur Ω telle que $\beta = dF$.

Démonstration. On peut supposer Ω connexe, donc connexe par arcs. Fixons une origine $x_0 \in \Omega$. Pour tout point $x \in \Omega$ on choisit un chemin continu γ_x joignant x_0 à x et on pose

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \beta.$$

Comme deux chemins quelconques $\gamma_x, \hat{\gamma}_x$ diffèrent par un bord d'après l'hypothèse $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$, l'intégrale est bien indépendante du choix du chemin γ_x . En choisissant pour γ_x un chemin polygonal, il est immédiat de vérifier que les dérivées partielles $\partial F / \partial x_j$ coïncident avec les coefficients β_j de β , donc $dF = \beta$. \square

Nous transcrivons maintenant ces résultats dans le cas des fonctions holomorphes, en utilisant le fait que la 1-forme $\beta = f(z)dz$ est fermée pour toute fonction holomorphe f .

Corollaire. Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} tel que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$, alors f possède une primitive F dans Ω .

Conséquence. Soit f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} tel que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$. Supposons que f ne s'annule pas dans Ω . Alors

- (i) Il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\exp(g) = f$. Deux solutions g_1, g_2 diffèrent par une constante $2ki\pi$ dans chaque composante connexe de Ω .
- (ii) Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une fonction racine n -ième $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $h^n = f$. Si h_1 est une solution, toute autre solution s'écrit sous la forme

$h_2(z) = uh_1(z)$ où u est une racine n -ième de l'unité, constante dans chaque composante connexe de Ω .

Démonstration. On peut supposer ici que Ω est connexe.

(i) D'après le corollaire, la fonction $h = f'/f$ admet une primitive H dans Ω . Nous avons alors

$$(f \exp(-H))' = (f' - hf) \exp(-H) = 0,$$

de sorte que $f \exp(-H) = C$ constante. Si on choisit un nombre complexe c tel que $\exp(c) = C$, alors $g = H + c$ vérifie $\exp(g) = C \exp(H) = f$. Si on a deux solutions, alors $g_2 - g_1$ prend ses valeurs dans le sous-ensemble discret $2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ce qui entraîne par continuité de $g_2 - g_1$ et connexité de Ω que $g_2 - g_1 = 2ki\pi$ est constante.

(ii) Si g vérifie $\exp(g) = f$, alors $h = \exp(g/n)$ vérifie évidemment $h^n = f$. La dernière affirmation concernant l'unicité à constante multiplicative près telle que $u^n = 1$ est claire. \square

Remarque. Si $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ et si f est une fonction holomorphe (resp. méromorphe) non identiquement nulle sur Ω , il est facile de voir que f possède une racine n -ième holomorphe (resp. méromorphe) h si et seulement si $\text{div}(f)$ est divisible par n , c'est-à-dire si toutes les multiplicités des zéros et des pôles sont divisibles par n . La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si $\text{div}(f)$ est divisible par n et si g_1 est une fonction méromorphe de diviseur $\text{div}(g_1) = \frac{1}{n} \text{div}(f)$ (qui existe toujours d'après le théorème de factorisation de Weierstrass), alors f/g_1^n est une fonction holomorphe sans pôles ni zéros, par conséquent elle possède une racine n -ième g_2 sans pôles ni zéros, et on a $f = (g_1 g_2)^n$. \square

2. Indices et théorème de Rouché

2.1. Indices

On considère ici des 1-cycles $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ tracés dans le plan complexe \mathbb{C} . Rappelons que le *support* d'un tel cycle est $\bigcup \text{Im}(\gamma_j)$ (on suppose l'écriture du cycle simplifiée, en sorte que les chemins γ_j soient deux à deux distincts et que les coefficients m_j soient non nuls).

Théorème et définition. Soit $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ un 1-cycle tracé dans \mathbb{C} et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Supp}([\gamma])$. On définit l'indice de $[\gamma]$ par rapport à z_0 comme étant l'intégrale

$$\text{Ind}([\gamma], z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma]} \frac{dz}{z - z_0}.$$

L'indice est toujours un entier $\text{Ind}([\gamma], z_0) \in \mathbb{Z}$. Cet entier représente intuitivement le nombre de tours effectués par le cycle autour du point z_0 , compté avec les multiplicités m_j et avec des signes déterminés par le sens de rotation autour de z_0 .

Démonstration. On commence par prouver le résultat lorsque $[\gamma]$ se réduit à un seul lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Soit $\delta = d(z_0, \text{Im}(\gamma)) > 0$ la distance du

point z_0 à l'image du lacet γ . D'après la continuité uniforme de γ sur $[0, 1]$, on peut choisir une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

telle que $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ soit entièrement contenu dans le disque ouvert de centre $\gamma(t_j)$ et de rayon δ . Si $z_1 \in \Delta = D(\gamma(t_j), \delta)$, la détermination principale du logarithme fournit une primitive $z \mapsto \text{Log}((z - z_0)/(z_1 - z_0))$ de $z \mapsto 1/(z - z_0)$ définie sur Δ tout entier, car le quotient $(z - z_0)/(z_1 - z_0)$ ne peut pas être réel négatif. On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \frac{dz}{z - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \text{Log} \frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \\ &= -\frac{i}{2\pi} \ln \left| \frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \right| + \frac{1}{2\pi} \text{Arg} \frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}. \end{aligned}$$

Comme on a toujours $\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \text{Log}(z_1 z_2) \pmod{2\pi i \mathbb{Z}}$, il vient par sommation sur chacun des intervalles de la subdivision :

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \text{Log} \frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$, il s'ensuit que $\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} = 1$, donc $\text{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$. D'après le calcul précédent, l'indice coïncide avec l'angle (exprimé en tours)

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Arg} \frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}.$$

Maintenant, si $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ est un 1-cycle quelconque, le lemme du paragraphe 1.2 montre que $[\gamma]$ diffère par un bord d'un cycle $[\hat{\gamma}] = \sum \hat{m}_j [\hat{\gamma}_j]$ qui est une somme de lacets, on a donc

$$\text{Ind}([\gamma], z_0) = \text{Ind}([\hat{\gamma}], z_0) = \sum_j \hat{m}_j \text{Ind}([\hat{\gamma}_j], z_0) \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Remarque 1. Comme la forme $\beta = \frac{dz}{z - z_0}$ est fermée sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, les résultats généraux déjà démontrés impliquent que l'on a

$$\text{Ind}([\gamma], z_0) = \text{Ind}([\gamma'], z_0)$$

dès que les cycles $[\gamma]$ et $[\gamma']$ diffèrent par un bord dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. C'est le cas en particulier lorsque γ et γ' sont des lacets homotopes dans un ouvert Ω contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Remarque 2. Si K est un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors $\text{Ind}(\partial K, z_0) = 0$ si $z_0 \in \Omega \setminus K$ et $\text{Ind}(\partial K, z_0) = 1$ si $z_0 \in K^\circ$. Ceci résulte de la formule des résidus usuelle appliquée à la forme $\beta = \frac{dz}{z - z_0}$. \square

On a par ailleurs le résultat suivant concernant la dépendance de l'indice par rapport au point z_0 considéré.

Proposition. *Si $[\gamma]$ est un 1-cycle dans \mathbb{C} et si z_0, z_1 sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Supp}([\gamma])$, alors $\text{Ind}([\gamma], z_0) = \text{Ind}([\gamma], z_1)$. De plus, si z_0 est situé dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Supp}([\gamma])$, alors $\text{Ind}([\gamma], z_0) = 0$.*

Démonstration. Il est clair que l'application $w \mapsto \text{Ind}([\gamma], w)$ est une application continue (et même holomorphe!) sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Supp}([\gamma])$. Comme elle prend des valeurs entières, elle est nécessairement constante sur chaque composante connexe Ω_k de Ω . Le support de $[\gamma]$ est compact, donc contenu dans un certain disque fermé $\overline{D}(0, R_0)$, ce qui implique que la couronne $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R_0)$ est contenue dans Ω . Par suite Ω possède une seule composante connexe non bornée, celle qui contient $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R_0)$, toutes les autres étant contenues dans $D(0, R_0)$. Remplaçons les chemins γ_j composant $[\gamma]$ par des chemins polygonaux $[\hat{\gamma}_j]$ de mêmes extrémités contenus dans $\overline{D}(0, R_0)$, de façon à être sûr que les chemins $\hat{\gamma}_j$ soient de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et de longueur finie). Ces chemins sont alors homotopes dans $\overline{D}(0, R_0)$, de sorte que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R_0)$ il vient

$$\text{Ind}([\gamma], w) = \text{Ind}([\hat{\gamma}], w), \quad |\text{Ind}([\hat{\gamma}], w)| \leq \frac{1}{2\pi(|w| - R_0)} \sum |m_j| \text{long}(\hat{\gamma}_j).$$

Par suite l'indice tend vers 0 à l'infini, et il est nécessairement nul sur la composante non bornée de Ω . □

Nous indiquons maintenant un procédé de calcul géométrique pour l'indice, dans le cas d'un cycle vérifiant certaines propriétés de régularité.

Définition. *Une 1-chaîne $[\gamma] = \sum m_j[\gamma_j]$ tracée dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ sera dite \mathcal{C}^1 régulière par morceaux si elle est composée de chemins γ_j de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, ayant des vecteurs dérivés (à droite, à gauche) partout non nuls, tels que en tout point $p \in \text{Supp}([\gamma])$ qui est un point multiple (c'est-à-dire un point appartenant à des images de chemins différents, ou bien un point p possédant plusieurs antécédents $t = \gamma_j^{-1}(p)$ sur un même chemin γ_j), les demi-tangentes aux chemins γ_j passant par p sont toutes distinctes.*

Si $[\gamma]$ est un 1-cycle régulier, le théorème des fonctions implicites montre aisément qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points multiples, et que pour tout point $p \in \text{Supp}([\gamma])$ non multiple, il existe un voisinage V de p tel que $V \setminus \text{Supp}([\gamma])$ soit constitué de 2 composantes connexes (noter que les extrémités des chemins γ_j composant γ sont nécessairement multiples, sinon ce point figurerait dans $\partial[\gamma]$ et $[\gamma]$ ne serait donc pas un cycle). Plus précisément on peut choisir pour V un certain rectangle construit comme suit : il existe un repère orthonormé direct associé à des coordonnées (u, v) dans le plan, un rectangle

$$R = \{(u, v), -\varepsilon < u < \varepsilon, -\delta < v < \delta\}$$

et une application de classe \mathcal{C}^1 par morceaux $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow]-\delta, \delta[, u \mapsto v = \varphi(u)$ vérifiant

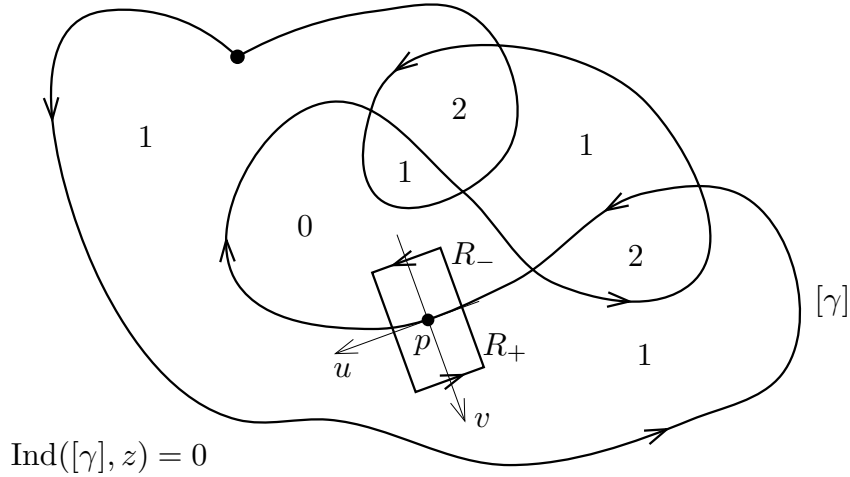
$$R \cap \text{Supp}([\gamma]) = \{(u, \varphi(u)), u \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$$

On supposera que les coordonnées (u, v) sont choisies en sorte que le chemin γ_j qui coïncide avec le graphe $v = \varphi(u)$ dans R soit orienté dans le sens des u croissants. Il est clair dans ces conditions que $R \setminus \text{Supp}([\gamma])$ est constitué des deux composantes connexes définies respectivement par $R_+ = \{v > \varphi(u)\}$ et $R_- = \{v < \varphi(u)\}$.

Théorème. Soit $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ un cycle \mathcal{C}^1 régulier par morceaux, soit $p \in \text{Im}(\gamma_j) \subset \text{Supp}([\gamma])$ un point non multiple, et soit R un rectangle défini comme ci-dessus. Alors si $z_+ \in R_+$ et $z_- \in R_-$, on a

$$\text{Ind}([\gamma], z_+) - \text{Ind}([\gamma], z_-) = m_j.$$

En particulier, si $[\gamma]$ est constitué d'un seul lacet de multiplicité 1, on a $\text{Ind}([\gamma], z_+) - \text{Ind}([\gamma], z_-) = 1$.



Démonstration. Soit $p \in \text{Supp}([\gamma])$ le centre du rectangle. Choisissons des points $z_+ \in R_+$ et $z_- \in R_-$ que nous ferons converger vers le point p , et désignons par $[\gamma']$ la partie de $[\gamma]$ située hors de R , de sorte que nous avons $[\gamma] = [\gamma'] + m_j [\theta]$ où θ est la courbe définie comme le graphe $(u, \varphi(u))$ dans le rectangle R . Bien entendu la décomposition a lieu seulement dans le groupe des 1-chaînes, ni $[\gamma']$ ni $[\theta]$ ne sont des cycles. Considérons les 1-chaînes $(\partial R)_+ = (\partial R) \cap \overline{R}_+$ et $(\partial R)_- = (\partial R) \cap \overline{R}_-$, munies de l'orientation induite par l'orientation naturelle de ∂R . Il existe une homotopie entre θ et $(\partial R)_-$ qui « balaie » \overline{R}_- et donc qui ne rencontre jamais le point z_+ (il suffit, lorsque $s \in [0, 1]$, de considérer les graphes des fonctions $\varphi_s(u) = (1-s)\varphi(u) - s\delta$, que l'on concatène avec des segments du bord de R). Si l'on pose $[\gamma_-] = [\gamma'] + m_j [(\partial R)_-]$ on trouve par conséquent

$$\text{Ind}([\gamma], z_+) = \text{Ind}([\gamma_-], z_+) = \text{Ind}([\gamma_-], p),$$

(la dernière égalité se voit en faisant converger z_+ vers p). De même, si l'on pose $[\gamma_+] = [\gamma'] - m_j [(\partial R)_+]$ (attention à l'orientation !), il vient

$$\text{Ind}([\gamma], z_-) = \text{Ind}([\gamma_+], z_-) = \text{Ind}([\gamma_+], p),$$

En prenant la différence, on obtient

$$\text{Ind}([\gamma], z_+) - \text{Ind}([\gamma], z_-) = \text{Ind}([\gamma_-], p) - \text{Ind}([\gamma_+], p) = m_j \text{Ind}(\partial R, p) = m_j ;$$

la dernière égalité provient de la formule des résidus usuelle (Remarque 2), qui donne $\text{Ind}(\partial R, p) = 1$. □

2.2. Formule des résidus généralisée

Nous commençons tout d'abord par une généralisation du théorème de Cauchy. L'une des façons d'énoncer le théorème de Cauchy est de dire que si $\beta = f(z)dz$ est une forme holomorphe dans un ouvert Ω , alors $\int_{[\gamma]} f(z)dz = 0$ pour tout cycle $[\gamma] = \partial[\sigma]$ qui est un bord. On peut appliquer ceci à $f(z) = 1/(z - z_0)$ si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, et on conclut alors que $\text{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et pour tout cycle $[\gamma]$ qui est un bord dans Ω . L'objectif de cette section est de montrer qu'on peut se contenter du fait que $[\gamma]$ satisfasse l'hypothèse de nullité des indices pour obtenir la formule des résidus.

Théorème. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $[\gamma]$ un 1-cycle tracé dans Ω vérifiant $\text{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ pour au moins un point dans chaque « trou » de Ω (composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$), et f une fonction holomorphe dans Ω . Alors*

$$\int_{[\gamma]} f(z)dz = 0.$$

On notera que l'hypothèse entraîne en fait que $\text{Ind}([\gamma], w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. En effet, $w \mapsto \text{Ind}([\gamma], w)$ est constant dans chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, et on sait déjà que l'indice est nul dans les composantes connexes non bornées.

Démonstration. Il n'est pas restrictif de supposer que $[\gamma]$ est constitué de chemins de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, sinon on peut s'y ramener en faisant une homotopie avec un chemin polygonal. L'intégrale curviligne se ramène alors à une vraie intégrale simple (ou plutôt à une somme d'intégrales simples). Soit K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux dans Ω tel que $\text{Supp}([\gamma]) \subset K^\circ$ (on peut construire un tel compact en choisissant un quadrillage assez fin du plan complexe, et en prenant la réunion des petits carrés qui intersectent $\text{Supp}([\gamma])$). Si $\mathbb{C} \setminus K^\circ$ possède des composantes connexes C_j bornées (« trous » de K) qui sont contenues dans Ω , on peut toujours les remplir, à savoir remplacer K par $K \cup \bigcup C_j$. On peut donc supposer qu'aucune des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K^\circ$ n'est incluse dans Ω . La formule de Cauchy nous donne alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w \in \partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in K^\circ.$$

En intégrant $f(z)dz$ sur le 1-cycle $[\gamma]$ et en invoquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{[\gamma]} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{w \in \partial K} f(w) \left(\int_{[\gamma]} \frac{dz}{w - z} \right) dw.$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que l'on a $\text{Ind}([\gamma], w) = 0$ pour tout point $w \in \mathbb{C} \setminus K^\circ$, en particulier sur ∂K . Considérons la composante connexe C de $\mathbb{C} \setminus K^\circ$ contenant w . Si cette composante est non bornée, on sait

que l'indice est nul. Si la composante est bornée, alors C n'est pas contenue dans Ω et par conséquent elle contient un point $p \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Mais alors nous avons

$$\text{Ind}([\gamma], w) = \text{Ind}([\gamma], p) = 0$$

par hypothèse (cf. la remarque qui suit l'énoncé). Le théorème est démontré, nous en donnons maintenant quelques conséquences. \square

Corollaire. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} sans trous, c'est-à-dire tel que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'a pas de composante connexe bornée. Alors :*

(i) *Pour tout 1-cycle $[\gamma]$ dans Ω et toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a*

$$\int_{[\gamma]} f(z) dz = 0.$$

(ii) *Toute fonction holomorphe f dans Ω admet une primitive F . De plus, si f ne s'annule pas, il existe des déterminations holomorphes du logarithme de f et des racines n -ièmes de f .*

Démonstration. Pour (i), on observe que $\Omega = \mathbb{C}$ ou bien que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est connexe non borné.

Formule des résidus généralisée. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $[\gamma]$ un 1-cycle tracé dans Ω vérifiant $\text{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ pour au moins un point z_0 dans chaque trou de Ω , et f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{a_\nu\}$ où $\{a_\nu\}$ est une suite de points singuliers localement finie dans Ω , ne rencontrant pas $\text{Supp}([\gamma])$. Alors*

$$\int_{[\gamma]} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_\nu \in \Omega} \text{Ind}([\gamma], a_\nu) \text{Res}(f(z) dz, a_\nu)$$

(et il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls).

Démonstration. Soit K un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux n'ayant aucun trou contenu dans Ω (cf. démonstration précédente), tel que $\text{Supp}([\gamma]) \subset K^\circ$, et tel que $\partial K \cap \{a_\nu\} = \emptyset$. L'indice $\text{Ind}([\gamma], w)$ est nul hors de K , donc les points singuliers à considérer sont uniquement ceux de $K \cap \{a_\nu\}$, en nombre fini d'après l'hypothèse de locale finitude. On considère $\Omega' = \Omega \setminus \{a_\nu\}$. Le cycle $[\gamma]$ ne satisfait pas l'hypothèse de nullité des indices par rapport au trous de Ω' (du fait que l'indice de $[\gamma]$ par rapport aux points a_ν n'est pas nécessairement nul), mais si s_ν est cet indice, le cycle

$$[\gamma'] = [\gamma] - \sum_{a_\nu \in K} s_\nu [\Gamma(a_\nu, \varepsilon)]$$

satisfait bien cette hypothèse, au moins pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On en conclut que $\int_{[\gamma']} f(z) dz = 0$, et par conséquent

$$\int_{[\gamma]} f(z) dz = \sum_{a_\nu \in K} s_\nu \int_{[\Gamma(a_\nu, \varepsilon)]} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_\nu \in K} s_\nu \text{Res}(f(z) dz, a_\nu). \quad \square$$

Remarque. On peut démontrer que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ possède un nombre fini de trous, et si $\{w_j\}_{1 \leq j \leq p}$ est un ensemble de points comportant un point dans chaque trou, alors l'application

$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^p, \quad [\gamma] \longmapsto (\text{Ind}([\gamma], w_j)_{1 \leq j \leq p})$$

est un isomorphisme. Nous démontrerons que ceci est vrai lorsque Ω n'a pas de trous ($p = 0$), en prouvant qu'en fait Ω est alors simplement connexe. Lorsqu'il y a une infinité de trous, la situation peut être nettement plus compliquée, entre autres du fait que les trous peuvent être en quantité non dénombrable (prendre par exemple pour Ω le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0, 1]$).

2.3. Théorème de Rouché

Nous énonçons d'abord le «principe de l'argument», dérivé de la formule des résidus, qui permet d'évaluer le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe.

Principe de l'argument. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , f une fonction méromorphe dans Ω et $\delta = \sum m_j [a_j]$ son diviseur. Alors

- (i) Si K est un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que ∂K ne contienne ni pôle ni zéro de f , on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a_j \in K} m_j,$$

c'est-à-dire précisément le nombre de zéros et de pôles situés dans K , comptés avec leurs multiplicités et signes respectifs.

- (ii) Plus généralement, si $[\gamma]$ est un 1-cycle dont le support ne rencontre pas $\text{Supp}(\delta) = \{a_j\}$ et tel que $\text{Ind}([\gamma], w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma]} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a_j \in \Omega} m_j \text{Ind}([\gamma], a_j).$$

On notera que $\frac{1}{2\pi i} df/f$ a pour partie réelle $\frac{1}{2\pi} d \text{Arg } f$, c'est donc la variation infinitésimale de l'argument de f (comptée en tours). Le principe de l'argument exprime donc le fait que la variation totale de l'argument de f sur un contour compte le nombre total de zéros et de pôles de f situés à l'intérieur de ce contour.

Démonstration. Les pôles de f'/f sont a priori soit des pôles, soit des zéros de f , la preuve consiste simplement à calculer le résidu de $(f'(z)/f(z)) dz$ en un tel point z_0 . Or, on peut écrire

$$f(z) = (z - z_0)^m u(z)$$

où $m \in \mathbb{Z}$ est la multiplicité et u une fonction holomorphe sans pôles ni zéros sur un voisinage V de z_0 . La dérivée logarithmique de f est donnée par

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{u'(z)}{u(z)}$$

avec $u'/u \in \mathcal{O}(V)$, par conséquent on a $\text{Res}((f'(z)/f(z))dz, z_0) = m$. Ceci implique le principe de l'argument. \square

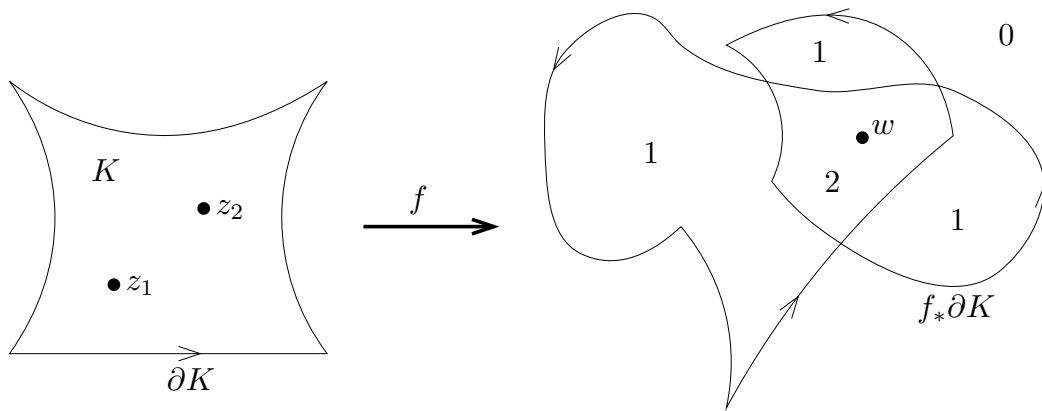
Cas particulier. Supposons que f soit holomorphe dans Ω , et soit $K \subset \Omega$ un compact à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On note $f_*\partial K$ le cycle image du bord ∂K , c'est-à-dire la somme $\sum [f \circ \gamma_j]$ où les γ_j sont les lacets composant ∂K . Soit $w \in \mathbb{C} \setminus f(\partial K)$. Le principe de l'argument appliquée à la fonction $f(z) - w$ montre que le nombre total $\sharp(f^{-1}(w) \cap K)$ d'antécédents $f(z) = w$ dans K , compté avec multiplicités, est donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz &= \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz \\ &= \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)dt}{f(\gamma_j(t)) - w} = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - w}. \end{aligned}$$

de sorte que nous obtenons l'égalité importante :

$$(2.3.1) \quad \sharp(f^{-1}(w) \cap K) = \text{Ind}(f_*\partial K, w), \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus f(\partial K).$$

Cette formule peut se visualiser comme suit



Nous démontrons maintenant le théorème de Rouché, paru dans le Journal de l'Ecole Polytechnique en 1862.

Théorème de Rouché. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , et K un compact contenu dans Ω tel que f ne s'annule pas sur ∂K . On suppose que $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ est assez proche de f sur K , et plus précisément que $|g - f| < |f|$ en tout point de ∂K (pour cela, il suffit que $\sup_K |g - f| < \delta = \inf_{\partial K} |f|$). Alors f et g possèdent le même nombre de zéros dans K , lorsque ceux-ci sont comptés avec multiplicités.

Démonstration. On a $|g| \geq |f| - |g - f| > 0$ sur ∂K , donc ni f ni g ne s'annulent sur ∂K , et par continuité l'hypothèse $|f| < |g - f|$ est encore satisfaite sur un voisinage de ∂K . Quitte à agrandir un peu K (en le recouvrant par exemple par

des carrés d'un quadrillage suffisamment fin), on peut supposer que ∂K est de classe \mathcal{C}^1 .

Pour $u \in [0, 1]$, on pose $f_u = f + u(g - f)$, de sorte que $f_0 = f$ et $f_1 = g$. L'hypothèse faite sur $|g - f|$ implique qu'aucune des fonctions f_u ne s'annule sur ∂K , pour tout $u \in [0, 1]$. Le nombre $N(u)$ de zéros de f_u dans K est donné par

$$N(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'_u(z)}{f_u(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) + u(g'(z) - f'(z))}{f + u(g(z) - f(z))} dz.$$

Cette formule montre que $N(u)$ est une fonction continue de u , et comme $N(u) \in \mathbb{N}$, la fonction $N(u)$ est nécessairement constante sur $[0, 1]$. \square

Nous pouvons appliquer ceci en particulier à un polynôme unitaire P de degré n , en posant $g(z) = P(z)$ et $f(z) = z^n$. On obtient alors la conséquence suivante, qui peut être vue comme une version précise du théorème de d'Alembert.

Corollaire 1. *Tout polynôme $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ (autre que $P(z) = z^n$) admet exactement n racines dans le disque ouvert $D(0, R)$ de rayon*

$$R = 2 \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|^{1/j},$$

lorsque ces racines sont comptées avec multiplicités.

Démonstration. En posant $g(z) = P(z)$ et $f(z) = z^n$, il vient $|a_j| \leq 2^{-j} R^j$, donc pour tout $z \in \partial K$, $K = \overline{D}(0, R)$, on obtient

$$|g(z) - f(z)| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j z^{n-j} \right| \leq \sum_{j=1}^n 2^{-j} R^j R^{n-j} < R^n = |f(z)|.$$

D'après le théorème de Rouché, ceci implique que $P(z)$ a le même nombre de zéros que $f(z)$, c'est-à-dire n , dans le disque $D(0, R)$. \square

Corollaire 2. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une limite $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

- (i) *Si K est une partie compacte de Ω et que f ne s'annule pas sur ∂K , alors pour k assez grand f_n ne s'annule pas sur ∂K et le nombre de zéros de f_n dans K° est le même que celui de f .*
- (ii) *Si les fonctions f_n ne s'annulent pas dans Ω , alors ou bien la limite f est identiquement nulle, ou bien f ne s'annule pas.*
- (iii) *Si les fonctions f_n sont injectives dans Ω , alors ou bien f est constante, ou bien f est injective.*

L'exemple trivial de la suite $f_n(z) = \frac{1}{n}z$ sur $\Omega = \mathbb{C}^*$ montre que le cas d'une limite f nulle ou constante peut se produire dans (ii) et (iii).

Démonstration. (i) C'est une conséquence du théorème de Rouché, il suffit de prendre k assez grand pour que $|f_n - f| < \delta = \inf_{\partial K} |f|$ sur ∂K .

(ii) Supposons que f ne soit pas identiquement nulle, mais qu'il existe un point z_0 tel que $f(z_0) = 0$. D'après le principe du prolongement analytique, f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0 et on peut choisir un petit disque compact $K = \overline{D}(z_0, r)$ tel que f ne s'annule pas sur ∂K . Alors, d'après (i), f_n s'annule sur $K^\circ = D(z_0, r)$ pour n assez grand, contradiction.

(iii) Supposons que f ne soit pas constante mais qu'il existe deux points distincts z_1, z_2 tels que $f(z_1) = f(z_2) = w$. Alors, comme précédemment, il existe $r_1, r_2 > 0$ assez petits tels que $f(z) - w$ ne s'annule pas sur le bord du compact $K = \overline{D}(z_1, r_1) \cup \overline{D}(z_2, r_2)$. Alors, d'après (i), $f_n(z) - w$ aurait au moins deux zéros dans K° pour n assez grand, contradiction. \square

3. Théorème de Runge

Ce théorème, qui a été démontré par Carl Runge autour des années 1880, est un résultat général d'approximation des fonctions holomorphes par des fractions rationnelles.

3.1. Approximation par des fractions rationnelles

Nous commençons par un résultat préliminaire.

Proposition. *Soit K une partie compacte de \mathbb{C} et E un ensemble contenant un point dans chaque composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Si f est holomorphe sur un voisinage de K , il existe une suite (R_n) de fractions rationnelles ayant tous leurs pôles dans E et convergeant uniformément vers f sur K .*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de K sur lequel f est définie et holomorphe. Il existe un compact L à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, tel que $K \subset L^\circ$ et $L \subset U$: il suffit de prendre la réunion des carrés qui rencontrent K , appartenant à un quadrillage assez fin du plan complexe. Pour tout $z \in K$, la formule de Cauchy fournit alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t) dt}{\gamma_j(t) - z} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_j \frac{1}{2\pi i n} \sum_{0 \leq \ell < n} \frac{f(\gamma_j(\ell/n))\gamma_j'(\ell/n)}{\gamma_j(\ell/n) - z} \end{aligned}$$

où $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \partial L$ est la famille des chemins paramétrant le bord ∂L . La convergence est uniforme sur K du fait de la continuité uniforme de l'intégrande pour $(z, \zeta) \in K \times \partial L$. Pour démontrer le résultat, il suffit donc de vérifier que toute fonction de la forme $f(z) = \frac{1}{w-z}$, $w \in \mathbb{C} \setminus K$, peut être approchée par des fractions rationnelles ayant leurs pôles dans E . Soit $R > 0$ un rayon assez grand, tel que $K \subset \overline{D}(0, R)$. Si w est dans la composante connexe non bornée de K , on choisit un chemin polygonal $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ reliant $w = \gamma(1)$ à un point $w_0 = \gamma(0)$ tel que $|w_0| \geq 2R$, sinon w est dans une composante connexe bornée et on peut choisir $w_0 \in E$. On choisit maintenant une subdivision du chemin γ en un nombre fini de sous-segments $[w_0, w_1], [w_1, w_2], \dots, [w_{N-1}, w_N]$ avec $w_N = w$

et $|w_{j+1} - w_j| \leq \frac{1}{2}d(\text{Im}(\gamma), K)$ pour tout j . On montre alors par récurrence sur j que la fonction $z \mapsto \frac{1}{w_j - z}$ est dans l'adhérence de l'anneau \mathcal{R}_E des fractions rationnelles à pôles dans E . C'est clair pour $j = 0$ si $w_0 \in E$. Sinon on a par construction $|w_0| \geq 2R$ et on peut écrire

$$\frac{1}{w_0 - z} = \frac{1}{w_0} \frac{1}{1 - z/w_0} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{w_0^n},$$

avec convergence uniforme pour $z \in K \subset \overline{D}(0, R)$. Par conséquent $z \mapsto \frac{1}{w_0 - z}$ est une limite uniforme de polynômes. Pour l'étape de récurrence, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_{j+1} - z} &= \frac{1}{(w_{j+1} - w_j) + (w_j - z)} = \frac{1}{w_j - z} \frac{1}{1 + (w_{j+1} - w_j)/(w_j - z)} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (w_{j+1} - w_j)^n}{(w_j - z)^{n+1}}, \end{aligned}$$

et d'observer qu'il y a convergence uniforme pour $z \in K$ du fait qu'on a par construction $|w_{j+1} - w_j| \leq \frac{1}{2}d(\text{Im}(\gamma), K)$ et $|w_j - z| \geq d(\text{Im}(\gamma), K)$. L'hypothèse que $z \mapsto \frac{1}{w_j - z}$ est dans l'adhérence de \mathcal{R}_E entraîne alors que $z \mapsto \frac{1}{w_{j+1} - z}$ est aussi dans l'adhérence de \mathcal{R}_E . \square

Théorème de Runge. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et E une partie de \mathbb{C} contenant un point dans chaque trou de Ω . Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors il existe une suite (R_n) de fractions rationnelles ayant tous leurs pôles dans E et convergeant uniformément vers f sur tout compact de Ω .*

Démonstration. On considère dans Ω la suite exhaustive de compacts

$$K_n = \{z \in \Omega; |z| \leq n, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 2^{-n}\}.$$

Si U est une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K_n$ (i.e. un trou de K_n), alors $\partial U \subset \partial K_n \subset \Omega$, mais U ne peut être inclus dans Ω . Sinon, le bord de \overline{U} vérifierait $\partial \overline{U} \subset \partial U \subset \partial K_n \subset K_n$, donc on aurait $\overline{U} = U \cup \partial U \subset \Omega$ et le principe du maximum impliquerait

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \overline{U}} |z| &= \sup_{z \in \partial \overline{U}} |z| \leq \sup_{z \in K_n} |z| \leq n, \\ \sup_{z \in \overline{U}} d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^{-1} &= \sup_{z \in \partial \overline{U}} d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^{-1} \leq \sup_{z \in K_n} d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^{-1} \leq 2^n \end{aligned}$$

(pour la deuxième ligne, on utilise le fait que $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^{-1} = \sup_{w \in \mathbb{C} \setminus \Omega} |(z - w)^{-1}|$ avec $z \mapsto (z - w)^{-1}$ holomorphe sur Ω), et on aurait donc $U \subset K_n$, contradiction. Par conséquent U contient un point $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, et contient même la composante connexe de ce point dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$, ce qui implique que U contient un point de E . La proposition précédente entraîne l'existence d'une fraction rationnelle R_n à pôles dans E telle que $|f - R_n| \leq 2^{-n}$ sur K_n . C'est la suite cherchée. \square

Corollaire. *Si Ω est un ouvert sans trous et si f est holomorphe sur Ω , alors f est limite uniforme sur tout compact de Ω d'une suite (P_n) de polynômes holomorphes.*

Démonstration. C'est le cas particulier du théorème de Runge avec $E = \emptyset$. \square

Proposition. *Soient Ω_1 et Ω_2 des ouverts de \mathbb{C} . Supposons $\Omega_2 \subset \Omega_1$ et supposons que chaque trou de Ω_2 contienne un point qui soit dans le complémentaire de Ω_1 . Alors l'application de restriction*

$$\mathcal{O}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_2), \quad f \mapsto f|_{\Omega_2},$$

qui est une application linéaire continue d'espaces de Fréchet, est d'image dense.

Démonstration. Chaque trou de Ω_2 est un ouvert connexe borné qui contient un point de $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$, et donc nécessairement toute la composante connexe de ce point dans $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$. Si on fixe un ensemble E qui contient un point dans chaque trou de Ω_1 , alors toute fonction holomorphe sur Ω_2 peut être approchée par une fraction rationnelle à pôles dans E , qui est donc une fonction holomorphe sur Ω_1 . \square

Contre-exemple. L'application de restriction $\mathcal{O}(D(0, R)) \rightarrow \mathcal{O}(C(0, r, R))$ d'un disque sur une couronne n'est pas d'image dense. La fonction $f(z) = 1/z$ ne peut être limite uniforme d'une suite de fonctions f_n sur le disque puisque si $\rho \in]r, R[$ on a $\int_{\Gamma(0, \rho)} f_n(z) dz = 0$ tandis que $\int_{\Gamma(0, \rho)} f(z) dz = 2\pi i$.

Remarque. Il est en fait facile de voir que la condition exprimée dans la proposition précédente est nécessaire et suffisante : pour que l'application de restriction $\mathcal{O}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_2)$ soit d'image dense, il faut et il suffit que chaque trou de Ω_2 contienne un point du complémentaire de Ω_1 . En effet si T est un trou de Ω_2 contenu dans Ω_1 , choisissons $f(z) = 1/(w - z)$ avec $w \in T$. C'est une fonction holomorphe sur Ω_2 , et si L est un voisinage compact de T à bord \mathcal{C}^1 par morceaux contenu dans Ω_1 et tel que $\partial L \subset \Omega_2$ (on peut montrer qu'il en existe...), nous avons $\int_{\partial L} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$, ce qui entraîne que f ne peut être limite uniforme sur ∂L d'une suite de fonctions holomorphes f_n sur Ω_1 .

3.2. Interpolation holomorphe

3.3. Résolution des équations de Cauchy-Riemann

4. Théorèmes de Picard

Les théorèmes de Picard font partie de ce qu'on appelle la «théorie de la distribution des valeurs» des fonctions holomorphes, et ils se situent historiquement, après le théorème de Weierstrass-Casorati du III 1.3, parmi les premiers résultats de cette théorie. Il ont été démontrés par Émile Picard en 1878-1879. La preuve que nous allons présenter est tirée du livre de Landau de 1929, et repose sur le théorème de Bloch-Landau.

Lemme. *On se donne un disque $D(z_0, R)$. Alors il existe une fonction positive $(A, r) \mapsto M(A, r)$, $A \in [1, +\infty[$, $r \in]0, R[$, croissante en les variables A et r , telle que pour toute application holomorphe $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ omettant les valeurs 0 et 1 et vérifiant $A^{-1} \leq |f(z_0)| \leq A$, on ait $|f(z)| \leq M(A, r)$ sur le disque compact $\overline{D}(z_0, r) \subset D(z_0, R)$.*

Démonstration. Posons $\Omega = D(z_0, R)$. La preuve consiste à opérer un certain nombre de transformations sur f , de façon à obtenir une autre fonction qui omette un grand nombre de valeurs. Comme le disque $\Omega = D(z_0, R)$ est simplement connexe, il existe une détermination holomorphe $f_1 = \frac{1}{2\pi i} \log f$ sur Ω telle que $0 \leq \operatorname{Re} f_1(z_0) \leq 1$ (la partie réelle étant $\frac{1}{2\pi}$ fois l'argument). Nous avons $|\operatorname{Im} f_1(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \ln A$, donc

$$|f_1(z_0) - j| \leq B := \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} (\ln A)^2}, \quad j = 0, 1.$$

Les hypothèses entraînent de plus $f_1(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, en particulier f_1 omet les valeurs 0 et 1. Ceci implique l'existence de déterminations holomorphes f_2, f_3 telles que

$$f_2 = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_1 - 1}, \quad f_3 = \sqrt{f_1} - \sqrt{f_1 - 1}.$$

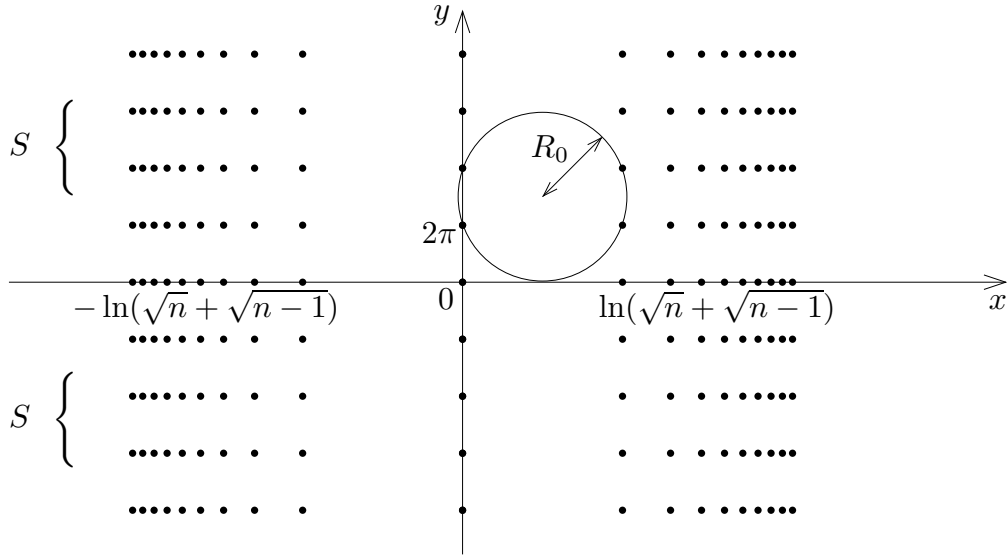
sur Ω . Nous avons $f_2 f_3 = 1$, et $|f_2(z_0)| \leq 2\sqrt{B}$, $|f_3(z_0)| \leq 2\sqrt{B}$, de sorte que

$$C(A)^{-1} \leq |f_2(z_0)| \leq C(A) \quad \text{avec } C(A) = 2\sqrt{B} = 2\left(1 + \frac{1}{4\pi^2} (\ln A)^2\right)^{1/4}.$$

De plus, f_2 ne peut atteindre aucune des valeurs $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{-1}$ pour chacun des entiers $n \geq 1$, car sinon $\sqrt{f_1} = \frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1})$ prendrait la valeur $\frac{1}{2}((\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})) = \sqrt{n}$, ce qui est exclu. On considère maintenant une détermination holomorphe $f_4 = \log f_2$, qui existe de nouveau grâce à la simple connexité de Ω , et du fait que f_2 ne s'annule pas. Alors f_4 omet toutes les valeurs de l'ensemble

$$S = \{ \pm \ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + 2\pi i k; n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z} \}.$$

Cet ensemble est représenté ci-dessous (avec, cependant, un facteur de distorsion horizontal égal à 20, le cercle aurait donc dû être une ellipse mais on n'y aurait rien vu ...). Nous pouvons en outre choisir un argument $-\pi < \operatorname{Im} f_4(z_0) \leq \pi$, de sorte que $|f_4(z_0)| \leq \sqrt{(\ln C(A))^2 + \pi^2}$.



Les nombres $\ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ sont de moins en moins espacés quand n augmente, car la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$, égale à $1/(2\sqrt{x}\sqrt{x-1})$, est décroissante pour $x \in]1, +\infty[$. Ceci entraîne que le plus grand disque contenu dans $\mathbb{C} \setminus S$ a pour rayon

$$R_0 = \sqrt{\frac{1}{4}(\ln(\sqrt{2} + 1))^2 + \pi^2}.$$

Pour $z \in D(z_0, R)$, le théorème de Bloch-Landau (chap. II, §5.4) appliqué au disque $D(z, \rho)$, $\rho = R - |z - z_0|$, montre que l'image de f_4 contient un disque de rayon supérieur à $\frac{1}{22}\rho|f'_4(z)|$. Or, comme $f_4(\Omega) \subset \Omega \setminus S$, ce rayon doit être inférieur ou égal à R_0 et on a donc la majoration

$$|f'_4(z)| \leq 22 \frac{R_0}{\rho} = 22 \frac{R_0}{R - |z - z_0|}.$$

En intégrant cette inégalité par $f_4(z) = f_4(z_0) + \int_{z_0}^z f'_4(t)dt$, on obtient

$$|f_4(z)| \leq T(A, r) := \sqrt{(\ln C(A))^2 + \pi^2} + 22 R_0 \ln \frac{R}{R - r}$$

sur le disque $D(z_0, r)$. Ceci entraîne successivement l'existence de majorations uniformes explicites pour $f_2 = \exp(f_4)$ et $f_2^{-1} = \exp(-f_4)$, puis pour $\sqrt{f_1} = \frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1})$, puis pour $f = \exp(2\pi i f_1)$. De façon explicite, $|f_2(z)|^{\pm 1}$ est majorée par $\exp(T(A, r))$, $|f_1(z)|$ par $\exp(2T(A, r))$ et $|f(z)|$ par

$$M(A, r) = \exp(2\pi \exp(2T(A, r))). \quad \square$$

On peut observer que le lemme est faux pour des applications holomorphes omettant un seul point, ainsi les applications $f_k : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définies par $f_k(z) = \exp(kz)$ vérifient $f_k(0) = 1$ mais ne sont uniformément bornées sur aucun

disque $\overline{D}(0, r)$. Le lemme peut être généralisé sous la forme suivante, qui en donne un énoncé plus géométrique et plus parlant.

Proposition. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $\Omega' \subset \mathbb{C}$ un ouvert dont le complémentaire $E = \mathbb{C} \setminus \Omega'$ possède au moins deux points. On considère un point $z_0 \in \Omega$ et un compact $L_0 \subset \Omega'$ fixés. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega'$ dépendant de K et L_0 , tel que pour toute application holomorphe $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ vérifiant $f(z_0) \in L_0$ on ait $f(K) \subset L$.*

Autrement dit, pour $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ holomorphe, dès que l'image d'un point $f(z_0)$ est contrainte à rester dans un compact L_0 de Ω' , l'image $f(K)$ d'un compact $K \subset \Omega$ doit aussi rester dans un compact L de Ω' indépendant de f . Ici encore, ce résultat est faux si E est vide ou réduit à un seul point.

Démonstration. On commence par étudier le cas où $\Omega = D(z_0, R)$ est un disque. Choisissons deux points distincts $a, b \in E = \mathbb{C} \setminus \Omega'$, et soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ holomorphe. En utilisant le fait évident que tout point w est à une distance au moins égale à $|b - a|/2$ de a ou de b , nous pouvons écrire E comme la réunion $E_a \cup E_b$ des deux parties fermées définies par

$$E_a = \{w \in E; |a - w| \geq |b - a|/2\},$$

$$E_b = \{w \in E; |b - w| \geq |b - a|/2\}.$$

Pour tout $w \in E$, nous considérons la famille d'applications holomorphes

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - a}{b - a},$$

$$f_{a,w}(z) = \frac{a - w}{f(z) - w} \quad \text{lorsque } w \in E_a,$$

$$f_{b,w}(z) = \frac{b - w}{f(z) - w} \quad \text{lorsque } w \in E_b.$$

L'hypothèse $f(\Omega) \subset \Omega' = \mathbb{C} \setminus E$ entraîne que les applications \tilde{f} , $f_{a,w}$ et $f_{b,w}$ omettent les valeurs 0 et 1. De plus, en posant $w_0 = f(z_0)$, on observe qu'il existe une constante $A \geq 1$ telle que

$$A^{-1} \leq \left| \frac{w_0 - a}{b - a} \right| \leq A \quad \text{lorsque } w_0 \in L_0,$$

$$A^{-1} \leq \left| \frac{a - w}{w_0 - w} \right| \leq A \quad \text{lorsque } (w_0, w) \in L_0 \times E_a,$$

$$A^{-1} \leq \left| \frac{b - w}{w_0 - w} \right| \leq A \quad \text{lorsque } (w_0, w) \in L_0 \times E_b.$$

En effet, la première inégalité résulte de la compacité de L_0 dans $\Omega' \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, tandis que les deux suivantes sont vraies avec $A = 2$ lorsque $|w|$ est choisi plus grand que le rayon ρ tel que

$$\rho = 3 \max(|a|, \sup_{w_0 \in L_0} |w_0|).$$

D'autre part, pour $|w| \leq \rho$, l'existence de A résulte de la compacité des ensembles $L_0 \times (E_a \cap \overline{D}(0, \rho))$ et $L_0 \times (E_b \cap \overline{D}(0, \rho))$ sur lesquels les quotients définissent des applications continues non nulles. Ceci montre que l'application \tilde{f} satisfait $A^{-1} \leq |\tilde{f}(z_0)| \leq A$, et de même pour $f_{a,w}$ et $f_{b,w}$. Pour tout z dans le compact $K = \overline{D}(z_0, r)$, le lemme entraîne alors que

$$|\tilde{f}(z)| \leq M(A, r), \quad |f_{a,w}(z)| \leq M(A, r), \quad |f_{b,w}(z)| \leq M(A, r),$$

ce qui donne

$$|f(z)| \leq |a| + |b - a| M(A, r), \quad d(f(z), E) \geq \frac{|b - a|}{2M(A, r)}.$$

On a ainsi montré l'existence d'un compact $L \subset \Omega'$ pour lequel $f(K) \subset L$, à savoir l'ensemble L fermé borné des nombres complexes de module inférieur ou égal à $|a| + |b - a| M(A, r)$ et situés à distance $\geq \frac{|b - a|}{2M(A, r)}$ de $E = \mathbb{C} \setminus \Omega'$.

Dans le cas d'un ouvert connexe Ω connexe quelconque, il suffit de montrer que tout point $p \in \Omega$ possède un voisinage compact K ayant la propriété voulue. On utilise la connexité de Ω pour construire une ligne polygonale de sommets $z_0, z_1, \dots, z_N = p$ dans Ω telle que pour chaque $j = 1, \dots, N$ on ait $z_j \in D(z_{j-1}, R_{j-1}/2)$ et $D(z_{j-1}, R_{j-1}) \subset \Omega$. De proche en proche, on voit qu'il existe des compacts L_1, L_2, \dots, L_N tels que

$$f(\overline{D}(z_j, R_{j-1}/2)) \subset L_j,$$

puisque $K_j = \overline{D}(z_j, R_{j-1}/2)$ est une partie compacte de $\Omega_{j-1} = D(z_{j-1}, R_{j-1})$.

□

Grand théorème de Picard. *Soit $f : D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe possédant une singularité essentielle au point z_0 . Alors il existe un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ comprenant au plus un point, tel que $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur de $\mathbb{C} \setminus E$ sur chaque voisinage pointé $V \setminus \{z_0\}$ de z_0 .*

Démonstration. Comme le voisinage V peut être pris arbitrairement petit, il suffit de montrer que $f(V \setminus \{z_0\})$ atteint toute valeur de \mathbb{C} sauf une au plus. Supposons au contraire qu'il existe un ensemble $E = \{a, b\}$ formé de deux points tel que $f(V \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C} \setminus E$. Par la transformation de f en $(f(z) - a)/(b - a)$, on peut supposer $E = \{0, 1\}$. Prenons $z_0 = 0$ pour simplifier, et posons

$$\mu(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{pour } r \in]0, r_0[.$$

Nous avons $\lim_{r \rightarrow 0_+} m(r) = +\infty$, sinon il existerait une suite décroissante $r_k \rightarrow 0$ telle que $m(r_k)$ soit bornée, et le principe du maximum appliqué aux couronnes $C(0, r_{k+1}, r_k)$ montrerait que f serait bornée au voisinage de $z_0 = 0$. Mais alors f ne pourrait pas avoir une singularité essentielle en 0. Le même raisonnement appliqué à $1/f$, qui a également une singularité essentielle en 0, montre que $\lim_{r \rightarrow 0_+} \mu(r) = 0$. Ainsi, pour r assez petit nous avons $\mu(r) < 2 < m(R)$, ce

qui, par le théorème des valeurs intermédiaires, assure l'existence d'un $\theta_r \in [0, 2\pi]$ tel que $|f(re^{i\theta_r})| = 2$. Pour tout $r < r_0e^{-2\pi}$, nous pouvons considérer la famille de fonctions

$$g_r(z) = f(re^{i\theta_r}e^{2\pi iz})$$

définies sur le disque unité $D(0, 1)$. Par hypothèse, ces fonctions omettent les valeurs 0 et 1, et nous avons $|g_r(0)| = |f(re^{i\theta_r})| = 2$. Le lemme (ou la proposition qui en découle, avec $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $L_0 = \{|z| = 2\}$) entraîne l'existence d'une constante M_0 telle que g_r soit uniformément bornée par M_0 sur le disque compact $\overline{D}(0, 1/2)$. Mais comme $g_r([-1/2, 1/2])$ décrit toutes les valeurs atteintes par $f(z)$ pour $|z| = r$, nous en déduisons $m(r) \leq M_0$ pour tout $r < r_0e^{-2\pi}$, ce qui est une contradiction. \square

Le grand théorème de Picard admet la conséquence suivante (dans laquelle la fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fournit bien entendu un exemple du cas exceptionnel, puisque \exp ne prend pas la valeur 0).

Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière qui n'est pas un polynôme. Alors f prend une infinité de fois toute valeur complexe sauf peut-être une.*

Démonstration. On considère $g(z) = f(1/z)$ qui est holomorphe sur \mathbb{C}^* . Nous savons que f admet un développement en série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

de rayon de convergence $+\infty$, et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ admet une singularité essentielle en 0 car par hypothèse f n'est pas un polynôme et donc la série comprend une infinité de termes. Ceci montre que g (et donc f) atteint une infinité de fois toute valeur complexe, sauf peut-être une. \square

Bien entendu, les polynômes non constants prennent également toute valeur complexe (mais seulement un nombre fini de fois). Nous obtenons alors le

Petit théorème de Picard. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière non constante. Alors f prend toute valeur complexe sauf peut-être une.*

Chapitre V

Fonctions harmoniques et sous-harmoniques

Les fonctions sous-harmoniques sont en quelque sorte les analogues complexes des fonctions convexes : par définition, ce sont les fonctions semi-continues supérieurement sur un ouvert du plan complexe qui satisfont les inégalités de moyenne relativement à tous les disques contenus dans cet ouvert. De même que les fonctions convexes sont caractérisées par la positivité de la dérivée seconde, les fonctions sous-harmoniques sont, quant à elles, caractérisées par la positivité du laplacien. Nous les étudions en démontrant au passage un certain nombre de formules intégrales importantes, comme la formule de Green-Riesz, qui exprime une fonction sur un disque en termes de ses valeurs au bord et d'une certaine intégrale de son laplacien. De cette formule générale, nous déduisons la formule de Poisson qui donne la solution du problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques. La formule de Jensen s'obtient d'autre part comme conséquence de la formule de Lelong-Poincaré calculant le laplacien d'une fonction sous-harmonique du type $\ln|f|$ avec f holomorphe. Le chapitre s'achève avec la preuve du principe de réflexion de Schwarz, via une version forte du principe du maximum pour les fonctions faiblement sous-harmoniques.

1. Généralités sur les fonctions semi-continues

Rappelons qu'une fonction u définie sur un espace topologique X et à valeurs dans \mathbb{R} ou dans $[-\infty, +\infty[$ est dite *semi-continue supérieurement* en un point x_0 si pour tout $\lambda > u(x_0)$ il existe un voisinage V de x_0 sur lequel on a $u < \lambda$. De façon équivalente, $u : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue supérieurement en x_0 si

$$(1.1) \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0).$$

De façon analogue, on dit que u est *semi-continue inférieurement* en x_0 si

$$(1.2) \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) \geq u(x_0).$$

Il est clair que la fonction u est continue en x_0 si et seulement si elle y est semi-continue supérieurement et inférieurement. Nous nous restreignons maintenant au cas de la semi-continuité supérieure, en laissant au lecteur le cas de la semi-continuité inférieure. On a le résultat évident qui suit.

Théorème et définition. *La fonction u est dite semi-continue supérieurement sur X si elle l'est en tout point $x_0 \in X$. Cette propriété équivaut aux deux suivantes :*

- (i) *Pour tout réel λ , l'ensemble $\{u < \lambda\} = \{x \in X ; u(x) < \lambda\}$ est un ouvert.*
- (ii) *Pour tout réel λ , l'ensemble $\{u \geq \lambda\} = \{x \in X ; u(x) \geq \lambda\}$ est un fermé.*

On en déduit aisément le résultat qui suit.

Proposition. *Si u est semi-continue supérieurement sur X , alors pour toute partie compacte K de X il existe un point $x_0 \in K$ tel que*

$$\sup_{x \in K} u(x) = u(x_0).$$

Démonstration. Soit en effet $S = \sup_{x \in K} u(x)$. Pour tout $\lambda < S$, l'ensemble $\{u \geq \lambda\}$ est une partie fermée non vide de K . Comme K est compact, on en déduit que le fermé $F = \{u \geq S\} = \bigcap_{\lambda < S} \{u \geq \lambda\}$ est non vide. Or si $x_0 \in F$, on a d'une part $u(x_0) \geq S$, et d'autre part $u(x_0) \leq S$ puisque $x_0 \in K$. \square

Le résultat suivant est facile à démontrer.

Théorème A. *Toute limite d'une suite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement, en particulier, toute limite d'une suite décroissante de fonctions continues est semi-continue supérieurement.*

Dans le cas d'un espace métrisable, on a un énoncé réciproque :

Théorème B. *Soit X un espace topologique métrisable. Alors toute fonction u de X dans $[-\infty, +\infty[$ qui est semi-continue supérieurement est limite d'une suite décroissante (u_n) de fonctions continues de X dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Comme $[-\infty, +\infty[$ est isomorphe à l'intervalle $[0, 1[$ en tant qu'ensemble ordonné (avec par exemple l'isomorphisme $x \mapsto e^x/(1 + e^x)$), on peut tout aussi bien travailler avec des fonctions u à valeurs dans $[0, 1[$.

Soit d une distance compatible avec la topologie de X . Pour tout entier n , on pose

$$u_n(x) = \sup_{y \in X} (\max(u(y), 2^{-n-1}) - 2^n d(x, y)).$$

Les propriétés suivantes sont immédiates à vérifier :

- (u_n) est une suite décroissante ;
- Pour tout $x \in X$, $u_n(x) \geq \max(u(x), 2^{-n-1}) \geq u(x)$;
- u_n est à valeurs dans $[2^{-n-1}, 1] \subset]0, 1]$.
- u_n est lipschitzienne de rapport 2^n et donc continue sur X .

Pour tout $\lambda > u(x)$, il existe par hypothèse une boule $B(x, 2^{-N})$ sur laquelle $u < \lambda$. Pour $y \in X \setminus B(x, 2^{-N})$ on a alors $d(x, y) \geq 2^{-N}$ et donc

$$\max(u(y), 2^{-n-1}) - 2^n d(x, y) \leq 1 - 2^{n-N} \leq 0 \leq u(x) < \lambda$$

si $n \geq N$, tandis que pour $y \in B(x, 2^{-N})$ et $n > -\log_2 \lambda$ il vient

$$\max(u(y), 2^{-n-1}) - 2^n d(x, y) \leq \max(u(y), 2^{-n}) < \lambda.$$

Par conséquent $u_n(x) \leq \lambda$ pour $n \geq \max(N, [-\log_2 \lambda] + 1)$. Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x)$. Enfin, il est clair que l'on a $u_n(x) < 1$ pour tout x et tout n (utiliser les majorations précédentes avec $\lambda < 1$). La suite (u_n) répond à la question. \square

Si X est un espace métrisable et localement compact muni d'une mesure de Radon positive μ sur X , on peut définir l'intégrale $\int_K u d\mu \in [-\infty, +\infty[$ d'une fonction semi-continue supérieurement u en posant, sur chaque compact $K \subset X$

$$(1.3) \quad \int_K u d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K u_n d\mu$$

pour toute suite (u_n) de fonctions continues réelles qui convergent simplement en décroissant vers u . D'après le théorème de convergence monotone, on a $u \in L^1(K, \mu)$ si et seulement si $\int_K u d\mu > -\infty$.

2. Fonctions sous-harmoniques

2.1. Notion de sous-harmonicité

La notion de sous-harmonicité est en quelque sorte l'analogue complexe de la notion réelle de convexité. Pour cela, on remplace l'inégalité de convexité relative au milieu des cordes par une inégalité de moyenne sur les cercles.

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) u est semi-continue supérieurement sur Ω .
- (ii) u vérifie l'inégalité de la moyenne : pour tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, on a

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Notation. On note $\text{SH}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions sous-harmoniques sur Ω .

Exemples. L'ensemble $\text{SH}(\Omega)$ contient :

- Les fonctions convexes dans Ω (i.e. les fonctions qui sont convexes sur tout segment $[a, b] \subset \Omega$). En effet, si u est convexe sur Ω et si $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, on a

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2} (u(z_0 + re^{i\theta}) + u(z_0 - re^{i\theta})),$$

ce qui implique l'inégalité de moyenne sur le cercle après intégration sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

• Pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, les fonctions $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et $|f|^2$ sont des fonctions sous-harmoniques. Pour le voir, on écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \quad \text{si } z = z_0 + re^{i\theta},$$

et on utilise les formules usuelles concernant les séries de Fourier pour obtenir

$$f(z_0) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

$$|f(z_0)|^2 = |a_0|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

(égalité de Parseval). La première ligne entraîne bien que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ satisfont l'égalité de moyenne, tandis que la seconde entraîne la sous-harmonicité de $|f|^2$.

Proposition. *La classe des fonctions sous-harmoniques jouit des propriétés de stabilité suivantes.*

- (i) *Si $u, v \in \operatorname{SH}(\Omega)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ alors $\lambda u + \mu v$ et $\max(u, v)$ sont sous-harmoniques.*
- (ii) *Si $(u_n) \in \operatorname{SH}(\Omega)$ est une suite décroissante alors $\lim u_n \in \operatorname{SH}(\Omega)$.*
- (iii) *Si $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante et convexe, et si $u \in \operatorname{SH}(\Omega)$ alors*

$$\chi \circ u \in \operatorname{SH}(\Omega)$$

[on convient ici que $\chi(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi(t)$].

- (iv) *Si $\chi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante et convexe par rapport à chaque variable, et si $u_1, \dots, u_p \in \operatorname{SH}(\Omega)$ alors $\chi(u_1, \dots, u_p) \in \operatorname{SH}(\Omega)$.*
- (v) *Si $u_1, \dots, u_p \in \operatorname{SH}(\Omega)$ alors $\ln(e^{u_1} + \dots + e^{u_p}) \in \operatorname{SH}(\Omega)$.*

Démonstration. (i) se déduit aussitôt de la définition, (ii) résulte du théorème de convergence monotone et du fait que la limite d'une suite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.

Pour obtenir (iii), on pose $t_0 = u(z_0)$ et on utilise le fait que le graphe de χ est situé au dessus de l'une ou l'autre de ses demi-tangentes, par exemple la demi-tangente à gauche

$$t \mapsto at + b = \chi'(t_0 - 0)(t - t_0) + \chi(t_0).$$

L'égalité $\chi(t_0) = at_0 + b$ combinée à l'inégalité $\chi(t) \geq at + b$ implique alors

$$\chi(u(z_0)) = au(z_0) + b \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (au(z_0 + re^{i\theta}) + b) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(u(z_0 + re^{i\theta})) d\theta.$$

On utilise ici de façon essentielle la positivité du coefficient $a = \chi'(t_0 - 0) \geq 0$, qui découle de la croissance de χ . Pour obtenir (iv) on raisonne de même en utilisant le fait que le graphe de χ est situé au dessus de l'hyperplan d'appui défini par

$$(t_1, \dots, t_p) \mapsto a_1 t_1 + \dots + a_p t_p + b, \quad a_j = \frac{\partial \chi}{\partial t_j}(t_j - 0) \geq 0.$$

(v) C'est un cas particulier de (iv), car $\chi(t_1, \dots, t_p) = \ln(e^{t_1} + \dots + e^{t_p})$ est une fonction convexe de (t_1, \dots, t_p) , croissante en chaque variable. On sait en effet que la convexité équivaut à la condition $\chi''(t) \geq 0$ en une variable, et à la positivité de la forme quadratique $\sum \chi''_{t_i t_j} a_i a_j$ en un nombre quelconque de variables. La vérification de cette propriété sera laissée au lecteur. \square

Inégalité de la moyenne sur un disque. Si $u \in \text{SH}(\Omega)$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ on a :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} u(z) d\lambda(z).$$

Démonstration. On passe en coordonnées polaires et on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} u(z) d\lambda(z) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \right) \end{aligned}$$

Il est clair que l'inégalité de moyenne sur les cercles $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \geq u(z_0)$ implique l'inégalité de moyenne sur le disque. \square

Corollaire. Si Ω est un ouvert connexe et si $u \in \text{SH}(\Omega)$, alors soit u est identiquement $-\infty$ sur Ω , soit u est dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Démonstration. Supposons $u \not\equiv -\infty$, et considérons l'ensemble E des points $z_0 \in \Omega$ tel qu'il existe un voisinage V_{z_0} sur lequel $u \in L^1(V_{z_0})$. Par définition même E est un ouvert. Par ailleurs, si z_0 est un point tel que $u(z_0) \neq -\infty$, alors d'une part la semi-continuité supérieure entraîne l'existence d'un disque $\overline{D}(z_0, r)$ sur lequel $u \leq M = u(z_0) + 1$, et d'autre part l'inégalité de moyenne sur le disque implique

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} u(z) d\lambda(z) \geq u(z_0) > -\infty,$$

d'où $u \in L^1(D(z_0, r))$. Par conséquent E contient tous les points tels que $u(z_0) \neq -\infty$, et, en particulier, E est donc non vide. Montrons pour terminer que E est fermé dans Ω , ce qui achèvera la démonstration grâce à la connexité de Ω . Soit $z_0 \in \overline{E} \cap \Omega$, $z_0 = \lim a_\nu$, $a_\nu \in E$. Comme u est intégrable au voisinage de a_ν , il y a des points b_ν arbitrairement proches de a_ν tels que $u(b_\nu) > -\infty$ et $\lim b_\nu = z_0$. Soit $\delta = \frac{1}{3}d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Pour ν assez grand on a $|b_\nu - z_0| < \delta$, donc

$z_0 \in D(b_\nu, \delta)$ et $D(b_\nu, \delta) \subset K = \overline{D}(z_0, 2\delta)$ qui est un compact contenu dans Ω . Sur ce compact, la semi-continuité supérieure de u entraîne $u \leq M = \sup_K u < +\infty$, tandis que

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \int_{D(b_\nu, \delta)} u(z) d\lambda(z) \geq u(b_\nu) > -\infty.$$

Comme $D(b_\nu, \delta)$ est un voisinage de z_0 , ceci implique bien que u est L^1 au voisinage de z_0 . Par suite $z_0 \in E$ et E est fermé. \square

2.2. Formule de Lelong-Jensen

Nous obtenons ici une formule reliant les valeurs moyenne d'une fonction sur un cercle, à une certaine intégrale de son laplacien sur un disque. La généralisation de cette formule à \mathbb{C}^n est souvent appelée formule de Lelong-Jensen. Nous nous restreindrons ici au cas du plan et du disque.

Formule de Lelong-Jensen. *Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un disque fermé $\overline{D}(z_0, r_0)$. Alors*

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) d\theta = u(z_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \left(\int_{D(z_0, t)} \Delta u(z) d\lambda(z) \right) \frac{dt}{t}.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous supposons $z_0 = 0$ et utilisons les coordonnées polaires dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pour écrire $u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Nous devons calculer

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

Le théorème de dérivation sous le signe \int implique

$$\mu'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + u'_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta) d\theta.$$

En écrivant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ sur le cercle $\Gamma(0, r)$, il vient

$$\cos \theta d\theta = \frac{1}{r} dy, \quad \sin \theta d\theta = -\frac{1}{r} dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu'(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\Gamma(0, r)} u'_x dy - u'_y dx = \frac{1}{2\pi r} \int_{D(0, r)} d(u'_x dy - u'_y dx) \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{D(0, r)} u''_{xx} dx \wedge dy - u''_{yy} dy \wedge dx = \frac{1}{2\pi r} \int_{D(0, r)} \Delta u(z) d\lambda(z) \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green-Riemann. le lemme résulte alors de l'égalité

$$\mu(r_0) = \mu(0) + \int_0^{r_0} \mu'(t) dt. \quad \square$$

Nous énonçons maintenant deux variantes utiles de la formule précédente.

Variantes. Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Alors pour $\varepsilon \in]0, r[$ on a

$$(2.2.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = u(z_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0, r)} \ln \frac{r}{|z - z_0|} \Delta u(z) d\lambda(z).$$

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0, r)} \min \left(\ln \frac{r}{|z - z_0|}, \ln \frac{r}{\varepsilon} \right) \Delta u(z) d\lambda(z). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous reprenons les calculs précédents, en supposant de nouveau $z_0 = 0$. L'égalité $\mu(r) - \mu(\varepsilon) = \int_\varepsilon^r \mu'(t) dt$ et le théorème de Fubini fournissent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta \\ = \int_\varepsilon^r \frac{1}{2\pi t} \left(\int_{D(0, t)} \Delta u(z) d\lambda(z) \right) dt \\ = \frac{1}{2\pi} \iint_{\varepsilon < t < r, |z| < t} \Delta u(z) d\lambda(z) \frac{dt}{t} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{z \in D(0, r)} \left(\int_{\max(|z|, \varepsilon)}^r \frac{dt}{t} \right) \Delta u(z) d\lambda(z) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{D(0, r)} \min \left(\ln \frac{r}{|z|}, \ln \frac{r}{\varepsilon} \right) \Delta u(z) d\lambda(z). \end{aligned}$$

Ceci implique l'égalité (2.2.3), et le cas particulier (2.2.2) s'obtient en faisant tendre ε vers 0. □

2.3. Formule de Green-Riesz

L'objet de cette section est de démontrer une formule très importante permettant de représenter des fonctions en termes de leur laplacien sur un compact K et de leurs valeurs sur le bord ∂K . Nous nous restreindrons au cas du disque, pour lequel on a une formule complètement explicite.

On introduit ci-dessous deux fonctions que l'on appelle respectivement « noyau de Poisson » P_K et « noyau de Green » G_K associés au disque fermé $K = \overline{D}(z_0, r)$. Il existe en fait de tels noyaux P_K et G_K pour tout compact K à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, définis respectivement sur $\partial K \times K^\circ$ et $K \times K$, avec $G_K(z, z) = -\infty$ sur la diagonale (cf. problème ??). De façon précise, on pose $P_{\overline{D}(z_0, r)} = P_{z_0, r}$ et $G_{\overline{D}(z_0, r)} = G_{z_0, r}$ avec

$$(2.3.1) \quad P_{0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - |w|^2}{|z - w|^2} \quad \text{pour } (z, w) \in \partial D(0, r) \times D(0, r),$$

$$(2.3.2) \quad G_{0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r|z - w|}{|r^2 - z\overline{w}|} \right) \quad \text{pour } z \neq w \text{ dans } \overline{D}(0, r).$$

La translation $\overline{D}(z_0, r) \mapsto \overline{D}(0, r)$, $z \mapsto z - z_0$ conduit à poser plus généralement

$$P_{z_0, r}(z, w) = P_{0, r}(z - z_0, w - z_0), \quad G_{z_0, r}(z, w) = G_{0, r}(z - z_0, w - z_0),$$

de sorte que

$$P_{z_0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - |w - z_0|^2}{|z - w|^2} \quad \text{pour } (z, w) \in \partial D(z_0, r) \times D(z_0, r),$$

$$G_{z_0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r|z - w|}{|r^2 - (z - z_0)(\overline{w} - \overline{z_0})|} \right) \quad \text{pour } z \neq w \text{ dans } \overline{D}(z_0, r).$$

Formule de Green-Riesz. Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un disque fermé $K = \overline{D}(z_0, r)$. Alors pour tout $w \in K^\circ$ on a

$$(2.3.3) \quad u(w) = \int_{\partial K} P_K(z, w) u(z) |dz| + \int_K G_K(z, w) \Delta u(z) d\lambda(z)$$

où $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ désigne l'élément infinitésimal d'abscisse curviligne de ∂K . De plus P_K et G_K vérifient les propriétés suivantes :

$$(2.3.4) \quad P_K(z, w) > 0 \quad \text{sur } \partial K \times K^\circ,$$

$$(2.3.5) \quad \int_{\partial K} P_K(z, w) |dz| = 1, \quad \forall w \in K^\circ,$$

$$(2.3.6) \quad G_K(z, w) < 0 \quad \text{et} \quad G_K(z, w) = G_K(w, z) \quad \text{sur } K^\circ \times K^\circ,$$

$$(2.3.7) \quad G_K(z, w) = 0 \quad \text{sur } (K^\circ \times \partial K) \cup (\partial K \times K^\circ).$$

Démonstration. Après translation on peut évidemment supposer $z_0 = 0$. De plus, le changement de variable $z = rz'$, $w = rw'$ ramène le calcul au cas du disque unité $D(0, 1)$. Pour $w = 0$, la formule (2.3.3) équivaut à

$$(2.3.8) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(0,1)} u(z) |dz| + \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,1)} \ln |z| \Delta u(z) d\lambda(z),$$

et celle-ci résulte de (2.2.2) dans le cas du rayon unité $r = 1$. Pour obtenir le cas d'un point w quelconque, on effectue un changement de variable au moyen d'une homographie bijective du disque unité dans lui-même, à savoir

$$\varphi_w(z) = \frac{z - w}{1 - z\overline{w}}, \quad \varphi_w^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta + w}{1 + \zeta\overline{w}}.$$

En appliquant la formule (2.3.8) à la fonction $u \circ \varphi_w^{-1}(\zeta)$ on obtient

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(0,1)} u(\varphi_w^{-1}(\zeta)) |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,1)} \ln |\zeta| \Delta_\zeta (u(\varphi_w^{-1}(\zeta))) d\lambda(\zeta).$$

On exploite maintenant le fait que l'expression

$$\Delta_z u(z) d\lambda(z) = 2i \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}$$

est un *invariant conforme* : si on substitue $z = \psi(\zeta)$ avec ψ holomorphe, on a $dz = \psi'(\zeta) d\zeta$, donc $\partial^2 u / \partial z \partial \bar{z}$ devient

$$\frac{1}{\psi'(\zeta)\overline{\psi'(\zeta)}} \frac{\partial^2 u(\psi(\zeta))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}$$

tandis que $dz \wedge d\bar{z}$ devient $\psi'(\zeta)\overline{\psi'(\zeta)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$. Par conséquent

$$\Delta_z u(z) d\lambda(z) = \Delta_\zeta (u(\psi(\zeta))) d\lambda(\zeta).$$

En appliquant cette invariance conforme avec le changement de variable $\zeta = \varphi_w(z)$ (c'est-à-dire $z = \psi(\zeta) = \varphi_w^{-1}(\zeta)$), nous obtenons

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(0,1)} u(z) |d\varphi_w(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,1)} \ln |\varphi_w(z)| \Delta_z u(z) d\lambda(z).$$

Comme

$$|d\varphi_w(z)| = |\varphi'_w(z)| |dz| = \frac{1 - |w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} |dz| = \frac{1 - |w|^2}{|w - z|^2} |dz|,$$

si $|z| = 1$, la formule de Green-Riesz s'ensuit. □

2.4. Sous-harmonicité et positivité du laplacien

Comme conséquence de la formule de Green-Riesz, on obtient une caractérisation nécessaire et suffisante des fonctions sous-harmoniques de classe \mathcal{C}^2 . Nous améliorerons cette caractérisation dans la section 3, en la généralisant aux fonctions sous-harmoniques quelconques.

Proposition. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction u de classe \mathcal{C}^2 dans Ω est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$ sur Ω .*

Démonstration. Si $\Delta u \geq 0$ sur Ω , l'égalité (2.2.1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = u(z_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^r \left(\int_{D(z_0,t)} \Delta u(z) d\lambda(z) \right) \frac{dt}{t}$$

montre que l'inégalité de moyenne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \geq u(z_0)$$

est satisfaite pour tout disque $\overline{D}(z_0, r)$. Inversement, s'il existe un point $z_0 \in \Omega$ tel que $\Delta u(z_0) < 0$, alors par continuité il existe un disque $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ sur lequel $\Delta u < 0$, par suite

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta < u(z_0)$$

et u n'est pas sous-harmonique. □

Dans les résultats ci-dessous, nous aurons besoin d'utiliser les procédés usuels de régularisation. Pour cela, on choisit une fonction $\tilde{\rho} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^∞ dont le support est égal à $[0, 1]$; la fonction

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} \exp(-1/(1-t)) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

convient. On pose ensuite

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{C}{\varepsilon^2} \tilde{\rho}\left(\frac{|z|^2}{\varepsilon^2}\right),$$

où $C > 0$ est une constante choisie en sorte que $\int_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon(z) d\lambda(z) = 1$. Il est bien connu que si u est une fonction localement intégrable dans \mathbb{C} , alors la *convolution*

$$u * \rho_\varepsilon(z) = \int_{w \in \mathbb{C}} u(w) \rho_\varepsilon(z-w) d\lambda(w) = \int_{w \in D(z, \varepsilon)} u(w) \rho_\varepsilon(z-w) d\lambda(w)$$

est une fonction \mathcal{C}^∞ qui converge vers u dans L^1 sur tout compact. Plus précisément, si u est définie sur un compact Ω , alors $u * \rho_\varepsilon$ est définie sur

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega ; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \varepsilon\},$$

avec $\Omega = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon$. De plus, par dérivation sous le signe somme, nous avons $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = u * (D^\alpha \rho_\varepsilon)$ pour tout opérateur de différentiation D^α . Si u est continue, on démontre aisément la convergence uniforme de $u * \rho_\varepsilon$ vers u sur tout compact, et de là, la convergence dans L^1 par densité des fonctions continues à support compact.

Théorème. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction semi-continue supérieurement.*

(i) *Si $u \in \text{SH}(\Omega)$ alors, pour tout $z_0 \in \Omega$, l'application*

$$r \mapsto \mu_{z_0, r}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

est croissante sur $[0, d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)[$.

(ii) *Si $u \in \text{SH}(\Omega) \cap L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ alors $u * \rho_\varepsilon$ est sous-harmonique dans Ω_ε . De plus $\varepsilon \mapsto u * \rho_\varepsilon(z)$ est une fonction croissante et on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u * \rho_\varepsilon(z) = u(z)$ en tout point.*

(iii) *Si $u \in \text{SH}(\Omega)$ alors u est la limite simple sur Ω d'une suite décroissante u_ν de fonctions sous-harmoniques de classe \mathcal{C}^∞ , définies sur des ouvert $\Omega_{1/\nu}$ formant une suite croissante et tels que $\bigcup \Omega_{1/\nu} = \Omega$.*

Démonstration. Lorsque u est de classe \mathcal{C}^2 , la propriété (i) résulte aussitôt de la formule (2.2.1) et de la positivité du laplacien.

(ii) La convolution peut s'écrire aussi

$$u * \rho_\varepsilon(z) = \int_{w \in \mathbb{C}} u(z-w) \rho_\varepsilon(w) d\lambda(w).$$

C'est une fonction \mathcal{C}^∞ , donc continue. De plus, en prenant la valeur moyenne sur un cercle $\Gamma(z_0, r)$, on déduit du théorème de Fubini que l'inégalité de moyenne est satisfaite, par conséquent $u * \rho_\varepsilon$ est sous-harmonique et nous en déduisons de (i) que

$$r \mapsto \mu_{z_0, r}(u * \rho_\varepsilon)$$

est une fonction croissante de r , pour $r < d(z_0, \mathbb{C}\Omega) - \varepsilon$. Après changement de variable $w \mapsto \varepsilon w$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} u * \rho_\varepsilon(z) &= C \int_{w \in \mathbb{C}} u(z - \varepsilon w) \tilde{\rho}(|w|^2) d\lambda(w) \\ &= C \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} u(z + \varepsilon r e^{i\theta}) d\theta \right) \tilde{\rho}(r^2) r dr \\ &= 2\pi C \int_0^1 \mu_{z, \varepsilon r}(u) \tilde{\rho}(r^2) r dr \end{aligned}$$

De là, nous déduisons que $\varepsilon \mapsto u * \rho_\varepsilon(z)$ est fonction croissante de ε si u est de classe \mathcal{C}^2 . En particulier, nous pouvons appliquer ce resultat pour $u * \rho_\delta$, mais comme $u * \rho_\delta \rightarrow u$ dans L^1 sur tout compact, nous avons

$$u * \rho_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} (u * \rho_\delta) * \rho_\varepsilon(z)$$

et il en résulte, sans hypothèse de régularité sur u , que $\varepsilon \mapsto u * \rho_\varepsilon(z)$ est fonction croissante de ε . Maintenant, la dernière formule intégrale combinée à l'inégalité de moyenne pour u implique

$$u * \rho_\varepsilon(z) \geq 2\pi C \int_0^1 u(z) \tilde{\rho}(r^2) r dr = u(z) \int_{D(0,1)} \rho_1(w) d\lambda(w) = u(z).$$

De plus, pour tout $\lambda > u(z)$, la semi-continuité supérieure de u implique l'existence d'un disque $D(z, \varepsilon_0)$ sur lequel $u < \lambda$. Nous avons alors $u * \rho_\varepsilon(z) \leq \lambda$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, et donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u * \rho_\varepsilon(z) = u(z)$.

(iii) résulte de (ii) en prenant par exemple $u_\nu = u * \rho_{1/\nu}$, du moins lorsque u est localement intégrable sur Ω . Si u n'est pas localement intégrable, on sait que u est identiquement égale à $-\infty$ dans les composantes connexes où il n'y a pas intégrabilité, et il est évident dans ce cas qu'on peut prendre $u_\nu(z) = -\nu$. La propriété (i) s'ensuit sans hypothèse sur u , en considérant la suite (u_ν) et en appliquant le théorème de convergence monotone. \square

Corollaire. Si $f : \Omega' \rightarrow \Omega$ est holomorphe et $u \in \text{SH}(\Omega)$ alors $u \circ f \in \text{SH}(\Omega')$.

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas où u est de classe \mathcal{C}^2 . Du fait de l'holomorphie de f , nous avons

$$\frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}(f(z)) f'(z) \overline{f'(z)},$$

et la positivité de Δu entraîne donc celle de $\Delta(u \circ f)$. En général, on écrit u comme limite décroissante $\lim u_\nu$ de fonctions sous-harmoniques de classe \mathcal{C}^∞ , et on en déduit que $u \circ f = \lim u_\nu \circ f$ est sous-harmonique. \square

Exemple. Un exemple fondamental est celui de la fonction $u(z) = \ln |z|$, étendue à \mathbb{C} tout entier en posant $\ln 0 = -\infty$. Nous avons

$$\ln |z| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \ln(|z|^2 + \varepsilon^2),$$

et des calculs aisés donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln(|z|^2 + \varepsilon^2) &= \frac{z}{|z|^2 + \varepsilon^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln(|z|^2 + \varepsilon^2) &= \frac{1}{|z|^2 + \varepsilon^2} - \frac{|z|^2}{(|z|^2 + \varepsilon^2)^2} = \frac{\varepsilon^2}{(|z|^2 + \varepsilon^2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les fonctions $z \mapsto \ln(|z|^2 + \varepsilon^2)$ et $z \mapsto \ln |z|$ sont sous-harmoniques sur \mathbb{C} tout entier.

Conséquence. Il résulte de l'exemple précédent que pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la fonction $\ln |f|$ est sous-harmonique dans Ω . Plus généralement, si $\chi(t_1, \dots, t_p)$ est une fonction convexe croissante et si $f_1, \dots, f_p \in \text{SH}(\Omega)$, alors $\chi(\alpha_1 \ln |f_1|, \dots, \alpha_p \ln |f_p|) \in \text{SH}(\Omega)$ pour tout système $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de coefficients ≥ 0 . Ceci implique que

$$\begin{aligned} \max(\alpha_1 \ln |f_1|, \dots, \alpha_p \ln |f_p|) &\in \text{SH}(\Omega), \\ \ln(|f_1|^{\alpha_1} + \dots + |f_p|^{\alpha_p}) &\in \text{SH}(\Omega). \end{aligned}$$

pour $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$.

Remarque. À partir de la fonction logarithme, il est aisé de produire des fonctions sous-harmoniques fortement discontinues. Posons par exemple

$$u(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} \ln |z - a_n| \quad z \in \mathbb{C},$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite dénombrable dense dans \mathbb{C} , telle que $1/n \leq |a_n| \leq n$. Sur le disque $D(0, R)$ nous avons $|z - a_n| < R + n$ et on peut écrire

$$u(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} \ln \frac{|z - a_n|}{R + n} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} \ln(R + n).$$

La deuxième série est convergente et la première est composée de termes négatifs, donc décroissante, ce qui entraîne que u est sous-harmonique sur $D(0, R)$ et donc sur \mathbb{C} tout entier. Nous avons

$$u(0) \geq \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} \ln \frac{1}{n} > -\infty,$$

donc u n'est pas identiquement $-\infty$. Cependant $u(a_n) = -\infty$, donc $u(z)$ est égale à $-\infty$ sur une partie dense. La fonction positive $v = e^u$ est également sous-harmonique, elle est nulle sur une partie dense de \mathbb{C} sans être identiquement nulle.

3. Laplaciens comme mesures positives

3.1. Dérivation au sens des distributions

Il sera commode d'utiliser ici quelques rudiments de la théorie des distributions, de façon à pouvoir différentier des fonctions qui sont seulement localement intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$. Nous nous contenterons d'un cas très particulier, qui met en jeu seulement des mesures, mais pas des distributions quelconques. Comme souvent, le mot mesure désignera ici des mesures «de Radon», c'est-à-dire des mesures de masse finie sur les compacts.

Étant donné un ouvert Ω dans \mathbb{R}^n , on note $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω , et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω . Grâce aux procédés standard de convolution, on montre facilement que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Enfin, on considère des opérateurs différentiels à coefficients constants

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Le point de départ consiste à observer que l'on a la formule d'intégration par parties

$$(3.1.1) \quad \int_{\Omega} P(D)u(x) v(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} u(x) P(-D)v(x) d\lambda(x)$$

chaque fois que u et v sont des fonctions de classe \mathcal{C}^m dans Ω , l'une d'entre elles au moins étant à support compact. L'opérateur $P(-D)$ provient du changement de signe lorsqu'on effectue une intégration par parties ordinaire. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , u une fonction réelle localement intégrable au sens de Lebesgue et μ une mesure réelle dans Ω . Nous écrirons que l'on a

$$P(D)u = \mu$$

«au sens des distributions» si on a l'égalité

$$\mu(f) = \int_{\Omega} u(x) P(-D)f(x) d\lambda(x)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .

Comme les fonctions f de classe \mathcal{C}^∞ à support compact sont denses dans les fonctions continues à support compact pour la topologie de la convergence

uniforme, la mesure μ , si elle existe, est nécessairement unique. On observera que si u est de classe \mathcal{C}^m , alors la formule (3.1.1) montre que la mesure $\mu = P(D)u$ est la mesure à densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue telle que

$$d\mu(x) = P(D)u(x) d\lambda(x),$$

l'écriture $\mu = \Delta u$ revient donc simplement à identifier la mesure μ avec sa densité $P(D)u$.

3.2. Convergence vague des mesures

Nous aurons besoin de quelques résultats élémentaires sur la «convergence vague» des mesures (parfois aussi appelée «convergence faible», mais nous éviterons cette terminologie pour éviter la confusion avec la notion analogue mais distincte en théorie des distributions).

Notion de convergence vague. *On dit qu'une suite de mesures $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers une mesure μ sur Ω si la suite réelle $(\mu_j(f))_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(f)$ pour toute fonction continue f à support compact dans Ω .*

Proposition. *Soit \mathcal{P} une partie dense dans l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω et $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures dans Ω .*

- (i) *Pour que la suite (μ_j) converge vaguement vers une mesure μ , il faut et il suffit d'une part que pour tout compact $K \subset \Omega$, la suite réelle $(|\mu_j|(K))_{j \in \mathbb{N}}$ soit bornée, et d'autre part que $\mu_j(f) \rightarrow \mu(f)$ pour tout $f \in \mathcal{P}$.*
- (ii) *On a la propriété de compacité suivante pour la convergence vague : si pour tout compact $K \subset \Omega$ la suite $(|\mu_j|(K))_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une sous-suite (μ_{j_ν}) qui converge vaguement vers une mesure μ .*

Démonstration. (i) Considérons l'espace $\mathcal{C}_K(\Omega)$ des fonctions continues à support dans un compact quelconque $K \subset \Omega$. C'est un espace de Banach pour la topologie de la convergence uniforme, et toute mesure μ sur Ω donne lieu à une forme linéaire continue $f \mapsto \mu(f)$ sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$, dont la norme est égale à $|\mu|(K^\circ)$ (noter que les fonctions de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ sont nulles sur le bord ∂K). Si la suite (μ_j) converge vaguement vers f , alors c'est une suite de formes linéaires «simplement bornée» sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$, c'est-à-dire que la suite $(\mu_j(f))$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\Omega)$. Un théorème classique d'analyse fonctionnelle (le théorème de Banach-Steinhaus) dit alors que la suite des normes $\|\mu_j\|$ est bornée, donc les «masses» $|\mu_j|(K^\circ)$ sont bornées. Quitte à agrandir un peu le compact, on en conclut que les masses $|\mu_j|(K)$ sont bornées.

Inversement, supposons que les masses $|\mu_j|(K)$ soient bornées et que $\lim \mu_j(f) = \mu(f)$ pour tout $f \in \mathcal{P}$. L'hypothèse de densité de \mathcal{P} dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ signifie de façon précise que pour tout $f_0 \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, il existe un compact K dans Ω , contenant le support de f_0 , tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{P}$, à support dans K , telle que $\|f_\varepsilon - f_0\| \leq \varepsilon$. Désignons par C_K une constante majorant les normes $\|\mu\|$ et $\|\mu_j\| \leq |\mu_j|(K)$. Alors

$$\begin{aligned} |\mu_j(f_0) - \mu(f_0)| &\leq |\mu_j(f_\varepsilon) - \mu(f_\varepsilon)| + |\mu_j(f_\varepsilon - f_0)| + |\mu(f_\varepsilon - f_0)| \\ &\leq |\mu_j(f_\varepsilon) - \mu(f_\varepsilon)| + 2C_K \varepsilon. \end{aligned}$$

Par hypothèse $f_\varepsilon \in \mathcal{P}$, et il existe un indice $N(\varepsilon)$ tel que $|\mu_j(f_\varepsilon) - \mu(f_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ pour $j \geq N(\varepsilon)$. On voit donc que l'on a bien $\lim \mu_j(f_0) = \mu(f_0)$ pour tout $f_0 \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.

(ii) On utilise ici l'existence d'une partie dénombrable $\mathcal{P} = \{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ (si θ_ν est une suite de fonctions tronquantes à support compact, égales à 1 sur des compacts K_ν formant une suite exhaustive de Ω , on peut prendre $\mathcal{P} = \{x \mapsto \theta_\nu(x)p(x)\}$, où $p(x)$ décrit l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels). On construit par récurrence une suite de parties infinies emboîtées S_ν dans l'ensemble des entiers naturels, telles que

$$\mathbb{N} \supset S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_\nu \supset \dots,$$

et telles que la sous-suite $(\mu_j(f_\nu))_{j \in S_\nu}$ soit convergente pour chaque indice ν . Ceci est possible, puisque

$$|\mu_j(f_\nu)| \leq C_K \|f_\nu\|,$$

si K est un compact contenant le support de f_ν et C_K un majorant de $|\mu_j|(K)$. Désignons par j_ν le n -ième élément de S_ν . L'inégalité

$$|\mu_j(f) - \mu_k(f)| \leq |\mu_{j_\nu}(f_\nu) - \mu_{k_\nu}(f_\nu)| + |\mu_{j_\nu}(f - f_\nu)| + |\mu_{k_\nu}(f - f_\nu)|$$

et la densité de \mathcal{P} impliquent facilement que $(\mu_{j_\nu}(f))$ est une suite de Cauchy pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Il est facile de voir que la limite

$$\mu(f) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \mu_{j_\nu}(f)$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, donc une mesure sur Ω , et que (μ_{j_ν}) converge vaguement vers μ . □

Corollaire. Soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions localement intégrables au sens de Lebesgue sur Ω . On suppose que $\mu_j = P(D)u_j$ est une mesure positive et que u_j converge en norme L^1 sur tout compact vers une limite $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors la suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers une mesure positive μ sur Ω , et on a $\mu = P(D)u$.

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que les masses $|\mu_j|(K) = \mu_j(K)$ sont bornées pour tout compact K de Ω . Fixons une fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, à support compact, telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur K . Par définition de μ_j et grâce à l'hypothèse de positivité, on a

$$0 \leq \mu_j(K) \leq \mu_j(\theta) = \int_{\Omega} u_j P(-D)\theta \, d\lambda \leq \|P(-D)\theta\|_{\infty} \|u_j\|_{L^1(K')}$$

où $K' = \text{Supp}(\theta)$. Or, du fait de la convergence L^1 locale, la suite des normes $\|u_j\|_{L^1(K')}$ est bornée. On sait alors d'après (ii) qu'il existe une sous-suite (μ_{j_ν}) convergeant vaguement vers une mesure μ . Puisque les μ_{j_ν} sont positives, il est clair que μ est positive. Par convergence L^1 sur tout compact de la suite (u_j) , l'égalité

$$\mu_j(f) = \int_{\Omega} u_j P(-D)f \, d\lambda \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

implique à la limite

$$\mu(f) = \int_{\Omega} u P(-D)f d\lambda \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par conséquent $\mu = P(D)u$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$, la partie (i) de la proposition montre que $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers μ . \square

Il faut remarquer que le corollaire précédent est faux dans le cas de mesures non positives. Par exemple la suite de fonctions $u_j(x) = 2^{-j} \sin(4^j x)$ converge vers 0 dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ mais $\mu_j(x) = \frac{d}{dx} u_j(x) = 2^j \cos(4^j x)$ n'est pas de norme L^1 localement bornée sur les compacts, de sorte qu'il ne saurait y avoir de limite vague de la suite de mesures $\mu_j(x) dx$.

3.3. Équation de Lelong-Poincaré

Nous appliquons ici les résultats qui précèdent au cas des fonctions sous-harmoniques. Nous obtenons tout d'abord le fait que le laplacien est une mesure positive, en même temps qu'un résultat général de convergence vague.

Théorème. *Soit u une fonction sous-harmonique u dans un ouvert Ω , qui n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune des composantes connexes. Alors le laplacien Δu est une mesure positive. De plus, si $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques convergeant vers u , la suite de mesures Δu_ν converge vaguement vers Δu .*

Démonstration. Nous savons qu'une telle fonction sous-harmonique u est localement intégrable, et qu'on peut choisir une suite décroissante (\tilde{u}_ν) de fonctions sous-harmoniques de classe \mathcal{C}^∞ convergeant vers u . Dans ce cas $\Delta \tilde{u}_\nu$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty \geq 0$, et le corollaire précédent implique que Δu est une mesure positive. Le résultat général de convergence vague résulte aussi du corollaire. \square

Exemple. *Au sens des distributions, on a*

$$\Delta \ln |z| = 2\pi \delta_0,$$

où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0.

Démonstration. Considérons la fonction

$$u_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \ln (|z|^2 + \varepsilon^2),$$

qui converge en décroissant vers $u(z) = \ln |z|$ quand ε tend vers 0 en décroissant. D'après un calcul déjà fait dans la section 2.4, nous avons

$$\Delta u_\varepsilon(z) = \frac{2\varepsilon^2}{(|z|^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, nous trouvons

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta u_\varepsilon(z) f(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{2}{(1 + |w|^2)^2} f(\varepsilon w) d\lambda(w)$$

en effectuant un changement de variable $z = \varepsilon w$. Or, cette intégrale converge vers $I f(0)$ avec

$$I = \int_{\mathbb{C}} \frac{2}{(1 + |w|^2)^2} d\lambda(w) = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{2rdr}{(1 + r^2)^2} = 2\pi$$

(on a posé $w = re^{i\theta}$, $d\lambda(w) = rdr d\theta$). Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}} \Delta u_{\varepsilon}(z) f(z) d\lambda(z) = 2\pi f(0) = 2\pi \delta_0(f)$$

et le résultat est démontré. □

Équation de Lelong-Poincaré. Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} , non identiquement nulle sur chaque composante connexe, et soit

$$D = \sum m_j [a_j]$$

son diviseur des zéros et des pôles. Alors la fonction $\ln |f|$ est localement intégrable sur Ω , et au sens des distributions on a

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \ln |f| = \sum_j m_j \delta_{a_j}$$

où δ_{a_j} est la mesure de Dirac au point a_j .

Démonstration. Il suffit d'après l'unicité de démontrer l'égalité au voisinage d'un point z_0 quelconque. Sur un disque $D(z_0, r)$ assez petit, on peut écrire $f(z) = (z - z_0)^m u(z)$ où m est la multiplicité de z_0 (nulle si z_0 n'est ni un zéro ni un pôle!) et u une fonction holomorphe inversible dans $D(z_0, r)$. On a alors $\Delta \ln |u| = 0$ puisque

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln(u \bar{u}) = \frac{u' \bar{u}}{u \bar{u}} = \frac{u'}{u}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln(u \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u'}{u} \right) = 0.$$

Comme $\ln |f(z)| = m \ln |z - z_0| + \ln |u(z)|$ sur $D(z_0, r)$, on obtient

$$\Delta \ln |f(z)| = 2\pi m \delta_{z_0} \quad \text{sur } D(z_0, r). \quad \square$$

3.4. Formules de Jensen et de Green-Riesz généralisées

En utilisant le formalisme du laplacien généralisé au sens des distributions, il est facile d'obtenir le résultat suivant.

Théorème. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et u une fonction sous-harmonique sur Ω qui n'est égale identiquement à $-\infty$ sur aucune des composantes connexes. Soit Δu la mesure positive «laplacien au sens des distributions». Alors pour tout disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$ contenu dans Ω on a

(i) *Formule de Lelong-Jensen :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - u(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r \left(\int_{D(z_0, t)} \Delta u(z) d\lambda(z) \right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0, r)} \ln \frac{r}{|z - z_0|} \Delta u(z) d\lambda(z). \end{aligned}$$

(ii) *Formule de Green-Riesz : pour tout point $w \in D(z_0, r)$*

$$u(w) = \int_{\Gamma(z_0, r)} P_{z_0, r}(z, w) u(z) |dz| + \int_{D(z_0, r)} G_{z_0, r}(z, w) \Delta u(z) d\lambda(z).$$

(iii) *Inégalité de Green-Riesz : pour tout point $w \in D(z_0, r)$*

$$u(w) \leq \int_{\Gamma(z_0, r)} P_{z_0, r}(z, w) u(z) |dz|.$$

Dans ces trois formules, les intégrales étendues au cercle $\Gamma(z_0, r)$ sont toujours convergentes.

Démonstration. On remarquera que l'intégrale double du (i) peut-être divergente, c'est le cas si et seulement si $u(z_0) = -\infty$. De même l'intégrale $\int_{D(z_0, r)} \dots$ du (ii) converge si et seulement si $u(w) > -\infty$.

Pour démontrer ces formules, on reprend l'égalité (2.2.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0, r)} \min \left(\ln \frac{r}{|z - z_0|}, \ln \frac{r}{\varepsilon} \right) \Delta u(z) d\lambda(z). \end{aligned}$$

déjà démontrée lorsque u est de classe \mathcal{C}^2 . Si u n'est pas de classe \mathcal{C}^2 , on applique cette égalité aux régularisées $u_\nu = u * \rho_{1/\nu}$ et on observe que la fonction f définie par

$$f(z) = \begin{cases} \min \left(\ln \frac{r}{|z - z_0|}, \ln \frac{r}{\varepsilon} \right) & \text{sur } D(z_0, r), \\ 0 & \text{sur } \mathbb{C} \setminus D(z_0, r) \end{cases}$$

est continue à support compact dans Ω (avec $\text{Supp } f = \overline{D}(z_0, r)$). La convergence vague $\Delta u_\nu \rightarrow \Delta u$ implique que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int f(z) \Delta u_\nu(z) d\lambda(z) = \int f(z) \Delta u(z) d\lambda(z)$$

tandis que les intégrales $\int_0^{2\pi} u_\nu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$ et $\int_0^{2\pi} u_\nu(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$ admettent les limites voulues par convergence monotone $u_\nu \rightarrow u$. Ces limites sont finies car la propriété de croissance des moyennes en fonction du rayon implique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \geq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} u(z) d\lambda(z) > -\infty$$

du fait de l'intégrabilité locale de u . En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0, r)} \ln \frac{r}{|z - z_0|} \Delta u(z) d\lambda(z)$$

équivalente à (i). La formule (ii) se déduit de celle-ci comme dans la section 2.3, en se ramenant à $z_0 = 0$, $r = 1$, puis en effectuant un changement de variable $\zeta = \varphi_w(z)$. L'inégalité (iii) résulte immédiatement de (ii), de la positivité du laplacien Δu et de la négativité du noyau de Green $G_{z_0, r}$. \square

La formule plus classique connue sous le nom de formule de Jensen s'obtient en prenant $u = \ln |f|$ avec f holomorphe.

Formule de Jensen. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction méromorphe sur Ω , de diviseur $D = \sum m_j [a_j]$ (on suppose f non identiquement nulle sur chaque composante connexe). Alors pour tout disque $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(z_0)| = \sum_{a_\nu \in D(0, r)} m_\nu \ln \left(\frac{r}{|a_\nu - z_0|} \right).$$

Démonstration. Lorsque f est holomorphe, c'est le cas particulier de la formule de Lelong-Jensen appliquée à $u = \ln |f|$, dans laquelle on utilise l'égalité de Lelong-Poincaré

$$\frac{1}{2\pi} \Delta u = \sum_j m_j \delta_{a_j}.$$

Lorsque f est méromorphe, il suffit d'écrire f comme un quotient g/h de fonctions holomorphes, et de soustraire les égalités obtenues pour g et h . On notera que l'égalité a bien encore lieu lorsque z_0 est un zéro ou un pôle de f , dans ce cas les deux membres sont infinis et du même signe ($+\infty$ pour un zéro, $-\infty$ pour un pôle). \square

4. Fonctions harmoniques

4.1. Définition et relation avec les fonctions holomorphes

En combinant les résultats déjà obtenus pour les fonctions sous-harmoniques, il est facile d'obtenir diverses caractérisations équivalentes des fonctions harmoniques.

Théorème. Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle sur Ω . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la fonction h est semi-continue (supérieurement ou inférieurement) sur Ω et pour tout disque $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ elle satisfait l'égalité de moyenne

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

(ii) $h \in C^2(\Omega)$ et $\Delta h = 0$.

(iii) $h \in C^\infty(\Omega)$ et $\Delta h = 0$.

On dit alors que h est harmonique sur Ω .

Démonstration. Il est évident que (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i). Supposons maintenant que l'hypothèse (i) soit satisfaite, avec (disons) h semi-continue supérieurement; dans l'autre cas il suffira de changer h en $-h$. Alors h est sous-harmonique, donc localement intégrable sur Ω , et l'égalité de moyenne sur les cercles implique que $h * \rho_\varepsilon = h$ sur $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \varepsilon\}$ (passer en coordonnées polaires pour calculer $h * \rho_\varepsilon$, comme à la section 2.4). Ceci entraîne que h est de classe C^∞ , puisque $h * \rho_\varepsilon$ l'est. Par suite h et $-h$ sont sous-harmoniques et on doit avoir simultanément $\Delta h \geq 0$, $\Delta h \leq 0$, ce qui entraîne $\Delta h = 0$. Nous avons bien démontré que (i) \Rightarrow (iii). \square

Nous relierons maintenant les fonctions harmoniques aux fonctions holomorphes.

Théorème. *Si Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , alors toute fonction harmonique réelle h sur Ω s'écrit comme la partie réelle $h = \operatorname{Re}(f)$ d'une fonction holomorphe f sur Ω . En particulier, toute fonction harmonique est \mathbb{R} -analytique.*

Démonstration. L'hypothèse d'harmonicité $\partial^2 h / \partial z \partial \bar{z} = 0$ s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0,$$

donc $g = \partial h / \partial z$ est holomorphe sur Ω . Comme Ω est simplement connexe, g possède une primitive G sur Ω , c'est-à-dire que $\partial G / \partial z = g = \partial h / \partial z$ tandis que $\partial G / \partial \bar{z} = 0$. Nous en déduisons que

$$\frac{\partial}{\partial z} (G + \bar{G} - h) = \frac{\partial}{\partial z} (G - h) = 0,$$

et comme $G + \bar{G} - h$ est réelle, cette égalité entraîne que $d(G + \bar{G} - h) = 0$ puisque la relation conjuguée est également satisfaite. Il existe par conséquent une constante C réelle telle que $G + \bar{G} - h = C$, de sorte que

$$h = G + \bar{G} - C = \operatorname{Re}(f)$$

avec $f = 2G - C$. Le résultat est démontré. \square

Remarque 1. Dans le théorème précédent, les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que $h = \operatorname{Re}(f)$ sont uniques à l'addition d'une constante imaginaire pure iC près. Dans tout disque $D(z_0, r) \subset \Omega$ on a un développement en série entière convergent

$$h(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} (a_n (z - z_0)^n),$$

avec $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{C}$. Ces coefficients sont uniques et sont donnés par $a_0 = h(z_0)$ et $a_n = 2 \frac{\partial^n h}{\partial z^n}(z_0)$ pour $n \geq 1$.

Remarque 2. Si h est une fonction harmonique à valeurs complexes sur un ouvert simplement connexe Ω , il est facile de voir que l'on peut écrire $h = f + \bar{g}$ avec f, g holomorphes sur Ω . Les fonctions f et g sont uniques à des constantes additives près.

4.2. Problème de Dirichlet

Étant donné une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma(z_0, r), \mathbb{R})$ définie et continue sur un cercle, le « problème de Dirichlet » consiste à trouver une fonction $h \in \mathcal{C}^0(\bar{D}(z_0, r))$ continue sur le disque fermé, telle que

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} \Delta h = 0 & \text{sur } D(z_0, r) \\ h|_{\Gamma(z_0, r)} = f & \text{sur } \Gamma(z_0, r), \end{cases}$$

autrement dit, une fonction h harmonique sur le disque $D(z_0, r)$ et continue jusqu'à la frontière, admettant f comme valeur au bord.

Théorème. *Le problème de Dirichlet (4.2.1) admet une solution unique. Cette solution est donnée par*

$$(4.2.2) \quad h(w) = \int_{\Gamma(z_0, r)} P_{z_0, r}(z, w) f(z) |dz|$$

où

$$P_{z_0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - |w - z_0|^2}{|z - w|^2} > 0$$

est le noyau de Poisson du disque $\bar{D}(z_0, r)$. On notera $h = P_{z_0, r}[f]$.

Démonstration. Démontrons d'abord l'unicité. Si h existe, la formule intégrale de Green-Riesz donne $h = P_{z_0, r'}[h]$ sur tout disque $D(z_0, r')$ avec $r' < r$, et donc aussi $h = P_{z_0, r}[h]$ sur $D(z_0, r)$ par continuité. Comme $h|_{\Gamma(z_0, r)} = f$ par hypothèse, on en déduit que l'on a nécessairement $h = P_{z_0, r}[f]$.

Pour démontrer l'existence, on supposera $z_0 = 0$ afin de simplifier les notations. On pose évidemment $h = P_{z_0, r}[f]$. Comme le noyau de Poisson est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\Gamma(z_0, r) \times D(z_0, r)$, il est évident par dérivation sous le signe \int que h est de classe \mathcal{C}^∞ sur $D(z_0, r)$. De plus un calcul facile donne

$$P_{0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - |w|^2}{|z - w|^2} = \frac{1}{2\pi r} \operatorname{Re} \frac{z + w}{z - w},$$

donc la fonction $w \mapsto P_{0, r}(z, w)$ est harmonique sur $D(0, r)$ pour tout $z \in \Gamma(0, r)$. Il en résulte bien que $\Delta h(w) = 0$ sur $D(z_0, r)$. Pour conclure la démonstration, il suffit de vérifier que

$$(4.2.3) \quad \lim_{D(z_0, r) \ni w \rightarrow z_1} P_{z_0, r}[f](w) = f(z_1)$$

pour tout point $z_1 \in \Gamma(z_0, r)$. Comme $\int_{\Gamma(z_0, r)} P_{z_0, r}(z, w) |dz| = 1$ d'après (2.3.5), nous pouvons écrire

$$h(w) - f(z_1) = \int_{\Gamma(z_0, r)} P_{z_0, r}(z, w) (f(z) - f(z_1)) |dz|.$$

Comme f est supposée continue, étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe $\delta > 0$ tel que $z \in \Gamma(z_0, r) \cap D(z_1, \delta)$ implique $|f(z) - f(z_1)| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$|h(w) - f(z_1)| \leq \varepsilon + \int_{\Gamma(z_0, r) \setminus D(z_1, \delta)} P_{z_0, r}(z, w) |f(z) - f(z_1)| |dz|.$$

Prenons maintenant $|w - z_1| \leq \eta \leq \delta/2$ et $z \in \Gamma(z_0, r) \setminus D(z_1, \delta)$. Il vient $|z - w| \geq \delta/2$ et $|w| \geq |z_1| - \eta \geq r - \delta'$, donc

$$P_{0, r}(z, w) = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - |w|^2}{|z - w|^2} \leq \frac{2}{\pi r} \frac{r^2 - (r - \eta)^2}{\delta^2} \leq \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{\delta^2}.$$

Le choix $\eta = \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2$ donne

$$|P_{z_0, r}(z, w)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } w \in D(z_1, \eta) \text{ et } z \in \Gamma(z_0, r) \setminus D(z_1, \delta),$$

de sorte que pour tout $w \in D(z_0, r) \cap D(z_1, \eta)$ on a

$$|h(w) - f(z_1)| \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot 2M \cdot 2\pi r$$

avec $M = \sup_{\Gamma(z_0, r)} |f|$. Ceci entraîne bien (4.2.3), et le théorème s'ensuit. \square

5. Fonctions faiblement sous-harmoniques et principe du maximum

5.1. Notion de sous-harmonicité faible

Nous commençons par introduire une notion a priori plus faible que la sous-harmonicité. On verra en fait plus loin que les deux notions sont équivalentes.

Définition. Si Ω est un ouvert de \mathbb{C} , une fonction $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est dite faiblement sous-harmonique si elle est semi-continue supérieurement sur Ω et si, pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe une suite de rayons $r_\nu > 0$ tendant vers 0 telle que l'inégalité de moyenne soit satisfaite pour cette suite de rayons :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_\nu e^{i\theta}) d\theta.$$

On notera (et c'est là le point crucial de la définition !) que la suite de rayons $r_\nu > 0$ pour lesquels l'inégalité de moyenne est supposée être vérifiée peut très bien dépendre du point z_0 .

5.2. Principe du maximum

La stratégie est de démontrer ce principe pour toutes les fonctions faiblement sous-harmoniques.

Principe du maximum. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et u une fonction faiblement sous-harmonique sur Ω .

- (i) S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $u(z_0) = \sup_{\Omega} u$, alors u est constante sur la composante connexe de z_0 dans Ω .
- (ii) Pour tout compact K de Ω , on a

$$\sup_K u = \sup_{\partial K} u.$$

Remarque. Si h est harmonique sur Ω , alors h et $-h$ sont sous-harmoniques sur Ω et on a donc aussi $\sup_K |h| = \sup_{\partial K} |h|$.

Démonstration. Pour (i), nous pouvons supposer Ω connexe (en remplaçant éventuellement Ω par la composante connexe du point z_0). Considérons l'ensemble

$$E = \{z \in \Omega; u(z) < u(z_0)\}.$$

C'est un ensemble ouvert d'après l'hypothèse de semi-continuité supérieure de u , et E est distinct de Ω puisque $z_0 \notin E$. Nous voulons montrer que $E = \emptyset$. Sinon, E aurait une composante connexe E_0 non vide, et cette composante E_0 aurait un point frontière $a \in \Omega$ (sinon E_0 serait à la fois ouvert et fermé dans Ω , avec $E_0 \neq \Omega$, donc $E_0 = \emptyset$!). Comme E est ouvert nous avons $a \in \Omega \setminus E$, donc $u(a) = u(z_0)$. Par hypothèse, il existe une suite de rayons $r_\nu > 0$ tendant vers 0 tels que

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r_\nu e^{i\theta}) d\theta.$$

Pour r_ν assez petit, le cercle E_0 intersecte à la fois $\Omega \setminus \overline{D}(a, r_\nu)$ (prendre $b \in E_0$, $n \neq a$ et $r_\nu < |b - a|$) et le disque $D(a, r_\nu)$ (puisque a est adhérent à E_0). La connexité de E_0 entraîne alors que E_0 intersecte le cercle $\Gamma(a, r_\nu)$, nécessairement le long d'un ouvert de ce cercle, et sur cet ouvert on a $u(z) < u(z_0)$ par définition de E . Sur le complémentaire on a de toutes façons $u(z) \leq u(z_0)$. Ceci entraîne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r_\nu e^{i\theta}) d\theta < u(z_0) = u(a),$$

contradiction. Cette contradiction montre que $E = \emptyset$ et (i) est démontré.

(ii) Nous appliquons (i) à l'ouvert $\Omega' = K^\circ$. Si nous avons $\sup_{\partial K} u < \sup_K u$, le sup serait atteint pour un point $z_0 \in K^\circ = \Omega'$. Par conséquent u serait constante dans la composante connexe Ω'_0 de Ω' contenant z_0 , égale à $u(z_0)$. Mais alors, la semi-continuité supérieure de u impliquerait $u(a) \geq u(z_0)$ pour tout point frontière $a \in \partial\Omega'_0$. Comme $\partial\Omega'_0 \subset \partial\Omega' \subset \partial K$, c'est une contradiction et (ii) s'ensuit. \square

5.3. Équivalence de la sous-harmonicité et de la sous-harmonicité faible

Soit u une fonction faiblement sous-harmonique dans un ouvert Ω de \mathbb{C} , et soit $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Comme la fonction $u|_{\Gamma(z_0, r)}$ est semi-continue supérieurement, on peut écrire $u = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu$ sur $\Gamma(z_0, r)$, pour une certaine suite décroissante de fonctions continues f_ν sur le cercle. Considérons les solutions

$$h_\nu = P_{z_0, r}[f_\nu]$$

du problème de Dirichlet sur le disque. Ce sont des fonctions continues sur $\overline{D}(z_0, r)$, harmoniques sur $D(z_0, r)$. Comme h_ν satisfait l'égalité de moyenne, il en résulte aussitôt que $u - h_\nu$ est faiblement sous-harmonique sur $D(z_0, r)$. De plus, pour tout point $z_1 \in \Gamma(z_0, r)$ la semi-continuité supérieure de u implique

$$\limsup_{D(z_0, r) \ni z \rightarrow z_1} u(z) - h_\nu(z) \leq u(z_1) - h_\nu(z_1) = u(z_1) - f_\nu(z_1) \leq 0.$$

Nous en déduisons $u(z) - h_\nu(z) \leq 0$ sur $D(z_0, r)$, sinon le principe du maximum serait contredit. En particulier, comme $P_{z_0, r}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi r} = \text{Cte}$, on a

$$u(z_0) \leq h_\nu(z_0) = P_{z_0, r}[f_\nu](z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\nu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Comme $\lim f_\nu = u$ sur $\Gamma(z_0, r)$, le théorème de convergence monotone implique

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Par conséquent u est sous-harmonique. □

Corollaire. *Soit $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement harmonique, au sens où h est semi-continue supérieurement (ou inférieurement) sur Ω , et pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite de rayons $r_\nu > 0$ tendant vers 0 tels que*

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + r_\nu e^{i\theta}) d\theta.$$

Alors h est harmonique dans Ω .

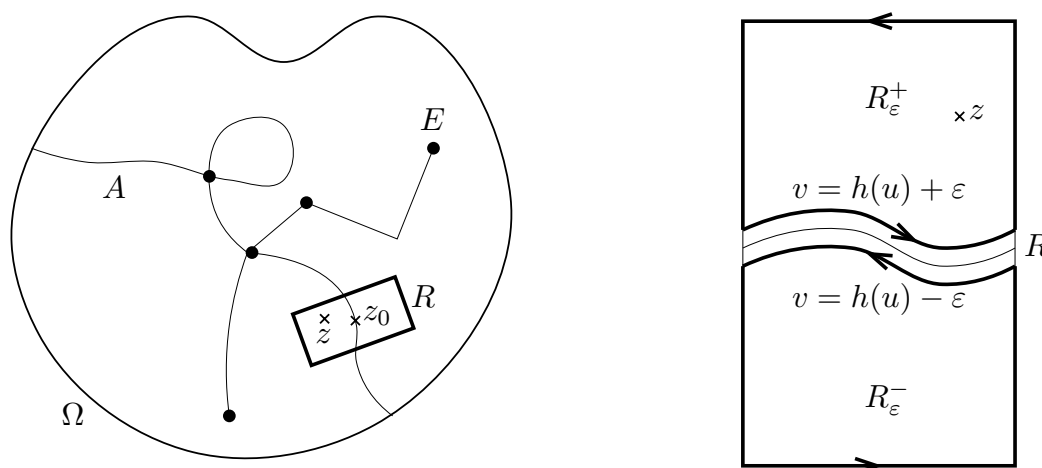
Démonstration. Supposons par exemple h semi-continue supérieurement. Alors h est sous-harmonique, donc Δh est une mesure positive. La formule de Lelong-Jensen appliquée au rayon r_ν implique que Δh doit être nulle sur $D(z_0, r_\nu)$. Par conséquent Δh est nulle au voisinage de tout point, et donc identiquement nulle. Ceci implique que h vérifie l'égalité de la moyenne pour tout rayon r tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et par suite h est harmonique. □

6. Principe de réflexion de Schwarz

Nous commençons par démontrer un théorème de prolongement par continuité pour les fonctions holomorphes.

Théorème de prolongement par continuité. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et A une partie fermée de Ω qui est localement réunion finie d'arcs réguliers de classe \mathcal{C}^1 par morceaux à demi-tangentes distinctes. De façon précise, pour tout point $z_0 \in \Omega$, on suppose qu'il existe un voisinage ouvert V tel que $A \cap V$ soit la réunion d'un nombre fini d'arcs réguliers de classe \mathcal{C}^1 , fermés dans V , se rencontrant avec des demi-tangentes différentes en chacun de leurs points d'intersection. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus A$, admettant un prolongement continu à Ω encore noté f . Alors f est holomorphe sur Ω .*

Démonstration. Désignons par E l'ensemble des points qui sont ou bien des extrémités libres d'arcs composant A , ou bien des points anguleux, ou bien des points multiples. D'après l'hypothèse, c'est un ensemble localement fini dans Ω .



Nous commençons par montrer que f est holomorphe au voisinage de tout point $z_0 \in A \setminus E$. Pour cela, on choisit un rectangle R de centre z_0 , assez petit, tel que l'intersection $A \cap R$ s'écrive comme un graphe $v = h(u)$ suivant les coordonnées (u, v) données par les axes de symétrie du rectangle. Pour montrer que f est holomorphe sur l'intérieur de R , il suffit de vérifier que la formule de Cauchy

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

est satisfaite pour tout $z \in R^\circ$. Par continuité, il suffit même de montrer que cette formule est satisfaite pour $z \in R^\circ \setminus A$, puisque $R^\circ \setminus A$ est dense dans R° . Or, pour $\varepsilon > 0$, on peut considérer les graphes translétés $v = h(u) + \varepsilon$, $v = h(u) - \varepsilon$, ce qui permet de délimiter deux régions compactes disjointes R_ε^+ et R_ε^- , avec

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} R_\varepsilon^+ \cup R_\varepsilon^- = R \setminus A.$$

Comme f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et $\partial R_\varepsilon^+ \cup \partial R_\varepsilon^- \subset \Omega \setminus A$, la formule de Cauchy implique

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_\varepsilon^+ \cup \partial R_\varepsilon^-} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour tout $z \in R^\circ \setminus A$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. Quand ε tend vers 0, on en déduit par continuité que (*) est satisfaite. Ceci montre que f est holomorphe sur $\Omega \setminus E$. Mais comme E est formé de points isolés, l'hypothèse que f est continue sur Ω entraîne que les points de E ne peuvent pas être des points singuliers. Par conséquent f est bien holomorphe sur Ω . \square

Nous en venons maintenant au principe de réflexion de Schwarz. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} invariant par réflexion suivant l'axe réel, c'est-à-dire invariant par la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. On note

$$\Omega_+ = \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \Omega_- = \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Principe de réflexion de Schwarz. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} invariant par réflexion et soit $f \in \mathcal{O}(\Omega_+)$. Si la fonction f vérifie

$$\lim_{\Omega_+ \ni w \rightarrow z} \operatorname{Im}(f(w)) = 0 \quad \text{en tout point } z \in \Omega \cap \mathbb{R},$$

alors il existe un prolongement holomorphe \tilde{f} de f sur Ω tel que

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega_+, \\ \lim_{\Omega_+ \ni w \rightarrow z} \operatorname{Re}(f(w)) & \text{si } z \in \Omega \cap \mathbb{R}, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega_-. \end{cases}$$

On notera que l'existence d'une limite de $\operatorname{Re}(f)$ aux points de $\Omega \cap \mathbb{R}$ n'est nullement évidente, cela fait partie des affirmations du théorème.

Démonstration. Si l'on fait en outre l'hypothèse que $\operatorname{Re}(f)$ se prolonge par continuité aux points de $\Omega \cap \mathbb{R}$, alors il est clair que \tilde{f} est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus (\Omega \cap \mathbb{R})$. La conclusion s'obtient donc aussitôt à l'aide du théorème de prolongement par continuité, avec $A = \Omega \cap \mathbb{R}$. La difficulté est de s'affranchir de l'hypothèse de continuité de $\operatorname{Re}(f)$. Pour cela, on considère la partie imaginaire $h = \operatorname{Im}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} h(z) = \operatorname{Im}(f(z)) & \text{si } z \in \Omega_+, \\ h(z) = 0 & \text{si } z \in \Omega \cap \mathbb{R}, \\ h(z) = -\operatorname{Im}(f(\bar{z})) & \text{si } z \in \Omega_-. \end{cases}$$

Nous affirmons que h est faiblement harmonique. En effet, h est continue sur Ω_+ (et donc aussi sur Ω_-), et l'hypothèse implique que h est continue en tout point de $\Omega \cap \mathbb{R}$. De plus il est clair par symétrie que

$$h(z_0) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

en tout point $z_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Si $z_0 \in \Omega \setminus (\Omega \cap \mathbb{R})$, on a aussi

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

pour $r < \min(|\operatorname{Im} z_0|, d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega))$ puisque h est harmonique séparément sur Ω_+ et Ω_- . On en déduit que h est faiblement harmonique, donc harmonique sur Ω et, en particulier, de classe \mathcal{C}^∞ . Comme $f - \bar{f} = 2i h$ sur Ω_+ , il vient $f'(z) = 2i \partial h / \partial z$. On voit que $f'(z)$ se prolonge de façon continue à $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$, ce qui implique que f elle-même se prolonge de façon continue à $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$. Par conséquent \tilde{f} est continue sur Ω et la conclusion s'obtient à l'aide du théorème de prolongement par continuité. \square

Nous allons maintenant généraliser un peu le principe de réflexion de Schwarz. Supposons qu'on ait un ouvert Ω de \mathbb{C} muni d'une involution anti-holomorphe $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$, c'est-à-dire une bijection σ telle que $\sigma \circ \sigma = \operatorname{Id}_\Omega$ et $z \mapsto \sigma(z)$ holomorphe, et une partition $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup E$, où E est l'ensemble des points fixes de σ et $\sigma(\Omega_+) = \Omega_-$. L'exemple fondamental est bien sûr l'application de conjugaison $\sigma(z) = \bar{z}$ avec

$$E = \Omega \cap \mathbb{R}, \quad \Omega_+ = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}, \quad \Omega_- = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}.$$

Un autre exemple est l'inversion $\sigma(z) = 1/\bar{z}$ sur $\Omega = \mathbb{C}^*$, dont l'ensemble des points fixes E est le cercle unité $|z| = 1$; on peut voir l'inversion comme une "réflexion par rapport au cercle", avec $\Omega_+ = D(0, 1) \setminus \{0\}$ et $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 1)$. De manière générale, il existe localement des réflexions par rapport à n'importe quelle courbe analytique réelle lisse.

Proposition. *Soit E une courbe analytique réelle lisse dans un ouvert du plan complexe. Alors pour tout point $z_0 \in E$ il existe un voisinage V de z_0 et une involution anti-holomorphe $\sigma : V \rightarrow V$ tels que $E \cap V$ soit l'ensemble des points fixes de σ et que $V \setminus E$ soit formé de deux composantes connexes V_+, V_- échangées par σ .*

Démonstration. Par définition de ce qu'est une courbe analytique réelle, on peut trouver un voisinage V' de z_0 de sorte que $E \cap V'$ coïncide avec l'image d'une application analytique réelle $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$, $t \mapsto \sum c_n t^n$ avec $\gamma(0) = c_0 = z_0$ et $\gamma'(0) = c_1 \neq 0$. Quitte à diminuer ε et à prendre un voisinage plus petit $V \subset V'$, on a un biholomorphisme $\psi : D(0, \varepsilon) \rightarrow V$, $z \mapsto \sum c_n z^n$ qui étend γ aux valeurs complexes du paramètre, en sorte que $\psi^{-1}(E \cap V) =]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\tau(z) = \bar{z}$ l'involution anti-holomorphe canonique. On peut obtenir une involution anti-holomorphe σ sur V en transportant τ par le biholomorphisme ψ , c'est-à-dire en posant $\sigma = \psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$. Il est clair que σ échange $V_+ = \psi(D_+(0, \varepsilon))$ et $V_- = \psi(D_-(0, \varepsilon))$, où $D_\pm(0, \varepsilon)$ désigne le demi-disque $D(0, \varepsilon) \cap \{\pm \operatorname{Im} z > 0\}$.

Ce résultat s'applique localement pour une réflexion par rapport à une courbe analytique réelle lisse quelconque E , puisque pour tout point $z_0 \in E$ on peut trouver un biholomorphisme $\psi : D(0, \varepsilon) \rightarrow V$ sur un voisinage V de z_0 tel que

paramétrise $E \cap V$. On considère alors l'involution $\sigma = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi = \psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ sur V conjuguée de τ par $\varphi = \psi^{-1}$.

Lemme. *Si $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ est une anti-involution holomorphe, alors*

- (i) *L'ensemble des points fixes $E = \{z \in \Omega ; \sigma(z) = z\}$ est une courbe analytique réelle lisse.*
- (ii) *Pour tout point $z_0 \in E$, il existe un voisinage V de z_0 et un biholomorphisme $\varphi : V \rightarrow D(0, \varepsilon)$ sur un petit disque, tel que $\sigma|_V = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ où $\tau : D(0, \varepsilon) \rightarrow D(0, \varepsilon)$ est la conjugaison complexe $z \mapsto \tau(z) = \bar{z}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer (ii), puisque si (ii) a lieu, alors l'ensemble des points fixes de τ coïncide avec l'axe réel, donc $E \cap V = \varphi^{-1}(D(0, \varepsilon) \cap \mathbb{R}) = \varphi^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon[)$, ce qui implique que E est une courbe analytique réelle lisse.

Soit donc $z_0 \in E$ un point fixe. Quitte à effectuer le changement de variable $z \mapsto z - z_0$, nous pouvons supposer $z_0 = 0$. La fonction σ est alors définie sur un voisinage $D(0, \varepsilon)$ de 0, et puisque $\bar{\sigma}$ y est holomorphe, on a un développement en série entière

$$\overline{\sigma(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{soit encore} \quad \sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n.$$

La différentielle $d\sigma_0$ est donnée par $\xi \mapsto \bar{a}_1 \bar{\xi}$, et puisque σ est une involution, $d\sigma_0$ est aussi une involution, ce qui équivaut à la condition $|a_1|^2 = 1$, autrement dit $d\sigma_0$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan complexe. Étant donné un nombre complexe $\lambda \neq 0$, nous considérons la fonction

$$\varphi(z) = \lambda z + \bar{\lambda} \overline{\sigma(z)} = (\lambda + \bar{\lambda} a_1) z + \sum_{n=2}^{+\infty} \bar{\lambda} a_n z^n.$$

Pour que φ soit un biholomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0, il suffit que $\lambda + \bar{\lambda} a_1 \neq 0$, ce qui ne laisse que l'embarras du choix (on peut prendre par exemple $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{a_1}$, ce qui donne $\lambda + \bar{\lambda} a_1 = 2\lambda = \sqrt{a_1} \neq 0$ et une différentielle $d\varphi_0$ qui est une rotation). La propriété d'involutivité $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$ implique aussitôt

$$\varphi(\sigma(z)) = \frac{1}{2}(\lambda \sigma(z) + \bar{\lambda} \bar{z}) = \overline{\varphi(z)} = \tau \circ \varphi(z),$$

par conséquent nous avons bien $\sigma = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ au voisinage de 0. □

On notera (c'est déjà clair à partir de la démonstration) qu'il n'y a pas unicité du biholomorphisme φ , on peut en fait remplacer φ par $\psi \circ \varphi$ où ψ est un biholomorphisme quelconque $\psi(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^n$ à coefficients c_n réels, puisqu'un tel biholomorphisme commute avec τ .

Principe de Schwarz généralisé. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} admettant une involution anti-holomorphe σ , soit E l'ensemble des points fixes de σ dans Ω , et Ω_+ , Ω_- des composantes connexes (ou réunions de composantes connexes) de $\Omega \setminus E$ telles que $\Omega \setminus E = \Omega_+ \cup \Omega_-$ et $\Omega_- = \sigma(\Omega_+)$. Soit enfin $f \in \mathcal{O}(\Omega_+)$ vérifiant*

$$\lim_{\Omega_+ \ni w \rightarrow z} \text{Im}(f(w)) = 0 \quad \text{en tout point } z \in E.$$

Alors il existe un prolongement holomorphe \tilde{f} de f sur Ω tel que

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega_+, \\ \lim_{\Omega_+ \ni w \rightarrow z} \operatorname{Re}(f(w)) & \text{si } z \in E, \\ \overline{f(\sigma(z))} & \text{si } z \in \Omega_-. \end{cases}$$

Démonstration. Au voisinage d'un point fixe $z_0 \in E$, le changement de variable $w = \varphi(z)$ nous ramène au cas de l'involution usuelle τ . \square

Chapitre VI

Représentation Conforme

L'objet de ce chapitre est d'étudier les transformations conformes et de décrire un certain nombre d'exemples classiques : homographies, automorphismes du plan, du disque, du demi-plan, d'une couronne. Dans le cas du disque unité ou du demi-plan, qui sont en fait isomorphes, on obtient ce qu'on appelle des modèles de la géométrie hyperbolique. Ces domaines possèdent en effet une métrique hermitienne naturelle invariante par le groupe des automorphismes holomorphes ; on lui donne le nom de métrique de Poincaré. Nous démontrons ensuite le théorème de Riemann, connu aussi sous le nom de théorème fondamental de la représentation conforme : tout ouvert simplement connexe du plan autre que le plan lui-même est conformément équivalent au disque unité. Comme application de ce théorème fondamental, nous montrons ensuite que le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ s'identifie au demi-plan de Poincaré, et en déduisons le grand théorème de Picard sur les valeurs des fonctions holomorphes au voisinage d'un point singulier essentiel. Le chapitre se termine par l'étude des fonctions univalentes de la classe \mathcal{S} .

1. Définition et exemples

1.1. Équivalence conforme

Nous rappelons d'abord les notions importantes de biholomorphisme et d'équivalence conforme.

Définition. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts du plan complexe \mathbb{C} , alors une application $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est appelée biholomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont holomorphes. S'il existe un biholomorphisme entre Ω_1 et Ω_2 , alors ces ouverts sont dits conformément équivalents.

Un biholomorphisme est encore appelé *transformation conforme* de Ω_1 sur Ω_2 . Il est facile de voir que la relation d'équivalence conforme \sim_{conf} , comme son nom l'indique, est bien une relation d'équivalence. Pour que f soit un biholomorphisme, il suffit, par le théorème d'inversion globale, que f soit holomorphe bijective. De plus, si des ouverts Ω_1 et Ω_2 du plan sont conformément équivalents, alors ils sont homéomorphes, c'est-à-dire qu'on a l'implication triviale

$$\Omega_1 \sim_{\text{conf}} \Omega_2 \Rightarrow \Omega_1 \sim_{\text{homeo}} \Omega_2.$$

L'implication réciproque est fautive : ainsi \mathbb{C} et le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ sont homéomorphes via l'application \mathcal{C}^∞ $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto \varphi(z) = z/\sqrt{1+|z|^2}$,

mais il n'existe pas d'application holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ puisque toute application holomorphe bornée sur \mathbb{C} est constante d'après le théorème de Liouville.

Notation. On notera $\text{Aut}(\Omega)$ l'ensemble des biholomorphismes d'un ouvert Ω dans lui-même, et on appellera ceux-ci les automorphismes (analytiques ou holomorphes) du domaine Ω .

L'ensemble $(\text{Aut}(\Omega), \circ)$ des automorphismes muni de la composition des applications est évidemment un groupe. L'objet de cette section est d'étudier le groupe des automorphismes d'un certain nombre de domaines classiques. L'un des exemples les plus simples est celui du plan complexe lui-même.

Proposition. Les automorphismes de \mathbb{C} sont exactement les applications affines $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un biholomorphisme. Alors l'application $z \mapsto g(z) = f(1/z)$ est holomorphe injective sur \mathbb{C}^* . En particulier l'image $g(D(0, r) \setminus \{0\})$ d'un disque pointé n'est pas dense dans \mathbb{C} puisque cet ensemble est disjoint de l'ouvert $g(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)) = f(D(0, 1/r) \setminus \{0\})$. D'après le théorème de Weierstrass du III 1.3, ceci entraîne que g ne peut avoir une singularité essentielle en 0, donc il s'agit d'un pôle d'ordre m , $g(z) \sim a_m z^{-m}$. On a par conséquent $f(z) \sim a_m z^m$ quand $z \rightarrow \infty$, de sorte que f est un polynôme d'ordre m . Un polynôme ne peut être injectif sur \mathbb{C} que s'il est de degré 1, par conséquent nous avons $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. \square

1.2. Compactification d'un espace localement compact et notion de bouts

L'objet de cette section, qui ne comprend que des notions de topologie générale, est d'approfondir un peu la notion de « voisinage de l'infini » dans un espace topologique X , supposé localement compact et non compact.

On introduit pour cela l'ensemble $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ obtenu en adjoignant un « point à l'infini ». On définit une topologie sur \widehat{X} en prenant comme ouverts de \widehat{X} les parties de l'un ou l'autre des deux types suivants :

- les ouverts de X ;
- les parties de \widehat{X} de la forme $V = \widehat{X} \setminus K = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$, lorsque K décrit l'ensemble des parties compactes de X . Les parties $\widehat{X} \setminus K$ sont donc par définition les voisinages ouverts de l'infini.

Il est facile de voir que ceci définit bien une topologie sur \widehat{X} , et que \widehat{X} est compact : en effet tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ contient au moins un membre U_{i_0} qui contient un voisinage $\widehat{X} \setminus K$ de l'infini, et par ailleurs $(X \cap U_i)_{i \in I}$ recouvre K , par suite on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{X \cap U_{i_1}, \dots, X \cap U_{i_N}\}$. Alors $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_N}\}$ est un recouvrement fini de X .

Définition. L'espace $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ munie de la topologie définie ci-dessus s'appelle le compactifié d'Alexandrov de l'espace localement compact X .

Le compactifié d’Alexandrov $\widehat{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} s’identifie par exemple au cercle unité au moyen de l’application $x \mapsto \exp(2i \arctan x)$ si $x \in \mathbb{R}$, et $\infty \mapsto -1$. Le compactifié d’Alexandrov ne distingue pas les «différentes façons» par lesquelles un point peut s’éloigner à l’infini, ainsi dans \mathbb{R} on peut s’éloigner vers l’infini en tendant vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, et il peut donc être plus judicieux de compactifier \mathbb{R} en introduisant plutôt deux points à l’infini; c’est ainsi que l’on considère classiquement le compactifié $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. De façon générale, on appelle compactifié d’un espace localement compact X tout espace compact X' contenant X comme sous-espace ouvert, et tel que X soit dense dans X' .

Nous allons maintenant introduire la notion générale de «bouts» d’un espace topologique X . Pour cela, on suppose X *séparé, localement compact et localement connexe*. On va voir que ceci permet de définir un compactifié \overline{X}_B possédant autant de points à l’infini que de bouts de X .

Soit K un compact non vide de X et $(C_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de l’ouvert $X \setminus K$. Comme X est localement connexe, les C_i sont des ouverts. On partage I en $I = T \cup (I \setminus T)$ où les composantes $\{C_i\}_{i \in T}$ sont relativement compactes dans X (les «trous» de K), et où les $\{C_i\}_{i \in I \setminus T}$ sont les composantes «infinies» (non relativement compactes). Comme X est localement compact, K possède un voisinage compact L , c’est-à-dire que $K \subset L^\circ$. L’ensemble de parties $\{C_i\}_{i \in I}$ forme un recouvrement ouvert de $X \setminus K$ qui contient le compact $\partial L = L \setminus L^\circ$. On peut donc en extraire un recouvrement fini

$$\{C_{i_1}, \dots, C_{i_k}\}_{i_j \in T} \cup \{C_{i_{k+1}}, \dots, C_{i_N}\}_{i_j \in I \setminus T}$$

de ∂L (où on fait la distinction entre les trous et les composantes infinies). Les autres composantes C_i sont disjointes de ∂L , donc par connexité, elles sont contenues dans L° ou dans $X \setminus L$. Mais dans ce dernier cas on aurait

$$\partial C_i \subset X \setminus L^\circ \Rightarrow \partial C_i \cap \partial K = \emptyset$$

ce qui est absurde puisque $\emptyset \neq \partial C_i \subset \partial K$. Par conséquent toutes les autres composantes sont contenues dans L° et sont relativement compactes, ce sont des trous. On en déduit que $I \setminus T = \{i_{k+1}, \dots, i_N\}$, et par suite le complémentaire $X \setminus K$ ne peut avoir qu’un nombre fini de composantes connexes non relativement compactes. L’ensemble

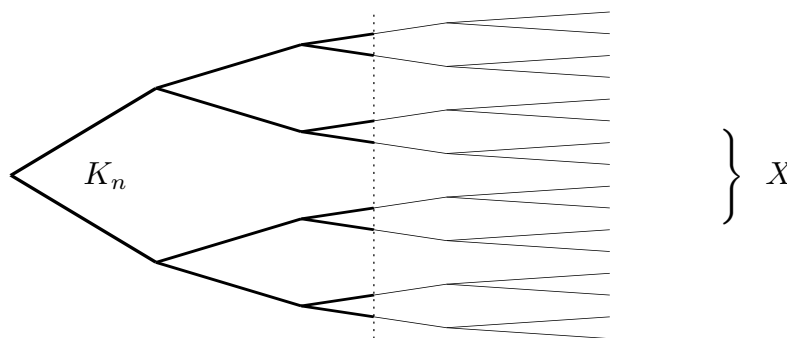
$$\tilde{K} = K \cup \bigcup_{i \in T} C_i = X \setminus \bigcup_{i \in I \setminus T} C_i$$

obtenu en «bouchant les trous de K » est compact, puisque cet ensemble est un fermé contenu dans le compact $L \cup \overline{C_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{C_{i_k}}$ (on a déjà vu que les composantes C_i , $i \in T$, autres que i_1, \dots, i_k étaient contenues dans L°). Par construction le compact \tilde{K} n’a plus de trous, les composantes connexes de $X \setminus \tilde{K}$ sont les composantes non relativement compactes $\{C_i\}_{i \in I \setminus T}$ de $X \setminus K$.

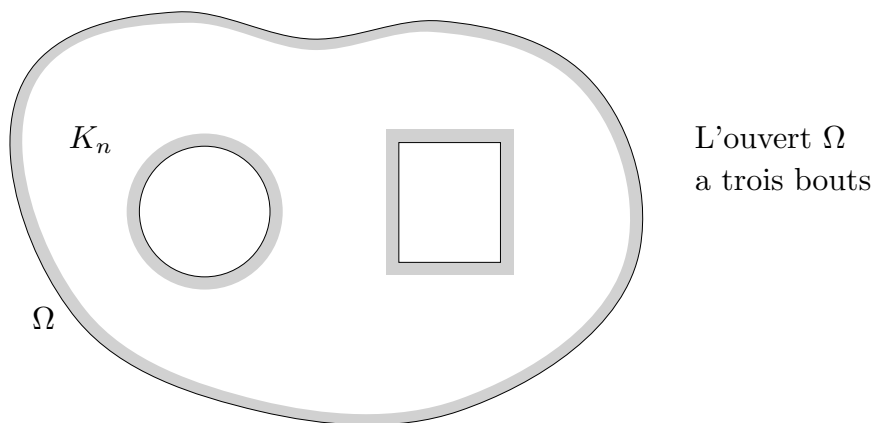
Notion de bouts d’un espace. Soit X un espace topologique séparé localement compact et localement connexe. On définit un bout de X comme étant une

application $b : K \mapsto b(K)$ qui à chaque compact K de X associe une composante connexe $b(K)$ de $X \setminus K$, avec la propriété suivante : si $K \subset L$, alors $b(L) \subset b(K)$. L'ensemble des bouts de X sera noté $\text{Bouts}(X)$.

On observera que $b(K)$ ne peut jamais être un trou de K , car la condition $b(L) \subset b(K)$ ne pourrait pas être vérifiée en prenant $L = \tilde{K}$. On a donc en fait $b(\tilde{K}) = b(K)$, de sorte que le bout b est entièrement déterminé par les composantes $b(K)$ associées aux compacts sans trous. De plus, si X admet une suite exhaustive K_n de compacts sans trous, ce qui sera toujours le cas considéré ici, un bout b est déterminé de manière unique par la donnée de la suite $b_n = b(K_n)$, qui doit évidemment vérifier $b_{n+1} \subset b_n$ pour tout n . En effet, si K est un compact quelconque, il existe un n tel que $K \subset K_n$, et $b(K)$ doit être alors l'unique composante connexe de $X \setminus K$ qui contient $b_n = b(K_n)$. L'ensemble des bouts peut-être très grand, comme c'est le cas pour un arbre :



A l'opposé, on a une situation assez simple dans le cas où il existe un entier n_0 tel que les composantes connexes des complémentaires $X \setminus K_m$ et $X \setminus K_n$ sont en bijection et en nombre fini pour tous $m, n \geq n_0$. L'ensemble $\text{Bouts}(X)$ est alors l'ensemble fini en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus K_n$ pour $n \geq n_0$. Ainsi un ouvert borné Ω à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et possédant p trous admet $p + 1$ bouts, en bijection avec chacune des composantes du bord $\partial\Omega$: les bords des p trous, et le bord de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.



Une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces localement compacts est dite

propre si, pour tout compact K de Y l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est un compact de X . Il est plus intuitif de voir cette condition en pensant en termes de voisinages de l'infini. En effet, f est propre si et seulement si le prolongement $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ tel que $\hat{f}(\infty) = \infty$ est continu au point ∞ , autrement dit si $\lim_{X \ni x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$: si cette condition est vraie, pour tout compact K de Y , $\hat{Y} \setminus K$ est un voisinage de l'infini et il doit exister un compact L de X tel que $\hat{f}(\hat{X} \setminus L) \subset \hat{Y} \setminus K$, c'est-à-dire encore $f(X \setminus L) \subset Y \setminus K$, ce qui implique que $f^{-1}(K) \subset L$ est compact. Inversement, si f est propre, il suffit de prendre $L = f^{-1}(K)$.

Si f est propre, on a une application naturelle $f_* : \text{Bouts}(X) \rightarrow \text{Bouts}(Y)$ induite au niveau des bouts. Si b est un bout de X , on définit un bout $b' = f_*(b)$ de Y comme suit. Pour tout compact K de Y , $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de X , et $b(f^{-1}(K))$ est une des composantes connexes de $X \setminus f^{-1}(K)$. Par conséquent $f(b(f^{-1}(K)))$ est un connexe contenu dans $Y \setminus K$. On définit alors $b' = f_*(b)$ comme le bout tel que $b'(K)$ soit, pour chaque K , l'unique composante connexe de $Y \setminus K$ qui contient $f(b(f^{-1}(K)))$.

On définit le «compactifié par les bouts» \overline{X}_B de la manière suivante : $\overline{X}_B = X \cup B$ est la réunion disjointe de X et de $B = \text{Bouts}(X)$; les ouverts de \overline{X}_B sont les réunions de parties d'un des deux types suivants :

- les ouverts de X ;
- pour chaque compact K de X et chaque composante connexe C de $X \setminus K$, l'ensemble $C \cup \{b \in B ; b(K) = C\}$.

Il résulte de cette construction qu'un système de voisinages fondamentaux d'un bout b_0 est constitué de la famille de voisinages ouverts

$$V_{b_0, K} = b_0(K) \cup \{b \in B ; b(K) = b_0(K)\}.$$

Théorème. *Soit X un espace séparé localement compact et localement connexe.*

- (i) *Pour la topologie définie ci-dessus, \overline{X}_B est compact avec X comme ouvert dense (en d'autres termes, \overline{X}_B est bien un compactifié de X). De plus, $B = \text{Bouts}(X)$ est compact et totalement discontinu.*
- (ii) *Pour toute application propre $f : X \rightarrow Y$ entre espaces séparés localement compacts et localement connexes, l'application induite $\overline{f}_B : \overline{X}_B \rightarrow \overline{Y}_B$ telle que $\overline{f}_B(b) = f_*(b)$ pour chaque bout b de X est une application continue de \overline{X}_B dans \overline{Y}_B .*

Démonstration. (i) Désignons par \mathcal{C}_K l'ensemble (fini) des composantes connexes de $X \setminus K$. Puisque B consiste en des applications $K \mapsto b(K) \in \mathcal{C}_K$, l'ensemble B des bouts peut être vu comme un sous-ensemble $B \subset \prod_K \mathcal{C}_K$. La topologie induite par \overline{X}_B sur B est la même que celle induite par la topologie produit sur $\prod_K \mathcal{C}_K$ (avec la topologie discrète sur chaque facteur fini \mathcal{C}_K), comme il résulte du fait que

$$B \cap V_{b_0, K} = \{b \in B ; b(K) = b_0(K)\}.$$

Les conditions $b(L) \subset b(K)$ pour $L \supset K$ équivalent à choisir $b(L)$ parmi un nombre fini de composantes qui sont celles de $(X \setminus L) \cap b(K)$; c'est donc une

condition fermée vis-à-vis de la topologie produit. Par conséquent B s'identifie à un sous-espace fermé du produit $\prod_K \mathbb{C}_K$, qui est compact (d'après le théorème de Tychonov) et totalement discontinu. On en déduit que B est lui-même compact et totalement discontinu. Si on a un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de \overline{X}_B , sa partie compacte B va être recouverte par un nombre fini de voisinages V_{b_j, K_j} eux-mêmes contenus dans certains des U_i . On a alors $\overline{X}_B = \bigcup V_{b_j, K_j} \cup \bigcup K_j$, et comme chaque K_j est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i , on en conclut l'existence d'un sous-recouvrement fini de \mathcal{U} . Par conséquent \overline{X}_B est bien compact. Par définition X est ouvert, et cet ouvert est dense puisque $V_{b_0, K} \cap X = b_0(K) \neq \emptyset$ pour tout voisinage $V_{b_0, K}$.

(ii) Soit $V_{b'_0, K'}$ un voisinage arbitraire de $b'_0 = f_*(b_0)$ et $K = f^{-1}(K')$. Alors on a

$$\overline{f}_B(V_{b_0, K}) \subset V_{b'_0, K'}$$

car $f(b_0(K)) \subset b'_0(K')$ par définition de f_* , tandis que l'image $b' = f_*(b)$ de chaque bout b tel que $b(K) = b_0(K)$ vérifie $b'(K') \supset f(b(K)) = f(b_0(K))$, donc $b'(K') = b'_0(K')$. \square

Il est clair que si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $\overline{f}_B : \overline{X}_B \rightarrow \overline{Y}_B$ est aussi un homéomorphisme. Par conséquent, pour que X et Y puissent être homéomorphes, il faut que X et Y aient le même nombre de bouts. Cette condition nécessaire vaut en particulier pour des ouverts du plan conformément équivalents.

1.3. Cas des couronnes

Rappelons la notation déjà utilisée au chapitre III : pour des rayons quelconques $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, on note

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Proposition. *Étant donné deux couronnes $C(0, R_1, R_2)$ et $C(0, R'_1, R'_2)$ de rayons quelconques finis et non nuls, les transformations conformes*

$$f : C(0, R_1, R_2) \rightarrow C(0, R'_1, R'_2)$$

sont de la forme $f(z) = Az$ ou $f(z) = Bz^{-1}$ avec $A, B \in \mathbb{C}^$ des constantes complexes telles que $|A| = R'_1/R_1$, $|B| = R_1 R'_2$.*

Il résulte de cet énoncé que les couronnes $C(0, R_1, R_2)$ et $C(0, R'_1, R'_2)$ de rayons finis et non nuls sont conformément équivalentes si et seulement si elle sont homothétiques, c'est-à-dire si et seulement si $R'_2/R'_1 = R_2/R_1$.

Démonstration. D'après la section 1.2, une couronne $C(0, R_1, R_2)$ admet deux bouts, associés aux voisinages des bords $|z| = R_1$ et $|z| = R_2$. Toute transformation conforme $f : C(0, R_1, R_2) \rightarrow C(0, R'_1, R'_2)$ (et plus généralement tout homéomorphisme) doit induire une bijection f_* des bouts de $C(0, R_1, R_2)$ dans les bouts de $C(0, R'_1, R'_2)$, c'est-à-dire que l'on doit avoir l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

$$(*) \quad \begin{cases} \text{quand } |z| \rightarrow R_1, |f(z)| \rightarrow R'_1 \\ \text{quand } |z| \rightarrow R_2, |f(z)| \rightarrow R'_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (**) \quad \begin{cases} \text{quand } |z| \rightarrow R_1, |f(z)| \rightarrow R'_2 \\ \text{quand } |z| \rightarrow R_2, |f(z)| \rightarrow R'_1. \end{cases}$$

On introduit maintenant le réel

$$\alpha = \frac{\ln R'_2/R'_1}{\ln R_2/R_1} = \frac{\ln R'_2 - \ln R'_1}{\ln R_2 - \ln R_1} > 0.$$

Dans le cas (*) on introduit la fonction

$$h(z) = \ln(|f(z)|/R'_1) - \alpha \ln(|z|/R_1)$$

et dans le cas (**) la fonction

$$h(z) = \ln(|f(z)|/R'_2) + \alpha \ln(|z|/R_1).$$

Il est facile de voir que h est une fonction harmonique sur $C(0, R_1, R_2)$, et de plus $h(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow R_1$ ou quand $|z| \rightarrow R_2$. D'après le principe du maximum, h est identiquement nulle. Or, si z^α est une détermination holomorphe sur $C(0, R_1, R_2) \setminus \mathbb{R}_-$, nous avons $h(z) = \ln |f(z)/z^{\varepsilon\alpha}| + \text{Cte}$ avec $\varepsilon = 1$ dans le cas (*), $\varepsilon = -1$ dans le cas (**). Ceci implique que $f(z)/z^{\varepsilon\alpha} = A$ constante, d'où $f(z) = Az^{\varepsilon\alpha}$. Comme f doit se prolonger continûment à $C(0, R_1, R_2)$, on a nécessairement $\varepsilon\alpha \in \mathbb{Z}$. Mais comme de plus f est injective, la seule possibilité est $\varepsilon\alpha = \pm 1$, donc $\alpha = 1$, $f(z) = Az$ ou $f(z) = A/z$. Dans le premier cas, on doit avoir $|A| = R'_1/R_1$, et dans le deuxième $|A| = R_1R'_2$. De plus, les couronnes doivent être homothétiques, c'est-à-dire que $R'_2/R_2 = R'_1/R_1$. \square

Corollaire. *Les automorphismes de $C(0, R_1, R_2)$ sont exactement les applications $f : z \mapsto \lambda z$ et $g : z \mapsto \lambda R_1 R_2 z^{-1}$ où λ décrit l'ensemble des nombres complexes de module 1.*

Remarque. En adaptant le raisonnement ci-dessus, on montre facilement que les applications holomorphes propres $f : C(0, R_1, R_2) \rightarrow C(0, R'_1, R'_2)$ sont toutes de la forme $f(z) = Az^n$ ou $f(z) = Az^{-n}$ avec $A \in \mathbb{C}^*$, lorsque le quotient $\alpha = \ln(R'_2/R'_1)/\ln(R_2/R_1)$ est un entier n . Il n'y a pas de telles applications holomorphes propres si α n'est pas un entier.

1.4. Espaces projectifs et applications homographiques

Nous rappelons d'abord la notion générale d'espace projectif sur un corps k .

Définition. *Si k est un corps (commutatif) et E un espace vectoriel sur k , on appelle espace projectif associé à E l'ensemble quotient*

$$P_k(E) = (E \setminus \{0\})/\mathcal{R},$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence telle que $x \mathcal{R} y$ si et seulement si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $y = \lambda x$.

En particulier, l'ensemble quotient $\mathbb{P}_k^n = (k^{n+1} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ est appelé espace projectif de dimension n sur k (on convient d'écrire en général, et ceci sera justifié de façon plus précise au chapitre VIII, que $\dim P_k(E) = \dim E - 1$).

Notation. Pour des scalaires x_0, x_1, \dots, x_n non tous nuls, on note

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$$

la classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{P}_k^n . Plus généralement, pour un espace vectoriel E , on note $[x] = k^*x$ la classe d'équivalence de $x \in E \setminus \{0\}$ dans $P_k(E)$, et on introduit la projection canonique

$$\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow P_k(E), \quad x \mapsto [x].$$

On a par définition $[\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ pour tout scalaire $\lambda \in k^*$, l'usage des symboles $:$ dans la notation étant là pour rappeler que ce sont seulement les rapports x_j/x_k qui sont indépendants du représentant choisi dans la classe d'équivalence (à condition bien sûr que ce rapport soit défini, ce qui suppose $x_k \neq 0$). On dit que x_0, x_1, \dots, x_n sont les *coordonnées homogènes* du point $[x]$. Il est clair que l'espace projectif s'identifie à l'ensemble des droites vectorielles de E , puisqu'à toute classe d'équivalence $[x]$ on peut associer de façon bijective la droite $kx = [x] \cup \{0\}$.

Dans le cas de la dimension 1, on voit qu'un élément $[x_0, x_1]$ tel que $x_1 \neq 0$ coïncide avec

$$[\lambda x_0, \lambda x_1] = [x_0/x_1 : 1] \quad \text{pour } \lambda = 1/x_1,$$

tandis que $[x_0 : 0] = [1 : 0]$ si $x_0 \neq 0$ (prendre $\lambda = 1/x_0$). On peut alors identifier \mathbb{P}_k^1 à $k \cup \{\infty\}$ grâce aux applications

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^1 &\rightarrow k \cup \{\infty\}, & [x_0 : x_1] &\mapsto x_0/x_1, \\ k \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{P}_k^1, & x &\mapsto [x : 1], \quad \infty \mapsto [1 : 0]. \end{aligned}$$

en posant $x_0/x_1 = \infty$ si $x_0 \neq 0, x_1 = 0$. Ceci justifie bien notre convention de poser $\dim \mathbb{P}_k^1 = 1$.

Si E est un espace vectoriel sur k de dimension finie et si $\varphi \in \text{GL}(E)$ est une transformation linéaire bijective de E , alors φ induit une application bijective

$$[\varphi] : P(E) \rightarrow P(E), \quad [x] \mapsto [\varphi(x)].$$

appelée transformation projective de E . On désigne par $\text{Proj}(P(E))$ l'ensemble des transformations projectives de $P(E)$. On obtient ainsi un homomorphisme de groupes $(\text{GL}(E), \circ) \rightarrow (\text{Proj}(P(E)), \circ)$ du groupe linéaire de E sur l'ensemble des transformations projectives de $P(E)$.

Lemme. Si $\varphi \in \text{GL}(E)$ alors $[\varphi] = \text{Id}_{P(E)}$ si et seulement si φ est une homothétie de rapport non nul.

Démonstration. L'hypothèse $[\varphi] = \text{Id}_{P(E)}$ équivaut à ce que pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ il existe un scalaire $\lambda_x \in k^*$ tel que $\varphi(x) = \lambda_x x$. On choisit une base (e_0, e_1, \dots, e_n) de E , et on applique l'hypothèse à $x = e_0 + e_1 + \dots + e_n$. En posant $\lambda = \lambda_{e_0 + e_1 + \dots + e_n}$, ceci donne

$$\varphi(e_0 + e_1 + \dots + e_n) = \lambda(e_0 + e_1 + \dots + e_n),$$

et d'autre part

$$\varphi(e_0 + e_1 + \dots + e_n) = \varphi(e_0) + \varphi(e_1) + \dots + \varphi(e_n) = \lambda_{e_0}e_0 + \lambda_{e_1}e_1 + \dots + \lambda_{e_n}e_n.$$

D'après l'unicité de l'écriture dans une base il vient

$$\lambda_{e_0} = \lambda_{e_1} = \dots = \lambda_{e_n} = \lambda,$$

par conséquent $\varphi(e_i) = \lambda e_i$ et $\varphi = \lambda \text{Id}_E$. □

Par passage au quotient de l'application $\text{GL}(E) \rightarrow \text{Proj}(P(E))$ par son noyau $k^* \text{Id}_E$, on obtient un isomorphisme canonique

$$\text{GL}(E)/k^* \text{Id}_E \rightarrow \text{Proj}(P(E))$$

Théorème et définition. *Le groupe projectif linéaire est défini comme le quotient $\text{PGL}(E) = \text{GL}(E)/k^* \text{Id}$. On a un isomorphisme canonique*

$$\text{PGL}(E) \simeq \text{Proj}(P(E)).$$

Si $\dim P(E) = n$, on appelle repère projectif de $P(E)$ un système de $n + 2$ points $([e_0], [e_1], \dots, [e_{n+1}])$ tel que tout système de $n + 1$ vecteurs extrait de celui-ci $(e_i)_{i \neq i_0}$ forme une base de E . On peut en particulier choisir (e_0, e_1, \dots, e_n) comme base et écrire $e_{n+1} = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$. La condition d'être un repère projectif impose que $\lambda_i \neq 0$ pour tout i . Le remplacement de e_i par $\lambda_i e_i$, $0 \leq i \leq n$, ne change pas le point e_i , et on se ramène alors à ce que $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \dots + e_n$. Il est clair que l'image d'un repère projectif par une transformation projective est un repère projectif. Inversement :

Proposition. *Etant donné deux repères projectifs $([w_0], [w_1], \dots, [w_{n+1}])$ et $([w'_0], [w'_1], \dots, [w'_{n+1}])$ de $P(E)$, il existe une unique transformation projective $[\varphi] \in \text{Proj}(P(E))$ telle que $[\varphi(w_i)] = [w'_i]$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n + 1$.*

Démonstration. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, on peut toujours se ramener à la situation où $w_{n+1} = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ et $w'_{n+1} = w'_0 + w'_1 + \dots + w'_n$. On doit avoir $\varphi(w_i) = \lambda w'_i$ pour $0 \leq i \leq n + 1$, ce qui donne

$$\varphi(w_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \varphi(w_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i w'_i = \lambda_{n+1} w'_{n+1} = \lambda_{n+1} (w'_0 + w'_1 + \dots + w'_n).$$

L'unicité de l'écriture dans une base implique

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1},$$

ce qui montre que φ est l'unique transformation linéaire, à un scalaire près, telle que $\varphi(w_i) = w'_i$, $0 \leq i \leq n$. □

Dans le cas de l'espace projectif \mathbb{P}_k^1 associé à $E = k^2$, $\mathrm{GL}(E)$ s'identifie au groupe $\mathrm{GL}_2(k)$ des matrices 2×2 inversibles. Considérons l'application linéaire φ_M associée à une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}.$$

L'identification $\mathbb{P}_k^1 = k \cup \{\infty\}$ est obtenue en posant $z = x_0/x_1$, et la transformation projective $[\varphi_M]$ est donnée par

$$z = \frac{x_0}{x_1} \mapsto w = \frac{y_0}{y_1} = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1},$$

soit encore

$$z \mapsto w = h_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty.$$

Le groupe $\mathrm{Proj}(\mathbb{P}_k^1)$ n'est autre que le groupe des homographies bijectives, et ce qui précède montre que l'application $M \rightarrow h_M$ est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_2(k)$ sur $\mathrm{Proj}(\mathbb{P}_k^1)$, de noyau $k^* \mathrm{Id}$. Ceci veut dire précisément que l'homographie $h_{\lambda M}$ associée aux coefficients $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ coïncide avec h_M . Un repère projectif de \mathbb{P}_k^1 est la même chose que la donnée de 3 points deux à deux distincts $w_0, w_1, w_2 \in k \cup \{\infty\}$. D'après ce qui précède, il existe toujours une unique homographie h qui envoie le triplet (w_0, w_1, w_2) sur un autre triplet (w'_0, w'_1, w'_2) de points deux à deux distincts.

Dans le cas des corps topologiques localement compacts $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}_k^1 = k \cup \{\infty\}$ est le compactifié d'Alexandrov de k , et il est facile de voir que les homographies définissent des applications continues $h_M : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$.

Droites et cercles de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Dans le cas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on s'intéresse aux cercles $|z - z_0| = r$ et aux droites $\mathrm{Re}(e^{-i\alpha}z) = p$, qu'on compactifie en adjoignant le point à l'infini. En coordonnées homogènes (x_0, x_1) , on pose $z = x_0/x_1$ et l'équation d'un cercle devient $|x_0 - z_0 x_1|^2 - r^2 |x_1|^2 = 0$, tandis que l'équation d'une droite devient

$$\frac{e^{-i\alpha}x_0}{x_1} + \frac{e^{i\alpha}\bar{x}_0}{\bar{x}_1} - 2p = 0 \Leftrightarrow e^{-i\alpha}x_0\bar{x}_1 + e^{i\alpha}x_1\bar{x}_0 - 2p|x_1|^2 = 0.$$

En d'autres termes, les droites (compactifiées) et les cercles correspondent exactement aux cônes isotropes $q(x_0, x_1) = 0$ des formes quadratiques hermitiennes de signature $(1, 1)$ sur \mathbb{C}^2 , après passage au quotient par la relation de colinéarité \mathcal{R} ; les cercles correspondent aux formes quadratiques dont le coefficient de $|x_0|^2$ est non nul, et les droites à celles dont le coefficient de $|x_0|^2$ est nul. L'image du cône isotrope $q = 0$ par une transformation linéaire φ est le cône isotrope $q \circ \varphi^{-1} = 0$, et $q \circ \varphi^{-1}$ est encore une forme quadratique hermitienne de signature $(1, 1)$. On en déduit la conséquence archi-classique suivante :

Conséquence. *La collection de parties de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ formées des cercles et des droites compactifiées est stable par les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ à coefficients complexes telles que $ad - bc \neq 0$.*

1.5. Cas du disque et du plan de Poincaré

Le «demi-plan de Poincaré» est défini conventionnellement comme étant le demi-plan supérieur du plan complexe. Il sera noté

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}.$$

On note par ailleurs

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

le disque unité du plan complexe.

Proposition. *Les domaines \mathbb{D} et \mathbb{H} sont conformément équivalents via les homographies*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H}, & z &\mapsto w = i \frac{1+z}{1-z}, \\ \psi : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D}, & w &\mapsto z = \frac{w-i}{w+i}. \end{aligned}$$

qui sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Démonstration. Un calcul direct donne en effet

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w &= \frac{1}{2} \frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0, \\ 1-|z|^2 &= \frac{|w+i|^2 - |w-i|^2}{|w+i|^2} = \frac{4 \operatorname{Im} w}{|w+i|^2} > 0, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a bien $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ et $\psi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$. Il est immédiat d'autre part que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. □

Proposition. *Les groupes $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ et $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ peuvent se décrire comme suit.*

(i) *Les automorphismes de \mathbb{D} sont les homographies*

$$z \mapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \text{avec } |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}.$$

(ii) *Les automorphismes de \mathbb{H} sont les homographies*

$$h_{a,b,c,d} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc = 1.$$

Démonstration. (i) Les automorphismes du disque ont déjà été déterminés au chapitre II, section 5.3.

(ii) Pour obtenir les automorphismes du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} , on peut observer qu'on a un isomorphisme de groupes

$$(*) \quad \operatorname{Aut}(\mathbb{D}) \rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{H}), \quad f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1},$$

où $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ est l'isomorphisme conforme déjà mentionné. En particulier, tous les automorphismes de \mathbb{H} sont des homographies puisque ceux de \mathbb{D} en sont. On pourrait bien entendu utiliser (*) pour déterminer ces homographies, mais il est plus rapide de chercher directement quelles sont les homographies $h_{a,b,c,d}$ qui préservent \mathbb{H} . Ces homographies doivent aussi préserver le bord de \mathbb{H} dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, à savoir $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En considérant trois points $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et leurs images $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ par $h_{a,b,c,d}$ (prendre $x_i \neq -d/c$) on voit que les coefficients (a, b, c, d) doivent satisfaire les équations linéaires

$$ax_j + b - (cx_j + d)y_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

C'est un système de 3 équations à 4 inconnues, à coefficients réels, et on sait que le rang est 3 puisque les coefficients sont uniquement déterminés à un scalaire près. Les solutions complexes sont donc de la forme $(a, b, c, d) = \lambda(a_0, b_0, c_0, d_0)$ avec $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{R}$ (donnés par des quotients des déterminants mineurs) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ceci montre que les coefficients a, b, c, d , à un scalaire multiplicatif près, peuvent être choisis réels. Maintenant, $ad - bc = \lambda^2(a_0d_0 - b_0c_0)$ et on peut donc se ramener à $ad - bc = \pm 1$. Pour conclure, on calcule

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im} ((az + b)(c\bar{z} + d))}{|cz + d|^2},$$

soit encore

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = (ad - bc) \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2},$$

et on voit qu'une homographie à coefficients réels $h_{ab,c,d}$ envoie \mathbb{H} dans \mathbb{H} si et seulement si $ad - bc > 0$. \square

Remarque. Le résultat précédent peut se reformuler en écrivant qu'on a un isomorphisme de groupes

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\operatorname{Id}, -\operatorname{Id}\}.$$

En effet, lorsque la condition $ad - bc = 1$ est imposée, l'ambiguïté dans la détermination des coefficients (a, b, c, d) n'est plus que celle d'un facteur multiplicatif $\lambda = \pm 1$.

2. Métriques hermitiennes

Une métrique hermitienne sur un ouvert Ω n'est autre qu'une façon de mesurer la longueur d'un déplacement infinitésimal dz , en utilisant une « unité variable » en fonction du point z , mais en préservant le caractère conforme des coordonnées (les petits cercles restent des petits cercles, il ne deviennent pas des ellipses ...)

2.1. Définitions

Définition 1. Si Ω est un ouvert de \mathbb{C} , une métrique hermitienne sur Ω est la donnée, pour chaque $z \in \Omega$, d'une forme hermitienne $h(z) = h_1(z) |dz|^2$, où

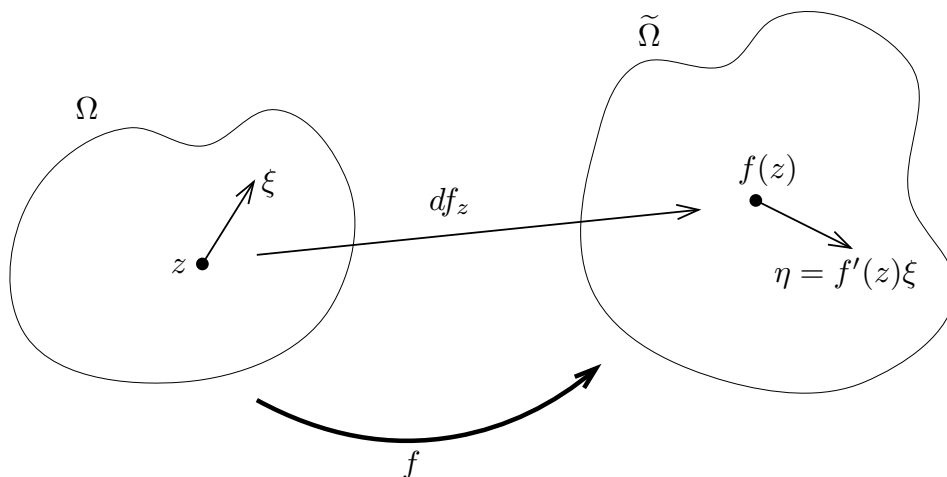
$h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction positive. On dit que la métrique h est de classe \mathcal{C}^k si la fonction h_1 est elle-même de classe \mathcal{C}^k .

Si $\xi \in \mathbb{C}$ est vu comme un vecteur du plan d'origine z (i.e. comme un élément du fibré tangent à Ω au point z), on définit la norme $\|\xi\|_h$ de ξ par rapport à h de sorte que

$$\|\xi\|_h^2 = h_1(z)|\xi|^2.$$

Définition 2. Si $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ est holomorphe et si $\tilde{h}(w) = \tilde{h}_1(w)|dw|^2$ est une métrique sur $\tilde{\Omega}$, alors on définit $f^*\tilde{h}$ comme la forme hermitienne obtenue en effectuant la substitution $w = f(z)$:

$$f^*\tilde{h}(z) = \tilde{h}_1(f(z))|f'(z)|^2|dz|^2$$



L'image d'un vecteur ξ par la différentielle df_z est le vecteur $\eta = f'(z)\xi$ au point $f(z)$. Nous avons

$$\|\xi\|_h^2 = h_1(z)|\xi|^2, \quad \|\eta\|_{\tilde{h}}^2 = \tilde{h}_1(f(z))|\eta|^2 = \tilde{h}_1(f(z))|f'(z)|^2|\xi|^2,$$

par conséquent, la norme de la différentielle df_z relativement aux métriques h, \tilde{h} est donnée par

$$\|df_z\|_{h, \tilde{h}}^2 = \frac{\tilde{h}_1(f(z))}{h_1(z)} |f'(z)|^2 = \frac{f^*\tilde{h}(z)}{h(z)}.$$

Définition 3. On dira que f est une isométrie relativement à h, \tilde{h} si df_z est une isométrie en tout point, c'est-à-dire si $\|df_z\|_{h, \tilde{h}} = 1$ pour tout $z \in \Omega$, c'est-à-dire encore si

$$f^*\tilde{h}(z) = h(z) \quad \text{sur } \Omega.$$

2.2. Métrique de Poincaré du disque et du demi-plan

Avec la terminologie qui précède, nous pouvons énoncer le

Théorème (métrique de Poincaré du disque). *Il existe sur \mathbb{D} une métrique définie par*

$$h(z) = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2},$$

de classe \mathcal{C}^∞ , telle que :

- (i) *Toute application $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ est une isométrie pour h .*
- (ii) *Toute application holomorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ (non nécessairement injective ou surjective) est une contraction faible, c'est-à-dire vérifie $\|dg_z\|_{h,h} \leq 1$ en tout point. De plus, s'il y a égalité $\|dg_z\|_{h,h} = 1$ en un point $z = z_0 \in \mathbb{D}$, alors g est un automorphisme.*

Démonstration. (i) Les automorphismes du disque sont donnés par

$$z \mapsto w = f(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |\lambda| = 1, \quad a \in \mathbb{D}.$$

Des calculs directs déjà faits au II 5.3 donnent

$$dw = \lambda \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} dz, \quad 1 - |w|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2},$$

par conséquent

$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

et ceci signifie que $f^*h = h$.

(ii) est une reformulation du corollaire du II 5.3. □

Théorème (métrique de Poincaré du demi-plan). *Il existe sur \mathbb{H} une métrique*

$$\tilde{h}(z) = \frac{|dz|^2}{4 |\text{Im } z|^2}$$

de classe \mathcal{C}^∞ telle qu'on ait $\|df_z\|_{\tilde{h},\tilde{h}} = 1$ pour tout $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ et $\|dg_z\|_{\tilde{h},\tilde{h}} \leq 1$ pour toute application $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ holomorphe. De plus, toute transformation conforme bijective $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ est une isométrie de (\mathbb{D}, h) sur (\mathbb{H}, \tilde{h}) .

Démonstration. Il suffit de démontrer la dernière assertion, puisque toutes les propriétés de \mathbb{D} se transporteront à \mathbb{H} par isométrie. Il suffit même de vérifier que l'application

$$\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto w = \varphi(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}$$

est une isométrie. Or, de nouveau, un calcul direct donne

$$dw = \frac{-2i}{(1 - z)^2} dz, \quad \text{Im } w = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2},$$

de sorte que

$$\frac{|dw|}{2|\operatorname{Im} w|} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}. \quad \square$$

2.3. Géométrie du plan hyperbolique

La *géométrie hyperbolique plane* n'est autre que la géométrie du disque unité \mathbb{D} , muni de sa distance géodésique. Le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} en fournit un modèle isomorphe. Introduisons d'abord la notion de distance géodésique.

Définition. Soit Ω un ouvert du plan, et $h = h_1(z) |dz|^2$ une métrique hermitienne de classe \mathcal{C}^k sur Ω . La longueur d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux se calcule en posant

$$ds^2 = \gamma^* h = h_1(\gamma(t)) |\gamma'(t)|^2 dt^2,$$

$$\operatorname{long}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h_1(\gamma(t))} |\gamma'(t)| dt.$$

Etant donné deux points $a, b \in \Omega$, la distance géodésique $d_h(a, b)$ de a à b relativement à h est définie par

$$d_h(a, b) = \inf_{\gamma} \operatorname{long}(\gamma)$$

où l'inf est étendu à tous les chemins $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tels que $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$.

Pour le disque et sa métrique de Poincaré $h(z) = |dz|^2 / (1 - |z|^2)^2$, nous avons

$$\operatorname{long}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt.$$

Du fait que la métrique de Poincaré est invariante par les automorphismes du disque, nous en déduisons aussitôt :

Proposition. Pour tout automorphisme $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ et tout chemin de classe \mathcal{C}^1 par morceaux $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$, nous avons $\operatorname{long}(f \circ \gamma) = \operatorname{long}(\gamma)$ relativement à la métrique de Poincaré h . De plus, pour tout couple de points $a, b \in \Omega$, nous avons

$$d_h(f(a), f(b)) = d_h(a, b),$$

autrement dit f est une isométrie de l'espace métrique (\mathbb{D}, d_h) .

Nous affirmons que le chemin de longueur minimale joignant le centre 0 du disque à un point quelconque $w \in \mathbb{D}$ est le segment $[0, w]$. En effet, si on écrit $z = \gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$ en coordonnées polaires, il vient

$$dz = (dr + ir d\theta) e^{i\theta}, \quad |dz| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \geq dr = r'(t) dt$$

On obtient donc

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \geq \int_0^{|w|} \frac{dr}{1 - r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |w|}{1 - |w|},$$

et ce calcul correspond précisément à la longueur du segment $[0, w]$. Pour trouver la distance de deux points quelconques a, b , on utilise l'automorphisme

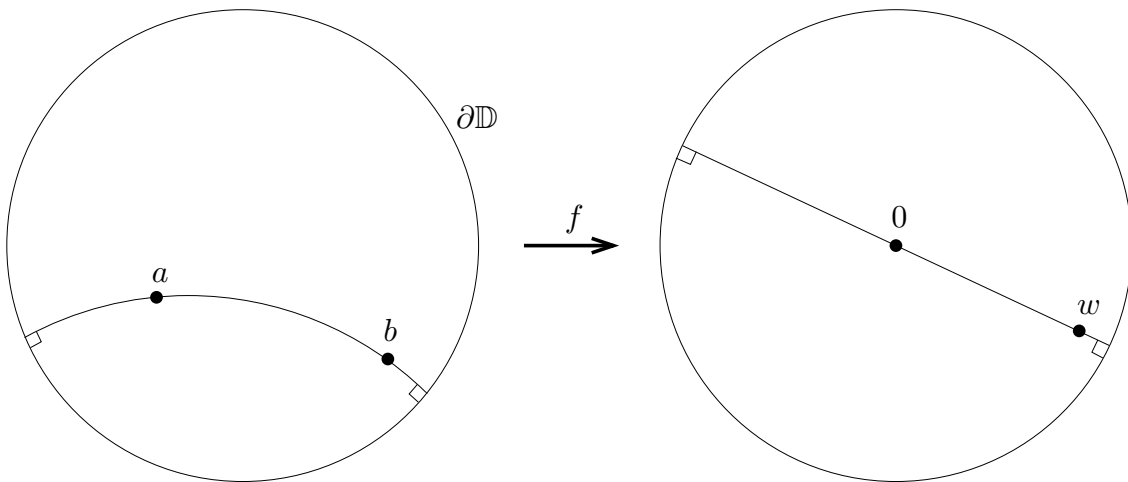
$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

qui envoie a sur $f(a) = 0$ et b sur $w = f(b) = \frac{b - a}{1 - \bar{a}b}$. On trouve

$$d_h(a, b) = d_h(f(a), f(b)) = d_h(0, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}{1 - \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}},$$

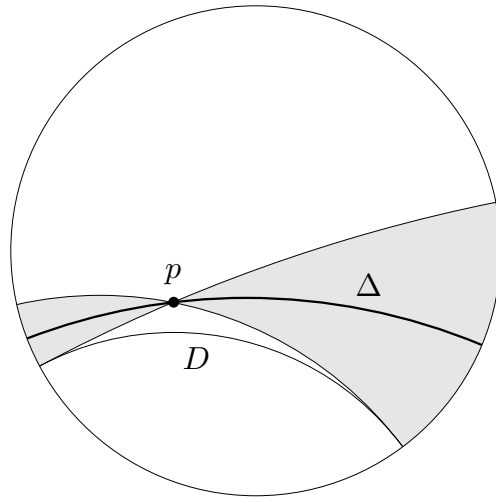
soit encore

$$d_h(a, b) = \ln \frac{|1 - \bar{a}b| + |a - b|}{\sqrt{1 - |a|^2} \sqrt{1 - |b|^2}}.$$



La géodésique (chemin le plus court) joignant a à b est l'image inverse par f du segment $[0, w]$. C'est donc un arc de cercle d'extrémités a et b , porté par un cercle orthogonal au bord \mathbb{D} (en effet le diamètre $\mathbb{R}w$ est orthogonal au bord $\partial\mathbb{D}$, donc leurs images inverses par f le sont, du fait du caractère conforme de f , et $\partial\mathbb{D}$ est évidemment invariant par f). La seule exception est le cas où $0, a, b$ sont alignés, auquel cas la géodésique est le segment de droite $[a, b]$ porté par un diamètre de \mathbb{D} .

De manière générale les "droites hyperboliques" de \mathbb{D} sont les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au bord $\partial\mathbb{D}$. Dans le modèle équivalent du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} , les "droites" sont les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel $\partial\mathbb{H}$, auxquels il faut rajouter toutes les demi-droites ayant une extrémité sur $\partial\mathbb{H}$ et orthogonales à $\partial\mathbb{H}$.



En géométrie hyperbolique, on constate facilement que les axiomes d'incidence d'Euclide sont satisfaits, sauf précisément le 5ème postulat (postulat suivant lequel par tout point passe une unique parallèle à une droite donnée) : ici, par tout point p hors d'une "droite" D donnée, il passe une infinité de "droites" Δ ne coupant pas la "droite" initiale. C'est la découverte surprenante faite par Lobatchevski en 1826, ruinant l'espoir de déduire le 5ème postulat des autres axiomes.

3. Le théorème de l'application conforme de Riemann

Le résultat central de cette section est une caractérisation des ouverts simplement connexes de \mathbb{C} à équivalence conforme près. En fait, la preuve utilisera seulement la propriété suivante de Ω (qui résulte de la simple connexité) :

- (P) Ω est connexe, et pour toute fonction holomorphe f sur Ω ne s'annulant pas, il existe une fonction holomorphe u telle que $u^2 = f$ (i.e. une détermination holomorphe de la racine carrée de f).

3.1. Énoncé et preuve du théorème de Riemann

Théorème. *Soit Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , ou plus généralement un ouvert satisfaisant la propriété (P) ci-dessus. Si Ω est différent de \mathbb{C} lui-même, alors Ω est conformétement équivalent à \mathbb{D} . De plus, pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un unique biholomorphisme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. La démonstration se fait en trois étapes. Dans la première, on démontre l'unicité de f , et dans les suivantes, l'existence de f . Pour l'existence, on peut évidemment ignorer la condition $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$, puisqu'on peut s'y ramener aussitôt en multipliant f par un nombre complexe λ de module 1.

Première étape : unicité de f .

S'il existait une deuxième solution $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, alors $\varphi = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ serait un automorphisme du disque vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \in \mathbb{R}_+^*$. La seule possibilité

est $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{D}}$, donc $f = g$.

Deuxième étape : on démontre l'existence d'une application holomorphe *injective* $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $f_0(z_0) = 0$.

Fixons un point $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. D'après l'hypothèse (P), il existe une fonction $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $u(z)^2 = z - a$, puisque $z - a$ ne s'annule pas sur Ω . Il est évident que l'on a la propriété suivante :

$$u(z_1) = \pm u(z_2) \Rightarrow z_1 - a = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2,$$

en particulier u est injective. Posons $w_0 = u(z_0) \neq 0$. Le théorème de l'application ouverte montre que $u(\Omega)$ contient un disque $D(w_0, \varepsilon)$, avec disons $\varepsilon < |w_0|$. Cependant, $u(\Omega)$ ne peut contenir aucun point $w_1 \in D(-w_0, \varepsilon)$ sinon il existerait $z_1 \in \Omega$ tel que $u(z_1) = w_1$, et par ailleurs il existerait $z_2 \in \Omega$ tel que $u(z_2) = -w_1 \in D(w_0, \varepsilon)$. Mais alors on aurait $z_1 = z_2$ d'après ce qui précède, donc $u(z_1) = u(z_2)$ et $w_1 = 0$, contradiction. Le fait que $u(\Omega)$ soit disjoint de $D(-w_0, \varepsilon)$ signifie que $|u(z) + w_0| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in \Omega$, donc

$$f_0(z) = \frac{\varepsilon/3}{u(z) + w_0} - \frac{\varepsilon/3}{u(z_0) + w_0}$$

est une application injective telle que $f_0(z_0) = 0$ et $|f_0| \leq 2/3$ (c'est la composée de u avec une transformation homographique). A fortiori, f_0 envoie bien Ω dans \mathbb{D} et l'étape 2 est achevée.

Troisième étape. L'objet de cette étape est d'essayer d'«agrandir» l'image $f_0(\Omega)$ pour rendre l'application à la fois injective et surjective. La quantité caractéristique utilisée pour mesurer l'«étendue» de $f(\Omega)$ sera la taille $|f'(z_0)|$ de la dérivée en z_0 .

Pour cela, on considère dans $\mathcal{O}(\Omega)$ la partie

$$\mathcal{P} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}; f \text{ injective, } f(z_0) = 0, |f'(z_0)| \geq |f'_0(z_0)|\}.$$

C'est une partie non vide de $\mathcal{O}(\Omega)$ puisque $f_0 \in \mathcal{P}$. Nous prétendons que \mathcal{P} est une partie compacte de $\mathcal{O}(\Omega)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω . En fait, nous avons vu au III 6.3 (Corollaire 2 du théorème de Rouché) qu'une limite f d'applications injectives $f_n \in \mathcal{P}$ est ou bien injective ou bien constante. Mais f ne peut être constante puisque $|f'(z_0)| \geq |f'_0(z_0)| > 0$. De même une limite f d'applications $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ vérifie a priori $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, mais si f n'est pas constante alors $f(\Omega)$ est un ouvert donc $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Ceci montre que \mathcal{P} est une partie fermée. La compacité résulte du théorème de Montel, puisque toutes les applications $f \in \mathcal{P}$ sont uniformément majorées par 1. Comme l'application

$$\mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto f'(z_0)$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme, il existe une application $F \in \mathcal{P}$ qui atteint le maximum du module de la dérivée, telle que

$$|F'(z_0)| = \sup_{f \in \mathcal{P}} |f'(z_0)|.$$

On va démontrer que F est surjective. Si ce n'est pas le cas, il existe un plus petit rayon $r \in]0, 1[$ tel que $F(\Omega)$ ne contient pas $D(0, r)$, et un point $a \in \mathbb{D}$, $|a| = r$, tel que $a \notin F(\Omega)$. On considère l'automorphisme $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tel que

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \varphi_a(a) = 0.$$

Alors $\varphi_a \circ F$ ne s'annule pas et $\varphi_a \circ F(z_0) = \varphi_a(0) = -a$. Soit $b \in \mathbb{D}$ une racine carrée complexe de $-a$. L'hypothèse (P) implique l'existence d'une fonction holomorphe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $u^2 = \varphi_a \circ F$ et $u(z_0) = b$. L'injectivité de F implique celle de u . Posons $F_1 = \varphi_b \circ u = \varphi_b \circ \sqrt{\varphi_a \circ F}$. C'est encore une application injective. Nous avons $F_1(z_0) = \varphi_b(u(z_0)) = \varphi_b(b) = 0$ et de plus $u = \varphi_b^{-1} \circ F_1$. En notant $k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ l'élevation au carré, nous trouvons

$$\varphi_a \circ F = u^2 = k \circ u = k \circ \varphi_b^{-1} \circ F_1,$$

par conséquent

$$F = \psi \circ F_1 \quad \text{avec } \psi = \varphi_a^{-1} \circ k \circ \varphi_b^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}.$$

Par construction $F(z_0) = F_1(z_0) = 0$, donc $\psi(0) = 0$. Or ψ n'est pas un automorphisme de \mathbb{D} (du fait que l'élevation au carré k n'est pas injective), donc le lemme de Schwarz implique $|\psi'(0)| < 1$. Cette inégalité entraîne à son tour

$$|F'(z_0)| = |\psi'(0)| |F_1'(0)| < |F_1'(z_0)|,$$

ce qui est une contradiction. Cette contradiction implique que F doit être surjective. Le théorème de Riemann est démontré. \square

Remarque. Un calcul immédiat donne

$$\psi'(0) = (\varphi_a'(0))^{-1} \cdot 2\varphi_b^{-1}(0) \cdot (\varphi_b^{-1})'(0) = (1 - |a|^2)^{-1} \cdot 2b \cdot (1 - |b|^2)$$

donc $|\psi'(0)| = 2\sqrt{|a|}/(1 + |a|)$. Construisons une suite d'applications holomorphes

$$f_0, f_1, \dots, f_n, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

à partir de l'application f_0 définie à l'étape 2, en posant comme ci-dessus

$$f_{n+1} = \lambda_n \varphi_{b_n} \circ \sqrt{\varphi_{a_n} \circ f_n},$$

où $a_n \in \mathbb{D}$ est un point omis par $f_n(\Omega)$, de module minimal, où $b_n = \sqrt{-a_n}$, et où λ_n est un nombre complexe de module 1 tel que $f'_{n+1}(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons

$$|f'_{n+1}(z_0)| = |\psi'_n(0)|^{-1} |f'_n(z_0)| = \frac{1 + |a_n|}{2\sqrt{|a_n|}} |f'_n(z_0)|,$$

et comme la suite $|f'_n(z_0)|$ est bornée, nous en déduisons que le produit infini

$$\prod \frac{1 + |a_n|}{2\sqrt{|a_n|}} = \prod \left(1 + \frac{(1 - |a_n|)^2}{4|a_n|} \right)^{1/2}$$

est convergent. Ceci équivaut à la condition $\sum(1 - |a_n|)^2 < +\infty$, qui entraîne en particulier $\lim |a_n| = 1$.

On voit donc que l'image $f_n(\Omega)$ recouvre des disques $D(0, |a_n|)$ dont la suite des rayons tend vers 1. Soit $g_n : D(0, |a_n|) \rightarrow \Omega$ l'application réciproque. Pour toute limite de sous-suite $f = \lim f_{n_k}$, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite de la sous-suite, que $g = \lim g_{n_k}$ existe et définit une application holomorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ (noter que Ω est conformément équivalent à \mathbb{D} , donc les fonctions à valeurs dans Ω se comportent comme des fonctions bornées). On a alors $(f \circ g)'(0) = \lim (f_{n_k} \circ g_{n_k})'(0) = 1$, donc $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{D}}$ par le lemme de Schwarz. Ceci implique que f est une bijection de Ω sur \mathbb{D} , telle que $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$. L'unicité de cette fonction entraîne que toutes les sous-suites (f_{n_k}) convergent vers la même limite f , et par conséquent $f = \lim f_n$. On obtient ainsi une méthode «constructive» pour trouver l'application conforme de Riemann. Cette méthode est due à Paul Koebe (et a été publiée en 1915). L'argument qualitatif reposant sur la compacité de \mathcal{P} est une réécriture moderne de la preuve due à Henri Cartan.

3.2. Caractérisation des ouverts simplement connexes du plan

Nous énonçons ici une conséquence simple, essentiellement topologique, du théorème de Riemann.

Théorème. *Pour un ouvert connexe Ω du plan complexe, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a) Ω est simplement connexe.
- (b) $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$.
- (c) Ω n'a pas de trous.
- (d) Toute application holomorphe f dans Ω admet une primitive F holomorphe.
- (e) Toute application holomorphe f dans Ω ne s'annulant pas admet une détermination holomorphe du logarithme $\log f$.
- (f) Toute application holomorphe f dans Ω ne s'annulant pas admet une détermination holomorphe de la racine carrée \sqrt{f} .
- (g) Ω est homéomorphe à un disque (ou au plan lui-même, qui est homéomorphe au disque).

Remarque. Bien entendu, ces propriétés sont elles-mêmes équivalentes au fait que l'ouvert Ω soit biholomorphe à \mathbb{D} ou à \mathbb{C} , mais c'est là une propriété beaucoup plus forte, qui n'est pas de nature topologique.

Démonstration. On sait que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g)$$

La dernière implication résulte en effet du théorème de Riemann, qui montre que la propriété (P) = (f) entraîne l'équivalence conforme de Ω au plan ou au disque.

La propriété (g) \Rightarrow (a) est triviale, puisque la simple connexité est une propriété purement topologique. Ceci montre que les propriétés (a), (b), (d), (e), (f), (g) sont toutes équivalentes.

L'implication (c) \Rightarrow (d) résulte du Corollaire de la formule des résidus généralisée (cf. III 6.2). Prouvons enfin que (b) \Rightarrow (c). Si Ω possède un trou T (composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$), on montre l'existence d'un cycle contenu dans Ω , d'indice non nul par rapport à un point $z_0 \in T$, ce qui contredira (b). Prenons un rayon $R > 0$ tel que $T \subset D(0, R/2)$. Alors T est une composante connexe du compact $K = \overline{D}(0, R) \setminus \Omega$, donc T est l'intersection d'une suite de parties T_n à la fois ouvertes et fermées dans K (c'est une propriété bien connue des espaces métriques compacts : il suffit de prendre pour T_n l'ensemble des points qui peuvent être joints à un point de T par une chaîne de points de distances mutuelles $\leq 2^{-n}$ situés dans K , cf. exercice ??). Nous avons $T_n \subset D(0, 3R/4)$ pour n assez grand. Prenons un quadrillage assez fin du plan, de maille $< R/10$, tel que pour tout carré du quadrillage on ait $T_n \cap C \neq \emptyset \Rightarrow K \cap C \subset T_n$ (l'existence de ce quadrillage résulte du fait que T_n est un ouvert de K). Si L est la réunion des carrés qui intersectent T_n , alors L est un voisinage de T_n contenu dans $D(0, R)$, tel que

$$L \setminus \Omega = L \cap (\overline{D}(0, R) \setminus \Omega) = L \cap K \subset T_n$$

(puisque $L \cap K$ est une réunion de parties $K \cap C$ contenues dans T_n). Le bord ∂L est disjoint de T_n , donc de $L \setminus \Omega$, par suite $\partial L \subset \Omega$. C'est le cycle cherché. Son indice par rapport à tout point $z_0 \in T \subset T_n \subset L^\circ$ est égal à 1. \square

3.3. Continuité au bord de l'application de Riemann

Nous allons démontrer que lorsque l'ouvert simplement connexe Ω est suffisamment régulier, l'application conforme de Riemann $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. La nature de la frontière $\partial\Omega$ joue un rôle décisif.

Définition. Un point ζ de la frontière $\partial\Omega$ d'un ouvert Ω du plan est dit point frontière simple si pour toute suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans Ω convergeant vers ζ il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \cup \{\zeta\}$ et une suite strictement croissante (t_k) de réels > 0 tels que $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 1$ et $\gamma(t_k) = z_k$ pour tout k (de sorte qu'on a aussi $\gamma(1) = \zeta$).

Exemple. Si Ω est convexe, tout point frontière est simple, il suffit de prendre pour γ un chemin polygonal par morceaux ayant pour sommets les points z_k , en paramétrant le segment $[z_k, z_{k+1}]$ par l'intervalle $[1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}]$ (disons). Au contraire, si $\Omega = \mathbb{D} \setminus [0, 1]$, il est facile de voir que les points frontières $\zeta \in]0, 1]$ ne sont pas simples. Un exemple plus compliqué est donné par le domaine

$$0 < x < 1, \quad \sin(1/x) - x < y < \sin(1/x) + x,$$

dont aucun des points frontières $x = 0, y \in [-1, 1]$ n'est simple.

Proposition. Soit Ω un ouvert simplement connexe borné du plan, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ une application conforme de Ω sur \mathbb{D} .

- (i) (Koebe) Si $\zeta \in \partial\Omega$ est un point frontière simple, alors f admet un prolongement continu \bar{f} à $\Omega \cup \{\zeta\}$.
- (ii) (Lindelöf) Si $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\Omega$ sont deux points frontière simples, et si f est prolongée à $\Omega \cup \{\zeta_1, \zeta_2\}$ comme au (i), alors $\bar{f}(\zeta_1) \neq \bar{f}(\zeta_2)$.

Démonstration. Notons $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ l'application réciproque $g = f^{-1}$. Comme f et g sont des homéomorphismes, nous avons nécessairement $|f(z)| \rightarrow 1$ quand $d(z, \partial\Omega) \rightarrow 0$, et $d(g(z), \partial\Omega) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow 1$ (ceci résulte du fait qu'on a affaire à des applications propres).

(i) $\zeta \in \partial\Omega$ soit un point frontière simple. Il s'agit de voir que la limite

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} f(z) = w \in \partial\mathbb{D}$$

existe et, pour cela, il suffit par compacité de $\bar{\mathbb{D}}$ de montrer que $f(z)$ ne peut pas avoir deux valeurs d'adhérence distinctes $w_1 \neq w_2$ dans $\bar{\mathbb{D}}$ quand $z \rightarrow \zeta$ (ces valeurs d'adhérence étant de toutes façons sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$). Supposons que cette situation se produise. Il existe alors une suite $(z_k)_{k \geq 1}$ dans Ω convergeant vers ζ telle que $f(z_{2k-1}) \rightarrow w_1$ et $f(z_{2k}) \rightarrow w_2$. L'hypothèse que ζ est simple permet de trouver un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \cup \{\zeta\}$ qui relie la suite de points z_k avec $\gamma(t_k) = z_k$, $t_k \nearrow 1$. Considérons la courbe image $\hat{\gamma} = f \circ \gamma : [0, 1[\rightarrow \mathbb{D}$. Cette courbe a la propriété que $\lim_{t \rightarrow 1} |\hat{\gamma}(t)| = 1$, mais $\hat{\gamma}(t)$ admet les deux valeurs d'adhérence w_1 et w_2 . De plus $g(\hat{\gamma}(t)) = g \circ f \circ \gamma(t) = \gamma(t) \rightarrow \zeta$ quand $t \rightarrow 1$. Ceci contredit le lemme ci-dessous, puisque g est bornée non constante.

(ii) Supposons au contraire qu'on ait deux points frontière simples $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\Omega$ en lesquels $f(z)$ admet une même limite $w \in \partial\mathbb{D}$. Choisissons des chemins continus $\gamma_j : [0, 1[\rightarrow \Omega$ se prolongeant par continuité en $t = 1$, avec $\gamma_j(1) = \zeta_j$. Le chemin image $f \circ \gamma_j(t)$ a pour limite w quand $t \rightarrow 1$, donc pour tout $r \in]0, r_0]$ avec $r_0 > 0$ assez petit, l'arc de cercle $\partial D(w, r) \cap \mathbb{D}$ coupe le chemin $f \circ \gamma_j$ en au moins un point $p_j(r) = w(1 - re^{i\theta_j(r)})$, $\theta_j(r) \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Nous avons $g(p_j(r)) \rightarrow \zeta_j$ quand $r \rightarrow 0$, donc quitte à diminuer r_0 si nécessaire, nous pouvons supposer $|g(p_2(r)) - g(p_1(r))| \geq \frac{1}{2}|\zeta_2 - \zeta_1|$ pour tout $r \in]0, r_0]$. En intégrant suivant l'arc de cercle $p_1(r)p_2(r) \subset \partial D(w, r)$ (qui est de longueur au plus πr), on obtient l'inégalité

$$|g(p_2(r)) - g(p_1(r))|^2 = \left| \int_{p_1(r)}^{p_2(r)} g'(z) dz \right|^2 \leq \pi r \int_{p_1(r)}^{p_2(r)} |g'(z)|^2 r d\theta,$$

où l'on a posé $z = w(1 - re^{i\theta})$, $|dz| = r d\theta$, et par conséquent

$$\frac{1}{4\pi r} |\zeta_2 - \zeta_1|^2 \leq \int_{\partial D(w, r) \cap \mathbb{D}} |g'(z)|^2 r d\theta.$$

Comme l'intégrale

$$\int_0^{r_0} dr \int_{\partial D(w, r) \cap \mathbb{D}} |g'(z)|^2 r d\theta = \text{Aire}(g(D(w, r_0) \cap \mathbb{D}))$$

est convergente puisque g est bornée, on aboutit à une contradiction. \square

Lemme (Koebe). *Soit h une fonction holomorphe bornée sur un disque $D(0, R)$, telle qu'il existe une courbe continue $\gamma : [0, 1[\rightarrow D(0, R)$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma(t)| = R$ et $\lim_{t \rightarrow 1} h(\gamma(t)) = \zeta$ existe, mais telle que $\gamma(t)$ n'a pas de point limite quand $t \rightarrow 1$. Alors la fonction h est constante, égale à ζ sur $D(0, R)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer $h(z)$ par $h(z) - \zeta$, nous pouvons supposer $\zeta = 0$. Les hypothèses sur γ et la compacité de $\overline{D}(0, R)$ entraînent que $\gamma(t)$ a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes $w_1 = Re^{i\alpha_1}$, $w_2 = Re^{i\alpha_2} \in \Gamma(0, R)$ quand $t \rightarrow 1$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, l'un au moins des deux arcs joignant w_1 et w_2 sur le cercle $\Gamma(0, R)$ est balayé par les valeurs d'adhérence de $\gamma(t)$ quand $t \rightarrow 1$. Quitte à remplacer $\gamma(t)$ par $e^{-i\alpha}\gamma(t)$ avec $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, et $h(z)$ par $h(e^{i\alpha}z)$, on peut supposer que l'arc (w_1w_2) en question admet le point $w = R$ comme point médian, de sorte que $w_1 = Re^{i\beta}$, $w_2 = Re^{-i\beta}$ où $\beta = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$. Fixons un entier s pair tel que $2\pi/s < |\beta|$ et considérons la fonction

$$H(z) = \prod_{j=0}^{s-1} h(e^{2\pi ij/s}z) \overline{h(e^{2\pi ij/s}\bar{z})}.$$

Soit $M = \sup_{D(0,R)} |h|$. Alors H est une fonction holomorphe bornée, majorée par M^{2s} . Nous allons voir que H est identiquement nulle, ce qui entraînera que h elle-même est identiquement nulle. Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. Par hypothèse ($\zeta = 0$), il existe $t_0 < 1$ tel que $|\gamma(t)| \geq R - \varepsilon$ et $|h(\gamma(t))| \leq \varepsilon$ pour $t \in [t_0, 1[$. Grâce aux propriétés des valeurs d'adhérence de $\gamma(t)$, on peut trouver un morceau du chemin γ , disons $\gamma_{|[t_1, t'_1]}$ avec $[t_1, t'_1] \subset [t_0, 1[$, qui joint un certain point $r \in [R - \varepsilon, 1[$ d'angle polaire nul à un certain point $r'e^{2\pi i/s}$, $r' \in [R - \varepsilon, 1[$, d'angle polaire $2\pi/s$. On forme un chemin $\hat{\gamma}(t)$ dont l'argument varie de 0 à 2π en reliant

- $r e^{2\pi ij\pi/s}$ à $r' e^{2\pi i(j+1)\pi/s}$ par $e^{2\pi ij/s}\gamma_{|[t_1, t'_1]}$ si j est pair $< s$, et
- $r' e^{2\pi ij\pi/s}$ à $r e^{2\pi i(j+1)\pi/s}$ par $e^{2\pi i(j+1)/s}\overline{\gamma_{|[t_1, t'_1]}}$ (conjugué de $\gamma_{|[t_1, t'_1]}$, parcouru en sens inverse), si j est impair $< s$.

Sur chaque portion du chemin $\hat{\gamma}$, il y a un facteur dans H qui est de module $\leq \varepsilon$, donc $|H(z)| \leq M^{2s-1}\varepsilon$ sur l'image $\text{Im}(\hat{\gamma})$. Cette image est contenue dans la couronne $R - \varepsilon \leq |z| < R$, son complémentaire a donc une composante connexe Ω_ε qui contient le disque $D(0, R - \varepsilon)$. Puisque le bord de Ω_ε est contenu dans $\text{Im}(\hat{\gamma})$, le principe du maximum fournit

$$\sup_{D(0, R-\varepsilon)} |H| \leq \sup_{\Omega_\varepsilon} |H| \leq \sup_{\text{Im}(\hat{\gamma})} |H| \leq M^{2s-1}\varepsilon.$$

Comme ε est arbitrairement petit, on en déduit bien $H = 0$ et $h = 0$. \square

Théorème. *Soit Ω un ouvert simplement connexe borné du plan, tel que tout point frontière de Ω est simple. Alors toute application conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ peut se prolonger en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

Démonstration. La proposition qui précède montre qu'il existe un prolongement par continuité

$$\bar{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{D}},$$

qui, en outre, est une application injective. Comme l'image $\bar{f}(\bar{\Omega})$ est un compact contenant \mathbb{D} , cette image doit être égale à $\bar{\mathbb{D}}$ et par conséquent \bar{f} est bijective. La conclusion résulte de ce que toute application continue bijective d'un espace compact sur un autre espace compact est un homéomorphisme. \square

Ce théorème admet un corollaire purement topologique.

Corollaire. *Si Ω un ouvert simplement connexe borné du plan, tel que tout point frontière de Ω est simple, alors la frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan. (Rappelons qu'on appelle courbe de Jordan dans le plan toute image homéomorphe du cercle unité).*

Démonstration. En effet, la restriction au bord du prolongement continu de n'importe quelle application conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ induit un homéomorphisme $\bar{f} : \partial\Omega \rightarrow \partial\mathbb{D}$, de sorte que $\gamma = (\bar{f})^{-1} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ est un paramétrage de $\partial\Omega$ par le cercle unité. \square

Remarque 1. Le paramétrage $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ donné par la preuve du corollaire est nécessairement d'orientation positive, c'est-à-dire que γ est d'indice +1 par rapport à tout point $z_0 \in \Omega$. En effet, si $g = f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$, le lacet γ est la limite quand $r \rightarrow 1$ des lacets $\gamma_r(t) = g(re^{it})$ (de sorte que $r \mapsto \gamma_r$, $r \in [0, 1[$, se prolonge en une homotopie en posant $\gamma_1 = \gamma$). Si on prend r assez proche de 1 pour que $g(D(0, r))$ contienne z_0 , le changement de variable $z = g(w)$ donne

$$\text{Ind}(\gamma_r, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r)} \frac{g'(w) dw}{g(w) - z_0} = \text{card}(g^{-1}(z_0)) = 1$$

d'après la formule des résidus.

Remarque 2. Si $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ est une application conforme, les autres applications conformes $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ s'obtiennent comme les composées $f = h \circ f_0$ par un automorphisme du disque h , c'est-à-dire une homographie du type

$$h_{\lambda, a}(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}.$$

Or on sait qu'étant donné deux triplets (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) de points deux à deux distincts du cercle unité $\partial\mathbb{D}$, il existe une unique homographie h telle que $h(a_j) = b_j$. Une telle homographie préserve nécessairement le cercle unité $\partial\mathbb{D}$, et par conséquent ou bien elle envoie \mathbb{D} dans \mathbb{D} et $\mathbb{C}\bar{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}\bar{\mathbb{D}}$, ou bien elle échange \mathbb{D} et $\mathbb{C}\bar{\mathbb{D}}$. On voit aisément que h envoie \mathbb{D} dans \mathbb{D} si et seulement si les triplets (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) se suivent dans la même orientation du cercle (c'est-à-dire si les chemins fermés constitués de la succession des arcs a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 , respectivement b_1b_2, b_2b_3, b_3b_1 , ont le même indice $\varepsilon = \pm 1$ par rapport au centre 0 du disque \mathbb{D}). Ceci résulte de l'invariance de l'indice par homotopie (en glissant

$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ vers 1 et $a \in \mathbb{D}$ vers 0), et du fait que toute homographie qui échange \mathbb{D} avec $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ est la composée d'un automorphisme du disque avec l'homographie $z \mapsto 1/z$. De là on déduit le résultat suivant :

Théorème. *Soit Ω un ouvert borné du plan dont tous les points frontière sont simples. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \partial\Omega$ et $w_1, w_2, w_3 \in \partial\mathbb{D}$ deux triplets ayant la même orientation (calculée au moyen de l'indice du bord $\partial\Omega$ par rapport à un point $z_0 \in \Omega$, lorsque ce bord est paramétré comme la succession des arcs orientés z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1). Alors il existe une unique application conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ dont le prolongement par continuité au bord \overline{f} vérifie $\overline{f}(z_j) = w_j$.*

Remarque 3. Les énoncés qui précèdent sont valables non seulement pour des ouverts simplement connexes bornés du plan, mais plus généralement pour des ouverts simplement connexes $\Omega \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tels que le complémentaire $E = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \Omega$ soit d'intérieur non vide. En effet, si a est un point intérieur à E (avec, disons, $a \neq \infty$), alors l'homographie $z \mapsto 1/(z - a)$ envoie Ω sur un ouvert borné Ω' du plan complexe. Il suffit alors d'appliquer les résultats à Ω' plutôt que Ω .

Remarque 4 (Régularité au bord de l'application de Riemann). On montrera ultérieurement que si le bord $\partial\Omega$ est de classe C^k , $k \geq 1$, alors l'application de Riemann prolongée \overline{f} est de classe C^{k-1} (et même de classe $C^{k-\varepsilon}$) sur $\overline{\Omega}$. Cette preuve utilisera la relation qui existe entre l'application de Riemann et le noyau de Szegö.

3.4. Formule de Schwarz-Christoffel

(A compléter !!)

(Exemples: uniformisation d'un rectangle, fonctions elliptiques de Jacobi)

4. Revêtements et fonction modulaire

4.1. Notion de revêtement

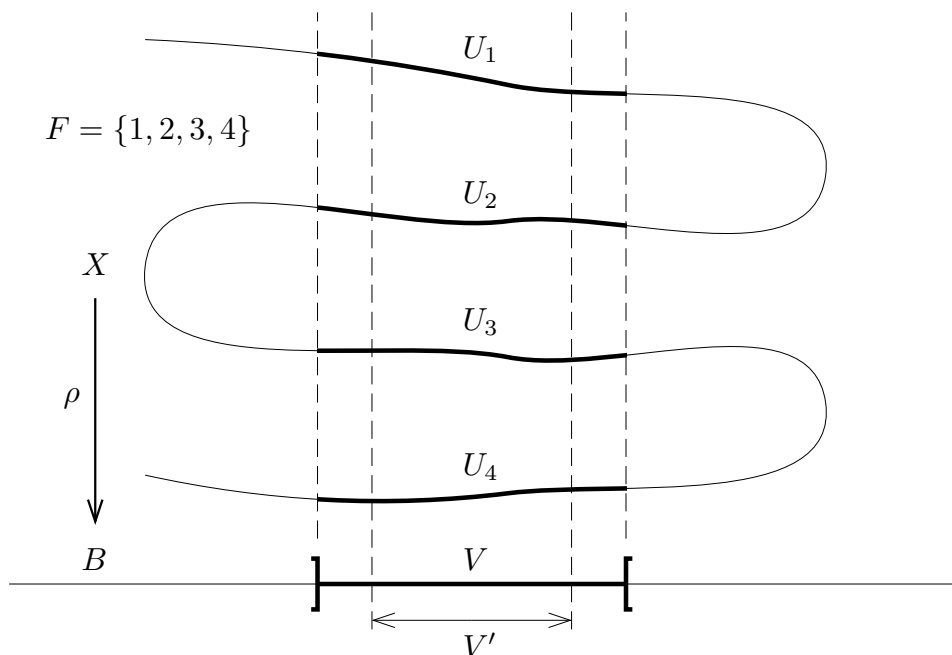
Etant donnés deux espaces topologiques X et B , un revêtement $X \rightarrow B$ peut être vu intuitivement comme un espace X constitué d'un empilement local de couches, appelées aussi «feuilles», localement homéomorphes à B et homéomorphes entre elles. Le nombre de feuilles est supposé partout le même. La définition précise d'un revêtement est la suivante. Tous les espaces qui interviendront dans cette section seront supposés *séparés* et *localement connexes*.

Définition 1. *Soit $\rho : X \rightarrow B$ une application continue entre espaces topologiques (séparés et localement connexes), et soit F un ensemble (considéré comme un espace topologique avec la topologie discrète). On dit que $\rho : X \rightarrow B$ est un revêtement de fibre typique F si la condition suivante est satisfaite :*

(R) *Pour tout point y_0 dans B , il existe un voisinage ouvert V tel que $\rho^{-1}(V)$ puisse s'écrire comme une réunion disjointe $\rho^{-1}(V) = \bigcup_{j \in F} U_j$ d'ouverts U_j deux à deux disjoints, $j \in F$, et tel que la restriction $\rho|_{U_j} : U_j \rightarrow V$ soit un*

homéomorphisme pour tout j .

Cette condition implique que $\rho^{-1}(V)$ est homéomorphe au produit $V \times F$. Un tel voisinage V sera appelé un voisinage adapté (au revêtement ρ). L'espace B est appelé la base du revêtement, X l'espace total du revêtement. Les ouverts U_j sont les feuilles situées au dessus de V .



[Nota. Le dessin ci-dessus est quelque peu simpliste ; la propriété de revêtement ne serait pas vérifiée sur les bouts gauche et droit de B tels qu'ils sont figurés ici ...]

On notera que l'on peut toujours rétrécir le voisinage V en un voisinage ouvert $V' \subset V$: la définition est alors satisfaite avec $U'_j = U_j \cap \rho^{-1}(V') = (\rho|_{U_j})^{-1}(V')$. On dit que le revêtement $\rho : X \rightarrow B$ est *trivial* si on peut choisir $V = B$, en sorte que X s'identifie au produit $B \times F$, et ρ à la première projection $B \times F \rightarrow B$.

Comme B est localement connexe, on peut choisir V connexe, et les ouverts U_j sont alors nécessairement les composantes connexes de $\rho^{-1}(V)$. On dit que les ouverts U_j sont les feuilles du revêtement au dessus de l'ouvert V . Si F est un ensemble fini de cardinal N , on dit que ρ est un revêtement à N feuilles (ou encore, un revêtement de degré N).

Définition 2. Etant deux donnés deux revêtements $\rho : X \rightarrow B$ et $\rho' : X' \rightarrow B$ de base B , on appelle homomorphisme entre ces revêtements tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \rho \searrow & & \swarrow \rho' \\ & B & \end{array}$$

autrement dit une application continue $\varphi : X \rightarrow X'$ telle que $\rho' \circ \varphi = \rho$. On dit qu'il s'agit d'un isomorphisme de revêtements si φ est un homéomorphisme, et on dit

que φ est un automorphisme du revêtement $\rho : X \rightarrow B$ si c'est un isomorphisme du revêtement sur lui-même ($X' = X$ et $\rho' = \rho$).

Etant donné un homomorphisme φ de revêtements, tout point $b \in B$ admet un voisinage connexe V qui est adapté à la fois pour ρ et ρ' , de sorte qu'on a des décompositions en feuilles

$$\rho^{-1}(V) = \bigcup_{j \in F} U_j, \quad \rho'^{-1}(V) = \bigcup_{k \in F'} U'_k,$$

et la propriété de commutation $\rho' \circ \varphi = \rho$ implique que φ envoie homéomorphiquement chaque feuille U_j sur une certaine feuille $U'_{k(j)}$ via $\rho'^{-1} \circ \rho$. Il en résulte que $\varphi(X)$ est une partie à la fois ouverte et fermée de X' (c'est une réunion de feuilles ouvertes, et son complémentaire est la réunion des feuilles ouvertes qui ne sont pas atteintes). En particulier, si X' est connexe, tout homomorphisme de revêtement est nécessairement surjectif.

On notera $G = \text{Aut}(\rho)$ l'ensemble des automorphismes du revêtement $\rho : X \rightarrow B$. C'est clairement un groupe pour la composition des applications. On l'appelle le *groupe* du revêtement. Ce groupe permet de définir une relation d'équivalence \mathcal{R} comme suit : $x_1 \mathcal{R} x_2$ si et seulement s'il existe un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\rho)$ tel que $x_2 = \varphi(x_1)$. On note alors X/G l'espace topologique quotient. Il est facile de voir que l'application passée au quotient $\bar{\rho} : X/G \rightarrow B$ est encore un revêtement, avec les éléments des fibres identifiés entre eux chaque fois qu'un automorphisme permet de passer de l'un à l'autre.

Définition 3. On dit que le revêtement $\rho : X \rightarrow B$ est galoisien si le groupe $G = \text{Aut}(X)$ agit transitivement sur les fibres $\rho^{-1}(y)$, $y \in B$.

Autrement dit, le revêtement ρ est galoisien si $\bar{\rho} : X/G \rightarrow B$ est un homéomorphisme, et on a alors $B \simeq X/G$. On notera qu'un revêtement trivial $B \times F \rightarrow B$ de base connexe est galoisien de groupe $\mathfrak{S}_F =$ ensemble des permutations de F . Cet exemple est assez atypique dans la mesure où X n'est pas connexe même lorsque B l'est (du moins si $\text{card } F \geq 2$), et où le groupe $G = \mathfrak{S}_F$ a éventuellement plus d'éléments que les fibres elles-mêmes. Ceci ne se produit pas si X et B sont connexes :

Proposition. Si $\rho : X \rightarrow B$ est un revêtement d'espace total X connexe, alors deux automorphismes φ, ψ qui coïncident en un point $x_0 \in X$ sont égaux. En particulier, pour chaque fibre $\rho^{-1}(y)$, l'application

$$G \rightarrow \rho^{-1}(y), \quad x \mapsto \varphi(x)$$

est injective et $\text{card } G \leq \text{card } \rho^{-1}(y)$.

Démonstration. En effet l'ensemble $A = \{x \in X ; \varphi(x) = \psi(x)\}$ est un fermé, et c'est aussi un ouvert du fait de la propriété d'homéomorphie locale de ρ qui fait que si φ, ψ coïncident en un point d'une feuille connexe U_j , alors ils coïncident sur U_j toute entière. □

La proposition précédente montre que $G = \text{Aut}(\rho)$ agit sans point fixe sur X , c'est-à-dire que seul l'automorphisme identique a des points fixes. Inversement :

Théorème. *Soit X un espace connexe (localement connexe et séparé), et G un groupe discret agissant continûment sur X , c'est-à-dire encore un groupe d'homéomorphismes de X . On dit que le groupe agit proprement sans point fixe si la condition suivante est satisfaite : pour tout point $x_0 \in X$, il existe un voisinage ouvert U tel que les images $\varphi(U)$, $\varphi \in G$, soient deux à deux distinctes. Si c'est le cas, alors l'application de passage au quotient $\rho : X \rightarrow B = X/G$ (par la relation $x_1 \mathcal{R} x_2$ si et seulement si $x_2 = \varphi(x_1)$ pour un certain $\varphi \in G$) est un revêtement galoisien de groupe G .*

Démonstration. La preuve est très facile et les détails seront laissés au lecteur. Si U est un voisinage ouvert comme dans la définition, alors $V = \rho(U)$ est un voisinage ouvert adapté de $y_0 = \rho(x_0) \in X/G$, et $\rho^{-1}(V) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(U)$. \square

Exemple. L'application exponentielle $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ identifie \mathbb{C}^* au quotient $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$. C'est un revêtement galoisien de groupe \mathbb{Z} , dont les automorphismes sont les translations $z \mapsto z + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$. De même, pour tout entier n , l'application $\rho_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est un revêtement. Le groupe du revêtement est constitué des automorphismes $z \mapsto uz$, $u^n = 1$, et donc isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des racines n -ièmes de l'unité.

On notera que si $\rho : X \rightarrow B$ est un revêtement et B' une partie de B , alors en posant $X' = \rho^{-1}(B')$, l'application induite

$$\rho' = \rho|_{X'} : X' \rightarrow B'$$

est encore un revêtement. On l'appelle la restriction du revêtement à $B' \subset B$. Dans les exemples qui précèdent, on peut se restreindre par exemple au disque pointé $D(0, r) \setminus \{0\}$, ce qui donne les revêtements

$$\begin{aligned} \rho : \{\text{Re } z < \ln r\} &\rightarrow D(0, r) \setminus \{0\}, & z &\mapsto e^z \\ \rho_n : D(0, r^{1/n}) \setminus \{0\} &\rightarrow D(0, r) \setminus \{0\}. & z &\mapsto z^n. \end{aligned}$$

Tous ces exemples sont des revêtements *holomorphes*. De façon générale, on parle de revêtement différentiable, holomorphe, etc, si l'application ρ est différentiable, holomorphe, etc.

Théorème de relèvement. *Soit $\rho : X \rightarrow B$ un revêtement de base B localement connexe par arcs, S un espace simplement connexe et s_0 un point de S . Pour toute application continue $f : S \rightarrow B$ et tout point $x_0 \in X$ tel que $\rho(x_0) = f(s_0)$, il existe une unique application $\tilde{f} : S \rightarrow X$, appelée relèvement de f dans X , telle que*

$$\rho \circ \tilde{f} = f \quad \text{et} \quad \tilde{f}(s_0) = x_0.$$

Ceci peut se visualiser par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & X \ni x_0 & \\ & \exists \tilde{f} \nearrow \downarrow \rho & \\ s_0 \in S & \xrightarrow{f} & B \ni f(s_0). \end{array}$$

Démonstration. Unicité. S'il existait deux relèvements \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 , l'ensemble E des $s \in S$ tels que $\tilde{f}_1(s) = \tilde{f}_2(s)$ serait à la fois ouvert et fermé. En effet, si $x = \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)$, il existe un voisinage U de x qui s'envoie homéomorphiquement sur un voisinage V de $\rho(x) = f(a)$ par ρ , et par continuité, il existe un voisinage W de a dans S tel que $\tilde{f}_1(W) \subset U$ et $\tilde{f}_2(W) \subset U$. Comme $\rho \circ \tilde{f}_1 = \rho \circ \tilde{f}_2 = f$, ceci implique $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ sur W , par suite E est ouvert. Le fait que E soit fermé résulte de ce que l'espace X est supposée séparé. Comme $s_0 \in E$, la connexité de S entraîne $E = S$, et l'unicité est démontrée. Pour démontrer l'existence, nous procédons en trois étapes.

Existence, première étape. Nous démontrons d'abord l'existence dans le cas $S = [0, 1]$ et $s_0 = 0$. Comme l'image $f(S) = f([0, 1])$ est compacte, il existe un recouvrement fini de $f(S)$ par des ouverts connexes V_ℓ pour lesquels $\rho^{-1}(V_\ell) = \bigcup_{j \in F} U_{\ell,j}$ où $\rho|_{U_{\ell,j}} : U_{\ell,j} \rightarrow V_\ell$ est un homéomorphisme. Quitte à prendre une subdivision $[k/N, (k+1)/N]$ assez fine de $[0, 1]$, on peut supposer que $f([k/N, (k+1)/N])$ est entièrement contenu dans un certain ouvert $V_{\ell(k)}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, N-1$. On montre alors qu'on peut choisir par récurrence sur k un indice $j(k)$ tel que

$$\tilde{f} = (\rho|_{U_{\ell(k),j(k)}})^{-1} \circ f \quad \text{en restriction à } [k/N, (k+1)/N].$$

Pour $k = 0$, on choisit $j(0)$ en sorte que $x_0 \in U_{\ell(0),j(0)}$, ce qui est possible puisque

$$\rho(x_0) = f(s_0) = f(0) \in V_{\ell(0)}.$$

Ce choix donne bien $\tilde{f}(0) = x_0$. Supposons maintenant que \tilde{f} ait déjà été construite sur $[(k-1)/N, k/N]$, $k \geq 1$. On choisit alors $j(k)$ en sorte que $\tilde{f}(k/N) \in U_{\ell(k),j(k)}$, ce qui est possible puisque $\rho(\tilde{f}(k/N)) = f(k/N) \in V_{\ell(k)}$. On voit alors que \tilde{f} se recolle en une fonction continue sur $[0, 1]$.

Existence, deuxième étape : cas du carré $S = [0, 1]^2$, $s_0 = (0, 0)$. La preuve est tout à fait analogue à celle du segment $[0, 1]$. On utilise cette fois un quadrillage assez fin de sorte que chaque petit carré C du quadrillage s'envoie sur $f(C) \subset V_\ell$, puis on relève consécutivement les carrés adjacents ligne par ligne, en partant du carré qui contient $s_0 = (0, 0)$.

Existence, cas général (S simplement connexe quelconque). Puisque S est connexe par arcs, on peut choisir pour tout $s \in S$ un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tel que $\gamma(0) = s_0$ et $\gamma(1) = s$. D'après la première étape appliquée à $g = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B$, il existe une unique fonction $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\tilde{g}(0) = x_0$ et $\rho \circ \tilde{g} = g = f \circ \gamma$:

$$\begin{array}{ccc} X \ni x_0 & & \\ \exists \tilde{g} \nearrow & \downarrow \rho & \\ 0 \in [0, 1] & \longrightarrow & B \ni g(0) = f(s_0). \\ & & g = f \circ \gamma \end{array}$$

On définit alors $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(1)$, de sorte que $\rho \circ \tilde{f}(s) = g(1) = f \circ \gamma(1) = f(s)$. Il faut vérifier que l'image $\tilde{f}(s)$ ne dépend pas du chemin γ choisi pour effectuer le

relèvement. Si γ' est un autre choix, l'hypothèse de simple connexité de S entraîne l'existence d'une homotopie

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

telle que $h(0, t) = \gamma(t)$, $h(1, t) = \gamma'(t)$, $g(u, 0) = s_0$, $h(u, 1) = s$ pour tous $t, u \in [0, 1]$. D'après la deuxième étape appliquée à $G = f \circ h : [0, 1]^2 \rightarrow B$, il existe un relèvement \tilde{G} de G tel que $\tilde{G}(0, 0) = x_0$:

$$\begin{array}{ccc} X \ni x_0 & & \\ \exists \tilde{G} \nearrow & \downarrow \rho & \\ (0, 0) \in [0, 1]^2 & \longrightarrow & B \ni G(0, 0) = f(s_0). \\ & & G = f \circ h \end{array}$$

L'unicité implique que $G(0, t) = \tilde{g}(t)$ et $G(1, t) = \tilde{g}'(t) =$ relèvement de $f \circ \gamma'$. Mais comme $\rho \circ \tilde{G}(u, 1) = G(u, 1) = s =$ constante, la fonction $u \mapsto \tilde{G}(u, 1)$ est constante, ce qui entraîne

$$\tilde{g}(1) = G(0, 1) = G(1, 1) = \tilde{g}'(1).$$

La continuité de \tilde{f} se déduit aisément de cette observation et du fait que B est localement connexe par arcs. □

Exemple. Comme l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement, on retrouve ainsi l'existence d'un relèvement \tilde{f} tel que $\exp(\tilde{f}) = f$ pour toute application continue $f : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie sur un espace S simplement connexe. Autrement dit, f possède une détermination continue $\tilde{f} = \log f$ de son logarithme complexe. Idem pour les racines n -ièmes $\sqrt[n]{f}$. On voit ici que ces propriétés étaient des faits purement topologiques.

Corollaire 1. *Soit X un espace simplement connexe et localement connexe, et G un groupe opérant proprement sans point fixe sur X . Considérons la projection $\rho : X \rightarrow X/G$ et un point base $x_0 \in X$. On a alors un isomorphisme canonique*

$$\pi_1(X/G, \rho(x_0)) \simeq G.$$

Démonstration. Nous définissons une application $\Psi : G \rightarrow \pi_1(X/G, \rho(x_0))$ comme suit. Pour tout $g \in G$, on choisit un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = g \cdot x_0$. Alors $\rho \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X/G$ est un lacet basé en $\rho(x_0)$, puisque $\rho(g \cdot x_0) = \rho(x_0)$. On définit $\Psi(g) = (\rho \circ \gamma)^\wedge$ comme la classe d'homotopie de $\rho \circ \gamma$. Ceci ne dépend pas du choix de γ , puisque tous les chemins sont homotopes dans X d'après l'hypothèse de simple connexité. Considérons le chemin concaténé $\gamma \cdot (g \circ \gamma')$ qui joint x_0 à $gg' \cdot x_0$ en passant par le point intermédiaire $g \cdot x_0$, et observons que $\rho \circ g \circ \gamma' = \rho \circ \gamma'$. On voit alors que

$$\Psi(gg') = (\rho \circ \gamma)^\wedge \cdot (\rho \circ \gamma')^\wedge = \Psi(g)\Psi(g'),$$

c'est-à-dire que Ψ est un homomorphisme de groupes.

Comme $\rho : X \rightarrow X/G$ est un revêtement, la propriété de relèvement entraîne que tout lacet $\bar{\gamma}$ basé en $\rho(x_0)$ se relève en un certain chemin γ joignant x_0 à un point x_1 tel que $\rho(x_1) = \rho(x_0)$. Mais alors $x_1 = g \cdot x_0$ pour un certain $g \in G$, donc $\hat{\bar{\gamma}} = (\rho \circ \gamma)^\wedge = \Psi(g)$ et on voit que Ψ est surjective. Montrons enfin que Ψ est injective : si $\Psi(g) = (\rho \circ \gamma_g)^\wedge = 1$, le chemin $\bar{\gamma} = \rho \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X/G$ est homotope au lacet trivial par une certaine homotopie $\bar{h} : [0, 1]^2 \rightarrow X/G$. On sait que cette homotopie se relève en une homotopie $h : [0, 1] \rightarrow X$ qui relie γ à un chemin de projection constante par ρ , donc constant. Par conséquent $x_0 = \gamma(0) = \gamma(1) = g \cdot x_0$, ce qui implique $g = 1$ du fait que G agit sans point fixe. \square

Corollaire 2. *Si X est un espace simplement connexe, tout revêtement $\rho : X \rightarrow B$ est galoisien, et le groupe d'automorphismes $G = \text{Aut}(\rho)$ s'identifie à $\pi_1(B, b_0)$.*

Démonstration. Etant donné $b_0 \in B$ et deux éléments x_0, x_1 de la fibre $\rho^{-1}(b_0)$, le théorème de relèvement implique l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & X \ni x_1 & \\ & \exists \varphi \nearrow \downarrow \rho & \\ x_0 \in X & \xrightarrow{\rho} & B \ni b_0. \end{array}$$

Par échange des rôles de x_0 et x_1 et unicité du relèvement, on voit que φ est un automorphisme de X . Le groupe $G = \text{Aut}(\rho)$ agit transitivement sur les fibres, donc ρ est galoisien et $B \simeq X/G$. Le corollaire 1 fournit un isomorphisme canonique $\pi_1(B, b_0) \simeq G$. \square

Un concept très important de revêtement est celui de *revêtement universel* d'un espace, à savoir par définition un revêtement dont la base est l'espace donné et dont l'espace total est simplement connexe. On va voir que c'est en fait le plus grand revêtement possible de la base.

Définition 4. *Soit B un espace topologique connexe. On dit que $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ est le revêtement universel de B si c'est un revêtement et si \tilde{B} est simplement connexe.*

Théorème. *Soit B un espace topologique connexe.*

- (i) *Le revêtement universel, s'il existe, est unique à isomorphisme près de revêtement.*
- (ii) *Si la base B est localement simplement connexe (c'est-à-dire si tout point de B admet un système fondamental de voisinages ouverts simplement connexes), alors le revêtement universel \tilde{B} existe.*
- (iii) *Si \tilde{B} existe et si $B = \tilde{B}/G$ avec $G = \pi_1(B, b_0)$, tout revêtement connexe $\rho : X \rightarrow B$ admet une factorisation*

$$\tilde{B} \rightarrow \tilde{B}/H \simeq X \xrightarrow{\rho} \tilde{B}/G \simeq B$$

pour un certain sous-groupe $H \subset G$. Le revêtement ρ est galoisien si et seulement si H est un sous-groupe distingué de G , et son groupe d'automorphismes s'identifie alors à G/H . En général, $\text{Aut}(\rho)$ s'identifie à N_H/H où N_H est le normalisateur de H dans G .

Démonstration. (i) L'unicité à isomorphisme près résulte facilement du théorème de relèvement, et du fait que tout relèvement entre deux revêtements universels \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 va donner un isomorphisme.

(ii) Supposons que B soit localement simplement connexe et fixons un point base $b_0 \in B$. On définit un ensemble \tilde{B} comme l'ensemble des couples $(b, \dot{\gamma})$ où $b \in B$ et où $\dot{\gamma}$ est une classe d'homotopie de chemin reliant b_0 à b , muni de la première projection $\rho : \tilde{B} \rightarrow B$. Si V est un voisinage simplement connexe d'un point $b \in B$, on considère l'ensemble F de toutes les classes d'homotopie de chemins reliant b_0 à b . Soit $b' \in V$. On utilise le fait qu'il existe une seule classe d'homotopie d'arc reliant b à b' dans V . Ceci permet de définir pour chaque $\dot{\gamma} \in F$ une feuille $U_{\dot{\gamma}} \subset \tilde{B}$ constitué des paires

$$(b', \dot{\gamma} \cdot \widehat{bb'}), \quad b' \in V,$$

où $\widehat{bb'}$ est l'unique classe d'homotopie d'arc reliant b à b' dans V . Les feuilles $U_{\dot{\gamma}}$ sont alors disjointes et en bijection avec V . On munit \tilde{B} de la topologie dont les ouverts sont les réunions d'ouverts des différentes feuilles $U_{\dot{\gamma}}$ (avec la topologie induite par la bijection avec V). Il est clair que $\rho : \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement de fibre typique F (et que F est en bijection avec $\pi_1(B, b_0)$). On voit aussi que \tilde{B} est simplement connexe, en effet si $\tilde{\gamma}$ est un lacet de base \tilde{b}_0 et $\gamma = \rho \circ \tilde{\gamma}$ son image, le fait que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}_0$ signifie précisément que γ est homotope au lacet trivial basé en b_0 , et cette homotopie doit se relever à $\tilde{\gamma}$.

(iii) Soit $\rho : X \rightarrow B$ un revêtement quelconque d'espace total X connexe. Fixons un point $b_0 \in B$ et des points $\tilde{b}_0 \in \tilde{B}$ et $x_0 \in X$ tels que $\pi(\tilde{b}_0) = \rho(x_0) = b_0$. Comme \tilde{B} est simplement connexe, nous savons qu'il existe un relèvement $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow X$ tel que $\rho \circ \tilde{\pi} = \pi$ et $\tilde{\pi}(\tilde{b}_0) = x_0$.

$$\begin{array}{ccc} & X \ni x_0 & \\ & \exists \tilde{\pi} \nearrow \downarrow \rho & \\ \tilde{b}_0 \in \tilde{B} & \xrightarrow{\pi} & B \ni b_0. \end{array}$$

Alors $\tilde{\pi}$ est un homomorphisme de revêtements, et comme X est connexe, cet homomorphisme est surjectif. Il est facile de voir que $\tilde{\pi}$ est lui-même un revêtement et que $H = \text{Aut}(\tilde{B} \rightarrow X)$ est un sous-groupe de $G = \text{Aut}(\tilde{B} \rightarrow B)$ puisque la propriété $\tilde{\pi} \circ \varphi = \tilde{\pi}$ entraîne $\pi \circ \varphi = \pi$ en composant avec ρ . On a donc une identification

$$\rho : X = \tilde{B}/H \longrightarrow B = \tilde{B}/G.$$

Par le théorème de relèvement, tout automorphisme f de $\Gamma := \text{Aut}(\rho : X \rightarrow B)$ se relève en un automorphisme \tilde{f} de $G = \text{Aut}(\pi : \tilde{B} \rightarrow B)$. Les fibres de $\tilde{\pi}$ sont les orbites $H \cdot \tilde{b}$ de H . Le relèvement \tilde{f} doit nécessairement permuter ces orbites, i.e.

$$\tilde{f} \cdot H \cdot \tilde{b} = H \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{b},$$

par conséquent $\tilde{f} \cdot H = H \cdot \tilde{f}$ et \tilde{f} est dans le normalisateur N_H de H . Inversement, si c'est le cas, l'homéomorphisme \tilde{f} permute les fibres de $\tilde{\pi}$ et induit donc un automorphisme $f \in \Gamma$. Le noyau de $N_H \rightarrow \Gamma$ est H lui-même (l'égalité $\tilde{f} \cdot H \cdot \tilde{b} = H \cdot \tilde{b}$ équivaut à $\tilde{f} \in H$), donc $\Gamma \simeq N_H/H$. Pour que le revêtement ρ soit galoisien, il faut que le groupe N_H/H agisse transitivement sur les fibres de ρ , et comme celles-ci sont en bijection avec G/H , il faut que $N_H = G$, autrement dit il faut (et il suffit) que H soit un sous-groupe distingué de G . \square

4.2. Fonction modulaire λ

Pour tout entier $m \geq 2$, on définit le *sous-groupe de congruence* Γ_m de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par

$$\Gamma_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) ; a, d \equiv 1 \pmod{m}, b, c \equiv 0 \pmod{m} \right\} / \{+ \text{Id}, - \text{Id}\}.$$

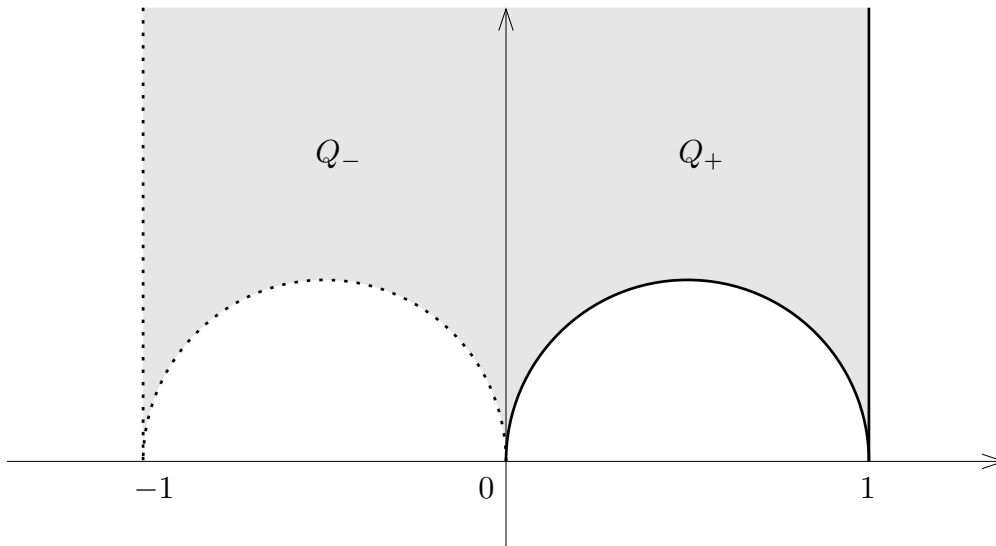
Il s'agit d'un sous-groupe distingué de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, puisque c'est le noyau de l'homomorphisme évident $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. En particulier Γ_2 , qui consiste en l'ensemble des matrices de coefficients a, d impairs et b, c pairs, est un sous-groupe de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Comme $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est lui-même un sous-groupe de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et que celui-ci s'identifie au groupe $\text{Aut}(\mathbb{H})$ des automorphismes du demi-plan de Poincaré, on a une action naturelle

$$\Gamma_2 \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

On va voir que l'action de Γ_2 sur \mathbb{H} possède un domaine fondamental Q qui est délimité par les demi-droites $\text{Re } z = +1, \text{Re } z = -1$ et l'extérieur des cercles de centres $z = \pm 1/2$ et de rayon $1/2$, à savoir de façon précise le domaine

$$Q = \{z \in \mathbb{H} ; -1 < \text{Re } z \leq 1, |z - 1/2| \geq 1/2, |z + 1/2| > 1/2\}.$$

Ce domaine est figuré ci-dessous en gris, on a noté $Q_+ = Q \cap \{\text{Re } z \geq 0\}$, $Q_- = Q \cap \{\text{Re } z < 0\}$.



Proposition. *Le groupe Γ_2 et son action sur \mathbb{H} possèdent les propriétés suivantes.*

- (i) Γ_2 est engendré par les deux transformations $z \mapsto z + 2$ et $z \mapsto z/(2z + 1)$, correspondant respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Γ_2 agit proprement et sans point fixe sur \mathbb{H} .

- (iii) Q est un domaine fondamental pour l'action de Γ_2 dans \mathbb{H} , c'est-à-dire que les parties $\gamma(Q)$, $\gamma \in \Gamma_2$, sont deux-à-deux disjointes, et $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_2} \gamma(Q)$.

Démonstration. (i) Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

avec $ad - bc = 1$, a, d impairs, b, c pairs. Nous avons

$$M' = MA^k = \begin{pmatrix} a & b + 2ka \\ c & d + 2kc \end{pmatrix}, \quad M'' = M'B^\ell = \begin{pmatrix} a' + 2\ell b' & b' \\ c' + 2\ell d' & d' \end{pmatrix}.$$

En choisissant k convenable, on se ramène à $b' = b + 2ka$ tel que $|b'| < |a|$ (il ne peut y avoir égalité du fait les coefficients a et b n'ont pas même parité). Puis, si $b' \neq 0$, on peut choisir ℓ convenable pour se ramener à $a'' = a' + 2\ell b'$ tel que $|a''| < |b'| < |a|$. Ceci montre qu'on peut multiplier M à droite par un produit de puissances convenables de A et B afin de se ramener à une matrice M telle que $b = 0$. Une telle matrice M vérifie $ad = 1$, donc $a = d = \pm 1$. Quitte à changer M en $-M$, on peut supposer $a = d = 1$, $b = 0$, et comme $c = 2p$ est pair, on a alors $M = B^p$. Ceci montre que A et B engendrent Γ_2 .

- (ii) Si $z \in \mathbb{H}$ est un point fixe de $M \in \Gamma_2$, $M \neq \pm \text{Id}$, l'équation $h_M(z) = z$ s'écrit $az + b = z(cz + d)$, c'est-à-dire

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Si $c = 0$, h_M est de la forme $h_M(z) = z + 2p$, $p \neq 0$, et n'a pas de point fixe. Si $c \neq 0$, il s'agit d'une équation du second degré et le discriminant $\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$ est positif ou nul si $a + d \neq 0$ (car $a + d$ est pair). Dans ce cas les racines sont réelles et il n'y a donc pas de point fixe dans \mathbb{H} . Si $d = -a$, il vient $a^2 = -ad = -bc - 1 \equiv -1 \pmod{4}$, ce qui est impossible. Ceci montre que Γ_2 agit sans point fixe.

- (iii) Montrer que $\gamma_1(Q)$ est disjoint de $\gamma_2(Q)$ pour $\gamma_1 \neq \gamma_2$ revient à montrer que $\gamma(Q)$ est disjoint de Q pour $\gamma \neq \text{Id}$. Posons $\gamma = h_M$. Si $c = 0$ alors $\gamma(z) = z + 2p$, $p \neq 0$. Par conséquent γ est une translation horizontale de vecteur $2p + 0i$ avec $|2p| \geq 2$ et il est évident que $\gamma(Q) \cap Q = \emptyset$.

Si $c \neq 0$, nous affirmons que $|cz + d| > 1$ pour tout $z \in Q$. Sinon le disque $|cz + d| \leq 1$ de centre $-d/c$ et de rayon $|1/c| \leq 1/2$ rencontre Q , et la définition

de Q implique que ce disque doit contenir l'un des trois points $z_0 = -1$, $z_0 = 0$ ou $z_0 = 1$ en son intérieur. Mais alors $|cz_0 + d| < 1$, ce qui est contradictoire puisque $cz_0 + d$ est un entier impair. La formule

$$\operatorname{Im}(h_M(z)) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$$

implique donc $\operatorname{Im}(h_M(z)) < \operatorname{Im} z$ pour tout $z \in Q$. Cependant, la matrice M^{-1} a elle aussi un coefficient $c \neq 0$, et on a de même $\operatorname{Im}(h_M^{-1}(w)) < \operatorname{Im} w$ pour tout $w \in Q$. Ceci entraîne la non existence d'un point $z \in Q$ tel que $w = h_M(z) \in Q$, car sinon on aurait à la fois $\operatorname{Im} w < \operatorname{Im} z$ et $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(h_M^{-1}(w)) < \operatorname{Im} w$. Dans tous les cas nous avons $\gamma(Q) \cap Q = \emptyset$ pour $\gamma \neq \operatorname{Id}$.

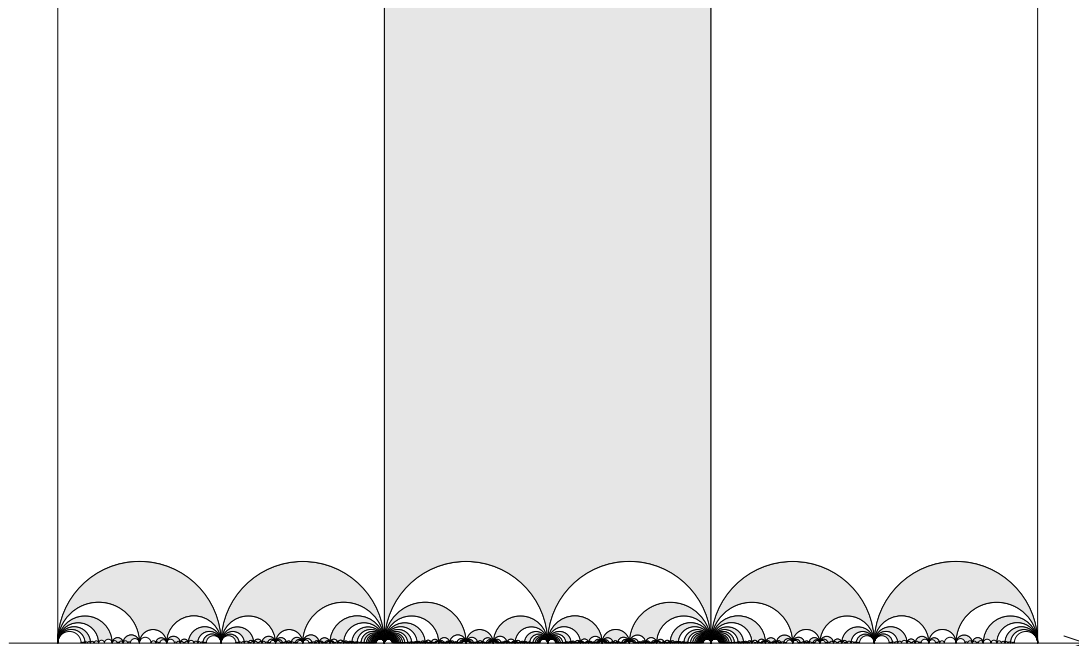
Montons maintenant que $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_2} \gamma(Q)$. Fixons $w \in \mathbb{H}$. Comme $\operatorname{Im} w > 0$ il existe seulement un nombre fini de couples d'entiers c, d tels que $|cw + d| \leq 1$, en effet cette inégalité implique $|c| \leq 1/\operatorname{Im} w$, puis $|d| \leq 1 + c|w| \leq 1 + |w|/\operatorname{Im} w$. Par conséquent, tous les points de l'orbite $\Gamma_2 w$ ont une partie imaginaire inférieure à celle de w sauf un nombre fini, ce qui montre l'existence dans cette orbite d'un point w_0 de partie imaginaire maximale. Quitte à translater w_0 par l'une des translations $z \mapsto z + 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, nous pouvons supposer $-1 < \operatorname{Re} w_0 \leq 1$. Nous avons nécessairement $|\pm 2w_0 + 1| \geq 1$, sinon l'image de w_0 par $z \mapsto z/(\pm 2z + 1)$ serait de partie imaginaire strictement supérieure à celle de w_0 . Ceci montre que $w_0 \in Q$, à moins que w_0 appartienne au demi-cercle $\mathbb{H} \cap \{|2z + 1| = 1\}$ de centre $-1/2$ et de rayon $1/2$. Dans ce cas, le point $w_1 = w_0/(2w_0 + 1)$ est sur le demi-cercle image, qui est le demi-cercle de diamètre $[0, 1]$, et on a bien $w_1 \in Q$. Ceci montre que toute orbite contient un point de Q , et par conséquent $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_2} \gamma(Q)$.

Il reste à voir que tout point $w_0 \in \mathbb{H}$ possède un voisinage ouvert V tel que les images $\gamma(V)$, $\gamma \in \Gamma_2$ soient deux à deux disjointes. D'après ce qui précède, il suffit de le faire pour $w_0 \in Q$. Le résultat est clair si $w_0 \in Q^\circ$ (intérieur de Q), puisqu'on peut prendre $V = Q^\circ$ dans ce cas. Restent les cas des points du demi-cercle de diamètre $[0, 1]$ et de la demi-droite $\operatorname{Re} z = 1$. Pour traiter le cas où $\operatorname{Re} w_0 = 1$, on observe que le translaté $\tau(Q)$ par la translation $z \mapsto z + 1$ (qui n'est cependant pas dans Γ_2 !) est encore un domaine fondamental de Γ_2 , du fait que

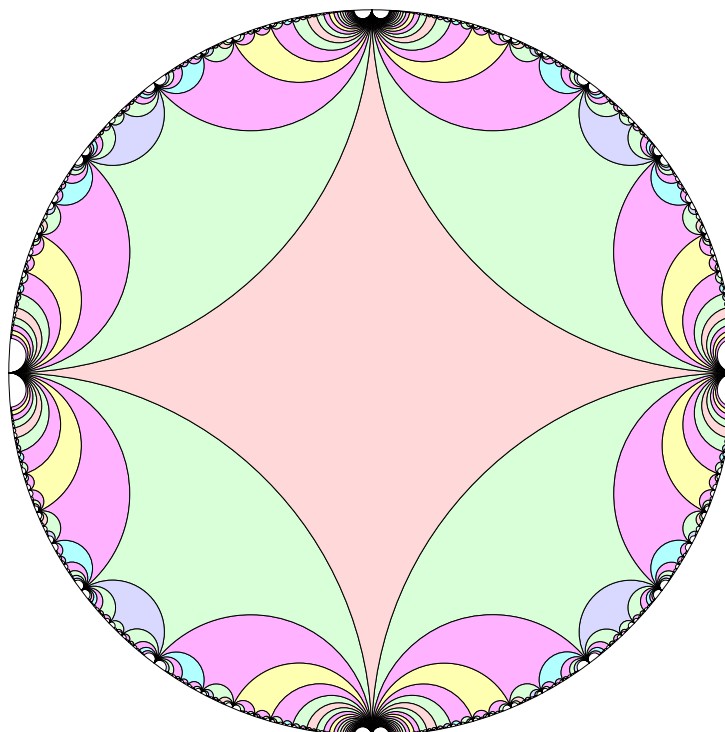
$$\tau \circ h_M \circ \tau^{-1}(z) = \frac{a(z - 1) + b}{cz + d} + 1 = \frac{(a + c)z + b + (d - a)}{cz + d}$$

entraîne $\tau\Gamma_2\tau^{-1} = \Gamma_2$. On prend alors $V = \tau(Q^\circ)$. Le cas du demi-cercle de diamètre $[0, 1]$ se ramène à celui de la demi-droite $\operatorname{Re} z = -1$, puisque ce demi-cercle est précisément l'image de $\{\operatorname{Re} z = -1\}$ par l'homographie $z \mapsto z/(2z + 1)$. Lorsque $\operatorname{Re} w_0 = -1$, il est clair qu'on peut prendre $V = \tau^{-1}(Q^\circ)$. \square

Il est peut-être plus parlant de visualiser le pavage du demi-plan supérieur défini par le groupe Γ_2 . Le schéma ci-dessous représente les images $\gamma(Q)$ du domaine fondamental par les différents éléments $\gamma \in \Gamma_2$.



Et voici une image isomorphe du même pavage sur le disque unité, obtenue au moyen de la transformation conforme $\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, $w \mapsto (w - i)/(w + i)$.



Théorème. *Il existe une fonction, dite « fonction modulaire » $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie :*

- (i) λ est holomorphe ;

(ii) λ est Γ_2 -invariante, i.e. pour tout $\gamma \in \Gamma_2$, $\lambda \circ \gamma = \lambda$;

(iii) l'application induite $\tilde{\lambda} : \mathbb{H}/\Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est un homéomorphisme.

Autrement dit, l'application $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est un revêtement de groupe Γ_2 , et comme \mathbb{H} est simplement connexe, c'est le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Démonstration. La construction de λ est une conséquence assez simple du théorème de Riemann et du principe de réflexion de Schwarz.

Première étape: construction de λ sur Q_+ .

L'ouvert $(Q_+)^\circ$ est simplement connexe, et tous ses points frontière sont simples. D'après le théorème de l'application conforme de Riemann, il existe une application biholomorphe $(Q_+)^\circ \rightarrow \mathbb{D}$, et le théorème final du § 3.3 montre que l'on peut choisir cette application de sorte que le prolongement continu $F : \overline{Q_+} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ vérifie $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(\infty) = \infty$ (voir aussi la Remarque 3). Pour cela, il faut vérifier que le triplet $(0, 1, \infty)$ a la même orientation sur $\partial Q_+ \cup \{\infty\}$ et sur $\partial \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ (à savoir en l'occurrence l'orientation d'indice +1). Ceci résulte d'un argument d'homotopie évident, en calculant les indices par rapport à un point $z_0 \in Q_+^\circ$. On prend tout simplement $\lambda = F$ sur Q_+ .

Deuxième étape: extension de λ à \overline{Q} .

D'après ce qui précède, F envoie les demi-droites $[0, \infty)$ et $[1, \infty)$ de ∂Q_+ sur les demi-droites $[0, \infty)$ et $[1, \infty)$ de l'axe réel, et le demi-cercle de diamètre $[0, 1]$ dans ∂Q_+ sur le segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Le fait que F prenne des valeurs réelles sur ∂Q_+ nous permet d'appliquer le principe de réflexion de Schwarz. De façon précise, on pose

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= F(z) & \text{si } z \in \overline{Q_+}, \\ \lambda(z) &= \overline{F(-\bar{z})} & \text{si } z \in \overline{Q_-}. \end{aligned}$$

Du fait que F est réelle sur ∂Q_+ , les deux définitions se recollent sur la demi-droite $i\mathbb{R}_+ = [0, \infty] \subset \partial Q_+$. La fonction λ est ainsi bien définie sur \overline{Q} , et le principe de réflexion de Schwarz montre qu'elle est holomorphe sur l'intérieur Q° du domaine fondamental.

Troisième étape: extension de λ à \mathbb{H} .

D'après la deuxième étape, on a

$$\lambda(-1 + iy) = \overline{F(1 + iy)} = F(1 + iy) \quad \text{si } y \in \mathbb{R}_+,$$

toujours du fait que F est réelle sur ∂Q_+ . Ceci montre qu'on peut recoller λ par périodicité vis à vis de la translation $\tau(z) = z + 2$, en posant $\lambda(\tau^k(z)) = \lambda(z)$ pour $z \in Q$. Il reste à examiner le comportement de F vis-à-vis de l'autre générateur $\sigma(z) = z/(2z + 1)$ du groupe Γ_2 . Ici encore, on va pouvoir poser

$$\lambda(\sigma(z)) = \lambda(z)$$

pour tout $z \in \overline{Q}$, car l'intersection $\overline{Q} \cap \sigma(\overline{Q})$ se réduit au demi-cercle C_+ de diamètre $[0, 1]$, qui est l'image par σ du demi-cercle C_- de diamètre $[0, -1]$. Pour $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta} \in C_-$, $\theta \in [0, \pi]$, il est facile de constater que

$$\sigma(z) = \frac{-\frac{1}{2}(1 - e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\theta}) = -\bar{z} \in C_+,$$

donc on a bien $\lambda(\sigma(z)) = \lambda(z)$ sur les points pour lesquels on dispose déjà de deux définitions. Pour conclure, tout point $w \in \mathbb{H}$ s'écrit comme l'image $w = \varphi(z)$ d'un point $z \in \overline{Q}$ sous l'action d'un élément

$$\varphi = \sigma^{n_1} \tau^{p_1} \sigma^{n_2} \tau^{p_2} \dots \sigma^{n_k} \tau^{p_k} \in \Gamma_2, \quad n_j, p_j \in \mathbb{Z},$$

et on définit alors

$$(*) \quad \lambda(w) = \lambda(\varphi(z)) = \lambda(z).$$

Ce choix fournit éventuellement plusieurs définitions simultanées de $\lambda(w)$ lorsque $z \in \partial Q_+$, en fonction de l'arc de cercle $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ou de la demi-droite $(\infty, -1)$, $(1, \infty)$ à laquelle z appartient. Suivant le cas, $z' = \sigma(z)$, $z' = \sigma^{-1}(z)$, $z' = \tau(z)$ ou $z' = \tau^{-1}(z)$ appartient encore à ∂Q , et d'après ce que nous avons vu on a $\lambda(z') = \lambda(z)$ dans chacun des cas. Par conséquent la définition (*) est non ambiguë. Grâce au principe de réflexion de Schwarz, on voit que λ est holomorphe sur \mathbb{H} tout entier. On vérifie aisément que λ est une bijection de Q sur $\lambda(Q) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Ceci implique que l'application induite $\tilde{\lambda} : \mathbb{H}/\Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est un homéomorphisme. \square

Remarque. Les fibres $\lambda^{-1}(w)$ de la fonction modulaire $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sont les orbites $\Gamma_2 \cdot z$ de l'un quelconque des antécédents de w par λ . Or, ces orbites sont localement finies dans \mathbb{H} , mais elles admettent $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ comme l'ensemble de leurs valeurs d'adhérence. En effet, tout réel x_0 peut être approché d'aussi près que l'on veut par un rationnel a/c qui est un quotient d'un entier a impair par un entier c pair (on peut même supposer que a et c sont premiers entre eux, par exemple en prenant pour c une puissance de 2). L'identité de Bezout implique alors l'existence d'entiers b, d tels que $ad - bc = 1$, et les matrices

$$\begin{pmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

définissent des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tels que les images $(az + ka + b)/(cz + kc + d)$ tendent vers a/c quand $k \rightarrow +\infty$. En particulier les zéros de $\lambda(z) - w$ admettent des points d'accumulation en tout point de l'axe réel, et ceci entraîne que λ ne peut admettre de prolongement holomorphe sur aucun voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.3. Nouvelle démonstration des théorèmes de Picard

Nous allons voir ici que l'existence de la fonction modulaire fournit une nouvelle démonstration assez simple des théorèmes de Picard.

Petit théorème de Picard. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe non constante, alors f omet au plus une valeur du plan complexe.*

Démonstration. Supposons que f omette deux valeurs distinctes $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Après transformation de f en $(f(z) - w_1)/(w_2 - w_1)$, on peut supposer que f omet les deux valeurs 0 et 1. Comme $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est un revêtement et que \mathbb{C}

est simplement connexe, il existe un relèvement holomorphe $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $\lambda \circ \tilde{f} = f$. Mais \mathbb{H} est isomorphe au disque \mathbb{D} , et le théorème de Liouville implique que \tilde{f} est constante. Par suite f serait constante. C'est une contradiction. \square

Grand théorème de Picard. *Si $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r_0) \setminus \{0\})$ et si z_0 est un point singulier essentiel de f , il existe une partie $E \subset \mathbb{C}$ contenant au plus un point, telle que f atteint une infinité de fois toute valeur de $\mathbb{C} \setminus E$ sur tout voisinage pointé $V \setminus \{z_0\}$ de z_0 .*

Comme au Chapitre III, § 8, la preuve découle de la proposition suivante, appliquée à $\Omega = \mathbb{D}$, $z_0 = 0$ et $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Proposition. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et Ω' un ouvert dont le complémentaire n'est pas réduit à un seul point. On considère un point $z_0 \in \Omega$ et un compact $L_0 \subset \Omega'$. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega'$ dépendant de K et L_0 , tel que pour toute application holomorphe $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ vérifiant $f(z_0) \in L_0$ on ait $f(K) \subset L$.*

Démonstration. Puisque ce résultat a déjà fait l'objet d'une preuve complète, on se contentera ici de traiter le cas $\Omega = \mathbb{D}$, $z_0 = 0$ et $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Grâce à la propriété de revêtement de $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et à la simple connexité de Ω , il existe un compact \tilde{L}_0 de \mathbb{H} tel que $\lambda(\tilde{L}_0) = L_0$ (ceci résulte du fait qu'on peut recouvrir L_0 par un nombre fini d'ouverts adaptés). D'après le théorème de relèvement, toute application holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ telle que $f(0) \in L_0$ se relève en une application holomorphe $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ telle que $\tilde{f}(0) \in \tilde{L}_0$ et $f = \lambda \circ \tilde{f}$. On voit alors que la proposition se ramène au cas où $\Omega' = \mathbb{H}$ (mais comme \mathbb{H} est conformément équivalent au disque, on peut tout aussi bien supposer $\Omega' = \mathbb{D}$); en effet, pour tout compact K de Ω , on pourra trouver un compact \tilde{L} tel que $\tilde{f}(K) \subset \tilde{L}$, et il suffira de prendre $L = \lambda(\tilde{L})$.

Dans le cas $\Omega' = \mathbb{D}$, fixons un disque $\overline{D}(0, R_0)$ qui contient L_0 , et si $a = f(z_0)$, considérons la composée $\varphi_a \circ f$ avec $\varphi_a(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$, $a = f(0)$. Alors $\varphi_a \circ f$ est une application du disque dans lui-même envoyant 0 sur 0, donc $|\varphi_a \circ f(z)| \leq |z|$ par le lemme de Schwarz. Comme l'image par $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ du disque $\overline{D}(0, r)$ est contenue dans le disque de rayon $(|a| + r)/(1 + |a|r) \leq (R_0 + r)/(1 + R_0r)$, on en déduit

$$f(\overline{D}(0, r)) \subset \overline{D}(0, M_{R_0}(r)), \quad \text{où } M_{R_0}(r) = \frac{R_0 + r}{1 + R_0r}.$$

Ceci démontre la Proposition (et le grand théorème de Picard en découle comme au Chapitre III, § 8). \square

Remarque. Le petit théorème et le grand théorèmes de Picard admettent également des versions pour les fonctions méromorphes. Ils s'énoncent comme suit :

- (i) *Toute application méromorphe non constante $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ omet au plus deux valeurs de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*
- (ii) *Toute application méromorphe $f : D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ admettant une singularité essentielle en z_0 (c'est-à-dire un point singulier non isolé,*

ou bien un point singulier isolé mais qui est une singularité essentielle de f comme fonction holomorphe) prend une infinité de fois toute valeur dans le complémentaire $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus E$, où E est une partie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ comportant au plus deux points.

[Si a est une valeur omise par f et $a \neq \infty$, on peut en effet raisonner sur la fonction $g(z) = 1/(f(z) - a)$ qui est une fonction holomorphe].

5. Fonctions univalentes

L'objet de cette section est de prouver quelques estimations quantitatives concernant les fonctions injectives (dites encore univalentes) sur le disque unité.

Définition. On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions holomorphes injectives f sur le disque unité \mathbb{D} telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Ainsi toute fonction $f \in \mathcal{S}$ admet un développement en série de la forme

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La fonction $F = 1/f$ est méromorphe sur \mathbb{D} et admet du fait de l'injectivité de f un unique pôle simple en $z = 0$. On a donc un développement en série convergent

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

On notera que si $c \in \mathbb{D}$, alors la fonction

$$f_c(z) = c^{-1} f(cz) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n c^{n-1} z^n$$

est encore dans \mathcal{S} .

Exemple. La fonction

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$$

est un élément de \mathcal{S} . En effet, si $f(z) = f(w)$, alors $(z-w)(1-zw) = 0$ et le second facteur n'est pas nul si $|z| < 1$ et $|w| < 1$. On vérifie aisément que l'image $f_1(\mathbb{D})$ est égale à $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4[$. Ceci résulte du fait que l'équation du second degré $(1-z)^2 - z/w = 0$ a deux racines dont le produit est égal à 1, et ces racines ne peuvent être complexes conjuguées que si w est réel avec $\Delta = (2 + 1/w)^2 - 4 \leq 0$, ce qui équivaut à $w \in]-\infty, -1/4[$; dans tout autre cas, une des racines z (et une seulement) est de module < 1 . D'après la remarque ci-dessus, la fonction

$$f_c(z) = c^{-1} f_1(cz) = \frac{z}{(1-cz)^2}, \quad |c| = 1$$

est également dans \mathfrak{S} , et son image est le complémentaire dans \mathbb{C} de la demi-droite $] -\infty, -1/4] c^{-1}$.

Théorème de l'aire. Soit $f \in \mathfrak{S}$ et

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$.

Démonstration. La preuve repose sur une estimation de l'aire couverte par l'image $F(C_r)$ de la couronne $C_r = C(0, r, 1)$, lorsque $r \in]0, 1[$ tend vers 0. Cette aire est donnée par $A(r) = \iint_{C_r} |F'(z)|^2 d\lambda(z)$, car la différentielle d'une application holomorphe F est une similitude de rapport $F'(z)$ (de sorte que l'image d'un rectangle infinitésimal est un rectangle infinitésimal dont l'aire est multipliée par $|F'(z)|^2$). En passant en coordonnées polaires, il vient

$$A(r) = \int_r^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

La dérivée $F'(\rho e^{i\theta})$ s'exprime comme la série de Fourier

$$F'(\rho e^{i\theta}) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1} = -\rho^{-2} e^{-2i\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n \rho^{n-1} e^{(n-1)i\theta}.$$

La formule de Parseval nous donne par conséquent

$$\int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \left(\rho^{-4} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |\alpha_n|^2 \rho^{2n-2} \right),$$

d'où

$$A(r) = \pi \left(r^{-2} - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n|\alpha_n|^2 (1 - r^{2n}) \right).$$

Par ailleurs, du fait de l'injectivité de F , l'image $F(C_r)$ est contenue dans le complémentaire de l'image du disque $F(D(0, r))$, qui est un voisinage de l'infini bordé par l'image $F(\Gamma(0, r))$ du cercle de rayon r . Nous allons estimer l'image de ce cercle à partir du développement en série de Laurent de F . Nous pouvons ne pas tenir compte du coefficient α_0 , puisque celui-ci produit juste une translation de l'image de F . Par ailleurs, quitte à changer $F(z)$ en $cF(cz)$ avec $|c| = 1$, le coefficient α_1 est remplacé par $\alpha_1 c^2$ et on peut donc supposer α_1 réel positif. Dans ces conditions, si nous posons $z = r e^{i\theta}$, il vient

$$u + iv = F(r e^{i\theta}) = r^{-1} e^{-i\theta} + \alpha_1 r e^{i\theta} + O(r^2),$$

donc

$$u = (r^{-1} + \alpha_1 r) \cos \theta + O(r^2), \quad v = -(r^{-1} - \alpha_1 r) \sin \theta + O(r^2).$$

Ceci entraîne que

$$\frac{u^2}{(r^{-1} + \alpha_1 r)^2} + \frac{v^2}{(r^{-1} - \alpha_1 r)^2} < 1 + Cr^3,$$

donc l'image $F(\Gamma(0, r))$ est contenue dans l'ellipse E_r dont les demi-axes sont $a = (r^{-1} + \alpha_1 r)\sqrt{1 + Cr^3}$ et $b = (r^{-1} - \alpha_1 r)\sqrt{1 + Cr^3}$. D'après ce qui précède, l'image $F(C_r)$ est contenue dans E_r , et son aire satisfait donc la majoration

$$A(r) \leq \pi ab = \pi(r^{-1} + \alpha_1 r)(r^{-1} - \alpha_1 r)(1 + Cr^3) = \pi(r^{-2} + O(r)).$$

En combinant cette inégalité avec la formule explicite déjà établie pour $A(r)$, nous obtenons

$$-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 0$$

lorsque $r \rightarrow 0$, et le «théorème de l'aire» est démontré. \square

Corollaire 1. *Si $f \in \mathcal{S}$, alors le coefficient α_1 de z dans $F(z) = 1/f(z)$ vérifie $|\alpha_1| \leq 1$.*

Cette inégalité est optimale, puisque la fonction $f_c(z) = z/(1 - cz)^2$ de \mathcal{S} est telle que $F_c(z) = 1/f_c(z) = z^{-1} - 2c + c^2z$, et on a donc $|\alpha_1| = 1$ lorsque $|c| = 1$.

Corollaire 2. *Si $f \in \mathcal{S}$, alors le coefficient a_2 de z^2 dans $f(z)$ vérifie $|a_2| \leq 2$.*

Démonstration. Si $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$, on considère la fonction

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots} = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots}$$

La fonction g est impaire. Elle est dans \mathcal{S} puisque $g(z) = g(w)$ implique $f(z^2) = f(w^2)$, donc $z^2 = w^2$ et $w = \pm z$; or l'imparité de g exclut la possibilité $w = -z$ si $z \neq 0$, donc g est bien injective. Nous avons

$$G(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z}(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)^{-1/2} = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \left(\frac{3}{8}a_2^2 - \frac{1}{2}a_3\right)z^3 + \dots$$

Le corollaire 1 nous donne alors $|\frac{a_2}{2}| \leq 1$. De nouveau cette égalité est optimale comme le montre l'exemple de la fonction $f(z) = z/(1 - z)^2 = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$

\square

Corollaire 3. *Si $f \in \mathcal{S}$, alors $f(\mathbb{D})$ contient le disque $D(0, \frac{1}{4})$, et si $F = 1/f$, l'image $F(\mathbb{D})$ contient le complémentaire du disque fermé du rayon 2 centré au point $-a_2$.*

Démonstration. Si $w \notin f(\mathbb{D})$, alors la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}$$

qui est la composée de f avec une homographie est encore injective. De plus $g(0) = 0$ et $g'(0) = f'(0) = 1$, donc $g \in \mathfrak{S}$. Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, un calcul du développement limité donne

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right)z^2 + \dots$$

donc $|a_2 + \frac{1}{w}| \leq 2$. Ceci montre que $F(\mathbb{D})$ contient le complémentaire du disque fermé de centre $-a_2$ et de rayon 2. De plus $|a_2| \leq 2$, donc on a $|\frac{1}{w}| \leq 4$ et $|w| \geq \frac{1}{4}$. Il en résulte que $f(\mathbb{D}) \supset D(0, \frac{1}{4})$. La fonction $f(z) = z/(1-z)^2$ a pour image $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$, tandis que $g(z) = z/(1+z^2)$ est également injective, et admet une fonction inverse $G = 1/g = 1/f + 2$ qui a pour image $G(\mathbb{D}) = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus [-2, 2]$, avec un coefficient $a_2 = 0$. Par conséquent le corollaire 3 ne peut pas être amélioré. \square

Chapitre VII

Noyau de Szegö et calcul numérique de l'application conforme de Riemann

Ce chapitre est tiré de manière essentielle de travaux effectués par Norberto Kerzman et Manfred Trummer au début des années 1980.

Notations. Soit P une partie de \mathbb{R}^n et I un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . A toute fonction continue $K(t, s)$ sur $P \times I$, on associe un opérateur \mathbb{K} de $L^1(I)$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}(P)$ des fonctions continues sur P , défini par

$$\mathbb{K}u(t) = \int_I K(t, s) u(s) ds, \quad t \in P.$$

La fonction K sera appelée *noyau de l'opérateur* \mathbb{K} . Pour $P = I$ et $u, v \in L^2(I)$, le théorème de Fubini donne

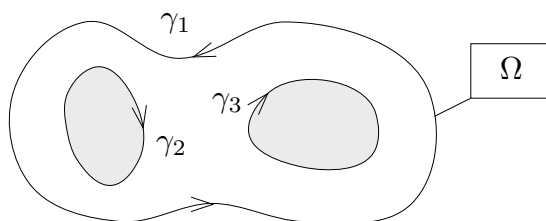
$$\langle \mathbb{K}u, v \rangle = \int_{I \times I} K(t, s) u(s) \bar{v}(t) ds dt$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|\langle \mathbb{K}u, v \rangle| \leq \|K\|_{L^2(I \times I)} \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Par conséquent $\|\mathbb{K}\| \leq \|K\|_2$, et un argument de densité montre que \mathbb{K} définit un opérateur continu $L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ pour tout noyau $K \in L^2(I \times I)$.

Soit Ω un ouvert connexe borné du plan complexe \mathbb{C} dont la frontière $\partial\Omega$ est une réunion de courbes fermées de classe C^k , $k \geq 2$.



On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Par ailleurs, on note ds la mesure de longueur d'arc sur $\partial\Omega$ et s l'abscisse curviligne sur chaque composante connexe, calculée à partir d'une origine quelconque. Enfin $L^p(\partial\Omega)$ désigne l'espace des fonctions L^p à valeurs complexes sur $\partial\Omega$ muni de la mesure ds .

1. Transformation de Hilbert

Si f est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe dans Ω , la formule de Cauchy donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w} dz, \quad w \in \Omega.$$

Notons $z = \gamma(s)$ la paramétrisation de $\partial\Omega$ par l'abscisse curviligne. On a $dz = \tau(z) ds$ où $\tau(z) = \gamma'(s)$ est le vecteur unitaire tangent à $\partial\Omega$ au point z . Par suite

$$f(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) f(z) ds \quad \text{avec}$$

$$H(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z-w}, \quad w \in \Omega, \quad z \in \partial\Omega.$$

Définition 1.1. La fonction $H(w, z)$ est appelée noyau de Cauchy de Ω . Si u est une fonction sur $\partial\Omega$, la transformée de Hilbert de u est définie par

$$\mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z) ds, \quad w \in \Omega.$$

Comme le noyau H est continu sur $\Omega \times \partial\Omega$, $\mathbb{H}u$ est bien définie dès que $u \in L^1(\partial\Omega)$, et donc aussi si $u \in L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$, $p \geq 1$.

Proposition 1.2. Pour tout $u \in L^1(\partial\Omega)$, $\mathbb{H}u$ est holomorphe sur Ω , et l'opérateur $\mathbb{H} : L^p(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu.

Démonstration. Le noyau $H(w, z)$ est différentiable par rapport à w et on a

$$\frac{\partial H}{\partial w}(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{w}}(w, z) = 0.$$

Les dérivées partielles $\partial H/\partial w$ et $\partial H/\partial \bar{w}$ sont donc continues sur $\Omega \times \partial\Omega$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\mathbb{H}u$ est différentiable et que

$$\frac{\partial}{\partial w} \mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \mathbb{H}u(w) = 0,$$

donc $\mathbb{H}u$ est holomorphe sur Ω . On a par ailleurs

$$|H(w, z)| = (2\pi|z-w|)^{-1} \leq (2\pi d(w, \partial\Omega))^{-1}.$$

Si K est une partie compacte de Ω , on obtient

$$\sup_{w \in K} |\mathbb{H}u(w)| \leq (2\pi d(K, \partial\Omega))^{-1} \|u\|_1,$$

donc $\mathbb{H} : L^1(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu. Le résultat est vrai aussi pour $L^p(\partial\Omega)$ puisque l'inclusion $L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$ est continue. \square

Formule 1.3. Si $u \in C^1(\partial\Omega)$, on définit la dérivée de u le long de $\partial\Omega$ par

$$u'(\gamma(s)) = \frac{1}{\gamma'(s)} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))].$$

Alors $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$ sur Ω .

En effet, comme $dz/ds = \gamma'(s) = \tau(z)$ le long de $\partial\Omega$, le calcul ci-dessus suivi d'une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} (\mathbb{H}u)'(w) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{ds(z)} \left[\frac{-1}{z-w} \right] u(\gamma(s)) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{z-w} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))] ds = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u'(z) ds = \mathbb{H}(u')(w). \end{aligned}$$

Exemple 1.4. $\Omega =$ disque unité $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$.

La paramétrisation de $\partial\mathbb{D}$ par l'abscisse curviligne s'écrit

$$z = \gamma(s) = e^{is}, \quad s \in [0, 2\pi].$$

On a $\gamma'(s) = ie^{is} = iz$, donc le noyau de Cauchy de \mathbb{D} est donné par

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - w} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - we^{-is}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\bar{z}}.$$

Puisque $|w| < 1$, $H^{\mathbb{D}}(w, z)$ est développable en série entière normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$:

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n e^{-ins}.$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}(n) w^n \quad \text{où} \quad \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{is}) e^{-ins} ds, \quad n \in \mathbb{Z}$$

est le n -ième coefficient de Fourier de u . Si $u \in L^2(\partial\mathbb{D})$, la fonction u s'écrit elle-même comme somme d'une série de Fourier L^2 -convergente

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{ins}$$

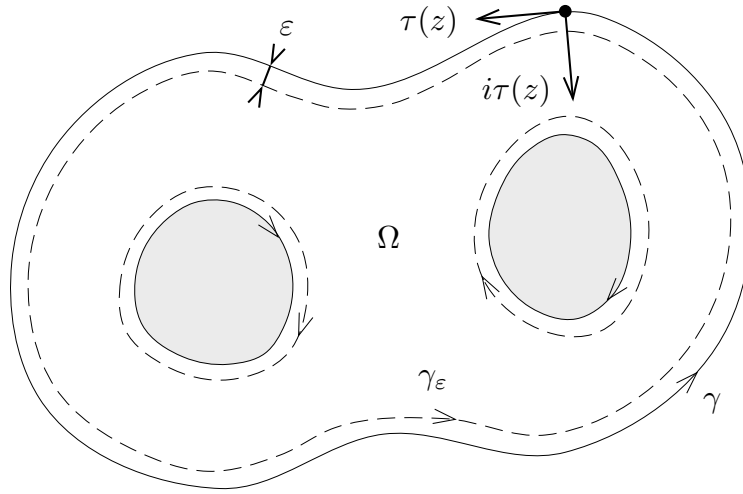
et d'après la formule de Parseval, la transformation de Fourier est une isométrie d'espaces de Hilbert:

$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ u &\longmapsto \sqrt{2\pi}(\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad \square$$

Revenons au cas général. On considère pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit la courbe de classe C^{k-1}

$$\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon i\gamma'(s) = z + \varepsilon i\tau(z), \quad z = \gamma(s) \in \partial\Omega,$$

où $i\gamma'(s)$ est le vecteur normal rentrant à $\partial\Omega$.



Notre objectif est d'étudier le comportement de $\mathbb{H}u$ sur la courbe γ_ε lorsque ε tend vers 0. Pour cela, on définit un opérateur \mathbb{H}_ε sur $L^2(\partial\Omega)$ à valeurs dans $C^{k-1}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ par

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \mathbb{H}u(w + \varepsilon i\tau(w)) \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{H}_\varepsilon u(\gamma(s)) = \mathbb{H}u(\gamma_\varepsilon(s)).$$

L'opérateur \mathbb{H}_ε est associé au noyau

$$H_\varepsilon(w, z) = H(w + \varepsilon i\tau(w), z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i\tau(w)}.$$

Théorème 1.5. (a) Si $u \in L^2(\partial\Omega)$, alors $\mathbb{H}_\varepsilon u$ converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers une limite notée $\mathbb{H}_0 u$, où \mathbb{H}_0 est un opérateur continu sur $L^2(\partial\Omega)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε, u telle que

$$\|\mathbb{H}_\varepsilon u\|_2 \leq C \|u\|_2.$$

(b) Si $u \in C^q(\partial\Omega)$, $1 \leq q \leq k$, alors $\mathbb{H}u$ se prolonge en une fonction de classe C^{q-1} sur $\bar{\Omega}$.

Démonstration. On montre d'abord le théorème lorsque $\Omega = \mathbb{D}$.

(a) On a par définition $\gamma_\varepsilon(s) = (1 - \varepsilon)e^{is}$, d'où

$$\mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} u(e^{is}) = \mathbb{H}^{\mathbb{D}} u((1 - \varepsilon)e^{is}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon)^n \hat{u}(n) e^{ins}.$$

Si $\mathbb{H}_0^{\mathbb{D}}$ est l'opérateur obtenu en faisant $\varepsilon = 0$ dans la formule ci-dessus, l'égalité de Parseval montre que $\|\mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} u\|_2 \leq \|u\|_2$ pour tout ε et

$$\|\mathbb{H}_0^{\mathbb{D}} u - \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} u\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} [1 - (1 - \varepsilon)^n]^2 |\hat{u}(n)|^2$$

converge vers 0 quand ε tend vers 0.

(b) La formule $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$ montre qu'il suffit de considérer le cas $q = 1$. Alors, comme u' est continue, la suite des coefficients de Fourier $in \hat{u}(n)$ de u' est dans $l^2(\mathbb{Z})$. Par suite $(\hat{u}(n)) \in l^1(\mathbb{Z})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz; il en résulte que la série $\sum \hat{u}(n) w^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}$, d'où $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$.

On se place maintenant dans le cas d'un ouvert quelconque Ω . Si le bord $\partial\Omega$ est une réunion de courbes γ_j , alors

$$\mathbb{H}u(w) = \sum_j \int_{\gamma_j} H(w, z) u(z) ds$$

et le terme d'indice j est holomorphe (donc C^∞) sur $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_j\}$. On peut donc supposer que $\partial\Omega$ est composé d'une seule courbe fermée, et après homothétie on se ramène au cas où $\partial\Omega$ est de longueur 2π . On a alors

$$\mathbb{H}u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

(a) Posons $w = \gamma(t) \in \partial\Omega$. Il vient

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t)} ds.$$

Comme γ est de classe C^k , $k \geq 2$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\gamma(s) - \gamma(t) = (s - t)\gamma'(t) + (s - t)^2\varphi_1(t, s)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont des fonctions dans $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t) &= [s - t - \varepsilon i + (s - t)^2\varphi_2(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{i(s-t)} - 1 + \varepsilon + (s - t)^2\varphi_3(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)]e^{-it}\gamma'(t), \\ \mathbb{H}_\varepsilon u(w) &= \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)e^{it}}{(e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it})\gamma'(t)} \left[1 - \frac{(s - t)^2\varphi_4(t, s)}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)} \right] \frac{ds}{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme $e^{i(t-s)}\gamma'(s)/\gamma'(t) = 1 + (s - t)\varphi_5(t, s)$, on peut écrire

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} u(\gamma(s))}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} ds + \int_{\partial\Omega} R_\varepsilon(t, s) u(\gamma(s)) ds$$

où $R_\varepsilon(t, s)$ est de la forme

$$R_\varepsilon(t, s) = \frac{s - t}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} \left[\varphi_5(t, s) + \frac{s - t}{\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)} \varphi_6(t, s) \right].$$

Nous pouvons interpréter cette décomposition sous la forme

$$(\mathbb{H}_\varepsilon u) \circ \gamma = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma) + \mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma),$$

où $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}$ est la transformation de Hilbert sur le disque. Il est facile de vérifier qu'on a des minoration

$$|e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}| \geq C_1(|s - t| + \varepsilon), \quad |\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)| \geq C_2(|s - t| + \varepsilon).$$

Par suite on a une majoration uniforme $|R_\varepsilon(t, s)| \leq C_3$ lorsque ε tend vers 0 et l'opérateur \mathbb{R}_ε est de norme uniformément bornée. Le théorème de convergence dominée montre que l'opérateur \mathbb{R}_ε converge en norme vers l'opérateur \mathbb{R}_0 associé au noyau R_0 . Comme l'application $u \mapsto u \circ \gamma$ est une isométrie de $L^2(\partial\Omega)$ sur $L^2([0, 2\pi]) \simeq L^2(\partial\mathbb{D})$, il en résulte, modulo cette isométrie, que \mathbb{H}_ε converge vers $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}_0^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_0$. On notera que $R_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$.

(b) On peut encore supposer $q = 1$ ici. Si $u \in C^1(\partial\Omega)$, on sait d'après la première partie que $(\varepsilon, s) \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma)(s)$ s'étend continument à $[0, \varepsilon_0] \times [0, 2\pi]$. Il en est de même pour $\mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma)(s)$ d'après le théorème de convergence dominée, d'où $\mathbb{H}u \in C^0(\overline{\Omega})$. \square

2. Espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$

A toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on associe les fonctions f_ε sur $\partial\Omega$ définies par

$$f_\varepsilon(\gamma(s)) = f(\gamma_\varepsilon(s)).$$

Théorème 2.1. *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes:*

- (a) f_ε converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers une fonction f_0 .
- (b) La norme $\|f_\varepsilon\|_2$ reste bornée quand ε tend vers 0.
- (c) Il existe une suite $\varepsilon_p > 0$ tendant vers 0 telle que la suite $\|f_{\varepsilon_p}\|_2$ soit bornée.
- (d) f est la transformée de Hilbert $\mathbb{H}u$ d'une fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$.

On a alors $f = \mathbb{H}f_0$.

Démonstration. Il est évident que (a) \implies (b) \implies (c) et l'implication (d) \implies (a) résulte du théorème 1.5, avec $f_0 = \mathbb{H}_0 u$.

Pour démontrer l'implication restante (c) \implies (d), nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soit E un espace de Hilbert séparable et (x_n) une suite bornée de E . Alors il existe une sous-suite $(x_{n(p)})$ qui converge faiblement vers un élément $\xi \in E$, c'est-à-dire telle que*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle x_{n(p)}, y \rangle = \langle \xi, y \rangle, \quad \forall y \in E.$$

En outre, si (y_p) converge en norme vers y , alors $\langle x_{n(p)}, y_p \rangle$ converge vers $\langle \xi, y \rangle$.

Démonstration. Soit $(e_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E , $x_n = \sum x_{n,l} e_l$ et M un majorant de $\|x_n\|$. Chaque suite $(x_{n,l})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{C} ; il existe donc une partie $I_0 \subset \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(x_{n,0})_{n \in I_0}$ ait une limite ξ_0 , puis une partie $I_1 \subset I_0$ telle que $(x_{n,1})_{n \in I_1}$ converge vers une limite ξ_1 et ainsi de suite. Soit $n(p)$

le p -ième élément de I_p . La sous-suite diagonale $x_{n(p)}$ a la propriété que chaque coordonnée $x_{n(p),l}$ tend vers une limite ξ_l , et on voit facilement que $\sum |\xi_l|^2 \leq M^2$, de sorte que le vecteur $\xi = \sum \xi_l e_l$ est bien défini. Comme

$$\left| \sum_{l \geq L} x_{n(p),l} \bar{y}_l \right| \leq M \left(\sum_{l \geq L} |y_l|^2 \right)^{1/2}$$

où le second membre converge vers 0 quand L tend vers $+\infty$, il est élémentaire de vérifier que $\langle x_{n(p)}, y \rangle$ converge vers $\langle \xi, y \rangle$ pour tout $y \in E$. La dernière affirmation résulte de ce que

$$|\langle x_{n(p)}, y - y_p \rangle| \leq M \|y - y_p\|. \quad \square$$

Démonstration de (c) \implies (d). Quitte à extraire une sous-suite de (f_{ε_p}) , on peut supposer que (f_{ε_p}) converge faiblement vers un élément $u \in L^2(\partial\Omega)$. Pour $w \in \Omega$ fixé, la formule de Cauchy appliquée au chemin γ_ε donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} f_\varepsilon(\gamma(s)) \frac{\gamma'_\varepsilon(s)}{\gamma_\varepsilon(s) - w} ds$$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_p$, ceci peut s'interpréter comme un produit scalaire $\langle f_{\varepsilon_p}, g_p \rangle$ où (f_{ε_p}) converge faiblement vers u et où (g_p) converge uniformément (donc en norme L^2) vers $s \mapsto \overline{H}(w, \gamma(s))$. A la limite, on obtient par conséquent

$$f(w) = \langle u, \overline{H}(w, \bullet) \rangle = \mathbb{H}u(w),$$

soit $f = \mathbb{H}u$. En outre, si (a) est vérifié, on peut prendre $u = f_0$ dans (c), donc $f = \mathbb{H}f_0$. □

Définition 2.3. *L'ensemble des applications $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifiant l'une des propriétés équivalentes 2.1 (a), (b), (c), (d), muni de la norme $\|f\|_2 = \|f_0\|_2$, est noté $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.*

L'application $f \mapsto f_0$ définit donc une isométrie de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ sur un sous-espace $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ de l'espace de Hilbert $L^2(\partial\Omega)$. La formule $f = \mathbb{H}f_0$ implique $f_0 = \mathbb{H}_0 f_0$ pour tout $f_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$, et comme $\mathbb{H}_0 u = (\mathbb{H}u)_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$ on voit que l'opérateur

$$\mathbb{H}_0 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$$

est un projecteur continu. Il en résulte que $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega) = \text{Ker}(1 - \mathbb{H}_0)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\partial\Omega)$. Pour simplifier les notations, on conviendra dans la suite d'identifier $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ et son image $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$, une fonction $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ et sa limite au bord f_0 , l'opérateur \mathbb{H} et sa limite au bord \mathbb{H}_0 .

Exemple 2.4. Si $\Omega = \mathbb{D}$, les calculs faits en 1.4 donnent pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$:

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{ins}, \quad \mathbb{H}u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) e^{ins}.$$

La transformation de Fourier donne donc un isomorphisme $L^2(\partial\mathbb{D}) \simeq l^2(\mathbb{Z})$ par lequel $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ s'identifie au sous-espace $l^2(\mathbb{N})$ des fonctions dont les coefficients de Fourier $\widehat{u}(n)$, $n < 0$, sont nuls. Dans ce cas, \mathbb{H} est la projection orthogonale $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$. \square

Dans le cas général, une condition nécessaire pour qu'une fonction u de $L^2(\partial\Omega)$ soit dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ est que $\int_{\partial\Omega} u(z)f(z)dz = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, en particulier pour $f(z) = z^n$, $n \geq 0$. Ceci résulte du théorème de Cauchy appliqué sur γ_ε lorsque ε tend vers 0, compte tenu du fait que $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ et $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ dans L^2 . Comme nous le verrons plus loin, le projecteur \mathbb{H} n'est orthogonal que si Ω est un disque.

Théorème 2.5. *L'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ est dense dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a la représentation de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\gamma(s) - w} \gamma'(s) ds.$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) = \gamma(s) - \varepsilon i\gamma'(s)$ la courbe des points de $\mathbb{C}\Omega$ situés à la distance ε de $\partial\Omega$. Il est clair que

$$\tilde{f}_\varepsilon(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) - w} \gamma'(s) ds$$

est holomorphe sur l'ouvert des points situés à une distance $< \varepsilon$ de $\overline{\Omega}$. Des calculs analogues à ceux faits dans la démonstration du théorème 1.5 montrent que \tilde{f}_ε converge vers f dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$: on vérifie d'abord le résultat pour $\Omega = \mathbb{D}$; on voit ensuite que $(\tilde{f}_\varepsilon)|_{\partial\Omega}$ converge dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ par un développement de Taylor du noyau, et la limite est f dans $\mathcal{O}(\Omega)$. \square

3. Adjoint de l'opérateur \mathbb{H}

Si I est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} et si \mathbb{K} est l'opérateur sur $L^2(I)$ associé à un noyau $K \in L^2(I \times I)$, il est facile de voir que l'opérateur adjoint \mathbb{K}^* est défini par le noyau

$$K^*(t, s) = \overline{K}(s, t).$$

Cette formule ne peut toutefois être appliquée directement à \mathbb{H} , car le noyau H ne se prolonge pas en un élément de $L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ ni même de $L^1(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Pour contourner cette difficulté, on cherche à évaluer l'opérateur différence $\mathbb{H}^* - \mathbb{H}$, qui, comme on le verra plus loin, a le mérite d'être associé à un vrai noyau. On considère les opérateurs approchés $\mathbb{H}_\varepsilon, \mathbb{H}_\varepsilon^*$ définis par les noyaux continus

$$H_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i\tau(w)},$$

$$H_\varepsilon^*(w, z) = \overline{H}_\varepsilon(z, w) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{\tau}(w)}{\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i\overline{\tau}(z)},$$

et l'opérateur différence $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^* - \mathbb{H}_\varepsilon$ associé au noyau

$$A_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{(z-w)\bar{\tau}(w) - (\bar{z}-\bar{w})\tau(z)}{(z-w-\varepsilon i\tau(w))(\bar{z}-\bar{w}-\varepsilon i\bar{\tau}(z))}.$$

Pour $z = \gamma(s)$, $w = \gamma(t)$ assez voisins, on voit comme dans 1.5 qu'il existe des fonctions $\varphi_j \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ telles que

$$\begin{aligned} z-w &= (s-t)\gamma'(t) + (s-t)^2\varphi_1(t, s), \\ |z-w|^2 &= (s-t)^2[1 + (s-t)\varphi_2(t, s)]. \end{aligned}$$

En substituant $\gamma'(t) = \tau(w)$ et $(s-t)^2$ en fonction de $|z-w|^2$ dans la première ligne, il vient

$$z-w = (s-t)\tau(w) + |z-w|^2\varphi_3(w, z).$$

En échangeant les rôles de z et w , on obtient

$$\begin{aligned} z-w &= (s-t)\tau(z) - |z-w|^2\varphi_3(z, w), \quad \text{d'où} \\ A_\varepsilon(w, z) &= \frac{|z-w|^2 A(w, z)}{(z-w-\varepsilon i\tau(w))(\bar{z}-\bar{w}-\varepsilon i\bar{\tau}(z))} \quad \text{avec} \\ A(w, z) &= \frac{1}{2i\pi} (\varphi_3(w, z)\bar{\tau}(w) + \bar{\varphi}_3(z, w)\tau(z)). \end{aligned}$$

On obtient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(w, z) = A(w, z)$ pour $w \neq z$, avec $A(w, z) \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, et de plus on a une majoration uniforme $|A_\varepsilon(w, z)| \leq C|A(w, z)|$. Ceci entraîne que \mathbb{A}_ε converge en norme vers l'opérateur \mathbb{A} de noyau A . Pour tout $u, v \in L^2(\partial\Omega)$ on obtient donc

$$\langle \mathbb{H}u, v \rangle = \lim \langle \mathbb{H}_\varepsilon u, v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon^* v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon v + \mathbb{A}_\varepsilon v \rangle = \langle u, (\mathbb{H} + \mathbb{A})v \rangle$$

ce qui prouve bien que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} + \mathbb{A}$. On a d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi_3(w, w) &= \varphi_1(t, t) = \frac{1}{2}\gamma''(t), \quad \text{d'où} \\ A(w, w) &= \frac{1}{4i\pi} (\gamma''(t)\bar{\gamma}'(t) + \bar{\gamma}''(t)\gamma'(t)) = \frac{1}{4i\pi} \frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 0 \end{aligned}$$

car $|\gamma'(t)| = 1$. On peut donc énoncer:

Théorème 3.1. *L'opérateur $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$ est associé à un noyau $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ défini par*

$$A(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\bar{\tau}(w)}{\bar{z}-\bar{w}} - \frac{\tau(z)}{z-w} \right), \quad w, z \in \partial\Omega.$$

Ce noyau A est antisymétrique, c'est-à-dire que $\bar{A}(z, w) = -A(w, z)$, et de plus $A(w, w) \equiv 0$.

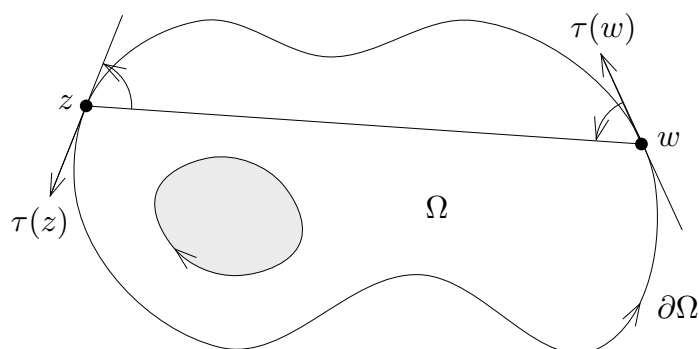
Pour que le projecteur \mathbb{H} soit orthogonal, il faut et il suffit que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$, ce qui équivaut à dire que $A \equiv 0$.

Corollaire 3.2. *Le projecteur \mathbb{H} est orthogonal si et seulement si Ω est un disque.*

Démonstration. Si $A \equiv 0$, on a nécessairement

$$\text{angle}([z, w], \tau(z)) = -\text{angle}([z, w], \tau(w)) \quad \forall w, z \in \partial\Omega,$$

car les membres de gauche et de droite représentent les arguments respectifs des termes $\tau(z)/(z - w)$ et $\bar{\tau}(w)/(\bar{z} - \bar{w})$ intervenant dans $A(w, z)$.



En déplaçant la corde $[z, w]$ parallèlement à une direction fixée, on en déduit que $\partial\Omega$ doit être invariant par symétrie autour de la médiatrice de chacune de ses cordes. Considérons deux cordes faisant entre elles un angle irrationnel, et le point d'intersection P de leurs médiatrices. Les deux symétries correspondantes engendrent un groupe dense de rotations de centre P . Comme $\partial\Omega$ est fermé, $\partial\Omega$ est nécessairement une réunion de cercles de centre P , à savoir un cercle si Ω est un disque, ou deux cercles si Ω est une couronne. Mais une couronne n'est invariante que par les symétries autour des médiatrices des cordes dont les extrémités sont sur un même cercle. Par conséquent Ω est un disque. \square

4. Noyau de Szegö

Le *projecteur de Szegö* est par définition le projecteur orthogonal \mathbb{S} de $L^2(\partial\Omega)$ sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. On cherche ici à montrer que \mathbb{S} est, en un certain sens, associé à un noyau S . Rappelons que \mathbb{H} est orthogonal dans le cas du disque, par suite $\mathbb{S}^{\mathbb{D}} = \mathbb{H}^{\mathbb{D}}$.

Soit $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. L'image d'une fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$ par le projecteur \mathbb{S} est alors donnée par la série L^2 -convergente

$$\mathbb{S}u(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u, \psi_j \rangle \psi_j(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \int_{\partial\Omega} u(z) \bar{\psi}_{j,0}(z) ds,$$

où $\psi_{j,0}$ désigne la limite au bord de ψ_j . Ceci suggère d'introduire le noyau

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \bar{\psi}_j(z), \quad w, z \in \Omega,$$

qui sera appelé *noyau de Szegö* de Ω .

Lemme 4.1. *La série $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2$ converge uniformément sur tout compact de Ω . Le noyau $S(w, z)$ est de classe C^∞ sur $\Omega \times \Omega$, holomorphe en w et antiholomorphe en z . De plus, on a la majoration*

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z - w|^2} ds.$$

Démonstration. Comme $\psi_j \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a

$$\psi_j(w) = \mathbb{H}\psi_j(w) = \langle \psi_j, \overline{H}(w, \bullet) \rangle = \langle \psi_j, \mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet) \rangle.$$

Par conséquent, $(\psi_j(w))$ est la suite des coordonnées de la fonction $\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)$ dans la base (ψ_j) , ce qui donne

$$\sum_j |\psi_j(w)|^2 = \|\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)\|^2 \leq \|H(w, \bullet)\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z - w|^2} ds.$$

L'application $w \mapsto \overline{H}(w, \bullet)$ étant continue de Ω dans $L^2(\partial\Omega)$, on voit que la fonction $w \mapsto \|\mathbb{S}H(w, \bullet)\|^2$ est continue sur Ω . Le lemme de Dini entraîne alors la convergence uniforme sur tout compact de la série de fonctions continues $\sum |\psi_j(w)|^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour N tendant vers $+\infty$,

$$\left(\sum_{j \geq N} |\psi_j(w) \overline{\psi_j}(z)| \right)^2 \leq \sum_{j \geq N} |\psi_j(w)|^2 \sum_{j \geq N} |\psi_j(z)|^2$$

converge uniformément vers 0 lorsque (w, z) décrit un compact quelconque de $\Omega \times \Omega$. Comme $\sum \psi_j(w) \overline{\psi_j}(z)$ est une série de fonctions holomorphes en (w, \bar{z}) , on en déduit que S est holomorphe en (w, \bar{z}) , en particulier de classe C^∞ sur $\Omega \times \Omega$.

□

Lemme 4.2. *Pour $w \in \Omega$ fixé et pour ε tendant vers 0, la fonction*

$$S_\varepsilon(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,\varepsilon}}$$

converge vers $S_0(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,0}}$ dans $L^2(\partial\Omega)$. De plus

$$\mathbb{S}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, z) u(z) ds, \quad \forall u \in L^2(\partial\Omega).$$

Démonstration. Comme $\mathbb{H} : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu, \mathbb{H} envoie une série L^2 -convergente sur une série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_{j,0}\right) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \mathbb{H}\psi_{j,0} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_j = \overline{S(w, \bullet)}, \\ \mathbb{H}_\varepsilon\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_{j,0}\right) &= \overline{S_\varepsilon(w, \bullet)}. \end{aligned}$$

Le théorème 1.5 entraîne que le membre de gauche converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers $\mathbb{H}_0(\sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\psi}_j(w)\psi_{j,0}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\psi}_j(w)\psi_{j,0}$ (cet élément est dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$). La formule intégrale résulte immédiatement des considérations du début du §4. \square

L'espace $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ du disque admet la base hilbertienne $(w^n/\sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui donne l'expression

$$S^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} w^n \bar{z}^n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\bar{z}}, \quad \forall (w, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

On voit que $S_0^{\mathbb{D}}(w, z)$ coïncide bien avec $H^{\mathbb{D}}(w, z)$ pour $(w, z) \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$.

5. Formule intégrale reliant S et H

L'idée centrale introduite par N. Kerzman est que l'on peut retrouver le projecteur orthogonal S à partir du projecteur oblique \mathbb{H} (qui est connu explicitement). Comme S et \mathbb{H} coïncident avec l'application identique sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a en effet

$$S\mathbb{H} = \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}S = S.$$

Prenons les adjoints dans la seconde égalité. Comme $S^* = S$, on trouve $S\mathbb{H}^* = S$. Soustrayons maintenant la première égalité et introduisons l'opérateur $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$. Il vient

$$S\mathbb{A} = S\mathbb{H}^* - S\mathbb{H} = S - \mathbb{H},$$

soit encore $S(1 - \mathbb{A}) = \mathbb{H}$.

Lemme 5.1. *L'opérateur $1 - \mathbb{A}$ est un isomorphisme de $L^2(\partial\Omega)$ et on a $\|(1 - \mathbb{A})^{-1}\| \leq 1$.*

Démonstration. Comme \mathbb{A} est antisymétrique, le produit scalaire $\langle \mathbb{A}u, u \rangle$ est purement imaginaire pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$, ce qui implique

$$\|u\|_2^2 \leq |\langle (1 - \mathbb{A})u, u \rangle| \leq \|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \|u\|_2$$

et en particulier $\|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \geq \|u\|_2$. L'opérateur $1 - \mathbb{A}$ est donc injectif et d'image fermée. L'orthogonal de $\text{Im}(1 - \mathbb{A})$ est égal au noyau de l'adjoint $(1 - \mathbb{A})^* = 1 + \mathbb{A}$, et cet opérateur est injectif pour les mêmes raisons que précédemment. Par suite $\text{Im}(1 - \mathbb{A}) = L^2(\partial\Omega)$ et $1 - \mathbb{A}$ est donc un isomorphisme topologique de $L^2(\partial\Omega)$. Comme $1 - \mathbb{A}$ accroît la norme de tout vecteur, on voit que $(1 - \mathbb{A})^{-1}$ est contractant. \square

Le lemme montre qu'on peut calculer S à partir de \mathbb{H} par la formule

$$S = \mathbb{H}(1 - \mathbb{A})^{-1}.$$

C'est cette idée qu'on va exploiter dans la suite pour évaluer le noyau de Szegő S , en établissant une formule intégrale reliant S et H .

Pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$ et $w \in \Omega$, on a en effet

$$\mathbb{S}\mathbb{A}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) \mathbb{A}u(\xi) ds(\xi) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) ds(\xi) \int_{\partial\Omega} A(\xi, z) u(z) ds(z).$$

Le théorème de Fubini montre que $\mathbb{S}\mathbb{A}$ est associé au noyau

$$\Omega \times \partial\Omega \ni (w, z) \longmapsto \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

L'égalité $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$ fournit alors l'égalité de noyaux:

Formule 5.2. *Pour tous $(w, z) \in \Omega \times \partial\Omega$ on a*

$$S_0(w, z) = H(w, z) + \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

6. Régularité au bord du noyau de Szegö

Nous nous proposons ici de montrer que S s'étend en une fonction de classe C^{k-2} sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ en dehors de la diagonale $\Delta_{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega \times \partial\Omega$. On utilise pour cela la relation $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$ démontrée au §5, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \mathbb{H} + (\mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A})\mathbb{A} = \mathbb{H}(\mathbb{H} + \mathbb{A}) + \mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{S}\mathbb{A}^2, \\ \mathbb{S}\mathbb{A} &= \mathbb{S} - \mathbb{H} = (\mathbb{S} - \mathbb{H}^*)^* = (\mathbb{S} - \mathbb{H} - \mathbb{A})^* = (\mathbb{S}\mathbb{A} - \mathbb{A})^* = \mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{S}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité implique $\mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$, d'où

$$(6.1) \quad \mathbb{S} = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}.$$

Comme $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, il est clair que \mathbb{A}^2 possède un noyau de classe C^{k-2} sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$. L'opérateur $\mathbb{S}\mathbb{A}$ est associé au noyau $\mathbb{S}A(\bullet, z)$ et $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$ au noyau

$$\int_{\partial\Omega} A(w, \bullet) \mathbb{S}A(\bullet, z) ds = \langle A(w, \bullet), \overline{\mathbb{S}A(\bullet, z)} \rangle.$$

Les applications $w \mapsto A(w, \bullet)$ et $z \mapsto A(\bullet, z)$ sont dans $C^{k-2}(\partial\Omega, L^2(\partial\Omega))$. Il en est de même pour l'application $z \mapsto \mathbb{S}A(\bullet, z)$, puisque \mathbb{S} est un opérateur continu sur $L^2(\partial\Omega)$, donc $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$ a lui aussi un noyau dans $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Il reste à étudier le noyau de $\mathbb{H}\mathbb{H}^*$.

Lemme 6.2. *La fonction*

$$G(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} ds(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{(\xi - w)(\bar{\xi} - \bar{z})}, \quad (w, z) \in \Omega \times \Omega$$

se prolonge en une fonction $G \in C^{k-2}(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$, et l'opérateur défini par $G|_{\Omega \times \partial\Omega}$ est $\mathbb{G} = \mathbb{H}\mathbb{H}^$.*

Avant de démontrer le lemme 6.2, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire généralisant le théorème 1.5 (b).

Lemme 6.3. *Soit E une partie ouverte ou un domaine à bord de classe C^1 dans \mathbb{R}^n . Soit $u : \partial\Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.*

(a) *Si u est de classe C^q , $1 \leq q \leq k$, alors la transformée $\mathbb{H}u$ définie par*

$$\mathbb{H}u(w, x) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z, x) ds(z), \quad (w, x) \in \Omega \times E$$

se prolonge en une fonction de classe C^{q-1} sur $\overline{\Omega} \times E$.

(b) *Si u est de classe C^q , $0 \leq q \leq k$ et si $u(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ pour tout $x \in \Omega$, alors $\mathbb{H}u$ se prolonge en une fonction de classe C^q sur $\overline{\Omega} \times E$.*

Démonstration. (a) Grâce à la formule 1.3 suivie d'une dérivation sous le signe somme en x , on obtient

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \mathbb{H}u(w, x) = \mathbb{H}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(z, x)\right),$$

de sorte qu'il suffit de regarder le cas $q = 1$. La démonstration du théorème 1.5 montre que \mathbb{H} est continu de $C^1(\partial\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. On en déduit

$$\|\mathbb{H}u(\bullet, x) - \mathbb{H}u(\bullet, x_0)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C \|u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)\|_{C^1(\partial\Omega)}$$

et le second membre tend vers 0 quand x tend vers x_0 dans E . On sait d'autre part que $w \mapsto H(w, x)$ s'étend continument à $\overline{\Omega}$ pour tout $x \in E$ fixé. Ceci entraîne facilement la continuité de $\mathbb{H}u$ sur $\overline{\Omega} \times E$ grâce à l'inégalité triangulaire

$$|\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)| \leq |\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w, x_0)| + |\mathbb{H}u(w, x_0) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)|.$$

(b) On est facilement ramené au cas $q = 0$, à condition de vérifier que toutes les dérivées de u en (z, x) d'ordre inférieur ou égal à q sont encore dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Par récurrence, il suffit de vérifier ce résultat pour u'_x et u'_z . Pour u'_x , on observe simplement que

$$u'_x(\bullet, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)}{x - x_0} \quad \text{dans } \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

D'autre part, la fonction holomorphe $v = \mathbb{H}u(\bullet, x)$ est continue sur $\overline{\Omega}$ d'après (a), et vérifie par hypothèse $v|_{\partial\Omega} = u(\bullet, x)$. Comme $v' = \mathbb{H}u'_z$, le théorème 1.5 montre que $(v')_\varepsilon$ converge vers $\mathbb{H}_0 u'_z$ dans $L^2(\partial\Omega)$, et par suite dans $L^1(\partial\Omega)$. Pour tout arc $\widehat{ab} \subset \partial\Omega$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (\mathbb{H}_0 u'_z)(w, x) dw &= \lim \int_a^b (v')_\varepsilon(w) dw = \lim v(b + \varepsilon i\tau(b)) - v(a + \varepsilon i\tau(a)) \\ &= v(b) - v(a) = u(b, x) - u(a, x) \end{aligned}$$

donc $\mathbb{H}_0 u'_z = u'_z$ et $u'_z(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Comme dans (a), le cas $q = 0$ se réduit à voir que \mathbb{H} envoie $C^0(\partial\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$, continument par rapport aux normes uniformes. Si $\Omega = \mathbb{D}$, ceci résulte du fait que $\mathbb{H}u$ est, pour $u \in C^0(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$, la solution du problème de Dirichlet (cf. W. Rudin). Le cas général résulte de l'écriture $\mathbb{H}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_\varepsilon$ obtenue dans la démonstration du théorème 1.5. \square

Démonstration du lemme 6.2. Soit (θ_j) une partition de l'unité de classe C^k sur $\partial\Omega$, et $T_j = \text{Supp } \theta_j$. Ecrivons $G = \sum G_j$ avec

$$G_j(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} \theta_j(\xi) ds(\xi),$$

c'est-à-dire $G_j(\bullet, z) = \mathbb{H}(\overline{H}(\bullet, z)\theta_j)$. Comme $\overline{H(z, \xi)}\theta_j(\xi)$ est de classe C^{k-1} pour $(\xi, z) \in \partial\Omega \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$, le lemme 6.3 (a) montre que G_j est de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$, et donc aussi sur $(\overline{\Omega} \setminus T_j) \times \overline{\Omega}$ après conjugaison et échange des rôles de w, z . Par conséquent $G_j \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus T_j \times T_j)$, et $G = \sum G_j$ est de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ en dehors de $\bigcup_j T_j \times T_j$, qui est un voisinage arbitrairement petit de $\Delta_{\partial\Omega}$ si les diamètres des T_j sont choisis assez petits.

Pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$, on a d'autre part

$$\mathbb{H}\mathbb{H}^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{H}\mathbb{H}_\varepsilon^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{G}_\varepsilon u,$$

où \mathbb{G}_ε est l'opérateur associé au noyau

$$G_\varepsilon(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H_\varepsilon(z, \xi)} ds(\xi) = G(w, z + \varepsilon i\tau(z)).$$

Comme ce noyau converge vers $G_{|\Omega \times \partial\Omega}$ uniformément sur tout compact, on en déduit bien $\mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{G}$. \square

Théorème 6.4. *Le noyau de Szegö $S(w, z)$ se prolonge en une fonction dans $C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$, et plus précisément, en la somme du noyau G et d'une fonction de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Quand $z \in \Omega$ tend vers le bord $\partial\Omega$, on a*

$$S(z, z) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2} \sim \frac{1}{4\pi d(z, \partial\Omega)}.$$

Démonstration. Considérons le noyau $K(w, z) = S_0(w, z) - G_0(w, z)$ sur $\Omega \times \partial\Omega$, associé à l'opérateur

$$\mathbb{S} - \mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A} : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

On sait que cet opérateur est défini par un noyau $K_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, ce qui implique $K_0(\bullet, z) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ pour tout z et $K = \mathbb{H}K_0$. Le lemme 6.3 (b) donne alors $K \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \partial\Omega)$. Par échange de w, z on voit que $(S(\bullet, z) - G(\bullet, z))_0$ est

de classe C^{k-2} sur $\partial\Omega \times \overline{\Omega}$, et une nouvelle application du lemme 6.3 (b) donne $S - G \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. On en déduit en particulier

$$S(z, z) \sim G(z, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2}$$

quand z tend vers $\partial\Omega$. Soit $\delta = d(z, \partial\Omega)$ et $\gamma(t)$ le point de $\partial\Omega$ tel que $|z - \gamma(t)| = \delta$. Le point z est sur la normale à $\partial\Omega$ au point $\gamma(t)$, donc $z = \gamma(t) + \delta i\gamma'(t)$. Quand δ et $|s - t|$ tendent vers 0, on a

$$\gamma(s) - z = \gamma(s) - \gamma(t) - \delta i\gamma'(t) = \gamma'(t)(s - t - i\delta + O((s - t)^2)),$$

par suite $|\gamma(s) - z|^2 \sim (s - t)^2 + \delta^2$ et

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} &\sim \int_{|s-t| < \delta^{1/3}} \frac{ds}{(s-t)^2 + \delta^2} + \int_{|s-t| > \delta^{1/3}} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} \\ &= \frac{2}{\delta} \arctan(\delta^{-2/3}) + O(\delta^{-2/3}) \sim \frac{\pi}{\delta}. \end{aligned} \quad \square$$

7. Relation avec l'application conforme de Riemann

On suppose ici que Ω est un ouvert simplement connexe à frontière de classe C^k , $k \geq 2$. Pour tout point $a \in \Omega$ fixé, il existe alors une unique application conforme bijective

$$R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

telle que $R(a) = 0$ et $R'(a) > 0$.

Théorème 7.1. *L'application R s'étend en un difféomorphisme de classe C^{k-1} de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

La démonstration de ce théorème sera donnée plus loin. Nous admettons le résultat provisoirement. Le changement de variable $z = R(w)$ donne alors

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |u(z)|^2 |dz| = \int_{\partial\Omega} |u \circ R(w)|^2 |R'(w)| |dw|$$

pour toute fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$. On voit donc qu'on a une isométrie

$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\longmapsto u \circ R (R')^{1/2} \end{aligned}$$

où $(R')^{1/2}$ est la détermination de la racine carrée complexe telle que $R'(a)^{1/2} > 0$ (on notera que R' ne s'annule pas sur Ω). L'isométrie envoie $H(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$ sur $\mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et, par densité (théorème 2.5), elle envoie donc $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.

Si (ψ_j) est une base orthonormée de $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$, on en déduit que $(\psi_j \circ R(R')^{1/2})$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Par conséquent

$$S(w, z) = S^{\mathbb{D}}(R(w), R(z)) R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)}^{1/2},$$

$$S(w, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)}^{1/2}}{1 - R(w)\overline{R(z)}}.$$

En substituant $z = a$, $R(a) = 0$, on obtient en particulier

$$S(w, a) = \frac{1}{2\pi} R'(w)^{1/2} R'(a)^{1/2}, \quad S(a, a) = \frac{1}{2\pi} R'(a),$$

d'où on déduit aussitôt les

Formules 7.2. *L'application conforme R et sa dérivée sont données par*

- (a) $R'(w) = 2\pi \frac{S(w, a)^2}{S(a, a)}, \quad \forall w \in \overline{\Omega},$
- (b) $R(w) = -i\tau(w) \frac{S(w, a)^2}{|S(w, a)|^2}, \quad \forall w \in \partial\Omega.$

Démonstration. La relation (a) est immédiate à partir de ce qui précède. On a par ailleurs $|R(w)|^2 = 1$ sur $\partial\Omega$. En prenant la dérivée d/ds le long de $\partial\Omega$, on voit que $dR(w)/ds = R'(w)dw/ds = R'(w)\tau(w)$ doit être orthogonal à $R(w)$. Quand w tourne dans le sens positif sur $\partial\Omega$, il en est de même pour $R(w)$ sur $\partial\mathbb{D}$ (une application holomorphe préserve l'orientation), donc l'argument de $R'(w)\tau(w)$ est égal à celui de $iR(w)$. Ceci donne $iR(w) = R'(w)\tau(w)/|R'(w)|$ et (b) se déduit alors de (a). □

Il nous reste à démontrer la régularité jusqu'au bord de l'application conforme de Riemann. Pour cela, on va montrer d'abord la régularité analytique lorsque $\partial\Omega$ est réelle analytique, puis on passera au cas général par un argument d'approximation en norme C^k de $\partial\Omega$.

Lemme 7.3. *Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts simplement connexes bornés de \mathbb{C} ayant des frontières \mathbb{R} -analytiques et $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application biholomorphe. Alors F s'étend en une application biholomorphe d'un voisinage de $\overline{\Omega}_1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}_2$.*

Démonstration. Quitte à remplacer F par $F^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, il suffit de voir que F s'étend holomorphiquement à un voisinage de $\overline{\Omega}_1$. D'après Rudin (théorème 14.19), F se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}_1$ sur $\overline{\Omega}_2$. Soit $x_1 \in \partial\Omega_1$ un point quelconque et $x_2 = F(x_1) \in \partial\Omega_2$. Au voisinage de x_j , $\partial\Omega_j$ est donné par une courbe \mathbb{R} -analytique $s \mapsto \gamma_j(s)$ définie pour $s \in \mathbb{R}$ voisin de 0. Celle-ci se prolonge en une application holomorphe $\tilde{\gamma}_j$ de la variable $z = s + it$ au voisinage de 0 dans \mathbb{C} . Soit $\Pi^+ = \{z = s + it; t > 0\}$ le demi-plan supérieur. Il existe un disque $U_j \subset \mathbb{C}$ de centre 0 et un voisinage $V_j \subset \mathbb{C}$ de x_j tels que $\tilde{\gamma}_j$ définit un biholomorphisme de $\Pi^+ \cap U_j$ sur $\Omega_j \cap V_j$. Si on choisit en outre V_1 assez petit pour que $F(\Omega_1 \cap V_1) \subset V_2$, on en déduit une application holomorphe

$G = \tilde{\gamma}_2^{-1} \circ F \circ \tilde{\gamma}_1 : \Pi^+ \cap U_1 \rightarrow \Pi^+ \cap U_2$ qui se prolonge continument en une application de $\overline{\Pi^+} \cap U_1$ dans $\overline{\Pi^+} \cap U_2$ telle que $G(\mathbb{R} \cap U_1) \subset \mathbb{R} \cap U_2$. Le principe de réflexion de Schwarz (W. Rudin, théorème 11.17) montre que G se prolonge en une application holomorphe \tilde{G} de U_1 dans U_2 , d'où un prolongement local $\tilde{F} = \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{G} \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ de V_1 dans V_2 . \square

Démonstration du théorème 7.1. Si Ω est à frontière \mathbb{R} -analytique, le lemme 7.3 montre que R est en particulier un C^∞ -difféomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$, donc les formules 7.2 sont bien vraies. Si $\partial\Omega$ est seulement de classe C^k , on peut approximer la courbe frontière γ par une courbe \mathbb{R} -analytique obtenue par convolution:

$$\gamma_\delta(s) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \exp\left(\frac{-(s-t)^2}{\delta^2}\right) \frac{dt}{\delta\sqrt{2\pi}}.$$

On notera que γ_δ est une fonction ayant la même périodicité que γ et que $\|\gamma_\delta - \gamma\|_{C^k}$ converge vers 0 avec δ . Pour δ assez petit, cette courbe est la frontière d'un ouvert Ω_δ pour lequel on a un noyau de Szegö S_δ et une application de Riemann $R_\delta : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{D}$. D'après ce qui précède, R'_δ est lié à S_δ par la formule 7.2 (a). La démonstration que nous avons donnée de la régularité de S fournit en outre la continuité de l'application $\gamma \mapsto S$, lorsqu'on prend la norme C^k sur l'espace des courbes γ et la norme C^{k-2} pour S (sur un compact de $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ ne rencontrant pas $\Delta_{\partial\Omega}$). Il en résulte que R_δ converge uniformément vers une application holomorphe R_0 qui vérifie encore 7.2 (a). En particulier $R'_0 \in C^{k-2}(\overline{\Omega})$, donc $R_0 \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$. De plus R_0 envoie $\partial\Omega$ sur $\partial\mathbb{D}$. Comme une limite d'applications holomorphes injectives est ou bien injective ou bien constante (conséquence du théorème de Rouché), et comme $R_0(a) = 0$, $R'_0(a) = 2\pi S(a, a) > 0$, on en déduit que R_0 coïncide avec l'application conforme $R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ cherchée. Il reste à démontrer que la dérivée R' ne peut s'annuler en aucun point $z_0 \in \partial\Omega$. Un calcul facile montre que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'image conforme de Ω par l'application $z \mapsto 1/(z - z_0 + \varepsilon i\tau(z_0))$ est strictement convexe au voisinage du point image de z_0 . On peut donc supposer que Ω est convexe au voisinage de z_0 . Dans ce cas, on peut modifier la courbe $\partial\Omega$ en dehors d'un petit voisinage de z_0 de sorte qu'elle soit la frontière $\partial\tilde{\Omega}$ d'un ouvert arbitrairement proche d'un disque en norme C^2 . Alors l'application conforme $\tilde{R} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$ est voisine de l'application identique en norme C^1 , donc \tilde{R} est un C^1 -difféomorphisme jusqu'au bord. Comme $R \circ \tilde{R}^{-1}$ envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial\mathbb{D}$ au voisinage de $\tilde{R}(z_0)$, la démonstration du lemme 7.3 montre que $R \circ \tilde{R}^{-1}$ s'étend en une application biholomorphe au voisinage de $\tilde{R}(z_0)$, par suite $R'(z_0) \neq 0$. \square

Remarque 7.4. Lorsque $\partial\Omega$ est de classe C^1 , il n'est pas vrai en général que R s'étend en une application de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, et même si c'est le cas, il se peut que la dérivée R' s'annule au bord. Un exemple de cette situation est donné par l'ouvert Ω obtenu en prenant l'image conforme d'un petit disque $\Delta = \{|z - \varepsilon| < \varepsilon\}$ par l'application $Q(z) = z/\log(1/z)$ (resp. $Q(z) = z \log(1/z)$). La frontière de $\partial\Omega$ est de classe C^1 au voisinage de 0 parce que $\log(1/z)$ a un argument qui tend vers 0 quand z tend vers 0 le long de $\partial\Delta$. L'application conforme est donnée par

$R = Q^{-1}/\varepsilon - 1$ et on a donc $R'(0) = 1/(\varepsilon Q'(0)) = \infty$ (resp $R'(0) = 0$). De même, pour $k \geq 2$, on peut vérifier que l'image de Δ par $Q(z) = z + z^k \log \log(1/z)$ a une frontière de classe C^k , mais Q et R ne sont pas de classe C^k au voisinage de 0.

8. Calcul numérique de l'application conforme

La formule intégrale 5.2 donne

$$S(a, w) = H(a, w) + \int_{\partial\Omega} S(a, z) A(z, w) ds, \quad w \in \partial\Omega.$$

Comme $\overline{A(z, w)} = -A(w, z)$, on trouve après conjugaison:

$$(8.1) \quad S(w, a) + \int_{\partial\Omega} A(w, z) S(z, a) ds = \overline{H(a, w)}, \quad w \in \partial\Omega,$$

ce qui permet d'obtenir $S(w, a)$ en fonction des noyaux H et A explicitement connus. Les formules 7.2 (a), (b) peuvent alors être utilisées pour calculer l'application de Riemann R à partir de S .

Les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ mises en jeu seront évaluées par la méthode des trapèzes relative à une subdivision $t_i = \alpha + ih$, $0 \leq i \leq n$, de pas constant $h = (\beta - \alpha)/n$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \simeq h \left(f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2} \right).$$

Si f est de classe C^{2l} , l'erreur d'approximation ε est donnée par la formule d'Euler-Mac Laurin

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^l \frac{b_{2m} h^{2m}}{(2m)!} (f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha)) - h^{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B_{2l}((t - \alpha)/h)}{(2l)!} f^{(2l)}(t) dt,$$

où b_{2m} et B_{2m} sont respectivement les nombres et les polynômes de Bernoulli. Ceci montre que l'erreur est en général de l'ordre de $O(h^2) = O(n^{-2})$. Néanmoins, pour une fonction f périodique de période $\beta - \alpha$ et de classe C^{2l} , l'erreur est majorée par $O(h^{2l})$; dans ce cas, on a en effet $f^{(m)}(\beta) = f^{(m)}(\alpha)$ pour tout m .

Comme les intégrales à évaluer sont des intégrales de fonctions périodiques, la convergence de la méthode des trapèzes est donc extrêmement rapide, tout au moins dans le cas de fonctions C^{∞} . Cette remarque montre que l'on n'a pas intérêt à calculer R par intégration à partir de 7.2 (a), mais plutôt à partir de 7.2 (b) et de la formule de Cauchy

$$R(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{R(z) dz}{z - w}.$$

Supposons donnée une paramétrisation quelconque $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto z(t)$ de la courbe $\partial\Omega$. En multipliant (8.1) par $|z'(t)|^{1/2}$ après avoir substitué $w = z(t)$, $z = z(u)$, on obtient la relation équivalente

$$(8.2) \quad \sigma(t) + \int_{\alpha}^{\beta} a(t, u) \sigma(u) du = g(t),$$

avec les notations

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= |z'(t)|^{1/2} S(z(t), a), \\ g(t) &= |z'(t)|^{1/2} \overline{H(a, z(t))}, \\ a(t, u) &= |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{1/2} A(z(t), z(u)).\end{aligned}$$

Cette écriture a l'avantage de préserver le caractère hermitien antisymétrique du noyau $a(t, u)$. Les fonctions $g(t)$ et $a(t, u)$ sont données par les formules explicites

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{z'(t)}}{a - z(t)} |z'(t)|^{-1/2}, \\ h(t, u) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{z'(u)}{z(u) - z(t)} |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{-1/2}, \\ a(t, u) &= \begin{cases} \overline{h(u, t)} - h(t, u) & \text{si } t \neq u \\ 0 & \text{si } t = u. \end{cases}\end{aligned}$$

L'utilisation de la méthode des trapèzes conduit à résoudre le système linéaire

$$\sigma(t_i) + h \sum_{0 \leq j < n} a(t_i, t_j) \sigma(t_j) = g(t_i), \quad 0 \leq i < n.$$

Ce système est de rang n , car la matrice antisymétrique $(a(t_i, t_j))$ a toutes ses valeurs propres imaginaires. La résolution du système fournit les valeurs $\sigma(t_j)$ cherchées, par exemple à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Dans cette situation, il existe en fait des schémas de résolution itératifs plus efficaces (voir M.R. Trummer). Une fois les valeurs $\sigma(t_j)$ connues, on obtient

$$R(z(t_j)) = -i \frac{z'(t_j)}{|z'(t_j)|} \frac{\sigma(t_j)^2}{|\sigma(t_j)|^2},$$

et une intégration approchée de la formule de Cauchy donne

$$(8.3) \quad R(w) \simeq \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z'(t_j)}{z(t_j) - w} R(z(t_j)).$$

Tous ces calculs sont immédiats dès lors que la fonction $z(t)$ et sa dérivée $z'(t)$ sont connues aux points $t = t_j$. L'application de Riemann inverse

$$Q = R^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega, \quad Q(0) = a,$$

peut être évaluée comme suit. La formule des résidus implique

$$\begin{aligned}Q'(w) &= \frac{1}{R'(R^{-1}(w))} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{R(z) - w}, \\ Q(w) &= a + \int_0^w Q'(v) dv = a - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \log(1 - w\overline{R(z)}) dz.\end{aligned}$$

L'approximation des trapèzes fournit alors

$$(8.4) \quad Q(w) \simeq a - \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \log(1 - w \overline{R(z(t_j))}) z'(t_j).$$

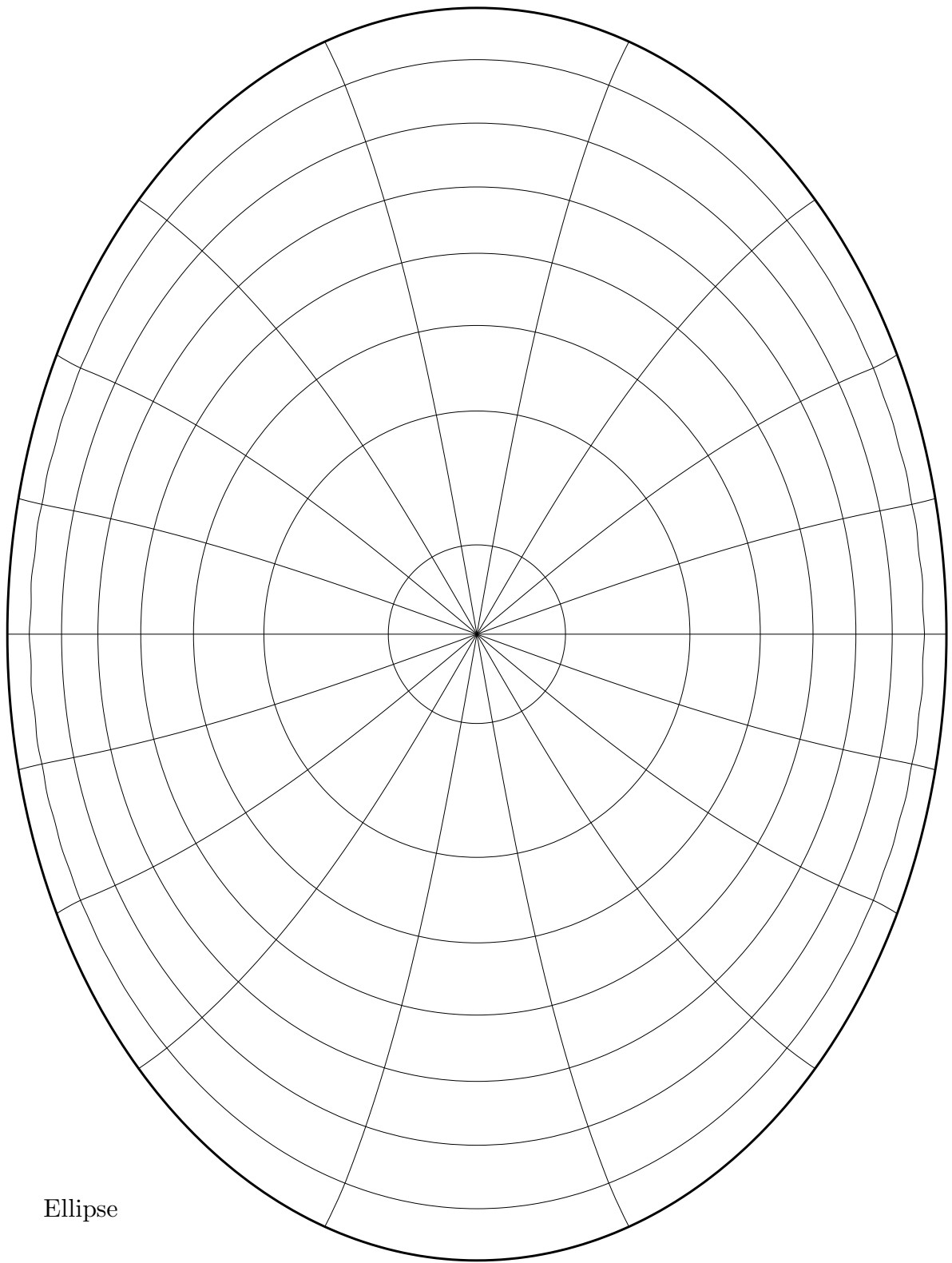
Dans la pratique, les formules (8.3) et (8.4) sont un peu instables lorsqu'on s'approche du bord, à cause des pôles de la fonction à intégrer. Un moyen de résoudre cette difficulté est de considérer que $R(z)$ est affine par morceaux sur le bord entre les points $z(t_j)$ et $z(t_{j+1})$. Pour la fonction Q , ceci donne par exemple

$$(8.4') \quad Q(w) \simeq a + \frac{1/w}{2\pi i} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z(t_{j+1}) - z(t_j)}{\overline{R(z(t_{j+1}))} - \overline{R(z(t_j))}} \left[\zeta \log \zeta - \zeta \right]_{\zeta=1-w\overline{R(z(t_j))}}^{\zeta=1-w\overline{R(z(t_{j+1}))}}.$$

L'approximation obtenue est alors tout à fait bonne, même au voisinage du bord.

Bibliographie

- [1] N. Kerzman and E.M. Stein : *The Cauchy kernel, the Szegö kernel and the Riemann mapping function*; Math. Ann. **236** (1978) 85-93.
- [2] N. Kerzman and M.R. Trummer : *Numerical conformal mapping via the Szegö kernel*; J. Comp. Appl. Math. **14** (1986) 111-123.
- [3] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*; Mc Graw-Hill, 1966, et Masson, Paris, 1975.
- [4] M.R. Trummer : *An efficient implementation of a conformal mapping method based on the Szegö kernel*; Siam J. Numer. Anal. **23** (1986) 853-872.



$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

Centre (0, 0)

Fig. 1

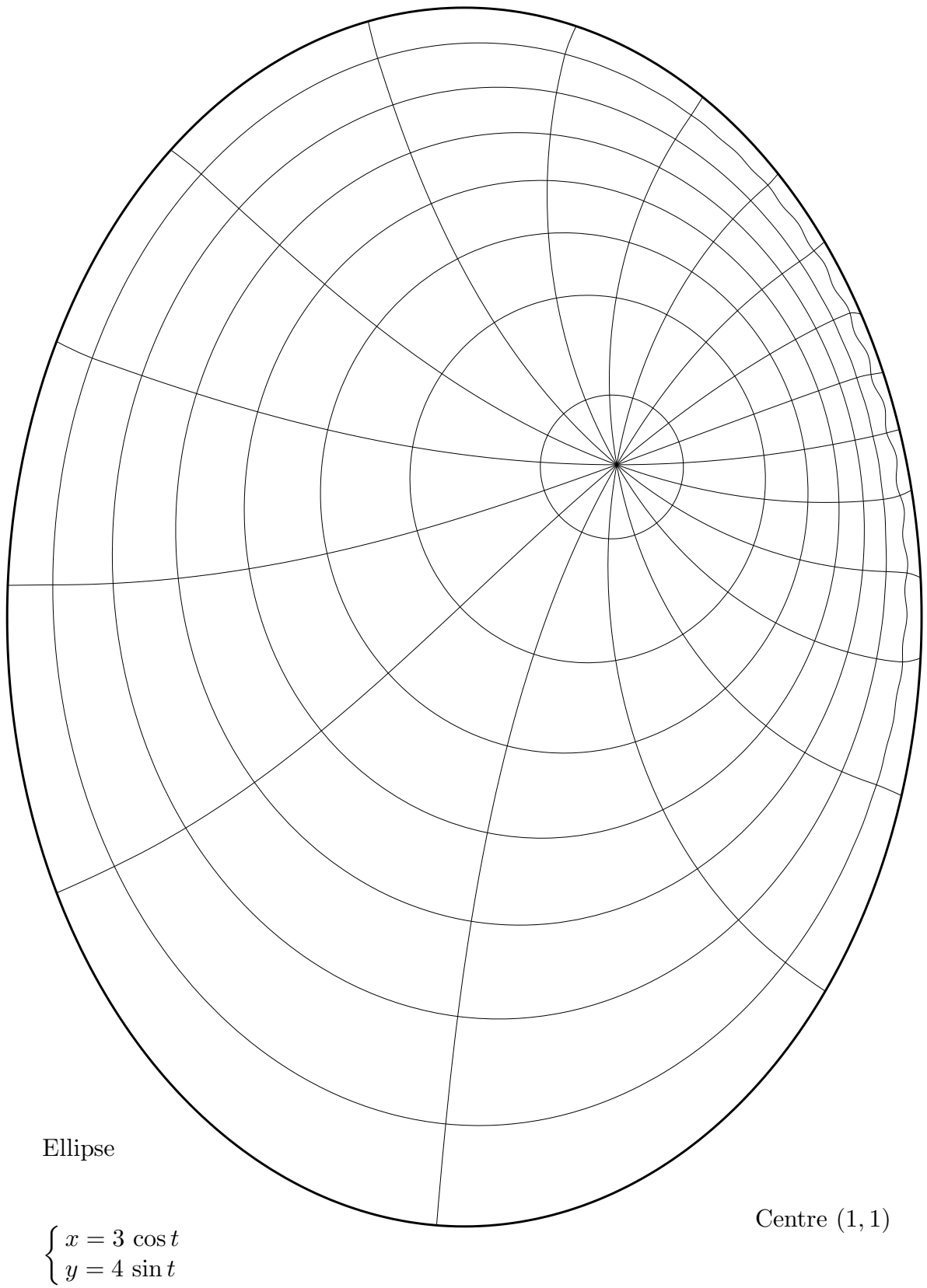


Fig. 2

Domaine polygonal convexe

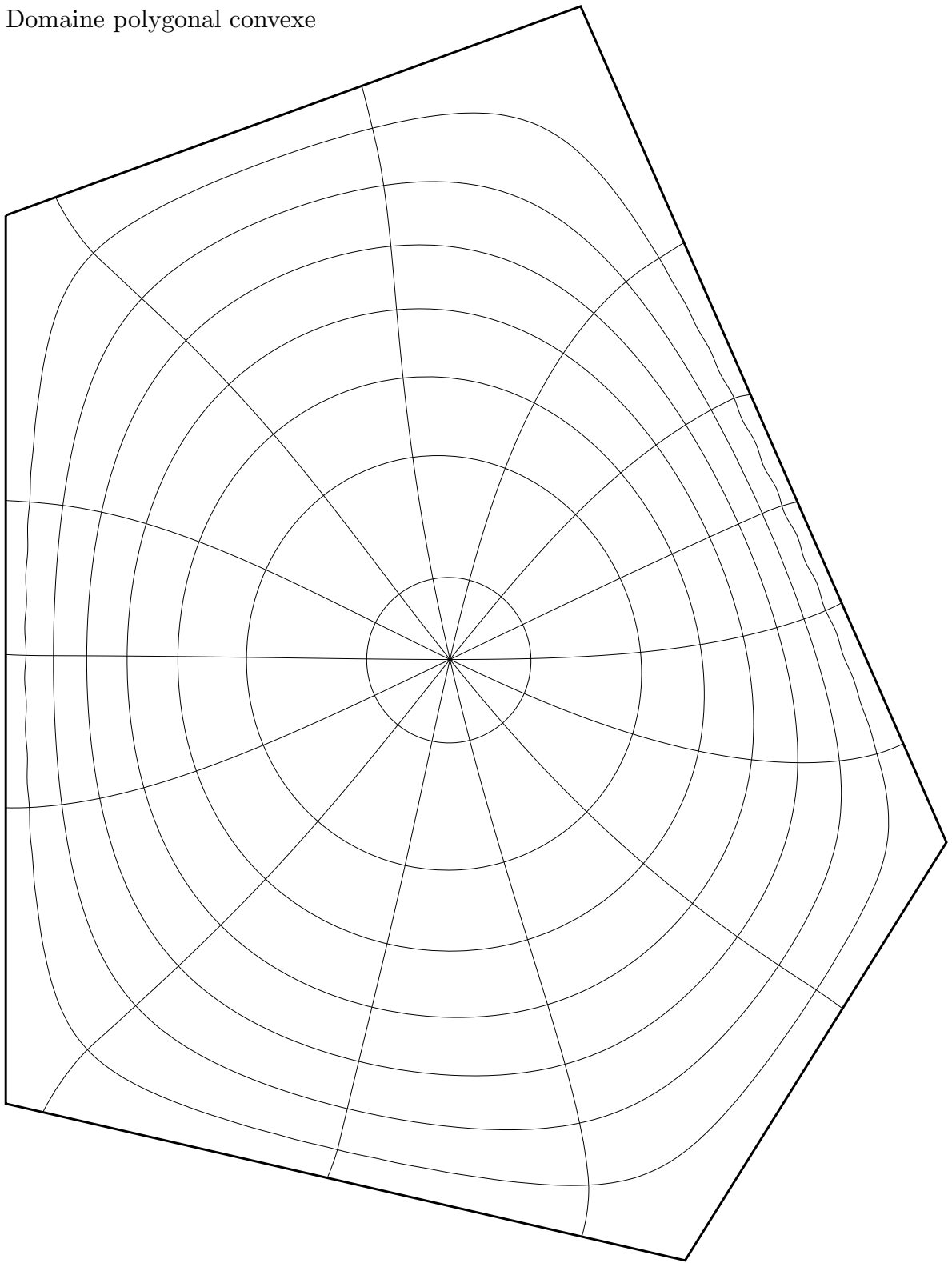


Fig. 3

Domaine polygonal non convexe

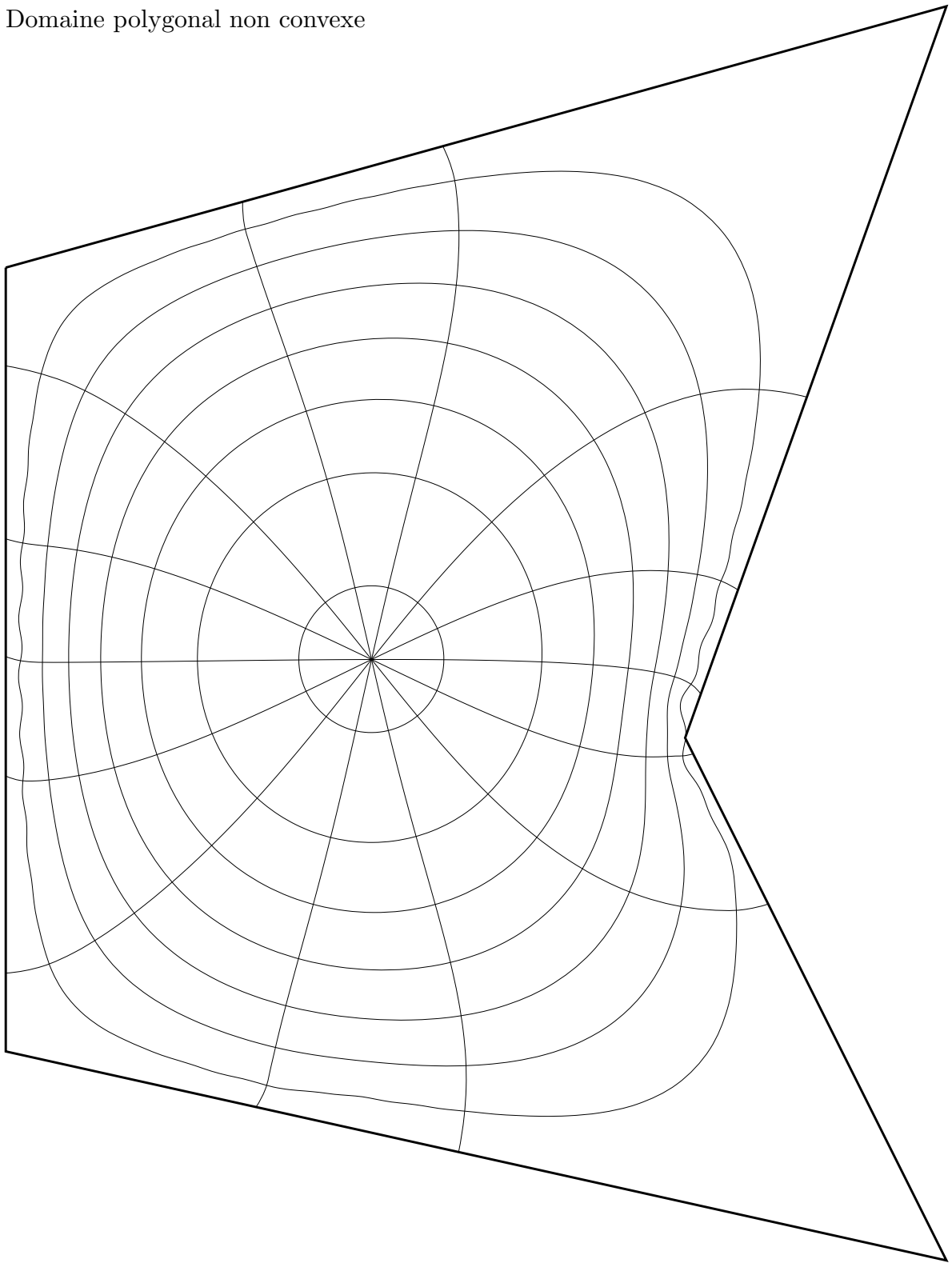
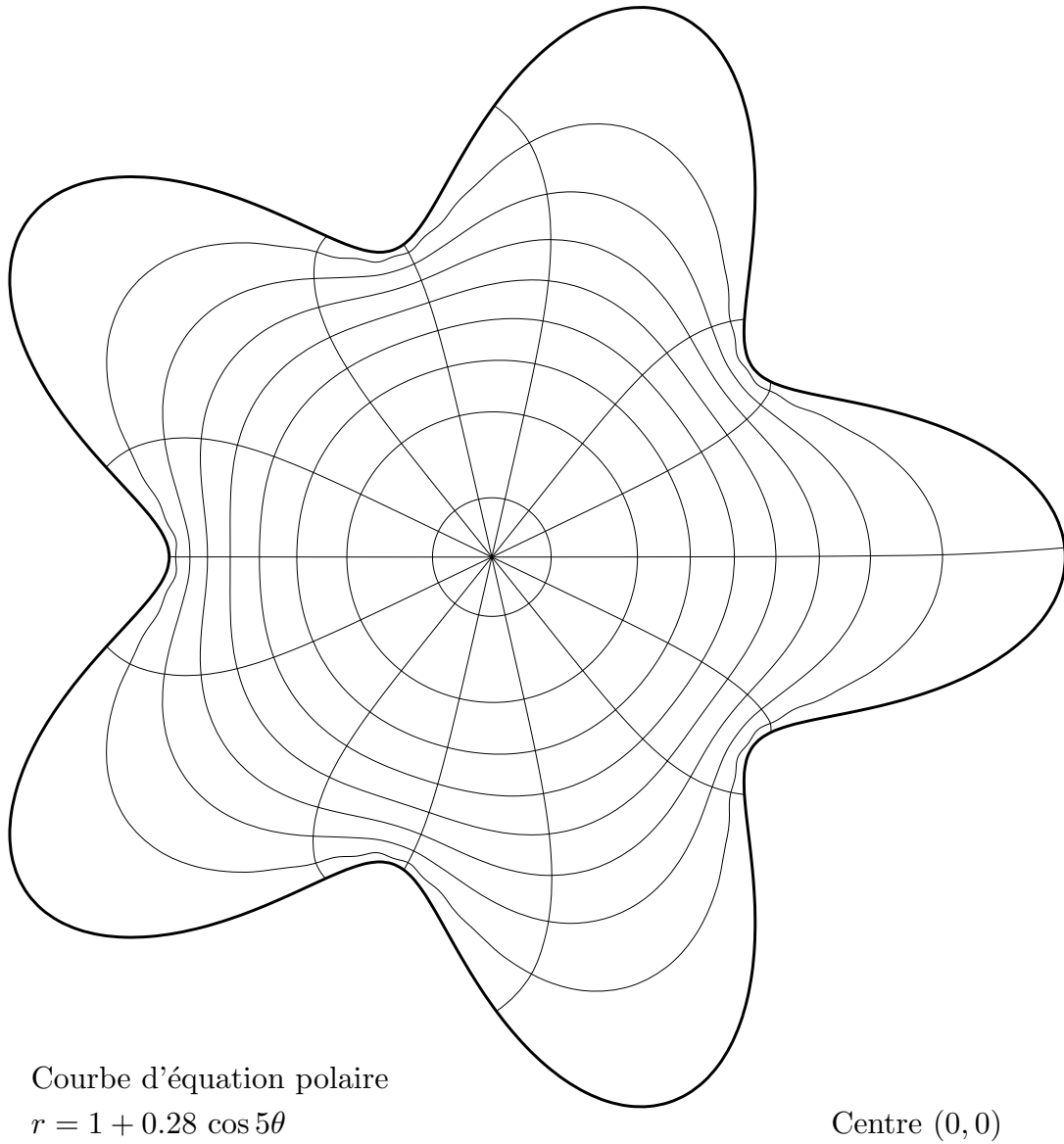
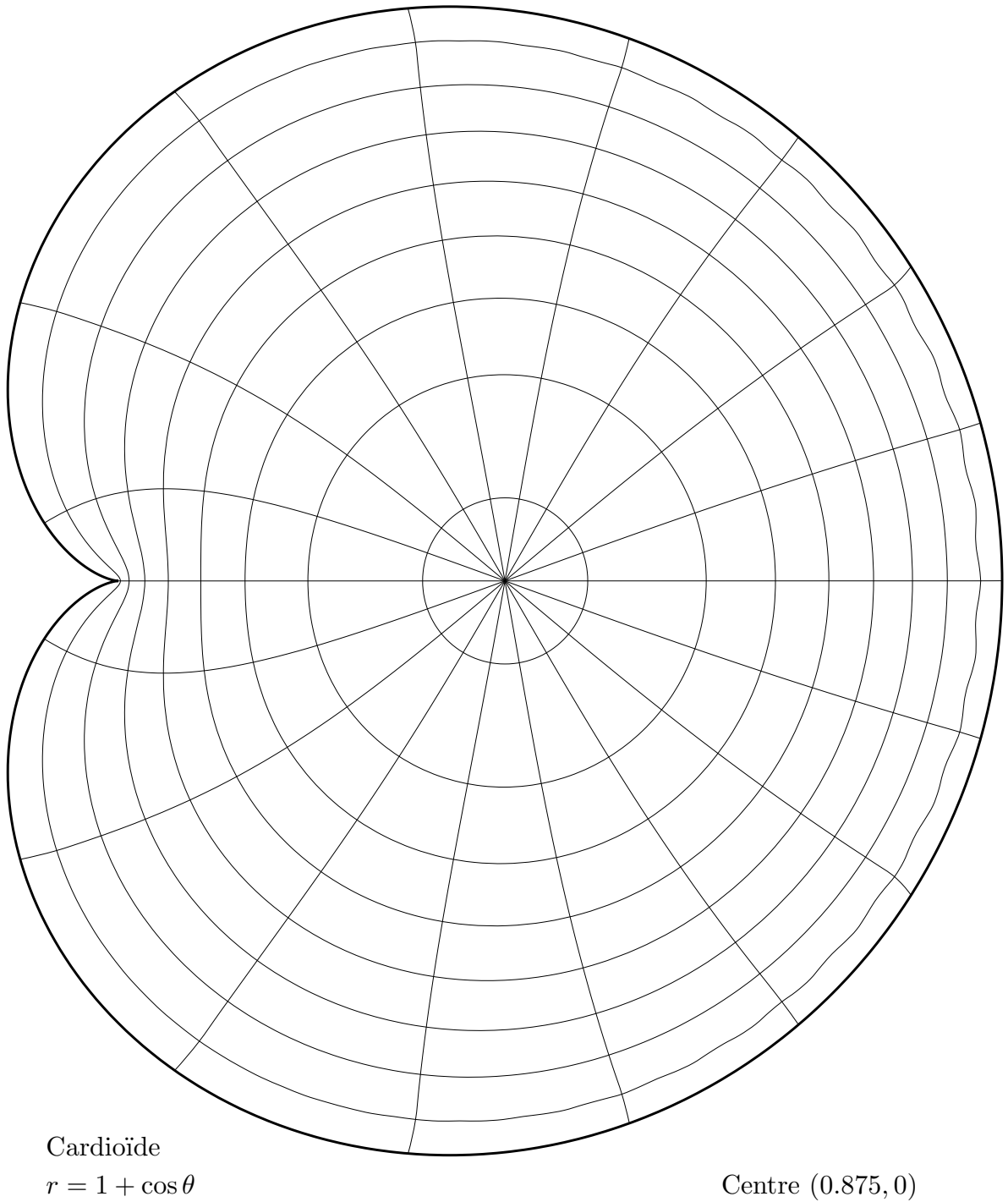
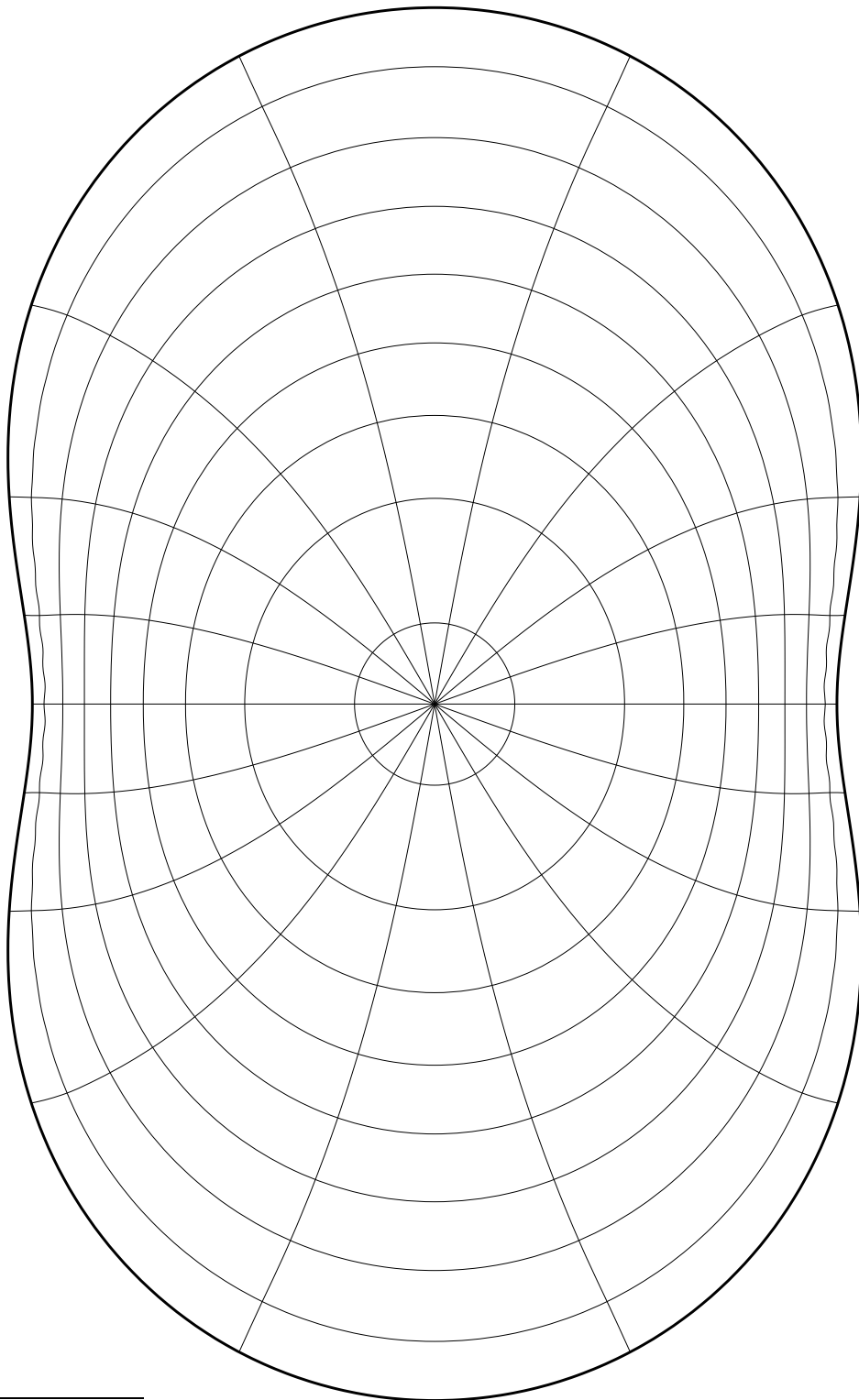


Fig. 4

**Fig. 5**

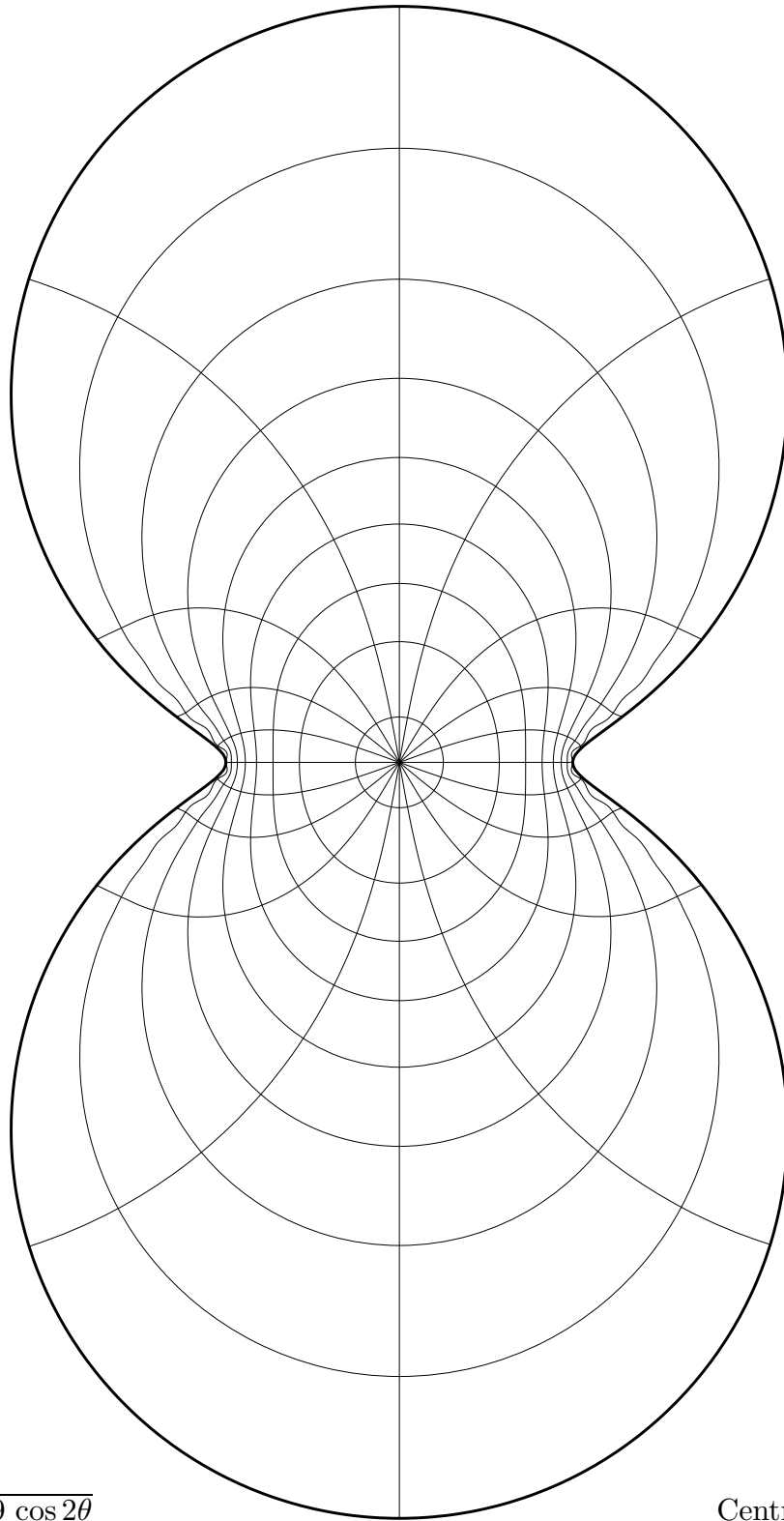
**Fig. 6**



Courbe
 $r = \sqrt{1 - 0.5 \cos 2\theta}$

Centre $(0,0)$

Fig. 7



Courbe
 $r = \sqrt{1 - 0.9 \cos 2\theta}$

Centre (0,0)

Fig. 8

Chapitre VIII

Surfaces de Riemann, propriétés fondamentales et exemples

(Notes très incomplètes et imparfaites, désolé!)

1. Variétés différentielles et surfaces de Riemann

1.1. Faisceaux de fonctions et espaces annelés

Nous introduisons d'abord la notion de faisceau de fonctions. Une notion plus élaborée de faisceau (dont les «sections» ne sont pas nécessairement des fonctions) nous sera nécessaire ultérieurement, mais nous avons préféré limiter le cadre conceptuel dans un premier temps, afin de rester le plus élémentaire possible.

Définition 1. *Si X est un espace topologique et E un ensemble, on appelle faisceau de fonctions \mathcal{F} de X dans E la donnée, pour chaque ouvert $U \subset X$, d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ de fonctions $U \rightarrow E$ tel que :*

- (i) *Si $V \subset U$ et $f \in \mathcal{F}(U)$ alors $f|_V \in \mathcal{F}(V)$,*
- (ii) *Etant donné une réunion d'ouverts $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ et des fonctions $f_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ vérifiant $\forall \alpha, \beta \in I, f_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = f_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$, alors la fonction $f : V \rightarrow E$ définie par $\forall \alpha \in I, f|_{V_\alpha} = f_\alpha$ est telle que $f \in \mathcal{F}(V)$.*

On peut, par exemple, considérer le faisceau (assez peu intéressant a priori . . .) de toutes les fonctions $U \rightarrow E$, auquel cas (ii) est trivial. En général, l'axiome (ii) signifie que le faisceau \mathcal{F} est décrit par une propriété de nature locale (comme la continuité, la différentiabilité, etc), et non de nature globale (comme le serait la propriété, pour une fonction, d'être bornée). Ainsi, si $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on peut

s'intéresser aux faisceaux $\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} . Dans ces deux derniers cas, on a affaire à des *faisceaux d'anneaux*, c'est-à-dire des faisceaux \mathcal{A} tels que $\mathcal{A}(U)$ est un anneau pour tout ouvert $U \subset X$ (ce qui suppose que l'ensemble d'arrivée E a lui-même une structure d'anneau). Un couple (X, \mathcal{A}) formé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux est appelé un *espace annelé*, et \mathcal{A} est appelé le *faisceau structural* de X . Les exemples fondamentaux qui vont nous préoccuper sont les espaces annelés (Ω, \mathcal{O}) et (Ω, \mathcal{C}^k) , où Ω est un ouvert de \mathbb{C} (resp. de \mathbb{R}^n), et où, pour tout ouvert U de Ω , l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U et $\mathcal{C}^k(U)$ celui des fonctions \mathbb{R} -différentiables de classe \mathcal{C}^k sur U , à valeurs réelles. Plus généralement :

Définition 2. On appelle *variété différentielle* de classe \mathcal{C}^k et de dimension n sur \mathbb{R} un espace annelé (X, \mathcal{C}_X^k) vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) X est un espace séparé localement compact et réunion dénombrable de compacts ;
- (ii) \mathcal{C}_X^k est un faisceau de fonctions continues $X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout point $p \in X$, il existe un voisinage ouvert U de p dans X et un homéomorphisme $\tau : U \rightarrow \Omega$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, possédant la propriété suivante : pour tout ouvert $V \subset U$, l'ensemble $\mathcal{C}_X^k(V)$ consiste en les composées $f = \tilde{f} \circ \tau$, avec $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\tau(V), \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^k sur l'ouvert image $\tau(V) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

De même, on appelle *surface de Riemann* un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) vérifiant l'axiome (i), et à la place de (ii), l'axiome

- (ii') \mathcal{O}_X est un faisceau de fonctions continues $X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout point $p \in X$, il existe un voisinage ouvert U de p dans X et un homéomorphisme $\tau : U \rightarrow \Omega$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, possédant la propriété suivante : pour tout ouvert $V \subset U$, l'ensemble $\mathcal{O}_X(V)$ consiste en les composées $f = \tilde{f} \circ \tau$, avec $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tau(V))$ holomorphe sur l'ouvert image $\tau(V) \subset \Omega \subset \mathbb{C}$.

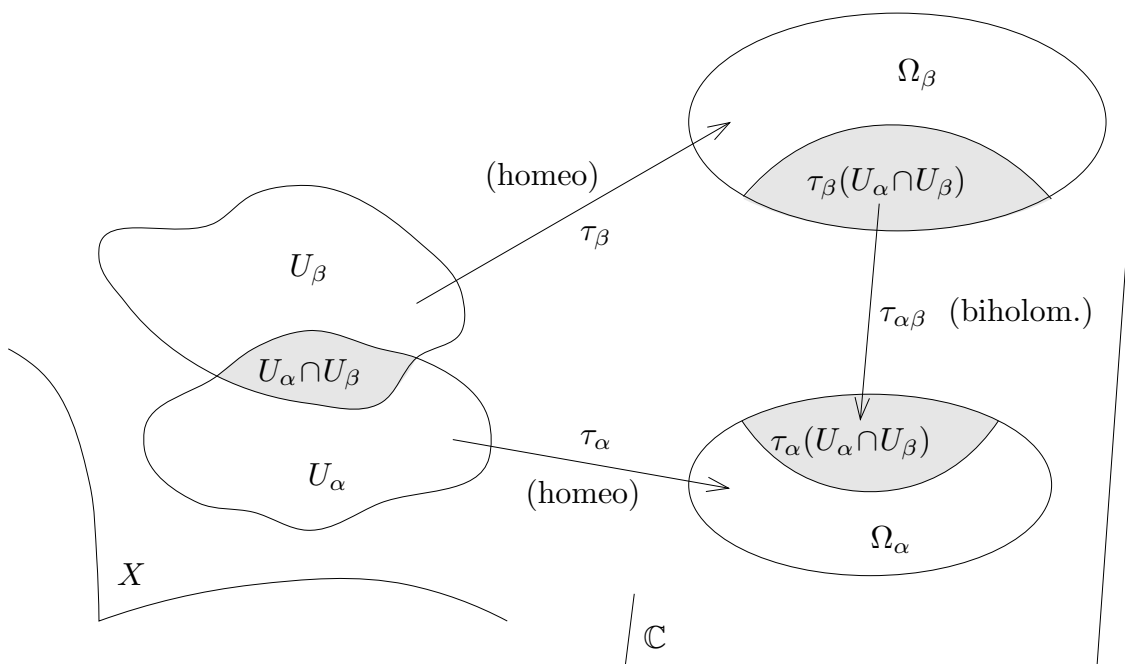
Un tel homéomorphisme τ s'appelle une *carte* (différentiable) de (X, \mathcal{C}_X^k) , resp. une *carte* (holomorphe) de (X, \mathcal{O}_X) . Dans ce dernier cas, il résulte de la définition, en prenant $\tilde{f}(z) = z$, que la fonction τ vérifie elle-même $\tau \in \mathcal{O}_X(U)$. D'après l'axiome (ii') de la Définition 2, on peut trouver un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X et un système de cartes $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha \subset \mathbb{C}$. De nouveau, l'axiome (ii') entraîne que les *applications de transition*

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes. En effet, $\tau_{\alpha,\beta}$ est l'unique application \tilde{f} telle que $\tau_\alpha = \tilde{f} \circ \tau_\beta$ sur $V = U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\beta$, et comme $\tau_{\alpha|V} \in \mathcal{O}_X(V)$, on doit avoir

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tilde{f} \in \mathcal{O}_X(\tau_\beta(V)) = \mathcal{O}_X(\tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

Par symétrie des rôles de α, β , on a aussi $\tau_{\alpha,\beta}^{-1} = \tau_{\beta,\alpha} \in \mathcal{O}_X(\tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$. Ces propriétés peuvent être visualisées par le schéma suivant.



Inversement, on va pouvoir reconstruire une structure d'espace annelé à partir d'un atlas différentiable (resp. un atlas holomorphe) comme ci-dessus :

Définition 3. On appelle atlas différentiable de classe \mathcal{C}^k (resp. holomorphe) sur un espace topologique X (localement compact, séparé et réunion dénombrable de compacts) la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X et d'un système d'homéomorphismes (appelés cartes) $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$ sur des ouverts $\Omega_\alpha \subset \mathbb{C}$, tel que les applications de transition

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

soient des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^k (resp. des biholomorphismes).

Pour reconstruire une structure de surface de Riemann à partir d'un atlas holomorphe, on utilise la proposition suivante (le cas d'une variété différentielle serait entièrement analogue). La preuve est très facile et sera laissée au lecteur.

Proposition. A tout atlas holomorphe $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$, $\alpha \in I$, sur X , on associe le faisceau d'anneau \mathcal{O}_X ainsi défini : si V est un ouvert de X , $\mathcal{O}_X(V)$ est l'ensemble des fonctions $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\tilde{f}_\alpha = f \circ \tau_\alpha^{-1}$ est holomorphe sur $\tau_\alpha(V) \cap \Omega_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$. Alors (X, \mathcal{O}_X) est une surface de Riemann.

Remarque. Un atlas holomorphe peut évidemment être considéré comme un atlas \mathcal{C}^∞ à valeurs dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. En composant les cartes τ_α avec des applications de classe \mathcal{C}^k $k = 0, 1, \dots, \infty$, on obtient des inclusions de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}_X^k \subset \dots \subset \mathcal{C}_X^1 \subset \mathcal{C}_X^0.$$

La variété différentielle de dimension 2 $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ s'appelle la surface différentielle sous-jacente à la surface de Riemann (X, \mathcal{O}_X) . De même, on appelle variété

topologique toute variété (X, \mathcal{C}_X^0) de classe \mathcal{C}^0 , et on a le concept de variété topologique sous-jacente à une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k , $k = 1, 2, \dots, \infty$.

Définition 4. Si $\tau : U \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de la variété différentielle X , on notera en général $\tau(p) = (x_1, \dots, x_n)$ et on dira que les fonctions (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées locales du point p relativement à la carte τ . Dans le cas d'une surface de Riemann, on posera le plus souvent $\tau(p) = z$ et on dira que z est une coordonnée locale holomorphe (de sorte que $z = x + iy$ fournit des coordonnées locales (x, y) de classe \mathcal{C}^∞). On dit enfin que la carte est centrée en un point $p_0 \in U$ si $\tau(p_0) = 0$, c'est-à-dire si p_0 est l'origine des coordonnées locales.

1.2. Espace tangent à une variété ou à une surface de Riemann

Nous introduisons d'abord la notion classique de dérivation d'un faisceau anneau.

Définition 1. Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux de fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle dérivation de \mathcal{A} en un point $x \in X$ la donnée pour chaque voisinage V de x d'une \mathbb{K} -forme linéaire $D : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ compatible aux restrictions (si $V' \subset V$ et $f \in \mathcal{A}(V)$, alors $Df|_{V'} = Df$), et vérifiant la règle de Leibnitz

$$D(fg) = f(x)(Dg) + (Df)g(x)$$

pour tous $f, g \in \mathcal{A}(V)$.

Déterminons d'abord les dérivations du faisceau d'anneaux $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty$ au point $x = 0$. Soit D une telle dérivation. Posons $\xi_j = Dx_j$ (on note ici par abus x_j la fonction $x \mapsto x_j$). On part de l'observation que

$$D1 = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot (D1) + (D1) \cdot 1 = 2D1$$

donc $D1 = 0$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 et soit

$$u_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt.$$

Nous pouvons écrire

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt$$

d'où

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n x_j u_j(x) \quad \text{avec} \quad u_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0).$$

Il vient alors

$$Df = \sum_{j=1}^n (Dx_j)u_j(0) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = D_\xi f(0),$$

donc $D = D_\xi$ est la dérivation dans la direction du vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Les dérivations de \mathcal{C}_X^∞ s'identifient aux vecteurs de \mathbb{R}^n par la correspondance $\xi \mapsto D_\xi$.

Définition 2. *Etant donné une variété différentielle $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ de classe \mathcal{C}^∞ , on appelle espace tangent de X au point $p \in X$, noté $T_{X,p}$, l'ensemble des dérivations du faisceau \mathcal{C}_X^∞ en p . On notera $\xi : f \mapsto \xi f$ (ou parfois D_ξ) une telle dérivation.*

D'après ce qui précède, pour toute variété différentielle X de dimension n et tout système de coordonnées locales $\tau = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \Omega$ sur un voisinage ouvert U du point $p \in X$, on a un isomorphisme

$$T_{X,p} \simeq \mathbb{R}^n, \quad \xi \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{avec} \quad \xi_j = \xi x_j.$$

Dans ces coordonnées, la dérivation $\xi (= D_\xi)$ peut encore s'écrire sous la forme

$$D_\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

avec l'abus de notation consistant à poser pour tout $f \in \mathcal{C}_X^\infty(U)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \tau^{-1})}{\partial x_i}(\tau(p)).$$

Dans la pratique, lorsqu'on travaille dans une carte fixée, on considère souvent l'homéomorphisme τ comme une « identification » de l'ouvert U à l'ouvert Ω , de sorte qu'on se permet d'omettre τ dans les formules, comme si on avait $\tau = \text{Id}$. Par définition de l'espace tangent, on peut alors considérer le système de dérivations $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ comme une base de $T_{X,p}$ en chaque point $p \in U$.

Le cas d'une surface de Riemann est plus subtil, dans la mesure où il convient de distinguer d'une part les dérivations du faisceau structural \mathcal{O}_X , et d'autre part celles du faisceau $\mathcal{C}_X^\infty \supset \mathcal{O}_X$ qui définit la structure de surface différentielle sous-jacente. On part de l'observation que les dérivations $\xi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sont données par

$$f \mapsto \xi f = a f'(p) = a \frac{\partial f}{\partial z}(p),$$

où $a = \xi z$. Pour le voir (en $p = 0$ par exemple), on écrit $f(z) = f(0) + zu(z)$ à partir du développement en série, avec $u(0) = f'(0)$,

Définition 3. *Soit (X, \mathcal{O}_X) une surface de Riemann et $\mathcal{C}_X^\infty \supset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'anneaux des fonctions \mathcal{C}^∞ sur X .*

(i) *L'espace tangent (complexe) $T_{X,p}$ est l'ensemble des dérivations complexes $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme*

$$\xi : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = a \frac{\partial f}{\partial z}(p), \quad a \in \mathbb{C},$$

relativement à une coordonnée holomorphe $z = \tau(p)$ sur un ouvert $U \subset X$.

(ii) L'espace tangent réel $T_{X,p}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des dérivations réelles $\mathcal{C}_{X,p}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme

$$\xi : \mathcal{C}_{X,p}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(p), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

relativement à une coordonnée holomorphe $z = x + iy = \tau(p)$.

(iii) L'espace tangent complexifié $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des dérivations $\mathcal{C}_{X,p}^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme

$$\xi : \mathcal{C}_{X,p}^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(p) = a \frac{\partial f}{\partial z}(p) + b \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p),$$

relativement à une coordonnée holomorphe $z = x + iy = \tau(p)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont des coefficients complexes quelconques et $a = \alpha + i\beta$, $b = \alpha - i\beta$.

Il est évident que l'on a un isomorphisme de \mathbb{C} -espace vectoriels

$$T_{X,p}^{\mathbb{C}} \simeq T_{X,p} \oplus \overline{T}_{X,p}$$

où $T_{X,p}$ admet pour base la dérivation $\partial/\partial z$, où $\overline{T}_{X,p}$ est l'espace conjugué ayant pour base $\partial/\partial \bar{z}$, et $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$ est l'espace de dimension complexe 2 ayant pour base $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$. Rappelons que l'on a par définition

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

L'espace tangent réel $T_{X,p}^{\mathbb{R}}$, quant à lui, est un sous-espace vectoriel réel de dimension 2 de l'espace tangent complexifié $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$, constitué précisément des vecteurs tangents complexifiés invariants par conjugaison, c'est-à-dire les vecteurs de la forme

$$a \frac{\partial}{\partial z} + \bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$$

avec $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les dérivations de $\overline{T}_{X,p}$ annulent les fonctions holomorphes, tandis que celles de $T_{X,p}$ annulent les fonctions anti-holomorphes, c'est-à-dire les fonctions du faisceau conjugué $\overline{\mathcal{O}}_X$.

1.3. Sphère de Riemann

La sphère de Riemann est tout simplement la sphère unité de \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 + w^2 = 1\}.$$

Munie des cartes « projections stéréographiques » :

$$\begin{aligned} \pi_S : S^2 \setminus \{S\}, \quad M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\mapsto z = \frac{u + iv}{1 + w}, \\ \pi_N : S^2 \setminus \{N\}, \quad M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\mapsto z' = \frac{u - iv}{1 - w}, \end{aligned}$$

c'est une surface de Riemann; la transition de carte $\theta = \pi_N \circ \pi_S^{-1}$ est donnée par

$$\theta : \pi_S(S^2 \setminus \{S, N\}) = \mathbb{C}^* \rightarrow \pi_S(S^2 \setminus \{S, N\}) = \mathbb{C}^* \quad z \mapsto z' = \frac{1}{z}.$$

En étendant $\pi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ en $\tilde{\pi}_S : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, avec $\tilde{\pi}_S(S) = \infty$, on identifie la sphère de Riemann à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ainsi, une base de voisinages de ∞ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est formée des ensembles $V_R = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \overline{D}(0, R) = \{|z| > R\}$ et une fonction f est holomorphe au voisinage de ∞ ($f \in \mathcal{O}_{S^2}(V_R)$) si et seulement si $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe sur $D(0, 1/R)$.

On note, à partir de maintenant, $z = \tau(x)$ la « coordonnée holomorphe locale » (i.e. lecture systématique dans la carte). Une métrique hermitienne sur une surface de Riemann est une application $x \mapsto h(x)$ de la forme $h(z) = h_1(z)|dz|^2$ où $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe C^∞ . On applique donc cette métrique à des vecteurs du plan tangent à X en x .

La métrique induite par \mathbb{R}^3 sur S^2 n'est évidemment pas celle lue par les cartes dans \mathbb{C} . Néanmoins, on a entre ces deux métriques la relation

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

si $du^2 + dv^2 + dw^2$ est la métrique induite par \mathbb{R}^3 et $|dz|^2$ celle de \mathbb{C} (lue dans la carte).

Corollaire. *Les projections stéréographiques π_S et π_N conservent les angles de courbes.*

Démonstration. Ceci vient du fait que les différentielles $d\pi_S$ et $d\pi_N$ sont des similitudes directes (les métriques $du^2 + dv^2 + dw^2$ et $|dz|^2$ étant proportionnelles d'après le calcul ci-dessus). On dit encore que π_S et π_N sont des transformations « conformes ». □

Pour obtenir une carte conforme de S^2 (conservant les angles) sur un ouvert $U \subset S^2$, il suffit donc de prendre une application quelconque de la forme $f \circ \pi_S$ avec f biholomorphe sur l'ouvert image $\Omega = \pi_S(U)$ (il faut alors supposer que $S \notin U$). Idem pour $f \circ \pi_N$.

2. Applications holomorphes entre surfaces de Riemann, 1-formes holomorphes

Définition. *Si X et Y sont des surfaces de Riemann alors une application continue $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite holomorphe si $\forall f \in \mathcal{O}_Y(V), f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. Si (U_α, τ_α) est un atlas de X et $(V_\beta, \tilde{\tau}_\beta)$ est un atlas de Y , cette définition est équivalente à : $\forall (\alpha, \beta), \tilde{\tau}_\beta \circ \varphi \circ \tau_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\tau_\alpha(U_\alpha \cap \varphi^{-1}(V_\beta)))$.*

Remarque. On définit de même, par cartes locales, le faisceau \mathcal{M}_X des fonctions méromorphes, et une fonction est méromorphe si elle est localement le quotient de deux fonctions holomorphes.

Remarque. Si X est une surface de Riemann, une fonction méromorphe sur X est la même chose qu'une fonction holomorphe $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (cf. le changement de carte, au voisinage de ∞ , $\theta \circ f = 1/f$).

Définition. Une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe) sur une surface de Riemann X est la donnée de $\beta(z) = f(z) dz$, où $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (respectivement méromorphe). On définit le résidu, en z_0 , d'une 1-forme β holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$, par

$$\operatorname{Res}(\beta, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \beta,$$

où γ est un lacet dans $U \setminus \{z_0\}$ d'indice 1 en z_0 , par exemple le bord d'un petit voisinage compact de z_0 .

Théorème (Formule des résidus). Si X est une surface de Riemann, si K est un compact de X à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et α est une 1-forme holomorphe sur $V \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ où V est un voisinage de K et $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K^\circ$, alors

$$\int_{\partial K} \beta = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(\beta, x_j).$$

Démonstration. On découpe le compact en un nombre fini de morceaux K_ℓ contenus dans des cartes, en se débrouillant pour que ∂K_ℓ ne contienne pas de point singulier. On applique alors la formule usuelle (pour un compact de \mathbb{C}) à chacun des compacts K_ℓ . \square

3. Surfaces de Riemann compactes

Théorème. Si X est une surface de Riemann compacte connexe alors les seules applications holomorphes sur X sont les constantes.

Démonstration. Application immédiate du principe du maximum (le maximum est atteint puisqu'on est sur un espace compact). \square

Théorème. Si X est une surface de Riemann compacte et β est une 1-forme méromorphe sur X alors $\sum_{x \in X} \operatorname{Res}(\beta, x) = 0$.

Remarque. On déduit de ce qui précède, en considérant $\beta = df/f$, qu'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte a autant de zéros que de pôles, pourvu que l'on prenne en compte les multiplicités.

4. Courbes algébriques

4.1. Courbes algébriques affines

Définition. Une courbe algébrique affine plane est une courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; P(x, y) = 0\}$, où P est un polynôme.

Pour qu'une telle courbe soit lisse, il suffit que le système d'équations $P(x, y) = \partial P / \partial x(x, y) = \partial P / \partial y(x, y) = 0$ n'admette pas de solution dans \mathbb{C}^2 .

Dans ce cas, si par exemple $\partial P/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$ en un point de \mathbb{C} , alors par le théorème des fonctions implicites on a $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur un voisinage V de x_0 telle que C soit le graphe $y = h(x)$ au voisinage de (x_0, y_0) . C est donc une surface de Riemann, de carte locale en un tel point la première projection $p_1(x, y) = x$.

4.2. Courbes algébriques projectives

Définition. Si $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ est homogène de degré d , i.e.

$$Q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d Q(x, y, z),$$

alors on définit la courbe projective plane

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; Q(x, y, z) = 0\}.$$

Si $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; z \neq 0\}$, alors $U \simeq \mathbb{C}^2$ et, pour une courbe projective plane C comme ci-dessus,

$$C \cap U = \{[x : y : 1]; Q(x, y, 1) = 0\}.$$

$C \cap U$ est donc, par l'isomorphisme $U \simeq \mathbb{C}^2$, une courbe algébrique affine plane.

Pour qu'une courbe projective plane soit lisse, et donc une surface de Riemann compacte, il suffit que le système d'équations

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

n'admette pas de solution dans \mathbb{C}^3 .

Définition. Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; P(x, y) = 0\}$ est une courbe algébrique affine plane de degré $\deg(P) = d$, alors on introduit le polynôme homogénéisé

$$Q(x, y, z) = z^d P(x/z, y/z)$$

et la compactifiée de \mathbb{C} est la courbe projective plane

$$\bar{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; Q(x, y, z) = 0\}.$$

Les points à l'infini rajoutés à C pour former \bar{C} correspondent à $z = 0$ et se calculent donc en considérant l'équation $Q(x, y) = 0$.

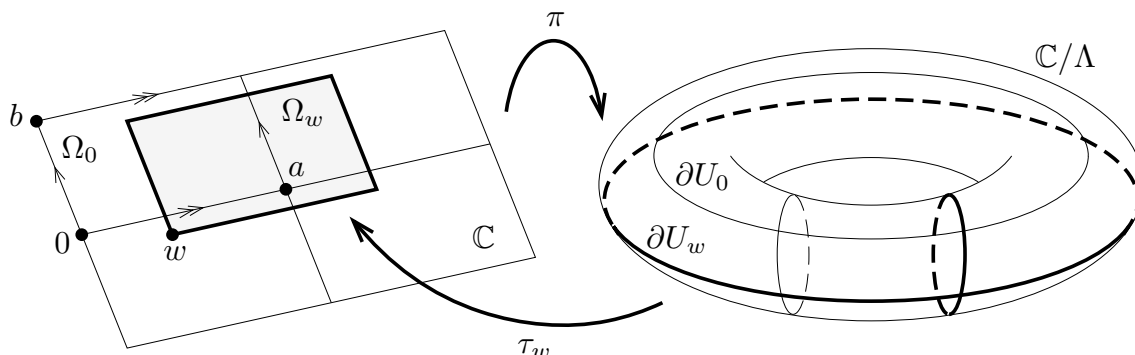
5. Courbes elliptiques

5.1. Définition des courbes elliptiques

Définition. Soit Λ un réseau dans \mathbb{C} , c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang 2

$$\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{ma + pb; (m, p) \in \mathbb{Z}^2\}$$

où a, b sont des nombres complexes \mathbb{R} -linéairement indépendants. On appelle courbe elliptique associée au réseau Λ l'espace quotient $X = \mathbb{C}/\Lambda$, muni de la topologie quotient.



Topologiquement, \mathbb{C}/Λ est un tore, obtenu en recollant les arêtes opposées du parallélogramme fondamental P (parallélogramme fermé d'arêtes $[0, a]$ et $[0, b]$). Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X = \mathbb{C}/\Lambda$ la projection canonique. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, on considère le parallélogramme ouvert

$$\Omega_w = w + P^\circ, \quad \Omega_w \subset \mathbb{C},$$

et son image $U_w = \pi(\Omega_w) \subset X$. Alors π est un homéomorphisme de Ω_w sur U_w et on a donc un homéomorphisme inverse $\tau_w = \pi^{-1} : U_w \rightarrow \Omega_w$. Le système $(\tau_w)_{w \in \mathbb{C}}$ constitue un atlas holomorphe. En effet, il n'est pas difficile de constater que les intersections $U_w \cap U_{w'}$ sont constituées de 1, 2 ou 4 composantes connexes qui sont elles-mêmes des parallélogrammes (4 parallélogrammes par exemple pour l'intersection $U_0 \cap U_w$ figurant sur le schéma ci-dessus). Les applications de transition $\tau_{ww'} = \tau_w \circ \tau_{w'}^{-1} : \tau_{w'}(U_w \cap U_{w'}) \rightarrow \tau_w(U_w \cap U_{w'})$ coïncident avec des translations $z \mapsto z + \lambda$, $\lambda \in \Lambda$, sur chacune des composantes connexes de $\tau_{w'}(U_w \cap U_{w'})$ (l'élément λ n'est pas le même sur les différentes composantes connexes, mais peu importe ...).

Conséquence. L'atlas $(\tau_w)_{w \in \mathbb{C}}$ est holomorphe et munit la courbe elliptique \mathbb{C}/Λ d'une structure de surface de Riemann compacte.

Notre objectif est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. Pour tout réseau Λ , la courbe elliptique \mathbb{C}/Λ est isomorphe (en tant que surface de Riemann) à une courbe algébrique lisse de degré 3 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

On peut en fait démontrer que toute surface de Riemann compacte X admet un plongement sur une courbe algébrique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ (et une immersion dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, sur une courbe algébrique n'ayant que des points doubles « ordinaires »), mais il s'agit d'un résultat considérablement plus difficile, nécessitant des résultats d'Analyse non triviaux. Dans le cas qui nous intéresse, la preuve se fait en exhibant un isomorphisme explicite relativement simple. C'est l'objet du paragraphe suivant.

5.2. Fonction \wp de Weierstrass

Étant donné un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b \subset \mathbb{C}$, on définit la fonction de Weierstrass

\wp associée à Λ par

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z-ma-pb)^2} - \frac{1}{(ma+pb)^2} \right). \end{aligned}$$

On commence par montrer qu'il y a convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ (les points de Λ étant visiblement des points singuliers). En effet,

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{(1-z/\lambda)^2} - 1 \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{(z/\lambda)(2-z/\lambda)}{(1-z/\lambda)^2}.$$

Pour $z \in K \subset \overline{D}(0, R)$ et λ assez grand, disons $|\lambda| \geq 2R$, on a $|z/\lambda| \leq 1/2$ et $|1-z/\lambda| \geq 1/2$, d'où

$$\left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| \leq \frac{|z/\lambda|(2+1/2)}{|\lambda|^2 \cdot 1/4} \leq \frac{10R}{|\lambda|^3}.$$

Le problème est donc seulement de démontrer la convergence de la série à termes positifs $\sum_{\lambda \in \Lambda^*} 1/|\lambda|^3$. Or, en raison des hypothèses, (a, b) est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, et par conséquent $(x, y) \mapsto |x| + |y|$ et $(x, y) \mapsto |xa + yb|$ sont deux normes sur \mathbb{R}^2 . Le théorème sur l'équivalence des normes dans les espaces normés de dimension finie entraîne l'existence de constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1(|x| + |y|) \leq |xa + yb| \leq C_2(|x| + |y|).$$

En particulier $|ma + pb| \geq C_1(|m| + |p|)$, et le problème se ramène donc à la convergence de la série

$$\sum_{(m,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|m| + |p|)^3} = 4 \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{m^3} + 4 \sum_{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+p)^3}.$$

On peut pour cela utiliser la majoration élémentaire usuelle

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+p)^\alpha} \leq \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}, \quad \forall \alpha > 1.$$

En appliquant ceci pour $\alpha > 2$ et en sommant sur $p \in \mathbb{N}^*$ il vient

$$\sum_{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+p)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha-2} \right) = \frac{1}{\alpha-2} < +\infty.$$

Comme la série définissant \wp ne comporte qu'un nombre fini de termes ayant des pôles dans un disque compact $\overline{D}(0, R)$ donné (à savoir $1/z^2$ et les termes $1/(z-\lambda)^2 - 1/\lambda^2$ correspondant aux indices $\lambda \in \Lambda^* \cap \overline{D}(0, R)$), et comme chacun de ces termes est méromorphe sur \mathbb{C} , on en déduit que \wp est une fonction méromorphe

sur \mathbb{C} , admettant pour pôles les éléments $\lambda \in \Lambda$ du réseau. Par ailleurs, le théorème de dérivation terme à terme donne

$$(5.2.2) \quad \wp'(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z - \lambda)^3}$$

avec convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. De là on déduit la

Proposition. *La fonction \wp est une fonction méromorphe périodique de groupe de périodes Λ , i.e. $\wp(z + \lambda) = \wp(z)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et il n'y a pas d'autres périodes. La fonction admet pour pôles précisément les points de Λ ; ce sont des pôles doubles. Par ailleurs, la fonction \wp est paire, et elle admet au voisinage de 0 un développement en série de Laurent*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (2p+1)s_{2p+2}z^{2p},$$

où les coefficients s_p sont les sommes des « séries d'Eisenstein »

$$s_p = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{\lambda^p}.$$

Démonstration. Il est clair sur la formule (5.2.1) que \wp est paire (un changement concomitant de z en $-z$ et de $\lambda \in \Lambda^*$ en $-\lambda \in \Lambda^*$ laisse la série inchangée). Par ailleurs, la Λ -périodicité de la dérivée \wp' est évidente sur la formule (5.2.2). En particulier, les fonctions $\wp(z+a) - \wp(z)$ et $\wp(z+b) - \wp(z)$ sont constantes, puisque leur dérivée est nulle sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. En prenant $z = -a/2 \notin \Lambda$, il vient $\wp(z+a) - \wp(z) = \wp(a/2) - \wp(-a/2) = 0$ donc $\wp(z+a) - \wp(a)$ est nulle, et il en est de même pour $\wp(z+b) - \wp(z)$. On voit donc que tous les éléments $\lambda = ma + pb$ sont des périodes. Comme

$$u(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

est homomorphe au voisinage de 0 avec $u(0) = 0$ et

$$u^{(n)}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(z - \lambda)^{n+2}}, \quad n \geq 1,$$

il vient $u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} z^n$ au voisinage de 0, avec $\frac{u^{(n)}(0)}{n!} = (n+1)s_{n+2}$. L'imparité de s_n vis-à-vis de λ montre que $s_n = 0$ pour n impair ≥ 3 , on a donc

$$u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)s_{n+2}z^n = \sum_{p=1}^{+\infty} (2p+1)s_{2p+2}z^{2p}$$

au voisinage de 0 et le développement en série de Laurent de \wp s'en déduit. Soit enfin Λ_1 le groupe des périodes de \wp , qui contient Λ d'après ce qui précède. Comme

0 est un pôle double, la Λ_1 -périodicité montre que les points de Λ_1 sont également des pôles. On a donc $\Lambda_1 \subset \Lambda$, d'où $\Lambda_1 = \Lambda$. \square

Corollaire. *La fonction \wp se factorise par passage au quotient en une fonction méromorphe*

$$\tilde{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

(et donc en une application holomorphe $\tilde{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$), ayant un unique pôle double $\dot{0}$.

De même les dérivées $\wp^{(n)}$ sont Λ -périodiques et donnent par passage au quotient des fonctions méromorphes $\tilde{\wp}^{(n)}$ sur \mathbb{C}/Λ admettant $\dot{0}$ comme unique pôle. On montre maintenant, et c'est là un fait tout à fait fondamental, que \wp satisfait une équation différentielle algébrique simple.

Équation différentielle fondamentale de \wp . *La fonction \wp satisfait l'équation*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta$$

avec les constantes complexes $\alpha = -60s_4$, $\beta = -140s_6$.

Démonstration. Le début de la série de Laurent de \wp est

$$\wp(z) = z^{-2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + 7s_8z^6 + O(z^6).$$

Par dérivation, on a donc

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -2z^{-3} + 6s_4z + 20s_6z^3 + 42s_8z^5 + O(z^5), \\ \wp'(z)^2 &= 4z^{-6} - 24s_4z^{-2} - 80s_6 + (36s_4^2 - 168s_8)z^2 + O(z^4), \\ \wp(z)^3 &= z^{-6} + 9s_4z^{-2} + 15s_6 + (27s_4^2 + 21s_8)z^2 + O(z^4). \end{aligned}$$

Par différence, on trouve

$$\begin{aligned} \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 &= -60s_4z^{-2} - 140s_6 - (72s_4^2 + 252s_8)z^2 + O(z^4) \\ \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - \alpha\wp(z) &= -140s_6 + (108s_4^2 - 252s_8)z^2 + O(z^4). \end{aligned}$$

en posant $\alpha = -60s_4$. En particulier la fonction $\tilde{\wp}'^2 - 4\tilde{\wp}^3 - \alpha\tilde{\wp}$ est holomorphe sur \mathbb{C}/Λ tout entier (le pôle $z = \dot{0}$ a disparu). Par compacité de \mathbb{C}/Λ , elle est nécessairement constante et égale à sa valeur en $z = \dot{0}$, soit $\beta = -140s_6$, ce qui démontre le théorème. \square

Remarque. L'identification à zéro des coefficients ultérieurs du développement fournit des relations remarquables reliant les valeurs des série d'Eisenstein, permettant en particulier de calculer de proche en proche s_8, s_{10}, \dots , à partir des deux premières valeurs s_4, s_6 . On a ainsi $108s_4^2 - 252s_8 = 0$, d'où $s_8 = \frac{3}{7}s_4^2$.

On a maintenant le lemme suivant.

Lemme. *Les zéros de \wp' sont les points $z = a/2$, $z = b/2$ et $z = (a + b)/2$. Leurs images par \wp , à savoir*

$$r_1 = \wp(a/2), \quad r_2 = \wp(b/2), \quad r_3 = \wp((a + b)/2)$$

sont les trois racines (2 à 2 distinctes) de l'équation $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$, $p \in \mathbb{C}$. En outre, l'application

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

a la propriété suivante: pour tout $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{\infty, r_1, r_2, r_3\}$, la préimage $(\tilde{\varphi})^{-1}(w)$ est constituée de deux éléments opposés et distincts $z, -z \pmod{\Lambda}$, tandis que pour $w = \infty, r_1, r_2, r_3$, l'équation $\tilde{\varphi}(z) = w$ admet une racine double, égale respectivement à $0, a/2, b/2, (a + b)/2 \pmod{\Lambda}$.

On exprime géométriquement le lemme en disant que $\tilde{\varphi}$ réalise un « revêtement ramifié » à 2 feuillets de \mathbb{C}/Λ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, avec points de ramification $0, a/2, b/2, (a + b)/2 \pmod{\Lambda}$.

Démonstration. Si $w = \infty$, on a bien $(\tilde{\varphi})^{-1}(\infty) = \{\dot{0}\}$, et ce point doit être considéré comme double, puisque $\dot{0}$ est un pôle double. Maintenant, si $w \in \mathbb{C}$, la fonction méromorphe $\tilde{\varphi}(z) - w$ sur la surface de Riemann compacte \mathbb{C}/Λ est telle que la somme algébrique des multiplicités des zéros et des pôles est nulle. Comme il n'y a qu'un seul pôle, de multiplicité 2, on en déduit que l'équation $\tilde{\varphi}(z) = w$ admet deux racines, comptées avec multiplicités. D'après la parité de φ , ces racines forment nécessairement un couple de points 2 à 2 opposés $z, -z$, à moins qu'on ait $z = -z$ dans \mathbb{C}/Λ . Ceci se produit si et seulement si $2z = 0 \pmod{\Lambda}$ i.e. $2z = ma + pb \in \Lambda$. Suivant la parité de m et p , on obtient exactement 4 classes, celle des éléments $z = 0, a/2, b/2, (a + b)/2$. En 0, la situation est claire, on a $\varphi(0) = \infty$ et 0 est un pôle double. Aux autres points, par exemple $a/2$, l'imparité et la périodicité de φ' impliquent $\varphi'(a/2) = -\varphi'(-a/2) = -\varphi'(a/2 - a) = -\varphi'(a/2)$, donc $\varphi'(a/2) = 0$. On trouve de même $\varphi'(b/2) = 0$ et $\varphi'((a + b)/2) = 0$. Par conséquent, si r_1, r_2, r_3 sont les images par φ de $a/2, b/2$ et $(a + b)/2$, l'équation $\tilde{\varphi}(z) = r_j$ ($j = 1, 2, 3$) admet ces points comme racines doubles, et il ne peut y en avoir d'autre. L'équation $\varphi'^2 = 4\varphi^3 + \alpha\varphi + \beta$ montre que les images r_1, r_2, r_3 de $a/2, b/2, (a + b)/2$ par φ sont bien racines de l'équation $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$. Les images r_1, r_2, r_3 sont nécessairement distinctes (et sont donc les 3 racines distinctes du polynôme $4p^3 + \alpha p + \beta$): si on avait disons $r_1 = r_2$, alors l'équation $\varphi(z) = r_1 = r_2$ admettrait 2 racines doubles distinctes mod Λ , à savoir les classes de $a/2, b/2$, soit un total de 4 points en comptant les multiplicités, contradiction. Le lemme est démontré. □

Nous avons maintenant le résultat suivant, qui précise le résultat énoncé au § 5.2.

Théorème. *L'application $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ telle que*

$$\varphi(z) = [\tilde{\varphi}(z) : \tilde{\varphi}'(z) : 1]$$

pour $z \neq \dot{0}$ et $\varphi(\dot{0}) = [0 : 1 : 0]$ définit un isomorphisme (c'est-à-dire une application biholomorphe) de la courbe elliptique \mathbb{C}/Λ sur la courbe algébrique lisse de degré 3

$$\bar{\Gamma} = \{[x : y : t] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; y^2 t = 4x^3 + \alpha x t^2 + \beta t^3\},$$

qui est la compactification projective de la courbe algébrique affine

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta\}.$$

Le point $[0 : 1 : 0]$ est l'unique point à l'infini de $\bar{\Gamma}$, et sur $\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{\dot{0}\}$, φ peut être vue comme l'application

$$\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{\dot{0}\} \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{C}^2, \quad z \mapsto (\varphi(z), \varphi'(z)).$$

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\bar{\Gamma}$ est lisse (on utilise pour cela le fait que l'équation $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$ a ses 3 racines distinctes), et qu'elle admet $[0 : 1 : 0]$ comme unique point à l'infini. L'équation différentielle satisfaite par \wp montre que φ envoie bien \mathbb{C}/Λ dans $\bar{\Gamma}$. Seul le comportement au voisinage de $\dot{0}$ n'est pas clair. Pour z voisin de 0, on a

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= [\wp(z) : \wp'(z) : 1] = [z^{-2} + O(z^2) : -2z^{-3} + O(z) : 1] \\ (5.2.3) \quad &= [z + O(z^5) : -2 + O(z^4) : z^3] = [-\frac{1}{2}z + O(z^5) : 1 : -\frac{1}{2}z^3 + O(z^7)], \end{aligned}$$

après multiplication par z^3 , puis division par $-2 + O(z^4)$. Ceci montre bien que $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \setminus \dot{0}$ se prolonge au voisinage de l'origine en une application holomorphe de \mathbb{C}/Λ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, telle que $\varphi(\dot{0}) = [0 : 1 : 0]$. Pour $z \neq \dot{0}$, la dérivée de φ (vue comme application dans \mathbb{C}^2) est

$$\varphi'(z) = (\tilde{\wp}'(z), \tilde{\wp}''(z)),$$

qui ne s'annule jamais (la première composante $\tilde{\wp}'(z)$ s'annule seulement si $z = a/2, z = b/2, z = (a + b)/2$, mais en ces points $\tilde{\wp}''(z) \neq 0$, puisque ces points sont des racines doubles de l'équation $\tilde{\wp}(z) = r_j$). Par ailleurs, (5.2.3) montre que $\varphi'(0) \neq 0$, la première composante ayant une dérivée non nulle. Ceci montre que φ est un difféomorphisme local de \mathbb{C}/Λ dans $\bar{\Gamma}$. En fait φ est bijective, comme il résulte facilement du lemme: la préimage de $[0 : 1 : 0] \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ est $\{\dot{0}\}$, tandis qu'un point $(x, y) \in \Gamma$ est atteint par une et une seule des deux racines $z, -z$ de l'équation $\wp(z) = x$ (on a $\wp'(z)^2 = y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta$, et si z ne convient pas, alors $-z$ convient grâce à l'imparité de \wp'). \square

Remarque. On peut démontrer plus généralement que toute surface de Riemann compacte est isomorphe à une courbe projective lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ et, par projection dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, qu'elle s'envoie sur une courbe algébrique de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ayant au plus des points doubles ordinaires.