

THÈSE de DOCTORAT D'ÉTAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie

– Paris 6 –

par M. Jean-Pierre DEMAILLY

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

– 1ère thèse –

SUR DIFFÉRENTS ASPECTS DE LA POSITIVITÉ EN ANALYSE COMPLEXE.

– 2ème thèse –

PROPOSITIONS DE L'UNIVERSITÉ.

soutenue le 19 octobre 1982

devant le jury composé de :

M. Pierre LELONG,	Président
M. Louis BOUTET de MONVEL,	Examineur
M. Pierre DOLBEAULT,	Examineur
M. Joseph LE POTIER,	Examineur
M. Henri SKODA,	Directeur de thèse

Remerciements

C'est à Henri Skoda que je dois ma première initiation à la recherche mathématique, et depuis lors mes travaux ont fait l'objet de sa constante attention. La clarté de ses exposés, ses questions, ses suggestions ont joué un rôle essentiel dans l'élaboration de cette thèse. Je tiens à le remercier chaleureusement pour les innombrables discussions et échanges de points de vue que nous avons eus, ainsi que pour les encouragements constants qu'il m'a prodigués.

Le Professeur Pierre Lelong, dont les idées et les travaux ont largement inspiré cette thèse comme tant d'autres recherches actuelles, m'a fait l'honneur et la joie de bien vouloir présider le jury de cette thèse ; déjà Pierre Lelong avait manifesté son intérêt pour mes travaux en acceptant de présider ma thèse de 3e Cycle.

Je tiens à remercier aussi les membres du laboratoire d'Analyse Complexe de Paris, qui m'ont accueilli parmi eux, et m'ont invité à plusieurs reprises à exposer mes travaux à leur séminaire. J'ai eu chaque fois le plaisir de confronter mes idées à un auditoire attentif et intéressé. Je pense en particulier à Paul Malliavin, Pierre Mazet avec qui j'ai eu de fructueuses discussions, à Pierre Dolbeault, qui a été directeur du Laboratoire d'Analyse Complexe jusqu'à une date très récente, et qui a accepté de se joindre au jury de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à l'Équipe d'Analyse Complexe d'Orsay, qui m'a chaleureusement convié à suivre son séminaire ; à Michel Hervé et Jean-Louis Verdier pour l'intérêt qu'ils ont toujours porté à mon travail, respectivement en tant que Directeur adjoint de l'Ecole Normale Supérieure, et responsable du Département de Mathématiques lorsque j'étais encore élève de l'Ecole.

Grâce à ses cours de 3e cycle, professés avec beaucoup de soin et de patience, Joseph Le Potier m'a permis d'approfondir mes connaissances en géométrie analytique, en particulier dans l'étude des fibrés vectoriels holomorphes ; je voudrais ici l'en remercier.

Louis Boutet de Monvel, enfin, m'a proposé un passionnant sujet de seconde thèse, me donnant ainsi l'occasion d'avoir un premier contact avec la théorie des opérateurs microdifférentiels analytiques.

Je ne peux terminer sans remercier Madame Colette Orion qui a effectué le travail de dactylographie avec beaucoup de soin et de conscience, et sur qui tous les mathématiciens du Laboratoire savent pouvoir compter lorsqu'un problème concret se pose. Je remercie également Michel Blin, responsable du service photocopie, pour son aide et sa bonne humeur lors du tirage des exemplaires de la thèse.

Introduction

Cette thèse se compose de deux parties. La première est consacrée à l'étude des fibrés vectoriels positifs, et en particulier des relations qui existent entre les différentes notions de positivité. Plusieurs théorèmes d'annulation de la cohomologie sont obtenus dans ce cadre par un usage direct de l'inégalité de KODAIRA-NAKANO. On retrouve ainsi certains résultats antérieurs de PH. GRIFFITHS, S. NAKANO et H. SKODA.

La seconde partie est consacrée aux propriétés des courants positifs fermés. Grâce à une formule générale de type LELONG-JENSEN, nous étudions la transformation des nombres de LELONG d'un courant par image directe par un morphisme analytique propre. Les inégalités obtenues fournissent de nouveaux lemmes de SCHWARZ utiles en théorie des nombres. En liaison avec la conjecture de Hodge, on donne enfin des exemples de courants positifs fermés extrémaux qui ne sont pas des cycles analytiques, répondant ainsi par la négative à un problème soulevé par P. LELONG et R. HARVEY.

1. Fibrés vectoriels holomorphes positifs.

Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété analytique complexe X , $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $r = \text{rang}(E)$. Au fibré E est attachée canoniquement une forme hermitienne $ic(E)$ sur les fibres de $TX \otimes E$. On dit que le fibré E est s -positif si la forme $ic(E)$ prend des valeurs > 0 sur tout tenseur de $TX \otimes E$ non nul et de rang $\leq s$, $s \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La positivité de PH. GRIFFITHS correspond à $s = 1$, celle de NAKANO à $s \geq \inf(n, r)$, toutes les notions coïncidant pour $r = 1$ ou $n = 1$. On suppose désormais X kählérienne et faiblement pseudoconvexe (i.e. X possède une fonction plurisousharmonique exhaustive). Les méthodes L^2 de KOHN-HÖRMANDER-NAKANO-SKODA donnent le

Théorème 1.1. – *Si E est s -positif, $H^{n,q}(X, E) = 0$ pour $q \geq n - s + 1$.*

Comme la positivité de GRIFFITHS est la notion la plus significative géométriquement (elle passe aux fibrés quotients), il est intéressant de disposer de relations entre les notions de positivité introduites plus haut. Ceci fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 1.2. – *Soit E un fibré positif au sens de GRIFFITHS, alors :*

- (a) $E \otimes \det E$ est positif au sens de NAKANO ;
- (b) Si E est de rang $r \geq 2$, $E^* \otimes (\det E)^s$ est s -positif.

La théorie des morphismes surjectifs de fibrés semi-positifs due à H. SKODA donne lieu à des calculs de courbure qui sont particulièrement bien interprétés dans ce contexte. Soit une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \xrightarrow{g} 0$$

de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens de rangs respectifs $r - q$, r , q . Etant donné $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $s = \inf(n - k, r - q)$. Nous montrons le

Théorème 1.3. – On suppose que E est s -semi-positif, et on se donne un fibré linéaire L tel que $ic(L) \geq (s + \varepsilon)ic(\det Q)$, $\varepsilon > 0$. Alors le morphisme

$$H^{n,\ell}(X, E \otimes L) \longrightarrow H^{n,\ell}(X, Q \otimes L)$$

est surjectif pour $\ell \geq k$.

Ce théorème admet une version plus précise, avec estimations L^2 , qui a de nombreuses applications à des problèmes d'algèbre locale ou d'analyse fine (X sera alors le plus souvent une variété de Stein). Nous avons considéré en particulier le problème d'extension d'une fonction holomorphe définie sur une sous-variété, à l'espace ambiant tout entier.

On se donne une sous-variété fermée $X = F^{-1}(0)$ d'un ouvert pseudo-convexe $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ où $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^N$ est holomorphe. Alors il existe une rétraction holomorphe $\rho : U \rightarrow X$, U étant un voisinage tubulaire de X que l'on estime avec précision. La construction de ρ est inspirée d'un travail de BERENSTEIN et TAYLOR : on fabrique un isomorphisme d'un voisinage de la section nulle du fibré normal NX sur U , au moyen d'un scindage holomorphe de la suite exacte $0 \rightarrow TX \rightarrow T\Omega|_X \rightarrow NX \rightarrow 0$. L'existence de ce scindage (qui résulte bien sûr du théorème B de CARTAN) est concrétisée par le résultat suivant, dérivé du th. 1.3.

Théorème 1.4. – Soit $0 \rightarrow N \rightarrow E \xrightarrow{g} 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens au-dessus de X , E étant supposé semi-positif au sens de Griffiths et N, Q munis des métriques induites par celle de E . On se donne un fibré linéaire M et une fonction p.s.h. φ sur X telle que

$$ic(M) + i\partial\bar{\partial}\varphi \geq (s + \varepsilon)ic(\det Q) + ic(\det E) - i \text{Ricci}(X)$$

avec $s = \inf(n, q) + \inf(n, r - q)$, $\varepsilon > 0$. Alors pour toute section globale f de $\text{Hom}(Q, Q \otimes M)$, telle que $\int_X |f|^2 e^{-\varphi} dV < +\infty$, il existe une section h de $\text{Hom}(Q, E \otimes M)$ telle que $g \circ h = f$ et

$$\int_X |h|^2 e^{-\varphi} dV \leq \left(1 + \frac{\inf(n, r - q)}{\varepsilon}\right) \int_X |f|^2 e^{-\varphi} dV.$$

Il en résulte un théorème d'extension : toute fonction holomorphe h sur X se prolonge à Ω avec contrôle de la croissance. Si l'on pose $\tilde{h} = h \circ \rho$, l'extension globale H est obtenue grâce à un théorème général de type HÖRMANDER-BOMBIERI-SKODA, qui améliore les résultats de B. JENNANE.

Théorème 1.5. – Soient $q = \text{codim } X$, $\varphi, \psi \in \text{PSH}(\Omega)$, ε un réel > 0 et \tilde{h} une fonction holomorphe sur l'ouvert $U = \{z \in \Omega; |F(z)| < e^{-\psi(z)}\}$ telle que

$$\int_U |\tilde{h}|^2 e^{2q\psi - \varphi} dV < +\infty.$$

Alors il existe une fonction holomorphe H sur Ω qui coïncide avec \tilde{h} sur X et telle que

$$\int_{\Omega} |H|^2 e^{2q\psi - \varphi} (1 + |F|^2 e^{2\psi})^{-q - \varepsilon} dV < +\infty.$$

Pour s'affranchir des hypothèses de régularité concernant les fonctions plurisousharmoniques (poids intervenant dans les estimations L^2 ou fonction d'exhaustion de la variété X), on est amené à démontrer un théorème d'approximation des fonctions p.s.h. sur une variété kählérienne X quelconque. A toute fonction φ p.s.h. (semi-continue) sur X , on associe les régularisées φ_ε par des noyaux construits à l'aide de l'application $\exp : TX \rightarrow X$:

$$\varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{\zeta \in T_z X} \varphi(\exp_z(\zeta)) \chi\left(\frac{|\zeta|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(\zeta),$$

où $C, \varepsilon > 0, n = \dim X, \chi \in C^\infty(\mathbb{R}), \chi > 0$ sur $] -\infty, 0], \chi = 0$ sur $[1, +\infty[$.

On montre que la partie négative du Hessien φ reste localement bornée, avec convergence uniforme si les nombres de LELONG de φ sont nuls.

Théorème 1.6. – *Quitte à remplacer $\varphi_\varepsilon(z)$ par $\varphi_\varepsilon(z) + \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} \psi(z)$ avec $\psi \in C^\infty(X), \psi > 0$ convenable, il existe des familles (λ_ε) de fonctions > 0 et (γ_ε) de $(1, 1)$ -formes > 0 de classe C^∞ ayant les propriétés suivantes :*

- (a) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z)$ en tout point $z \in X$;
- (b) φ_ε et λ_ε sont croissantes par rapport à ε ;
- (c) $i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \geq \gamma_\varepsilon - \lambda_\varepsilon\omega$ (où ω est une métrique kählérienne sur X) ;
- (d) $\lim \text{p.p.}_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon =$ partie absolument continue de $i\partial\bar{\partial}\varphi$;
- (e) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon(z) = 0$ en tout point z où le nombre de Lelong $\nu(\varphi, z)$ est nul.

Ce théorème permet notamment de retrouver certains résultats de RICHBERG et GREENE-WU sur l'approximation des fonctions p.s.h. continues. Il permet aussi de vérifier que toute variété kählérienne faiblement pseudoconvexe est complète, sans hypothèses de régularité.

2. Courants positifs fermés.

Soit $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ un courant de bidimension (p, p) sur une variété analytique complexe X de dimension n . On dit que T est faiblement ≥ 0 si $i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ est une mesure positive pour tout système de formes $\alpha_j \in \mathcal{D}_{1,0}(X)$. La positivité forte est la notion duale. Comme dans le cas des fibrés > 0 , il existe des relations entre ces deux notions de positivité. Le prototype de tels résultats est le suivant.

Théorème 2.1. – *Soit α une (p, p) -forme faiblement > 0 sur \mathbb{C}^n . On définit les constantes $C(n, p), C'(n, p)$ par $C(n, p) + C'(n, p) = (n+1)!/(n-p+2)!, C(n, 1) = 1$, et la relation de récurrence*

$$C'(n, p) = \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p-1}{r} C(n-r, p-r).$$

Alors on a les inégalités de positivité forte :

$$-C'(n, p) \operatorname{tr}(\alpha) \frac{\omega^p}{p!} \leq_S \alpha \leq_S C'(n, p) \operatorname{tr}(\alpha) \frac{\omega^p}{p!}$$

où $\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} |z|^2$ et où $\operatorname{tr}(\alpha)$ est la trace de α .

Notre objectif sera ensuite de donner une définition souple et intrinsèque des nombres de LELONG d'un courant faiblement > 0 fermé.

On se donne une fonction $\varphi \geq 0$ de classe C^2 sur X telle que $\log \varphi$ soit p.s.h. et telle qu'il existe $R > 0$ vérifiant $\{\varphi < R\} \cap \operatorname{Supp} T \Subset X$. Grâce à une formule générale de type LELONG-JENSEN, on montre l'existence de la limite

$$\nu(T, \varphi) = \lim_{r>0, r \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\{\varphi < r\}} T \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^p,$$

qu'on appellera nombre de LELONG de T par rapport au poids φ .

On retrouve la définition classique du nombre $\nu(T, z)$ en un point $z \in \mathbb{C}^n$ en posant $\varphi(\zeta) = |\zeta - z|^2$. Y.T. SIU a démontré l'invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées analytiques locales, résultat qui se généralise aisément dans ce cadre :

Théorème 2.2. – Soit ψ une fonction ayant les mêmes propriétés que φ . On suppose que

$$\liminf \frac{\log \psi(z)}{\log \varphi(z)} \geq \ell$$

quand $z \in \operatorname{Supp} T$ et $\varphi(z)$ tend vers 0. Alors

$$\nu(T, \psi) \leq \ell^p \nu(T, \varphi).$$

En particulier $\nu(T, \psi) = \nu(T, \varphi)$ si $\log \psi \sim \log \varphi$.

Soit maintenant $F : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés (ou d'espaces) analytiques, dont la restriction au support de T est propre. Il est particulièrement intéressant d'examiner les nombres de LELONG associés à l'image directe $F_* T$.

Théorème 2.3. – Si $x \in X$, on définit la p -multiplicité de F en x par :

$$\mu_p(F, x) = \sup\{s_1 s_2 \dots s_p\},$$

où $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_N$ sont les ordres d'annulation en x des composantes F_1, F_2, \dots, F_N de F suivant des coordonnées locales au point $y = F(x) \in Y$. Alors, pour tout point $y \in Y$ tel que la fibre $F^{-1}(y) \cap \operatorname{Supp} T$ soit totalement discontinue, on a

$$\nu(F_* T, y) \geq \sum_{x \in F^{-1}(y)} \mu_p(F, x) \nu(T, x).$$

Une inégalité inverse $\nu(F_*T, y) \leq \sum \bar{\mu}_p(F, x)\nu(T, x)$ peut également être obtenue si la fibre $F^{-1}(y)$ est finie, avec des multiplicités $\bar{\mu}_p(T, x) \geq \mu_p(F, x)$.

En combinant la formule de Jensen déjà mentionnée avec le théorème 2.2., on obtient un lemme de SCHWARZ assez général et très utile en théorie des nombres.

Théorème 2.4. – Soient P_1, P_2, \dots, P_N des polynômes de degré δ dans \mathbb{C}^n dont les parties principales admettent l'origine pour unique zéro commun. Alors il existe une constante $C > 1$ telle que pour toute fonction entière G dans \mathbb{C}^n et tout $R \geq r \geq 1$ on ait

$$\log |G|_r \leq \log |G|_R - \delta^{1-n} \nu(P_*T, 0) \log R/Cr$$

avec $|G|_r = \sup_{|z|=r} |G(z)|$, $T = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} |G|$.

Ce lemme de SCHWARZ permet de retrouver le théorème de E. BOMBIERI sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes, ainsi que certaines conjectures de WALDSCHMIDT-CHOODNOVSKY concernant les zéros de polynômes dans \mathbb{C}^n .

Corollaire 2.5. – Soit S une partie finie de \mathbb{C}^n . Pour tout entier $t \geq 1$, on considère le nombre $\omega_t(S) =$ degré minimum des polynômes non nuls s'annulant à l'ordre t sur S , et

$$\Omega(S) = \inf \left\{ \frac{\omega_t(S)}{t}; t \geq 1 \right\}.$$

Alors

$$(a) \quad \Omega(S) \geq \frac{(\omega_1(S) + 1) \dots (\omega_1(S) + n - 1)}{\omega_1(S)^{n-2} n!};$$

$$(b) \quad \Omega(S) \geq \frac{n+1}{n} \text{ si } \omega_1(S) \geq 2.$$

La dernière partie de la thèse est consacrée à l'étude des éléments extrémaux du cône des courants fortement > 0 fermés, problème soulevé par P. LELONG et R. HARVEY. Soit Γ_d la suite de courbes de Fermat $z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On montre que la suite des courants d'intégration $\frac{1}{d}[\Gamma_d]$ converge faiblement vers un courant extrémal sur \mathbb{P}^2 qui n'est pas un cycle analytique. L'existence et le calcul explicite du courant limite reposent sur un théorème de support, valable en particulier pour les courants positifs fermés.

Théorème 2.6. – Soit Θ un courant de bidimension (p, p) , d'ordre 0 ainsi que $d\Theta$, à support dans une sous-variété réelle S de classe C^1 d'une variété analytique complexe X .

(a) Si la dimension du plus grand espace complexe tangent à S est en tout point $< p$, nécessairement $\Theta = 0$.

(b) On suppose $d\Theta = 0$. Si S est fibrée en sous-variétés complexes connexes de dimension p , et totalement réelle dans les directions transverses, alors Θ est somme (par rapport à une mesure complexe) des courants d'intégration sur les fibres.

Grâce aux théorèmes de prolongement des courants > 0 fermés de masse finie dus à H. SKODA, on construit ensuite pour toute dimension intermédiaire $0 < p < n$ des exemples de courants extrémaux dans \mathbb{P}^n et \mathbb{C}^n qui ne sont pas des cycles analytiques.

Le problème des courants extrémaux est en fait lié de manière directe à la conjecture de Hodge, via le théorème de KREIN-MILMAN. Si tout courant extrémal dans \mathbb{C}^n était un cycle analytique, la conjecture de HODGE serait vraie pour les sous-variétés de \mathbb{P}^n , avec une formulation très forte qui ne tient pas compte des obstructions cohomologiques. On construit donc par ce biais de nouveaux contre-exemples de nature topologique.

Dans une direction positive, on démontre un théorème d'approximation des courants ≥ 0 fermés de bidegré $(1, 1)$ par des diviseurs irréductibles. La démonstration utilise d'une part une idée d'OKA et LELONG pour l'approximation des fonctions p.s.h. par des logarithmes de modules de fonctions holomorphes, d'autre part une méthode générale de constructions d'hypersurfaces irréductibles. L'essentiel de cette méthode est résumé par le résultat suivant.

Théorème 2.7. – *Soit S un ensemble analytique dans \mathbb{C}^n , défini par des équations $F_1 = F_2 = \dots = F_N = 0$. On suppose que S est en tout point de codimension ≥ 2 . Soit φ une fonction croissante > 0 telle que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty.$$

Alors il existe des fonctions entières G_1, G_2, \dots, G_N telles que

- (a) *le diviseur associé à la fonction $H = F_1 G_1 + \dots + F_N G_N$ est irréductible ;*
- (b) *le lieu singulier de l'hypersurface $\{H = 0\}$ est contenu dans S .*
- (c) *$\log(|G_1| + \dots + |G_N|) \leq \varphi(\log|z|)$ sur \mathbb{C}^n .*

En combinant le théorème 2.7 avec le contre-exemple de CORNALBA-SHIFFMAN au problème de Bezout transcendant, on obtient des exemples de courbe à croissance lente ayant une suite de points singuliers à croissance rapide. Grâce au théorème de PALEY-WIENER, il en découle également certaines applications à l'analyse harmonique, notamment en ce qui concerne l'étude des propriétés arithmétiques de l'idéal $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans l'anneau de convolution des courants à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$.

Pour chacun des résultats énoncés dans cette introduction, les références internes aux articles de la Thèse sont les suivantes.

Théorème 1.1 : article II / 1.2 : I, II / 1.3 : II / 1.4 : III / 1.5 : III / 1.6 : II / 2.1 : I / 2.2 : V / 2.3 : V / 2.4 : IV / 2.5 : IV / 2.6 : VI / 2.7 : VII.

Références bibliographiques

- [I] *Relations entre les différentes notions de fibrés et de courants positifs* ; Séminaire P. LELONG, H. SKODA (Analyse), Années 1980/1981 et Colloque de Wimereux, Lecture Notes in Math. n° 919, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York.
- [II] *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète* ; Ann. Scient. de l'E.N.S., 4ème Série, 15 (1982), 457-511.
- [III] *Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2* ; Séminaire P. LELONG, H. SKODA (Analyse), Années 1980/1981.
- [IV] *Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques* ; Bull. Soc. Math. France 10 (1982) 75-102.
- [V] *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé* ; Ann. de l'Inst. Fourier Grenoble 32 (1982) 37-66.
- [VI] *Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge* ; Invent. Math. 69 (1982) 347-374.
- [VII] *Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donné dans \mathbb{C}^n* ; Ann. de l'Inst. Fourier 30 (1980) 219-236.

Exposé de seconde thèse

(Proposition de Louis Boutet de Monvel)

- [Hol] *Constructibilité des faisceaux de solutions des systèmes différentiels holonomes (d'après Masaki Kashiwara)*, Séminaire P. LELONG, H. SKODA (Analyse), Année 1982/1983.