Séminaire P.LELONG, H.SKODA
(Analyse)
20e et 21e année, 1980-1981.

SCINDAGE HOLOMORPHE D'UN MORPHISME DE FIBRÉS VECTORIELS SEMI-POSITIFS AVEC ESTIMATIONS L^2

par J.-P.DEMAILLY

Table des matières.

0. Introduction et notations.

Le présent travail réétudie dans un cas particulier les techniques développées par H.SKODA [11] , [12] , [13] , [14] , [15] pour l'étude des morphismes surjectifs de fibrés vectoriels holomorphes semi-positifs. On considère une suite exacte

(1) $$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

de fibrés vectoriels holomorphes, de rangs respectifs s,p,q (avec $s = p-q$) , au-dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n . On dit qu'un morphisme de Q dans E réalise un scindage holomorphe de la suite exacte (1) si

$$g \circ h = \mathrm{Id}_Q ,$$

de sorte qu'on a alors la décomposition

$$E = S \oplus h(Q) .$$

Plus généralement, étant donné un fibré linéaire M sur X , et une section f du fibré $\mathrm{Hom}(Q, Q \otimes M)$, on recherche s'il existe une section h du fibré $\mathrm{Hom}(Q, E \otimes M)$ telle que

$$g \circ h = f .$$

Pour obtenir de tels résultats, nous serons amenés à faire des hypothèses de convexité sur la variété X , et de positivité sur les fibrés E et M . Nous supposerons, comme H.SKODA [13] , [14] , [15] , que X est une <u>variété kählérienne</u>, munie d'une métrique de Kähler ω non nécessairement complète, et que X est faiblement pseudoconvexe, c'est-à-dire qu'il existe sur X une fonction de classe C^2, plurisousharmonique et exhaustive. Les variétés compactes, les variétés de Stein, l'espace total d'un fibré holomorphe semi-négatif an sens de Griffiths au-dessus d'une variété compacte, sont faiblement pseudoconvexes. On suppose de plus que les fibrés E, M sont munis de métriques hermitiennes, et que les fibrés S, Q, $\mathrm{Hom}(Q, Q\otimes M)$, $\mathrm{Hom}(Q, E\otimes M)$ sont munis des métriques naturelles déduites de celles de E et M.

Les hypothèses de positivité sont les suivantes (voir le paragraphe 1 pour les définitions concernant la courbure et la positivité) : le fibré E est semi-positif au sens de Griffiths, et il existe un réel $k > \mathrm{Inf}(n,q) + \inf(n,s)$ tel que l'une des conditions (2) ou (3) soit réalisée :

(2) $ic(M) - ik\, c(\text{dét } Q) - ic(\text{dét } E) + i\,\mathrm{Ricci}(\omega) \geqslant 0$;

(3) le rang s de S est égal à 1, ou bien E est semi-positif au sens de Nakano, et on a

$$ic(M) - ikc(\text{dét } Q) + i\,\mathrm{Ricci}(\omega) \geqslant 0 .$$

On a alors un théorème d'existence avec estimations L^2 précises (on a noté $dV = \frac{\omega^n}{n!}$ l'élément de volume canonique sur X).

THÉORÈME 1. - Pour toute section globale f de $\mathrm{Hom}(Q, Q\otimes M)$ telle que le second membre de (5) soit fini, il existe une section globale h de $\mathrm{Hom}(Q, E\otimes M)$ telle que

(4) $g \circ h = f$,

(5) $$\int_X |h|^2\, dV \leqslant C \int_X |f|^2\, dV ,$$

avec $C = \dfrac{k - \mathrm{Inf}(n,q)}{k-\mathrm{Inf}(n,s)-\mathrm{Inf}(n,q)}$.

En pratique, le théorème 1 s'appliquera surtout au cas où la variété X est de Stein, car les conditions de positivité et la convergence globale des intégrales semblent supposer l'existence de fonctions d'exhaustion strictement plurisousharmoniques (du moins lorsqu'on cherche à construire des scindages holomorphes).

La démonstration repose sur l'inégalité de Kodaïra-Nakano, et sur le lien qui existe entre les formes de courbure des fibrés Q, S et l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte (1). Les calculs sont directement inspirés de [14] , mais utilisent de plus une relation entre les notions de positivité de P.A.GRIFFITHS et de S.NAKANO, récemment publiée par l'auteur dans [3] en collaboration avec H.SKODA , et dans [2].

Etant donné une sous-variété X de dimension n de $\mathbb{C}^p$, le théorème 1 s'applique en particulier à la suite exacte

$$0 \to TX \to T\mathbb{C}^p|_X \to NX \to 0$$

qui définit le fibré normal NX de X . Cette idée , déjà utilisée par C.A.BERENSTEIN et B.A.TAYLOR [1] , nous permet de montrer l'existence d'un voisinage tubulaire U se rétractant holomorphiquement sur X , et d'estimer la taille de U*. En appliquant des techniques analogues à celles de B.JENNANE [9] , nous obtenons au dernier paragraphe un théorème d'extension des fonctions holomorphes avec contrôle de la croissance** .

Je tiens à remercier Monsieur Henri SKODA pour ses nombreuses suggestions, qui ont permis d'améliorer la rédaction initiale.

1. Rappel sur les différentes notions de positivité.

Si E est un fibré hermitien, on peut définir une connexion canonique D sur E , hermitienne et holomorphe (cf. A.DOUADY et J.-L.VERDIER [4] , P.A.GRIFFITHS [5]) , qui envoie l'espace $C^\infty_{a,b}(X,E)$ des formes de type (a,b) à valeurs dans E , dans $C^\infty_{a+1,b}(X,E) \oplus C^\infty_{a,b+1}(X,E)$.

La forme de courbure $c(E)$ du fibré E est alors définie par la propriété suivante :

$$D^2u = c(E).u$$

pour toute section C^∞ u de E , de sorte que $ic(E)$ est une $(1,1)$-forme à valeurs dans le fibré $\mathrm{Herm}(E,E)$ des endomorphismes hermitiens de E ; on identifiera toujours $ic(E)$ à la forme hermitienne sur $TX \otimes E$ qui lui est associée canoniquement.

DÉFINITION 1. - <u>Soit</u> Θ <u>une forme hermitienne sur un produit tensoriel</u> $T \otimes E$ <u>d'espaces vectoriels complexes</u> T <u>et</u> E <u>de dimensions respectives</u> n <u>et</u> p . <u>On dira que</u> Θ <u>est semi-positive</u>

*(cf. § 4, théorèmes 4 et 5).

**(cf. corollaires 2,3,et 4 du théorème 6).

(6) *au sens de GRIFFITHS, si pour tout vecteur décomposable* $x = t \otimes e \in T \otimes E$, *on a* $\Theta(x,x) \geqslant 0$;

(7) *au sens de NAKANO, si pour tout* $x \in T \otimes E$, *on a* $\Theta(x,x) \geqslant 0$.

Le fibré vectoriel hermitien E *sur la variété* X *est dit semi-positif au sens de GRIFFITHS (resp. au sens de NAKANO) si pour tout point* $z \in X$, *la forme hermitienne* $ic(E)$ *sur la fibre* $T_z X \otimes E_z$ *est semi-positive dans ce sens.*

Nous noterons $\geqslant_G$ la semi-positivité de GRIFFITHS, $\geqslant_N$ celle de NAKANO. Il est clair que la semi-positivité de NAKANO entraîne celle de GRIFFITHS. De plus, les deux notions coïncident si $n = 1$ ou si $p = 1$, et sont reliées en général par le théorème suivant.

THÉORÈME 2 - *Soit* $\Theta \geqslant_G 0$ *une forme hermitienne sur* $T \otimes E$.
Si $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ *est une base orthonormée quelconque de* E *(supposé hermitien) on définit* $Tr_E\, \Theta$ *par*

$$Tr_E\, \Theta(t,t) = \sum_{j=1}^{p} \Theta(t \otimes e_j , t \otimes e_j)$$

pour $t \in T$. *Alors on a*

(8) $\Theta + Tr_E\, \Theta \otimes Id_E \geqslant_N 0$,

(9) $\Theta \leqslant_N Inf(n,p)\, Tr_E \Theta \otimes Id_E$.

Soit E *un fibré vectoriel hermitien sur* X , *semi-positif (resp. positif) au sens de GRIFFITHS. Alors*

(10) $E \otimes \text{dét}\, E \geqslant_N 0$ (resp. $E \otimes \text{dét}\, E >_N 0$) ,

$E^* \otimes \text{dét}\, E^* \leqslant_N 0$ (resp. $E \otimes \text{dét}\, E <_N 0$) ,

(11) $E \otimes (\text{dét}\, E)^{-Inf(n,p)} \leqslant_N 0$ (resp. $<_N 0$) ,

$E^* \otimes (\text{dét}\, E)^{Inf(n,p)} \geqslant_N 0$ (resp. $>_N 0$) .

REMARQUE 1. Les deux assertions de (10) (ou de (11)) ne sont pas équivalentes car la positivité de E équivaut à la négativité de E^* seulement au sens de GRIFFITHS (mais pas au sens de NAKANO en général).

Les points (9) et (11) sont en fait une généralisation du lemme fondamental (3,5) de [14] . Lorsque E est quotient d'un fibré trivial, la seconde assertion de (11) est d'ailleurs conséquence de ce lemme de [14] .

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [2] , [3] pour une preuve de (8).

Preuve de (9) : montrons tout d'abord que

$$\mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E - \Theta \geqslant_G 0 .$$

En effet, tout vecteur décomposable $x \in T \otimes E$ peut s'écrire $x = t \otimes e$ où $\|e\| = 1$; si l'on choisit une base orthonormée $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de E telle que $e_1 = e$,il vient

$$\Theta(x,x) = \Theta(t \otimes e_1, t \otimes e_1) \quad , \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E(x,x) = \sum_{j=1}^{p} \Theta(t \otimes e_j, t \otimes e_j) \|e\|^2 \geqslant \Theta(x,x) ,$$

grâce à l'hypothèse $\Theta \geqslant_G 0$. D'après (8) on a donc

$$\mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E - \Theta + \mathrm{Tr}_E(\mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E - \Theta) \otimes \mathrm{Id}_E = p\, \mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E - \Theta \geqslant_N 0 ,$$

ce qui démontre (9) lorsque $p \leqslant n$. Lorsque $n \leqslant p$, il est aisé de voir que

$$T \otimes E = \bigcup_{F \subset E,\ \dim F = n} T \otimes F .$$

Appliquons le résultat déjà trouvé à la restriction Θ_F de Θ à $T \otimes F$, pour tout sous-espace F de dimension n de E . (9) se déduit des inégalités suivantes

$$\Theta_F \leqslant_N n\, \mathrm{Tr}_F\, \Theta_F \otimes \mathrm{Id}_F \leqslant_N n\, \mathrm{Tr}_E \Theta \otimes \mathrm{Id}_F ,$$

soit $\Theta \leqslant_N n\, \mathrm{Tr}_E \Theta \otimes \mathrm{Id}_E$ sur $T \otimes F$.

Preuve de (10) et (11).

Il est bien connu que la courbure du fibré $\det E = \Lambda^p E$ est reliée à celle de E par la formule

(12) $$c(\det E) = \mathrm{Tr}_E\, c(E) = - \mathrm{Tr}_E\, c(E^*) ,$$

et que pour deux fibrés vectoriels hermitiens E_1 et E_2 , on a

(13) $$c(E_1 \otimes E_2) = c(E_1) \otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1} \otimes c(E_2) .$$

(10) et (11) se déduisent alors de (8) et (9) en prenant $\Theta = ic(E)$ ou $\Theta = -ic(E^*)$ selon le cas.

2. Estimations a priori et inégalités L^2 .

On considère , avec les notations et hypothèses de l'introduction, la suite exacte (1) :

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0 .$$

La connexion canonique D sur E se décompose suivant le scindage orthogonal C^∞ , $E = S \otimes Q$, de la manière suivante

$$D = \begin{pmatrix} D_S & -\beta^* \\ \beta & D_Q \end{pmatrix} \qquad (14)$$

où D_S et P_Q sont respectivement les connexions canoniques sur S et Q , et où $\beta \in C^\infty_{1,0}(X, \mathrm{Hom}(S,Q))$.

Nous renvoyons à P.A.GRIFFITHS [5] pour la démonstration de (14), et à H.SKODA [14] pour le détail des calculs qui vont suivre. On a classiquement

$$c(E) = D^2 = \begin{pmatrix} D_S^2 - \beta^* \wedge \beta & -D\beta^* \\ D\beta & D_Q^2 - \beta \wedge \beta^* \end{pmatrix}$$

d'où par définition

$$(15) \quad \begin{cases} c(S) = D_S^2 = c(E)|_S + \beta^* \wedge \beta \\ c(Q) = D_Q^2 = c(E)|_Q + \beta \wedge \beta^* . \end{cases}$$

Soit $K = \Lambda^n T^* X$ le fibré canonique de la variété X et M un fibré en droites sur X . Par application à (1) du foncteur $\mathrm{Hom}(Q, ? \otimes K \otimes M)$, on obtient la suite exacte

$$(16) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q, S \otimes K \otimes M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q, E \otimes K \otimes M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q, Q \otimes K \otimes M) \longrightarrow 0 ,$$

et la connexion $D_{\mathrm{Hom}(Q,\, E\otimes K\otimes M)}$ se décompose suivant le scindage orthogonal de (16) , en

$$D_{\mathrm{Hom}(Q,\, E\otimes K\otimes M)} = \begin{pmatrix} D_{\mathrm{Hom}(Q,\, S\otimes K\otimes M)} & -\beta^* \\ \beta & D_{\mathrm{Hom}(Q,\, Q\otimes K\otimes M)} \end{pmatrix}.$$

Posons $R = \mathrm{Hom}(Q, S\otimes M)$ pour simplifier les notations.

PROBLÈME. - <u>Etant donné une section holomorphe</u> f <u>de</u> $\mathrm{Hom}(Q, Q\otimes K\otimes M)$, <u>chercher un</u>

<u>relèvement</u> h <u>de</u> f <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(Q, E \otimes K \otimes M)$ <u>sous la forme</u>

$$h = f + u ,$$

<u>avec</u> $u \in C^{\infty}(X, R \otimes K) = C^{\infty}_{n,0}(X, R)$.

On aura bien par construction $g \circ h = f$, et h sera holomorphe si et seulement si

$$D''_R\, u = - D''_{\mathrm{Hom}(Q,\, E \otimes K \otimes M)} f = \beta^{*} f . \tag{17}$$

On résout cette équation par la méthode d'HÖRMANDER [6] et [7] , ce qui, modulo l'inégalité de KODAIRA-NAKANO (cf. [4], exposé III, th. 3) , nécessite l'obtention d'une estimation a priori du type suivant (avec une constante $A \geqslant 0$)

$$|(\beta^{*} f | v)|^2 \leqslant A(ic(R)\Lambda\, v \,|\, v) \tag{18}$$

pour toute $(n,1)$ forme v à valeurs dans R , de classe C^{∞} et à support compact.

Le produit scalaire $(\,|\,)$ est défini à partir du produit scalaire ponctuel $< , >$ des formes par la formule

$$(v \,|\, w) = \int_X < v, w > dV ,$$

pour deux formes v et w à valeurs dans R , de classe C^{∞} , et à support compact.

Λ désigne d'autre part l'opérateur de type $(-1,-1)$, adjoint de l'opérateur L de multiplication extérieure par ω , pour le produit scalaire ponctuel $< , >$.

Nous nous servirons de la proposition suivante (cf. H.SKODA [14] , lemme (3,1) , proposition 3.1. , et conclusion (4,17)).

PROPOSITION. - <u>Sous l'hypothèse</u> (18), <u>il existe une forme</u> $u \in C^{\infty}(X, R \otimes K)$ <u>vérifiant</u> (17) : $D''_R\, u = \beta^{*} f$, et :

$$\int_X |u|^2\, dV \leqslant A . \tag{19}$$

Le relèvement $h = f + u$ de f est donc tel que

$$\int_X |h|^2\, dV \leqslant A + \int_X |f|^2\, dV , \tag{20}$$

car f et u sont orthogonaux.

Le théorème 1 sera démontré si nous établissons l'inégalité (18) et déterminons la constante A .

3. Calcul de courbure.

Nous aurons besoin des notations et résultats suivants .

Le produit intérieur $a \lrcorner b$ de deux formes à valeurs scalaires est défini en tout point z de X par dualité :

$$< a \lrcorner b \, , \, c > \; = < b \, , \, \bar{a} \wedge c > \quad ;$$

on étend le produit intérieur au cas où a, b sont des formes à valeurs dans des fibrés vectoriels E, F par bilinéarité (le résultat étant à valeurs dans le fibré G si on a un morphisme bilinéaire $E \times F \longrightarrow G$).

LEMME 1. - (H.SKODA [14] , lemmes (3,3) et (3,4)) .

Pour toute forme $v \in C^\infty_{n,1}(X, R) = C^\infty_{0,1}(X, \mathrm{Hom}(Q, S \otimes K \otimes M))$ à support compact, toute (1,1)-forme réelle $\Theta \geqslant_N 0$ à valeurs dans $\mathrm{Herm}(R, R)$, et toute forme $\beta \in C^\infty_{1,0}(X, \mathrm{Hom}(S, Q))$, on a

(21) $$(\Theta \;\; \Lambda \;\; v \,|\, v) \geqslant 0$$

(22) $$(-i\beta^* \wedge \beta \; \Lambda \; v \,|\, v) = \|\beta \lrcorner v\|^2 .$$

Démonstration de (21). Soit

$$\Theta = i \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk} \, dz_\lambda \wedge d\bar{z}_\mu \otimes e^*_j \otimes e_k \ ,$$

$$v = \frac{i}{2} \sum_{\lambda,j} v_{\lambda j} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_\lambda \otimes e_j \ ,$$

l'écriture canonique de Θ et de v relativement à une base orthonormée $(dz_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant n}$ de $T^* X$, et à une base orthonormée $\{e_j\}$ de la fibre de R . On a en tout point

$$\Lambda v = \sum_{\lambda,j} (-1)^{n-\lambda} v_{\lambda j} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_\lambda} \wedge \ldots \wedge dz_n \otimes e_j \ ,$$

$$\Theta \Lambda v = i \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk} \, v_{\lambda j} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_\mu \otimes e_k \ ,$$

$$< \Theta \Lambda v, v > = 2^n \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk} \, v_{\lambda j} \, \bar{v}_{\mu k} \geqslant 0 \ ,$$

d'après l'hypothèse de semi-positivité de NAKANO de Θ .

Démonstration de (22). Ecrivons en tout point de X

$$\beta = \sum_{\lambda,j,\ell} \beta_{\lambda \ell j} \, dz_\lambda \otimes \varepsilon^*_j \otimes \eta_\ell \ ,$$

$$v = \frac{i}{2} \sum_{\lambda,j,m} v_{\lambda j} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_\lambda \otimes \varepsilon_j \ ,$$

avec $v_{\lambda j} \in Q^* \otimes M$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant \ell \leqslant q$, dans des bases orthonormées $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$, $(\eta_\ell)_{1 \leqslant \ell \leqslant q}$ des fibres de S et Q . On vérifie que

$$-i\beta^* \wedge \beta = i \sum_{\lambda,\mu,j,k,\ell} \beta_{\lambda\ell j} \overline{\beta_{\mu\ell k}}\, dz_\lambda \wedge d\bar{z}_\mu \otimes \varepsilon_j^* \otimes \varepsilon_k ,$$

de sorte que les coefficients de $\Theta = -i\beta^* \wedge \beta \in \mathrm{Herm}(S,S)$ sont donnés par

$$a_{\lambda\mu jk} = \sum_\ell \beta_{\lambda\ell j} \overline{\beta_{\mu\ell k}} .$$

D'après la première partie de la démonstration, on a

$$\begin{aligned} < -i\beta^* \wedge \beta \,\Lambda\, v,v > &= < \Theta \otimes \mathrm{Id}_{Q^* \otimes M} \Lambda . v,v > \\ &= 2^n \sum_{\lambda,\mu,\, j,k,\ell} \beta_{\lambda\ell j} \overline{\beta_{\mu\ell k}} < v_{\lambda j} , v_{\mu k} > \\ &= 2^n \sum_\ell \Big| \sum_{\lambda,j} \beta_{\lambda\ell j} v_{\lambda j} \Big|^2 . \end{aligned}$$

(22) résulte donc de l'inégalité

$$\beta \lrcorner v = (-1)^n i \sum_{\lambda,j,\ell} \beta_{\lambda\ell j} v_{\lambda j} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \otimes \eta_\ell . \quad \blacksquare$$

Nous disposons maintenant des moyens techniques nécessaires pour effectuer le calcul de courbure.

Puisque $R = Q^* \otimes S \otimes M$, on a d'après la formule (13)

(23) $c(R) = c(Q^*) \otimes \mathrm{Id}_{S \otimes M} + c(S) \otimes \mathrm{Id}_{Q^* \otimes M} + c(M) \otimes \mathrm{Id}_{Q^* \otimes S}$.

Supposons le fibré E semi-positif au sens de GRIFFITHS.

Alors il en est de même pour le fibré Q . D'après le théorème 2 (11) on a

(24) $ic(Q^*) + \mathrm{Inf}(n,q)\, ic(\mathrm{dét}\, Q) \otimes \mathrm{Id}_{Q^*} \geqslant_N 0$.

Puisque $-i\beta^* \wedge \beta \geqslant_G 0$ (en fait on a même $-i\,\beta^* \wedge \beta \geqslant_N 0$) , (9) et (15) entraînent successivement

(25) $i(c(E)|_S - c(S)) = -i\beta^* \wedge \beta \leqslant_N \mathrm{Inf}(n,s) i\, \mathrm{Tr}(-\beta^* \wedge \beta) \otimes \mathrm{Id}_S$

$$= \mathrm{Inf}(n,s)\, i\, \mathrm{Tr}\, \beta \wedge \beta^* \otimes \mathrm{Id}_S ,$$

(26) $i(c(E)|_S - c(S)) \leqslant_N \mathrm{Inf}(n,s)\, i(c(\mathrm{dét}\, Q) - \mathrm{Tr}\, c(E)|_Q) \otimes \mathrm{Id}_S$,

d'où , après substitution de (24) et (26) dans (23) :

$ic(R) \geqslant_N i\,[c(M) - (\mathrm{Inf}(n,q) + \mathrm{Inf}(n,s))c(\mathrm{dét}\, Q) + \mathrm{Inf}(n,s).\mathrm{Tr}\, c(E)|_Q] \otimes \mathrm{Id}_R + ic(E)|_S \otimes \mathrm{Id}_{Q^* \otimes M}$.

Si (hypothèse (3)) S est de rang 1 , ou si $E \geqslant_N 0$, on a $ic(E)|_S \geqslant_N 0$; de façon générale, (8) implique

$$ic(E)|_S + i\ \mathrm{Tr}\ c(E)|_S \otimes \mathrm{Id}_S \quad \geqslant_N \quad 0\ .$$

En substituant à nouveau dans (27), il vient

$$ic(R) \geqslant_N i[c(M) - (\mathrm{Inf}(n,q) + \mathrm{Inf}(n,s)c(\text{dét}\ Q) + \mathrm{Inf}(n,s)\mathrm{Tr}\ c(E)|_Q - \mathrm{Tr}\ c(E)|_S] \otimes \mathrm{Id}_R\ .$$

Posons $\varepsilon = k - \mathrm{Inf}(n,q) - \mathrm{Inf}(n,s) > 0$; comme $\mathrm{Tr}\ \beta\wedge\beta^* = c(\text{dét}\ Q) - \mathrm{Tr}\ c(E)|_Q$ d'après (15), on obtient

(28) $$ic(R) - i\,\varepsilon\,\mathrm{Tr}\ \beta\wedge\beta^* \otimes \mathrm{Id}_R \geqslant_N$$

$$i(c(M) - k\ c(\text{dét}\ Q) + (k - \mathrm{Inf}(n,q))\mathrm{Tr}\ c(E)|_Q - \mathrm{Tr}\ c(E)|_S) \otimes \mathrm{Id}_R\ ;$$

le terme $\mathrm{Tr}\ c(E)|_S$ peut même être omis sous l'hypothèse (3).

Remplaçons M par $M \otimes K^* = M \otimes \text{dét}\ TX$; compte tenu de ce que $\mathrm{Ricci}(\omega) = c(\text{dét}\ TX)$ et $E \geqslant_G 0$, le premier membre de (28) est semi-positif sous les hypothèses (2) ou (3). La propriété (21) entraîne donc l'inégalité suivante :

(29) $$(ic(R)\,\Lambda v|v) \geqslant \varepsilon(i\ \mathrm{Tr}\ \beta\wedge\beta^*\,\Lambda v|\ v)\ .$$

Pour obtenir l'estimation a priori (18), il nous reste à majorer $|(\beta^*\ f|v)|^2$ en fonction de $(i\ \mathrm{Tr}\ \beta\wedge\beta^*\Lambda v|v)$.

Pour obtenir (18), il nous reste à majorer $|(\beta^*\ f\ |\ v)|^2$ en fonction de $(i\ \mathrm{Tr}\ \beta\wedge\beta^*\,\Lambda\, v|v)$. Par définition du produit intérieur, et d'après (22), on a

(30) $$|(\beta^* f|v)|^2 = |(f|\beta \lrcorner v)|^2 \leqslant \|f\|^2\ \|\beta \lrcorner v\|^2 = \|f\|^2\ (-i\beta^*\wedge\beta\,\Lambda v|v)\ .$$

Une nouvelle application de (21) fournit à partir de (25) :

(31) $$(-i\beta^*\wedge\beta\,\Lambda\, v|v) \leqslant \mathrm{Inf}(n,s)\ (i\ \mathrm{Tr}\,\beta\wedge\beta^*\ \Lambda\ v|v)\ ,$$

d'où en combinant avec (29):

LEMME 2. - <u>L'estimation</u> (18) $|(\beta^* f|v)|^2 \leqslant A(i\ c(R)\,\Lambda v|v)$ <u>est satisfaite, et on peut choisir la constante</u> A <u>égale à</u>

$$\frac{\mathrm{Inf}(n,s)}{k-\mathrm{Inf}(n,q) - \mathrm{Inf}(n,s)} \int_X |f|^2\ dV\ .$$

Le théorème 1 résulte maintenant de la proposition (cf. (20)) et du lemme 2.

<u>REMARQUE 2</u>. Les calculs précédents montrent en fait que le théorème est vrai si l'on suppose seulement

(32) $$i(c(M)-kc(\text{dét}\ Q)+(k-\mathrm{Inf}(n,q))\mathrm{Tr}\ c(E)|_Q-\mathrm{Tr}\ c(E)|_S+\mathrm{Ricci}\ \omega) \geqslant 0\ ,$$

le terme $\mathrm{Tr}\ c(E)|_S$ étant superflu si $s = 1$, ou si $E \geqslant_N 0$.

Mais nous avons préféré énoncer le théorème 1 avec des hypothèses géométriques qui ne supposent pas une connaissance approfondie de $c(E)$.

REMARQUE 3. Lorsque la section f du fibré $\mathrm{Hom}(Q, Q \otimes M)$ est de la forme $f = \mathrm{Id}_Q \otimes u$ pour une section u de M, on va montrer que

$$|(\beta^* f|v)|^2 \leqslant \mathrm{Inf}(\frac{n}{q},s) \, \|f\|^2 \, (i \operatorname{Tr} \beta \wedge \beta^* \Lambda v|v) ,$$

de sorte qu'on peut dans le lemme 2 prendre

$$A = \frac{\mathrm{Inf}(\frac{n}{q},s)}{k - \mathrm{Inf}(n,q) - \mathrm{Inf}(n,s)} \int_X |f|^2 \, dV ,$$

et remplacer la constante C du théorème 1 par

$$C' = 1 + \frac{\mathrm{Inf}(\frac{n}{q},s)}{k - \mathrm{Inf}(n,q) - \mathrm{Inf}(n,s)} .$$

Ecrivons en effet en chaque point $z \in X$ la section

$v \in C^\infty_{n,1}(X,R) = C^\infty(X, \mathrm{Hom}(Q,S \otimes K \otimes M))$ sous la forme $v = w \otimes e$, où e est un vecteur unitaire de la fibre $K_z \otimes M_z$, et où w est une $(0,1)$-forme à valeurs dans $\mathrm{Hom}_z(Q,S)$. On a

$$(33) \qquad \langle \beta^* f, v\rangle = \langle \beta^* \circ \mathrm{Id}_Q \otimes u, w \otimes e \rangle = \langle \beta^*, w\rangle \langle u, e \rangle .$$

Dans une base orthonormée (dz_j) de $T^*_z X$, les formes β et w s'écrivent

$$\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j \, dz_j , \quad \beta_j \in \mathrm{Hom}_z(S,Q) ,$$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j \, d\bar{z}_j , \quad w_j \in \mathrm{Hom}_z(Q,S) .$$

Il vient donc

$$\langle \beta^*, w\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \beta_j^*, w_j\rangle ,$$

$$(34) \quad |\langle \beta^*, w\rangle|^2 \leqslant n \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \, |v_j|^2 , \text{ avec } v_j = w_j \otimes e .$$

Si d'autre part, on a choisi la base (dz_j) de sorte que les éléments β_j soient orthogonaux (ce qui est toujours possible, car toute matrice $r \times n$, B peut s'écrire $B = U D V$, où D matrice "diagonale" $r \times n$, U et V matrices unitaires $r \times r$ et $n \times n$) on obtient successivement :

$$\beta \wedge \beta^* = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \beta_j \, \beta_k^* \, dz_j \wedge d\bar{z}_k ,$$

$$i \operatorname{Tr} \beta \wedge \beta^* = i \sum_{j=1}^n \operatorname{Tr}(\beta_j \, \beta_j^*) \, dz_j \wedge d\bar{z}_j = i \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \, dz_j \wedge d\bar{z}_j ,$$

(35) $$<i \operatorname{Tr} \beta \wedge \beta^{*} \Lambda v, v> = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 \, |v_j|^2 \quad ;$$

pour établir l'égalité (35), on se reportera à la démonstration de (21). En combinant (33), (34) et (35), on voit que

$$|<\beta^{*} f, v>|^2 \leqslant n <i \operatorname{Tr} \beta\wedge\beta^{*} \Lambda v, v> \; |u|^2$$
$$= \frac{n}{q} |f|^2 <i \operatorname{Tr} \beta\wedge\beta^{*} \Lambda v, v> .$$

Après intégration sur X, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|(\beta^{*} f|v)|^2 \leqslant \frac{n}{q}\left(\int_X |f|^2 \, dV\right) . (i \operatorname{Tr} \beta\wedge\beta^{*} \Lambda v|v) ,$$

et (30), (31) montrent qu'on peut remplacer $\frac{n}{q}$ par $\operatorname{Inf}(\frac{n}{q}, s)$. ∎

On va maintenant énoncer les résultats du théorème 1 en fonction d'une métrique donnée a priori sur Q, de manière à pouvoir traiter comme H.SKODA [14] le cas où le morphisme g dégénère.

Soit g^{*} le morphisme C^{∞}, transposé de g, pour les métriques données sur E et Q :

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{g^{*}} E .$$

Le morphisme $g^{*}(gg^{*})^{-1} : Q \longrightarrow E$, est le scindage C^{∞} de la suite exacte (1) qui envoie Q dans $(\operatorname{Ker} g)^{\perp} = S^{\perp}$; la métrique quotient $|\ |'$ sur Q est donc donnée en fonction de la métrique initiale $|\ |$ par

(36) $$|u|'^2 = |g^{*}(gg^{*})^{-1} u|^2 = <(gg^{*})^{-1} u,u> , \ u \in Q .$$

Désignons par $c'(\text{dét } Q)$ la forme de courbure de $\text{dét } Q$ relative à la métrique quotient sur Q. Il résulte aussitôt de (36) que pour tout $v \in \text{dét } Q$:

$$|v|'^2 = \text{dét}(gg^{*})^{-1} \; |v|^2 .$$

On a donc

$$c'(\text{dét } Q) = c(\text{dét } Q) + d'd'' \operatorname{Log} \text{dét}(gg^{*}) .$$

Si l'on veut conserver telles quelles les hypothèses de positivité (2) et (3), on est amené à multiplier la métrique de M par le poids $[\text{dét}(gg^{*})]^k$, de sorte que l'estimation (5) du théorème 1 devient

(37) $$\int_X |h|'^2 \, (\text{dét } gg^{*})^{-k} \, dV \leqslant C \int_X |f|'^2 \, (\text{dét } gg^{*})^{-k} \, dV .$$

Pour tout élément $h \in \operatorname{Hom}(Q, E)$, la norme $|h|'$ est donnée en fonction de la norme naturelle $|h|$ par

$$|h|'^2 = |h \circ g|^2 = \langle h \circ gg^*, h\rangle ,$$

et d'après (36), on a pour tout $f \in \mathrm{Hom}(Q, Q)$:

$$\begin{aligned} |f|'^2 &= \langle (gg^*)^{-1} \circ f \circ gg^* , f \rangle \\ &= (\text{dét } gg^*)^{-1} \langle \widetilde{gg}^* \circ f \circ gg^*, f \rangle , \end{aligned}$$

où $\widetilde{gg}^*$ désigne l'endomorphisme cotransposé de gg^*.

L'estimation (37) s'écrit donc

$$\int_X \langle h \circ gg^*, h \rangle (\text{dét } gg^*)^{-k} \, dV \leqslant C \int_X \langle \widetilde{gg}^* \circ f \circ gg^* , f \rangle (\text{dét } gg^*)^{-k-1} \, dV .$$

Si maintenant g n'est surjectif qu'au dessus de X privé d'un ensemble analytique Z, on suppose que Z est X-négligeable au sens suivant.

DÉFINITION 2. - <u>Nous dirons qu'un ensemble</u> $Z \subset X$ <u>est</u> X-<u>négligeable, s'il existe un sous-ensemble fermé</u> Y <u>de</u> X, <u>contenant</u> Z, <u>de mesure nulle, tel que l'ouvert</u> $X \setminus Y$ <u>soit faiblement pseudoconvexe, et tel que toute fonction de carré sommable sur un ouvert</u> U <u>de</u> X, <u>holomorphe dans</u> $U \setminus Y$, <u>se prolonge en une fonction holomorphe sur</u> U.

Lorsque la variété X est de Stein ou projective, Z est toujours X-négligeable : il suffit de prendre pour Y une hypersurface quelconque de X contenant Z.

Si Z est X-négligeable, le théorème 1 s'applique à $X \setminus Y$. Comme $k \geqslant 1$, la finitude de l'intégrale

$$\int_{X \setminus Y} \langle h \circ gg^*, h \rangle \, (\text{dét } gg^*)^{-k} \, dV$$

entraîne que h est localement L^2, donc que h se prolonge à X. D'où le

THÉORÈME 2. - <u>Etant donné un morphisme</u> $g : E \to Q$, <u>on suppose que l'ensemble analytique</u> $Z = \{z \in X | g(E_z) \neq Q_z\}$ <u>est</u> X-<u>négligeable</u>*, <u>et que le fibré linéaire</u> M <u>vérifie l'une des conditions de positivité</u> (2), (3) <u>ou</u> (32).

<u>Alors, pour toute section</u> f <u>de</u> $\mathrm{Hom}(Q, Q \otimes M)$ <u>telle que le second membre de</u> (38) <u>soit fini, il existe une section</u> h <u>de</u> $\mathrm{Hom}(Q, E \otimes M)$ <u>telle que</u> $g \circ h = f$ <u>et</u>

$$(38) \quad \int_{X \setminus Z} \langle h \circ gg^*, h \rangle (\text{dét } gg^*)^{-k} \, dV \leqslant C \int_{X \setminus Z} \langle \widetilde{gg}^* \; f \circ gg^*, f \rangle \, (\text{dét } gg^*)^{-k-1} \, dV ,$$

<u>avec</u> $C = \dfrac{k - \mathrm{Inf}(n,q)}{k - \mathrm{Inf}(n,q) - \mathrm{Inf}(n,s)}$.

---

* On peut démontrer que cette hypothèse est superflue.

4. Construction de rétractions holomorphes.

Soit X une sous-variété fermée de dimension n d'un ouvert pseudoconvexe Ω de $\mathbb{C}^p$. On s'intéresse à la suite exacte

$$0 \longrightarrow TX \longrightarrow T\Omega|_X \xrightarrow{g} NX \longrightarrow 0$$

où NX est le fibré normal à X. Tous ces objets sont munis des métriques induites par la métrique de $\mathbb{C}^p$. Avec les notations de l'introduction, on a

$$E = T\Omega|_X\ ,\ S = TX\ ,\ Q = NX\ ,\ s = n\ ,\ q = p-n\ .$$

De plus, $\text{dét}\, Q = \text{dét}\, NX \simeq (\text{dét}\, TX)^{-1}$ métriquement, donc

$$c(\text{dét}\, Q) = -\,\text{Ricci}(X)\ .$$

Choisissons pour M un fibré trivial, dont la métrique est donnée par le poids $e^{-\varphi}$, de telle sorte que $c(M) = d'd''\varphi$.

Comme le fibré $E = T\Omega|_X$ est plat, les conditions (2) et (3) s'écrivent :

$$id'd''\varphi + i(k+1)\text{Ricci}(X) \geqslant 0\ ;$$

en appliquant le théorème 1 à $f = \text{Id}_Q$, dont la norme en tant que section de $\text{Hom}(Q, Q \otimes M)$ vaut $qe^{-\varphi}$, et compte-tenu de la remarque 3, on obtient le

THÉORÈME 3. - <u>Pour toute fonction</u> φ <u>plurisousharmonique sur</u> X, <u>et tout réel</u> $k > \text{Inf}(2n,p)$ <u>tels que</u>

$$id'd''\varphi + i(k+1)\text{Ricci}(X) \geqslant 0\ ,$$

<u>il existe une section</u> $h : NX \longrightarrow T\Omega|_X$ <u>telle que</u>

$$g \circ h = \text{Id}_{NX}\ ,$$

$$(39)\quad \int_X |h|^2 e^{-\varphi}\, dV \leqslant \left(p-n + \frac{n}{k - \text{Inf}(2n,p)}\right) \int_X e^{-\varphi}\, dV\ .$$

<u>REMARQUE 4</u>. Le résultat a été démontré seulement lorsque φ est de classe C^∞, mais il est immédiat de se débarrasser de cette hypothèse par un passage à la limite. On notera que la condition de courbure ne peut être vérifiée que si φ est plurisousharmonique, car $i\,\text{Ricci}(X) \leqslant 0$.

Si $\pi_X : NX \longrightarrow X$ est la projection du fibré NX, on définit une application $\sigma : NX \longrightarrow \mathbb{C}^p$ par

$$\sigma(\zeta) = \pi_X(\zeta) + h.\zeta\ ,\quad \zeta \in NX\ .$$

Il est clair, d'après le théorème des fonctions implicites, que σ est un isomorphisme d'un voisinage V de la section nulle dans NX, sur un voisinage V' de X dans Ω.

On construit donc une rétraction holomorphe $r : V' \to X$ (c'est-à-dire une application holomorphe $r : V' \to X$ telle que $r(z) = z$ pour tout $z \in X$) en posant

$$r = \pi_X \circ \sigma^{-1} .$$

Il ne nous reste plus qu'à préciser V et V'.

On se donne une fonction $\rho > 0$ sur X telle que pour tout $z \in X$, il existe un polydisque $D(z, \rho(z))$ de centre z, de rayon $\rho(z)$, dans lequel X est un graphe. De façon précise, on suppose :

(40) $D(z, \rho(z))$ est le produit des deux disques $D' \subset T_z X$, $D'' \subset (T_z X)^{\perp}$ de centre z et de rayon $\rho(z)$.

(41) $X \cap D(z, \rho(z))$ est le graphe d'une application holomorphe

$$u_z : D' \longrightarrow D'' .$$

Si on pose $\varphi_\rho(z) = \sup\limits_{\zeta \in X \cap D(z,\rho(z))} \varphi(\zeta)$, on obtient le résultat général suivant, qui ne fait intervenir que des données géométriques de X.

THÉORÈME 4. - Soit φ une fonction plurisousharmonique sur X telle que

$$id'd''\varphi + i(\varepsilon + 1 + \mathrm{Inf}(2n,p))\mathrm{Ricci}(X) \geqslant 0 \quad (\varepsilon > 0),$$

$$\int_X e^{-\varphi}\, dV < +\infty ,$$

ρ une fonction vérifiant les hypothèses (40), (41), et h le scindage holomorphe du théorème 3.

Alors l'application $\sigma(z, \xi) = z + h(z).\xi$, définie sur NX, est injective sur un "voisinage" V de la section nulle dans NX de la forme

$$V = \{(z, \xi) \in NX \; ; \; |\xi| < C_1 \, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1}\} .$$

Il existe une constante $C_2 > 0$ et une rétraction holomorphe $r : U \to X$ sur l'ouvert

$$U = \{\zeta \in \mathbb{C}^p \; ; \; (\exists z \in X) \; |\zeta - z| < C_2 \, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1}\}$$

Les constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, sont le produit de constantes universelles (ne dépendant que de la dimension p) et de

$$[(1 + \tfrac{1}{\varepsilon}) \int e^{-\varphi}\, dV]^{-1} .$$

Démonstration. Dans toute la suite, on désignera par α_j les constantes ne dépendant que de la dimension p, et on posera

$$C = (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \int_X e^{-\varphi}\, dV.$$

On considère en tout point $z \in X$ un système de coordonnées linéaires $(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ tel que $\frac{\partial}{\partial\zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_n}$ soit une base orthonormée de T_zX, et $\frac{\partial}{\partial\zeta_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_p}$ une base orthonormée de $(T_zX)^{\perp}$. Les vecteurs $\frac{\partial}{\partial\zeta_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_p}$ définissent un repère local de NX au-dessus de $X \cap D_z$; on note $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_p$ les coordonnées correspondantes dans les fibres de NX. La section $h \in \mathrm{Hom}(NX, T\Omega|_X)$ est donc définie dans $X \cap D_z$ par une matrice

$$H_z(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = [h_{jk}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)]_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ n+1 \leqslant k \leqslant p}},$$

avec $h_{jk}(z) = \delta_{jk}$, $n+1 \leqslant j,k \leqslant p$.

Soit Δ_z le polydisque de centre z et de rayon $\frac{1}{2}\rho(z)$, contenu dans $D(z, \rho(z))$. Dans Δ_z, $|h|^2$ est équivalent à une constante universelle près à

$$|H|^2 = \sum_{j,k} |h_{jk}|^2$$

(noter que l'application u_z de (41) a ses dérivées bornées dans Δ_z), et on tire de (39), grâce aux inégalités de Cauchy, que pour tout $\zeta \in \Delta_z$,

$$(42) \qquad \begin{cases} |H_z(\zeta)| \leqslant \alpha_1\, C^{1/2}\, e^{1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{-n} \\ \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \frac{\partial H_z}{\partial\zeta_j}(\zeta) \right| \leqslant \alpha_2 C^{1/2}\, e^{1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{-n-1}. \end{cases}$$

a/ Injectivité de σ sur $V \subset NX$.

De (42) il résulte en particulier pour $\zeta = z$:

$$(43) \qquad C^{1/2}\, e^{1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{-n} \geqslant \alpha_3,$$

et si (z, ξ) appartient au "voisinage" V, on a

$$(44) \qquad |\sigma(z, \xi) - z| = |h(z).\xi| \leqslant \alpha_4 C_1 C^{1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{n+1}.$$

Supposons $\sigma(z, \xi) = \sigma(z', \xi')$ pour deux points distincts (z, ξ), (z', ξ') de V, ce qui ne peut se produire que si $z \neq z'$; on a par exemple

$$e^{-1/2\varphi_\rho(z')}\, \rho(z')^{n+1} \leqslant e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{n+1}.$$

(43) et (44) entraînent donc

(45) $|z' - z| \leqslant 2\alpha_4\, C_1\, C^{1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{n+1} \leqslant \alpha_5\, C_1\, C\, \rho(z)$,

et $z' \in \Delta_z$ dès que $C_1\, C$ est assez petit .

On montre aisément à partir de (41) , (45) que

$$\text{angle}(T_z X\ ;\ z'-z) \leqslant \alpha_6 C_1 C^{1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^n ,$$

car les dérivées secondes de u_z sont bornées par $\alpha_7\, \rho(z)^{-1}$ dans Δ_z . Ecrivons maintenant

$$0 = \sigma(z', \xi') - \sigma(z, \xi) = z' - z + H_z(z').\xi' - H_z(z).\xi$$

$$= z' - z + (H_z(z') - H_z(z)).\ \xi' + H_z(z).(\xi' - \xi) .$$

D'après (42) et l'inégalité $|\xi'| \leqslant C_1\, e^{-\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^{2n+1}$, on obtient , si $C_1 C$ est assez petit :

$$|(H_z(z') - H_z(z)).\xi'| \leqslant \alpha_8 C_1\, C^{1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^n .\ |z' - z|$$

$$\leqslant \alpha_9 C_1\, C\, |z' - z| < |z' - z| ,$$

$$\text{angle}\ (z' - z\ ;\ z' - z + (H_z(z') - H_z(z)).\ \xi') \leqslant \alpha_{10} C_1 C^{1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^n .$$

D'autre part, comme le vecteur non nul $H_z(z).\ (\xi' - \xi)$ se projette sur le vecteur de coordonnées $\xi' - \xi$ dans $N_z X$, (42) implique

$$\text{angle}(T_z\, X\ ;\ H_z(z).(\xi' - \xi)) \geqslant |\xi' - \xi| .\ |H_z(z).\ (\xi' - \xi)|^{-1}$$

$$\geqslant \alpha_{11} C^{-1/2}\, e^{-1/2\varphi_\rho(z)}\, \rho(z)^n .$$

Les trois évaluations d'angle qui précèdent sont contradictoires dès que $C_1 C$ est assez petit; on a donc démontré l'injectivité de σ sur V .

b/ Existence de l'ouvert U .

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse de régularité sur la fonction ρ , l'ensemble V n'est pas nécessairement un véritable voisinage de la section nulle dans NX .

Il nous faut commencer par "régulariser" ρ .

On remarque qu'il existe une constante $\alpha_{12} \in]0,1[$ telle que pour tout $\zeta \in \Delta_z = D(z, \frac{1}{2}\rho(z))$, X soit un graphe dans le polydisque $D(\zeta, \alpha_{12}\, \rho(z))$ (c'est-à-dire que les hypothèses (40) , (41) relatives à ζ , $D(\zeta, \alpha_{12}\rho(z))$ sont vérifiées).

On peut donc remplacer ρ par la fonction

$$\rho'(\zeta) = \sup_{z\in X} \alpha_{12}(\rho(z) - 2\,|\zeta - z|) \quad , \zeta \in X .$$

ρ' est lipschitzienne de rapport $2\alpha_{12}$, à moins que $\rho' \equiv +\infty$, auquel cas X est le graphe d'une application $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{p-n}$, et l'ouvert $U = \mathbb{C}^p$ convient !

Posons pour tout $z \in X$ et $0 < t \leqslant \rho'(z)$:

$$\varphi_t(z) = \operatorname{Sup}_{\zeta \in X \cap D(z,t)} \varphi(\zeta) .$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que $\varphi_t(z)$ est continue par rapport à (t,z) dans le domaine $0 < t \leqslant \rho'(z)$.

D'autre part, on a la majoration évidente

$$e^{-\varphi_t(z)} \cdot \frac{\pi^n}{n!} t^{2n} \leqslant \int_X e^{-\varphi}\, dV ,$$

de sorte que l'expression $e^{-\varphi_t(z)} \cdot t^{2n+1}$, $t \in]0, \rho'(z)]$, atteint son maximum en un point $t = \hat{\rho}(z) \in]0, \rho'(z)]$, et que la fonction

$$e^{-\varphi_{\hat{\rho}}(z)} \quad \hat{\rho}(z)^{2n+1}$$

est continue sur X. Il résulte du lemme de Schwarz que les conditions (40), (41) (41) sont bien satisfaites pour les polydisques $D(z, \hat{\rho}(z))$.

L'ensemble $\hat{V}$ associé à $\hat{\rho}$ comme dans l'énoncé du th. 4 est donc ouvert, et l'application holomorphe σ, qui est injective sur $\hat{V}$, est un isomorphisme de $\hat{V}$ sur l'ouvert $\sigma(\hat{V}) \subset \mathbb{C}^p$ (on pourrait aussi de façon plus élémentaire utiliser le théorème des fonctions implicites).

L'inégalité évidente qui suit, valable pour $|\zeta - z| < \frac{1}{4}\rho(z)$:

$$\rho'(\zeta) \geqslant \frac{\alpha_{12}}{2} \rho(z)$$

entraîne par définition de $\hat{\rho}$

$$(46) \quad e^{-\varphi_{\hat{\rho}}(\zeta)} \quad \hat{\rho}(\zeta)^{2n+1} \geqslant \exp(-\varphi_{\frac{\alpha_{12}}{2}\rho(z)}(\zeta)) \cdot \left[\frac{\alpha_{12}}{2}\rho(z)\right]^{2n+1}$$
$$\geqslant \left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)^{2n+1} e^{-\varphi_\rho(z)} \quad \rho(z)^{2n+1} ,$$

car $D(\zeta, \frac{\alpha_{12}}{2}\rho(z)) \subset D(z, \rho(z))$.

Fixons $z \in X$; d'après (46) l'ensemble $\hat{V}$ contient l'adhérence $\overline{W}$ de l'ouvert

$$W = \{(\zeta, \xi) \in NX \ ; \ |\zeta - z| < \frac{1}{4}\rho(z) \quad \text{et} \quad |\xi| < C_3\, e^{-\varphi_\rho(z)} \quad \rho(z)^{2n+1}\}$$

dès que $C_3 < \alpha_{13}\, C_1$.

On va montrer que $\sigma(W)$ contient la boule de centre z et de rayon $C_2\, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1}$ lorsque $C_2\, C$ est assez petit, ce qui achèvera la démonstration. Il est clair que le rayon de la plus grande boule incluse dans $\sigma(W)$ est égal à la distance de z au bord $\partial\sigma(W) = \sigma(\partial W)$ de $\sigma(W)$.

Supposons qu'un point $(\zeta, \xi) \in W$ soit tel que

$$(47) \quad |\sigma(\zeta, \xi) - z| = |\zeta - z + h(\zeta).\xi| = C_2\, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1} .$$

Alors d'après (42), (43) :

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\leqslant \alpha_{14}\, C_3\, C^{1/2}\, e^{-1/2\, \varphi_\rho(z)} \rho(z)^{n+1} + C_2\, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1} \\ &\leqslant \alpha_{15}(C_2 + C_3) C^{1/2}\, e^{-1/2 \varphi_\rho(z)} \rho(z)^{n+1} . \end{aligned}$$

On en déduit comme dans la première partie :

$$\begin{aligned} &\text{angle } (\zeta - z\ ;\ T_\zeta X) \leqslant \alpha_{16}(C_2 + C_3) C^{1/2}\, e^{-1/2\, \varphi_\rho(z)} \rho(z)^n \\ &\text{angle } (h(\zeta).\xi\ ;\ T_\zeta X) \geqslant |\xi| . |h(\zeta).\xi|^{-1} \geqslant \alpha_{17}\, C^{-1/2\, \varphi_\rho(z)} \rho(z)^n , \end{aligned}$$

et lorsque $(C_2 + C_3)C$ est assez petit :

$$\text{angle } (\zeta - z, -h(\zeta).\,\xi) \geqslant \frac{1}{2}\, |\xi| .\ |h(\zeta).\xi|^{-1} ,$$

$$\begin{aligned} |\zeta - z + h(\zeta).\xi| &\geqslant \left[\sin(\tfrac{1}{4}|\xi| . |h(\zeta).\xi|^{-1})\right] . \left[\, |\zeta - z| + |h(\zeta).\xi| \right] \\ &\geqslant \frac{1}{8}\, |\xi| + \alpha_{18}\, C^{-1/2}\, e^{-1/2\, \varphi_\rho(z)} \rho(z)^n\, |\zeta - z| , \end{aligned}$$

ce qui est vrai même si $|\xi| = 0$.

Il résulte alors de (47) :

$$\begin{aligned} |\xi| &\leqslant 8\, C_2\, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1} , \\ |\zeta - z| &\leqslant \alpha_{18}^{-1}\, C_2\, C^{1/2}\, e^{-1/2 \varphi_\rho(z)} \rho(z)^{n+1} \leqslant \alpha_{19}\, C_2\, C\, \rho(z) \ ; \end{aligned}$$

lorsque $C_2\, C$ est assez petit, on voit que (ζ, ξ) ne peut appartenir à la frontière ∂W de W , donc la distance de z à $\sigma(\partial W)$ est bien minorée par $C_2\, e^{-\varphi_\rho(z)} \rho(z)^{2n+1}$. ∎

Nous allons maintenant transcrire le théorème 4 sous une forme plus exploitable dans la pratique. On suppose que la variété X est définie par des équations

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_N = 0 ,$$

telles que le rang du système $(dF_j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ soit égal à codim $X = p - n$ en tout point de X . Calculons la courbure de Ricci de X en un point $z \in X$ où les formes $(dF_j)_{j\in J_o}$ sont indépendantes, $J_o \subset \{1,\dots,N\}$, $|J_o| = p - n$. Si l'on considère dF_j comme une section de N^*X , $\bigwedge_{j\in J_o} dF_j$ définit une section de $\det N^*X \simeq \det TX$; par conséquent

$$\mathrm{Ricci}(X) = c(\det TX) = -d'd'' \mathrm{Log} \,\Big|\bigwedge_{j\in J_o} dF_j\Big|^2 ,$$

ce qui entraîne

$$i\,\mathrm{Ricci}(X) + id'd'' \mathrm{Log} \sum_J \Big|\bigwedge_{j\in J} dF_j\Big|^2$$

$$= id'd'' \mathrm{Log} \sum_J \left|\frac{\bigwedge_{j\in J} dF_j}{\bigwedge_{j\in J_o} dF_j}\right|^2 \geqslant 0 \;.$$

D'autre part , par définition de la métrique de $\Lambda T^* \mathbb{C}^p$, on a

$$\Big|\bigwedge_{j\in J} dF_j\Big|^2 = \sum_K |\Delta_{J,K}|^2 ,$$

où
$$\Delta_{J,K} = \det\left[\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right] j\in J,\ k\in K ,$$

$$J \subset \{1,\dots,N\},\quad K \subset \{1,\dots,p\} \quad , |J| = |K| = p - n.$$

On a donc

$$i\,\mathrm{Ricci}(X) + id'd'' \mathrm{Log} \sum_{J,K} |\Delta_{J,K}|^2 \geqslant 0 ,$$

et on voit qu'on peut prendre pour poids φ toute fonction

(48) $$\varphi = 2\ell\, \mathrm{Log}\, \Delta + \varphi_1 ,$$

avec les notations

$$\ell = \varepsilon + 1 + \mathrm{Inf}(2n, p) \ , \ \Delta^2 = \sum_{J,K} |\Delta_{J,K}|^2$$

et où φ_1 est une fonction plurisousharmonique sur X telle que

$$\int_X \Delta^{-2\ell} e^{-\varphi_1} dV < +\infty \ .$$

Nous pouvons maintenant montrer de façon très précise l'existence de rétractions holomorphes, déja discutée par C.A.BERENSTEIN et B.A.TAYLOR [1] dans un cadre analogue.

THÉORÈME 5. - <u>Soient</u> $\varphi_1, \varphi_2, \chi$ <u>des fonctions plurisousharmoniques sur l'ouvert pseudoconvexe</u> $\Omega \subset \mathbb{C}^p$, <u>telles que</u>

(49) $$\int_X \Delta^{-2\ell} e^{-\varphi_1} dV < +\infty \ , \ \ell = \varepsilon + 1 + \mathrm{Inf}(2n\ ,\ p) \ ,$$

(50) $$|F| = \Big(\sum_{j=1}^N |F_j|^2\Big)^{1/2} \leqslant e^{\varphi_2} ,$$

(51) $z \in \Omega$ et $|\zeta - z| < e^{-\chi(z)}$ impliquent :

$$\zeta \in \Omega\ ,\ \varphi_1(\zeta) < \varphi_1(z) + A\ ,\ \varphi_2(\zeta) \leqslant \varphi_2(z) + A, \quad \text{et} \quad \chi(\zeta) \leqslant \chi(z) + A.$$

Alors il existe une rétraction holomorphe $r : U \to X$ définie sur l'ouvert

$$U = \{z \in \Omega\ ;\ |F(z)| < e^{-\psi(z)}\}\ ,$$

où ψ est la fonction plurisousharmonique

$$\psi = \varphi_1 + C_2\,\varphi_2 + C_3\,\chi + C_4 \log \Delta + C_5\ , \tag{52}$$

avec $C_2 = (2n+2)(p-n)-1,\ C_3 = (2n+2)(p-n)+2n,\ C_4 = 2(\ell-n-1)\ ,$

$$C_5 = \log\left(\int_X \Delta^{-2\ell}\, e^{-\varphi_1}\, dV\right) + \log \frac{1}{\varepsilon} + \alpha\,(1+\varepsilon+A)\ ,$$

et $\alpha > 0$ une constante ne dépendant que de N et p.

Démonstration. On désignera par β_j les constantes du type $\alpha^{1+\varepsilon+A}$, et

$$C = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int \Delta^{-2\ell}\, e^{-\varphi_1}\, dV\ .$$

a/ Montrons que la fonction

$$\rho = \beta_1\, \Delta\, e^{-(p-n)\varphi_2 - (p-n+1)\chi} \tag{53}$$

vérifie les hypothèses (40) , (41).

D'après (50), (51) et les inégalités de Cauchy, les dérivées premières des F_j sont majorées par $\beta_2\, e^{\varphi_2(z)+\chi(z)}$ sur la boule de centre z et de rayon $\frac{1}{2}\, e^{-\chi(z)}$, les dérivées secondes par $\beta_3\, e^{\varphi_2(z)+2\chi(z)}$.

On a donc $|\Delta| \leqslant \beta_4\, e^{(p-n)(\varphi_2+\chi)}$, ce qui permet de choisir β_1 tel que

$$\rho \leqslant e^{-\chi}\ . \tag{54}$$

Fixons un point $z \in X$, que nous prendrons comme origine des coordonnées pour simplifier ; quitte à effectuer une transformation unitaire sur $(F_1,\ldots,F_N)$, on peut supposer que les différentielles $d_zF_1,\ldots,d_zF_{p-n}$ sont orthogonales, et que $d_zF_{p-n+1} = \ldots = d_zF_N = 0$.

On choisit un système de coordonnées $(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$ tel que

$$d_zF_1(\zeta) = a_1\zeta_1,\ \ldots,\ d_zF_{p-n}(\zeta) = a_{p-n}\zeta_{p-n}\ .$$

On a alors

$$\Delta(z) = |a_1| \ldots |a_{p-n}|\ , \quad \text{et} \quad |a_j| = |d_zF_j| \leqslant \beta_2 e^{\varphi_2(z)+\chi(z)}\ ,$$

ce qui entraîne

$$|a_j| \geqslant \beta_5\, \Delta(z)\, e^{-(p-n-1)(\varphi_2(z)+\chi(z))}\ . \tag{55}$$

On peut écrire

$$a_j^{-1}(F_j(\zeta) - F_j(z)) = \zeta_j + G_j(\zeta) \ , \ 1 \leqslant j \leqslant p-n \ , \text{ avec}$$

$$|dG_j(\zeta)| \leqslant \beta_6 \ \Delta(z)^{-1} \exp((p-n-1)(\varphi_2(z)+ \chi(z)) + \varphi_2(z) + 2\chi(z))|\zeta|$$

sur la boule $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2} e^{-\chi(z)}$.

On en déduit que l'application $G = (G_1,\ldots,G_{p-n})$ est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne sur une certaine boule de centre z et de rayon $\beta_7\Delta(z) \exp(-(p-n)\varphi_2(z) - (p-n+1)\chi(z))$; l'assertion relative à ρ résulte alors du théorème des fonctions implicites.

Si β_7 est assez petit, on aura de plus dans cette boule

$$\Delta(\zeta) \geqslant \frac{1}{2} \Delta(z) \ . \tag{56}$$

b/ D'après (48), (51), (54), (56), on a $e^{\varphi(\zeta)} \leqslant \beta_8 e^{\varphi(z)}$ pour $|\zeta - z| < \rho(z)$, donc $e^{\varphi_\rho(z)} \leqslant \beta_8 e^{\varphi(z)}$. Le théorème 4 implique que l'application σ est injective sur le voisinage

$$V = \{(z,\xi) \in NX \ ; \ |\xi| < \beta_9 \ C^{-1} e^{-\varphi(z)} \rho(z)^{2n+1}\} ,$$

avec (cf. (43)) $\beta_9 C^{-1} e^{-\varphi(z)} \rho(z)^{2n+1} \leqslant \rho(z)$.

Plaçons-nous en un point $z_o \in X$. Pour tout point $(\zeta,\xi) \in \partial V$, avec $|\zeta - z_o| < \beta_{10}\rho(z_o)$ et $|\xi| = \beta_9 C^{-1} e^{-\varphi(\zeta)} \rho(\zeta)^{2n+1}$, le raisonnement de a/ montre que

$$|F(\sigma(\zeta,\xi))| \geqslant \operatorname*{Inf}_j |a_j| \times \text{distance } (\sigma(\zeta,\xi),X) \ .$$

La partie b/ de la démonstration du théorème 4 entraîne dans les mêmes conditions (β_9 et β_{10} assez petits) :

$$\begin{aligned} \text{distance}(\sigma(\zeta,\xi),X) &= \inf_{z\in X, |z-z_o| \leqslant \frac{1}{2}\rho(z_o)} \text{distance}(\sigma(\zeta,\xi),z) \\ &\geqslant \inf_{z\in X, |z-z_o| \leqslant \frac{1}{2}\rho(z_o)} \beta_{11} C^{-1} e^{-\varphi(z)} \rho(z)^{2n+1} \\ &\geqslant \beta_{12} C^{-1} e^{-\varphi(z_o)} \rho(z_o)^{2n+1} \ , \end{aligned}$$

et comme $|z_o - \sigma(\zeta,\xi)| < \rho(\sigma(\zeta,\xi))$, on a d'après (51), (53), (54) :

$$e^{-\varphi(z_o)} \rho(z_o)^{2n+1} \geqslant \beta_{13} e^{-\varphi(\sigma(\zeta,\xi))} \rho(\sigma(\zeta,\xi))^{2n+1} \ .$$

On obtient donc au point $\sigma = \sigma(\zeta,\xi) \in \partial\sigma(V)$:

$$|F(\sigma)| \geqslant \beta_{14} C^{-1} \Delta(\sigma) \exp(-(p-n-1)(\varphi_2(\sigma) + \chi(\sigma))) e^{-\varphi(\sigma)} \rho(\sigma)^{2n+1} = e^{-\psi(\sigma)} \rho(\sigma)^{2n+1}$$

(cf. (48),(52),(53),(55),56)).

Il en résulte que l'ouvert V contient toutes les composantes connexes de U qui rencontrent la sous-variété X. On définit la rétraction r par $r = \pi_X \circ \sigma^{-1}$ sur ces composantes, et r = point constant de X sur les autres composantes de U.

REMARQUE 5. On a de plus par construction

$$|r(\zeta) - \zeta| < e^{-\chi(\zeta)}$$

pour tout point ζ de l'une des composantes connexes de U rencontrant X.

REMARQUE 6. Dans les applications, on aura intérêt à remplacer (49) par une condition plus maniable. Si ω est la réunion des boules ouvertes de centre $z \in X$ et de rayon $\rho(z)$, on a

$$\int_X \Delta^{-2} e^{-\varphi_1} dV \leqslant \beta_{15} \int_\omega \Delta^{-2\ell} e^{-\varphi_1} \rho^{-2(p-n)}$$

$$\leqslant \beta_{16} \int_\omega \Delta^{-2(\ell+p-n)} e^{-\varphi_1} e^{2(p-n)\left[(p-n)\varphi_2+(p-n+1)\chi\right]}$$

compte-tenu de la définition (53) de ρ.

Supposons maintenant que les conditions suivantes soient réalisées (avec des fonctions plurisousharmoniques $\varphi_2, \varphi_3, \chi$) :

(57) $\quad \Delta \geqslant e^{-\varphi_3}$,

(58) $\quad |F| \leqslant e^{\varphi_2}$,

(59) $\quad z \in \Omega$ et $|\zeta - z| < e^{-\chi(z)}$ impliquent

$$\zeta \in \Omega \text{ , } \varphi_2(\zeta) \leqslant \varphi_2(z) + A, \ \varphi_3(\zeta) \leqslant \varphi_3(z) + A, \ \chi(\zeta) \leqslant \chi(z) + A \text{ .}$$

Alors on peut choisir

$$\varphi_1 = 2(p-n)\left[(p-n)\varphi_2 + (p-n+1)\chi\right] + 2(\ell+p-n)\varphi_3 + (p+\varepsilon)\mathrm{Log}(1 + |z|^2) \text{ ,}$$

$$\psi = C'_2 \varphi_2 + C'_3 \varphi_3 + C'_4 \chi + C'_5 + (p+\varepsilon)\mathrm{Log}(1 + |z|^2) \text{ ,}$$

avec $\ell = \varepsilon + 1 + \mathrm{Inf}(2n,p)$, et (compte-tenu de ce que $|\Delta| \leqslant \beta_4 e^{(p-n)(\varphi_2+\chi)}$) :

$$C'_2 = 2(\ell+p-n)(p-n) - 1 \text{ , } C'_3 = 2(\ell+p-n) \text{ ,}$$

$$C'_4 = 2(\ell+p-n+1)(p-n) + 2n, \quad C'_5 = 2 \mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon} + \alpha(1 + \varepsilon + A) \text{ .}$$

Ces dernières estimations précisent et généralisent les résultats antérieurs de C.A.BERENSTEIN et B.A.TAYLOR [1]. Ainsi, soit χ une fonction plurisousharmonique sur Ω vérifiant les conditions suivantes :

(60) $\chi \geqslant 0$, et $\operatorname{Log}(1 + |z|) = O(\chi(z))$;

(61) il existe une constante A telle que

$z \in \Omega$ et $|z - \zeta| < \exp(-\chi(z))$ implique que

$$\chi(\zeta) \leqslant \chi(z) + A .$$

On définit l'algèbre $A_\chi(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions holomorphes f sur Ω telles qu'il existe des constantes A_1, $A_2 \geqslant 0$ telles que

(62) $$|f(z)| \leqslant A_1 \exp(A_2 \chi(z)) .$$

L'hypothèse (61) est généralement exprimée sous une forme un peu plus générale dans la littérature (voir par exemple [8]), mais tous les poids usuels satisfont la condition plus restrictive que nous avons donnée*.

COROLLAIRE 1. - Soit X une sous-variété de dimension n de l'ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^p$, définie par les équations $F_1 = F_2 = \ldots = F_N = 0$, avec $F_1,\ldots,F_N \in A_\chi(\Omega)$. On suppose que la quantité

$$\Delta = \left(\sum_{|J| = |K| = p-n} \left| \det\left[\frac{\partial F_j}{\partial z_k} \right]_{j \in J,\ k \in K} \right|^2 \right)^{1/2}$$

est non nulle, et vérifie une minoration du type

$$\Delta \geqslant \exp(-A_1 \chi(z) - A_2) \quad , \text{ pour tout } z \in X .$$

Alors il existe des constantes $A_3, A_4 > 0$ et une rétraction holomorphe $r : U \to X$ définie sur l'ouvert

$$U = \{z \in \Omega \ ; \ |F(z)| < \exp(-A_3 \chi(z) - A_4)\} .$$

5. Extension des fonctions holomorphes avec contrôle de la croissance.

On se replace tout d'abord dans la situation générale des paragraphes 0,1 et 2 : X désigne une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe de dimension n , E, M des des fibrés hermitiens au-dessus de X , M étant de rang N . On considère un sous-ensemble analytique $Y = F^{-1}(0)$ de X , lieu des zéros d'une section holomorphe F de M , et on pose

$$U = \{z \in X \ ; \ |F(z)| < 1\}.$$

---

* On peut démontrer en outre que les classes d'algèbres $A_\chi(\Omega)$ correspondantes sont les mêmes.

On a dans ce cadre un théorème d'extension , qui généralise le théorème de B.JENNANE [9].

THÉORÈME 6. - Soient η , q deux réels > 0 tels que $|F|^{-2q}$ ne soit localement sommable en aucun point de Y (en général q sera un entier $\geqslant 1$, par exemple $q = \sup_{z \in Y} \operatorname{codim} Y_z$, ou $q = \operatorname{Inf}(n,N)$) .
On suppose que Y est X-négligeable (cf. §3, définition 2)*, et que la forme de courbure de E satisfait à l'inégalité

$$\text{(63)} \qquad ic(E) \geqslant_N \left(\frac{\eta}{1+|F|^2} + \frac{q}{|F|^2} \right) < ic(M).F,F > -i \operatorname{Ricci}(X) .$$

Alors pour toute section g de E au-dessus de U , telle que $\int_U |g|^2 \, dV < +\infty$, il existe une section G de E au-dessus de X, coïncidant avec g sur Y, et telle que

$$\int_X \frac{|G|^2 \, dV}{(1+|F|^2)^{q+\eta}} \leqslant C(q,\eta) \int_U |g|^2 \, dV ,$$

avec $C(q,\eta) = 1 + \dfrac{(q+1)^2}{\eta}$ si $q \geqslant 1$, $= \dfrac{1}{2^q-1} + \dfrac{(q+1)^2}{\eta}$ si $0 < q < 1$.

Démonstration. On cherche l'extension G sous la forme

$$G = \lambda(|F|^2) g - u ,$$

où λ est une fonction réelle de classe C^∞ à support dans $]-\infty, 1[$, telle que $\lambda = 1$ au voisinage de 0, et $u \in C^\infty(X,E)$, $u = 0$ sur Y .

L'analyticité de G équivaut à

$$\text{(64)} \qquad D''u = v ,$$

avec $v = D''(\lambda(|F|^2)g) = \lambda'(|F|^2) < F , D'F > g$.

Comme toute solution de l'équation (64) est de classe C^∞ , il suffit d'imposer que $|u|^2 \, |F|^{-2q}$ soit localement sommable pour assurer l'annulation de u sur Y .

Soit Z une partie fermée de X contenant Y , telle que $X \setminus Z$ satisfasse les hypothèses de la définition 2. On résout l'équation (64) dans $X \setminus Z$, après avoir multiplié la métrique de E par $(1+|F|^2)^{-\eta}|F|^{-2q}$.

Pour cette nouvelle métrique, la forme de courbure $c'(E)$ du fibré E est donnée par

$$c'(E) = c(E) + \eta \left[\frac{<D'F,D'F>}{(1+|F|^2)^2} + \frac{|F|^2 <D'F,D'F> - <D'F,F> \wedge <F,D'F>}{(1+|F|^2)^2} - \frac{<c(M).F,F>}{1+|F|^2} \right]$$

$$+ q \left[\frac{|F|^2 <D'F,D'F> - <D'F,F> \wedge <F,D'F>}{|F|^4} - \frac{<c(M).F,F>}{|F|^2} \right] .$$

* Comme pour le théorème 2, cette hypothèse est en fait superflue.

Soit $K = \det(T^{*}X)$ le fibré canonique de X. Comme la $(1,1)$-forme

$i(|F|^2 \langle D'F , D'F\rangle - \langle D'F,F\rangle \wedge \langle F, D'F\rangle)$ est $\geqslant 0$, il résulte de l'hypothèse (63) que

$$ic'(K^{*} \otimes E) \geqslant_N \eta . i \frac{\langle D'F, D'F\rangle}{(1+|F|^2)^2} \otimes \mathrm{Id}_E .$$

La forme $v \in C^{\infty}_{0,1}(X,E) = C^{\infty}_{n,1}(X, K^{*} \otimes E)$ vérifie clairement les inégalités

$$|v|^2 \leqslant \lambda'^2 . |F|^2 \, |D'F|^2 \, |g|^2$$

$$\leqslant 1/\eta \, \lambda'^2 . |F|^2 (1 + |F|^2)^2 \, |g|^2 \, \langle ic'(K^{*} \otimes E) \Lambda v, v\rangle ,$$

grâce au lemme 1, § 3, ligne (21). D'après H.SKODA [13] , théorème 2 et remarques consécutives (comparer aussi avec la proposition du § 2), il existe une solution $u \in C^{\infty}_{n,o}(X \setminus Z, K^{*} \otimes E) = C^{\infty}(X \setminus Z, E)$ de l'équation (64) , telle que

$$\int_{X \setminus Z} \frac{|u|^2}{(1+|F|^2)^{\eta}|F|^{2q}} dV \leqslant \int_{X \setminus Z} \frac{1/\eta \, \lambda'^2 . |F|^2 (1+|F|^2)^2 \, |g|^2}{(1+|F|^2)^{\eta}|F|^{2q}} dV$$

$$(65) \qquad = \frac{1}{\eta} \int_U \frac{(\lambda'(|F|^2))^2}{|F|^{2q-2}} (1 + |F|^2)^{2-\eta} |g|^2 \, dV ;$$

comme la fonction $\dfrac{(\lambda'(|F|^2))^2}{|F|^{2q-2}} (1 + |F|^2)^{2-\eta}$ est bornée, la dernière intégrale du second membre est bien finie.

La section $G = \lambda(|F|^2)g - u$ est donc holomorphe dans $X \setminus Z$ et localement L^2 dans X , par conséquent G se prolonge en une section holomorphe de E sur X (hypothèse de la définition 2) ; on voit que u est de classe C^{∞} dans X , et que $u = 0$ sur Y d'après (65). On obtient :

$$|G|^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{(1 + 1/|F|^2)^q - 1}\right) \lambda^2 \, |g|^2 + \left(1 + \frac{1}{|F|^2}\right)^q |u|^2 ,$$

$$\frac{|G|^2}{(1+|F|^2)^q} \leqslant \frac{\lambda^2 \, |g|^2}{(1+|F|^2)^q - |F|^{2q}} + \frac{|u|^2}{|F|^{2q}} ,$$

$$\int_X \frac{|G|^2 \, dV}{(1+|F|^2)^{q+\eta}} \leqslant \int_U \frac{g^2}{(1+|F|^2)^{\eta}} \left[\frac{\lambda^2}{(1+|F|^2)^q - |F|^{2q}} + \frac{1}{\eta} \frac{\lambda'^2 . (1+|F|^2)^2}{|F|^{2q-2}}\right] .$$

On fait tendre convenablement λ vers la fonction λ_o définie par

$$\lambda_o(t) = 1 - t^{q+1/2} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 ,$$
$$= 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 1 ;$$

le prolongement G de g va tendre vers une section encore notée G

telle que

$$\int_X \frac{|G|^2\, dV}{(1+|F|^2)^{q+\eta}} \leqslant \int_U \frac{|g|^2}{(1+|F|^2)^{\eta}}\left[\frac{\lambda_o^2}{(1+|F|^2)^q - |F|^{2q}} + \frac{1}{\eta}\, \frac{\lambda_o'^2 .\,(1+|F|^2)^2}{|F|^{2q-2}}\right] ,$$

avec $\dfrac{[\lambda_o'(|F|^2)]^2 (1+|F|^2)^2}{|F|^{2q-2}} = (\frac{q+1}{2})^2\ (1+|F|^2)^2 \leqslant (q+1)^2$ dans U , et $(1+|F|^2)^q - |F|^{2q} \geqslant \mathrm{Inf}(1\ ,\ 2^q-1)$ dans U , car la fonction $(1+x)^q - x^q$ est monotone sur $[0,1]$.

On peut donc prendre $C(q,\eta) = \mathrm{Sup}(1\ ,\ \frac{1}{2^q-1}) + \frac{(q+1)^2}{\eta}$. ∎

On remplace désormais X par un ouvert pseudoconvexe Ω de $\mathbb{C}^p$, et on suppose que $E = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{C}^N$ sont des fibrés triviaux , dont les métriques sont données respectivement par les poids $e^{2q\psi - \varphi}$, $e^{2\psi}$ (φ , ψ fonctions plurisousharmoniques de classe C^∞) . On a donc

$\mathrm{Ricci}(\Omega) = 0$, $c(E) = d'd''\varphi - 2q\ d'd''\psi$, $c(M) = -\ 2d'd''\psi \otimes \mathrm{Id}_M$, de sorte que la condition (63) est vérifiée.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> g <u>une fonction holomorphe dans l'ouvert</u>

$$U = \{z \in \Omega\ ;\ |F(z)| < e^{-\psi(z)}\} ,$$

<u>telle que</u> $\int_U |g|^2\ e^{2q\psi - \varphi} < + \infty$, <u>et</u> η <u>un réel</u> > 0 .
<u>Alors il existe une fonction holomorphe</u> G <u>qui coïncide avec</u> g <u>sur l'ensemble analytique</u> $X = F^{-1}(0)$, <u>et telle que</u>

$$\int_\Omega \frac{|G|^2\ e^{2q\psi-\varphi}\ dV}{(1+|F|^2\ e^{2\psi})^{q+\eta}} \leqslant C(q,\eta) \int_U |g|^2\ e^{2q\psi-\varphi}\ dV .$$

Par un passage à la limite évident, le corollaire 1 s'étend au cas où φ est plurisousharmonique quelconque, et ψ localement minorée.*

Reprenons maintenant les notations et les hypothèses du théorème 5 : X est la sous-

---

*On améliore ainsi les estimations de B.JENNANE [9] , grâce au choix de poids plus naturellement adaptés au problème posé.
Il peut paraître surprenant que le corollaire 1 fasse intervenir un poids non plurisousharmonique $2q\psi - \varphi$, mais cette situation s'explique par le fait qu'on a "récupéré de la plurisousharmonicité" en jouant sur la négativité du fibré M . Lorsque $F(z) = z = (z_1,\dots,z_p)$, $q = p$, et ψ = constante, le corollaire 1 redonne le théorème d'HÖRMANDER-BOMBIERI sous une forme optimale, utile pour la théorie des nombres (cf. H.SKODA [16]).

variété lisse de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^p$ définie par les équations $F_1 = \ldots = F_N = 0$.
On pose $n = \dim X$, $\Delta^2 = \sum_{|J|=|K|=p-n} \left|\det \left[\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right]_{j\in J,\ k\in K}\right|^2$, $F = (F_1,\ldots,F_N)$, $|F|^2 = |F_1|^2 + \ldots + |F_N|^2$, et on désigne par $dV_X = \frac{\omega^n}{n!}\Big|_X$ l'élément de volume canonique de X ; on suppose que ψ est la fonction plurisousharmonique donnée par le théorème 5 ou la remarque 6, et que l'inégalité $|\zeta - z| < e^{-\chi(z)}$ entraîne de plus $\varphi(\zeta) \leqslant \varphi(z) + A$.

COROLLAIRE 3. - <u>Pour toute fonction holomorphe</u> g <u>sur</u> $X = F^{-1}(0)$ <u>et tout réel</u> $\eta > 0$, <u>il existe une fonction holomorphe</u> G <u>dans</u> Ω <u>qui prolonge</u> g , <u>telle que</u>

$$\int_\Omega \frac{|G|^2 e^{-\varphi - 2\eta\psi}\, dV}{(|F|^2 + e^{-2\psi})^{p-n+\eta}} \leqslant \alpha^{1+A} \left(1+\frac{1}{\eta}\right) \int_X |g|^2 \Delta^{-2} e^{-\varphi}\, dV_X ,$$

<u>où</u> α <u>est une constante ne dépendant que de</u> p <u>et</u> N .

<u>Démonstration</u>. On choisit $q = \operatorname{codim} X = p-n$; si $r : U \longrightarrow X$ est la rétraction du théorème 5 , on étend g à U en posant $\tilde{g} = g \circ r$ sur les composantes de U qui rencontrent X , et $\tilde{g} = 0$ sur les autres composantes.
Réexaminons maintenant les arguments utilisés dans la démonstration du théorème 5, en conservant les mêmes notations.
Les composantes connexes de U qui rencontrent X forment un voisinage tubulaire de X , dont la coupe suivant le plan normal $(T_z X)^{\perp}$ constitue approximativement un polydisque de multirayon $(|a_1|^{-1} e^{-\psi}, \ldots, |a_{p-n}|^{-1} e^{-\psi})$.
Un tel polydisque est contenu par construction dans la boule de centre z et de rayon $\rho(z) \leqslant e^{-\chi(z)}$, et son volume est donné par :

$$\pi^{p-n} |a_1|^{-2} \ldots |a_{p-n}|^{-2} e^{-2(p-n)\psi} = \pi^q \Delta^{-2} e^{-2q\psi} .$$

On en déduit visiblement d'après la remarque 5 que

$$\int_U |\tilde{g}|^2 e^{2q\psi - \varphi}\, dV \leqslant \alpha^{1+A} \int_X |g|^2 \Delta^{-2} e^{-\varphi}\, dV ,$$

et la conclusion résulte du corollaire 2.

Le corollaire 3 paraît pratiquement optimal, en dehors du fait que l'on souhaiterait pouvoir prendre $\eta = 0$.
On observera que les constantes C_2, C_3, C_4, C_5 qui interviennent dans la définition de ψ , et qui ne sont probablement pas les meilleures possibles, n'auront en général aucune importance dans les applications du corollaire 3, puisqu'on peut les "tuer" en choisissant η assez petit, et qu'en pratique ψ sera $\geqslant 0$.

REMARQUE 7. Explicitons le corollaire 3 en termes plus familiers, sous les hypothèses suivantes :

$$|g| \leqslant e^{\gamma} \quad , \quad |F| \leqslant e^{\varphi_2} \quad , \quad \Delta \geqslant e^{-\varphi_3} \quad ,$$

dans lesquelles on suppose que γ, φ_2, φ_3, χ sont des fonctions plurisousharmoniques vérifiant toutes l'analogue de (51) ; dans ces conditions, on peut choisir comme fonction ρ (cf. (40) , (41) et le théorème 5) la fonction

$$\rho = \beta_4 \, \Delta e^{-(p-n)\varphi_2 - (p-n+1)\chi} \, .$$

On obtient alors, en posant $\omega = \bigcup_{z \in X} D(z, \ \rho(z))$ et en remplaçant φ par 2φ :

$$\int_X |g|^2 \, \Delta^{-2} \, e^{-2\varphi} \, dV_X \leqslant \beta_{17} \int_\omega e^{2\gamma + 2\varphi_3 - 2\varphi} \rho^{-2(p-n)} \, dV \; ;$$

on choisit donc

$$\varphi = \gamma + (p-n+1)\, \varphi_3 + (p-n)\left[(p-n)\varphi_2 + (p-n+1)\chi\right] + (p+\eta)\mathrm{Log}(1 + |z|) \; ,$$

ce qui donne

$$\int_\Omega |G|^2 \frac{e^{-2\varphi - 2\eta\psi}}{(e^{2\varphi_2} + e^{-2\psi})^{p-n+\eta}} \, dV \leqslant \beta_{18}(1 + \frac{1}{\eta})^2 \; ,$$

d'où $|G| \leqslant \beta_{19}(1 + \frac{1}{\eta}) e^{\varphi + \eta\psi + p\chi} \, . (e^{\varphi_2} + e^{-\psi})^{p-n+\eta}$.

COROLLAIRE 4. - <u>Sous les hypothèses du corollaire</u> 1 [voir (60), (61), (62) ; X <u>est définie par</u> $F_1, F_2, \ldots, F_N \in A_\chi(\Omega)$, <u>et on suppose que</u> $\Delta \geqslant \exp(-A_1\chi - A_2)$] , <u>une fonction holomorphe</u> g <u>sur</u> X <u>se prolonge en une fonction</u> $G \in A_\chi(\Omega)$ <u>si et seulement si</u> g <u>vérifie la condition</u> :

$$|g(z)| \leqslant \exp(A_3\chi(z) + A_4) \quad , \text{ pour tout } \quad z \in X \; .$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] BERENSTEIN (C.A.) and TAYLOR (B.A.). - Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis, à paraître au Journal d'Analyse Math. de Jérusalem.

[2] DEMAILLY (J.-P.). - Relations entre les différentes notions de fibrés et de courants positifs, à paraître.

[3] DEMAILLY (J.-P.) et SKODA (H.). - Relations entre les notions de positivités de P.A.Griffiths et de S.Nakano pour les fibrés vectoriels, Séminaire P.Lelong-H.Skoda (Analyse), 19e année, 1978-1979, Lecture Notes (à paraître).

[4] DOUADY (A.) et VERDIER (J.-L.). - Séminaire de Géométrie analytique, E.N.S., 1972-1973, Différents aspects de la positivité, Astérisque 17, 1974, Société Mathématique de France.

[5] GRIFFITHS (P.A.). - Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global analysis, Princeton University Press, p. 185-251, 1969.

[6] HÖRMANDER (L.). - L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator, Acta Math., 113, p. 89-152, 1965.

[7] HÖRMANDER (L.). - An introduction to Complex analysis in Several Variables, Princeton, Van Nostrand Company, 1966, 2e édition, 1973.

[8] HÖRMANDER (L.). - Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 73, p. 943-949, 1967.

[9] JENNANE (B.). - Extension d'une fonction définie sur une sous-variété avec contrôle de la croissance, Séminaire P.Lelong-H.Skoda (Analyse), 17e année, 1976-1977, Lecture Notes n° 694, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[10] NAKANO (S.) - Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds II, Publ. RIMS, Kyoto University, vol. 10, p. 101, 1974.

[11] SKODA (H.). - Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Annales scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 5, p. 545-579, 1972.

[12] SKODA (H.). - Formulation hilbertienne du Nullstellensatz dans les algèbres de fonctions holomorphes, paru dans "l'Analyse harmonique dans le domaine complexe". Lecture Notes in Mathematics, n° 336, Springer, Berlin,Heidelberg,New York,1973.

[13] SKODA (H.). - Morphismes surjectifs et fibrés linéaires semi-positifs, Séminaire P.Lelong-H.Skoda (Analyse), 17e année, 1976-1977, Lecture Notes n° 694, Springer, Berlin,Heidelberg,New York, 1978.

[14] SKODA (H.). - Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs, Ann. Scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 4e série, t. 11, p. 577-611, 1978.

[15] SKODA (H.). - Relèvement des sections globales dans les fibrés semi-positifs, Séminaire P.Lelong-H.Skoda (Analyse), 19e année, 1978-1979, Lecture Notes (à paraître).

[16] SKODA (H.). - Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques. Séminaire P.Lelong (Analyse), 16e année, 1975-1976, Lecture Notes n° 578, Springer, Berlin-Heidelberg,New York, 1977.