ANALYSE MATHEMATIQUE.- Sur les transformées de Fourier de fonctions continues et le théorème de de Leeuw - Katznelson - Kahane.

Note de Jean-Pierre DEMAILLY, présentée par M. Paul MALLIAVIN.

Given any locally compact abelian group G and any function $\varphi \in L^2(\hat{G})$, we prove the existence of a function $f \in L^2(G)$ continuous and vanishing at infinity such that $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ a.e. on $\hat{G}$.

Etant donné un groupe localement compact abélien G quelconque et une fonction $\varphi \in L^2(\hat{G})$, nous montrons l'existence d'une fonction $f \in L^2(G)$ continue nulle à l'infini telle que $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ p.p. sur $\hat{G}$.

INTRODUCTION.

L'objet de la présente note est d'étendre au cas d'un groupe localement compact abélien G quelconque le théorème ci-dessus démontré par de Leeuw - Katznelson - Kahane [4] dans le cas d'un groupe G compact. Une rédaction plus détaillée de ce travail paraîtra dans [2]. La démarche, analogue à celle de [4], consiste dans un premier temps à généraliser les inégalités de Khintchine pour les transformées de Fourier aléatoires sur un groupe non compact.

1. INEGALITES DE KHINTCHINE GENERALISEES.

Soit $\varphi \in L^2(\hat{G})$. Si $\hat{G}$ n'est pas discret, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une partition dénombrable du support

$$\operatorname{Supp} \varphi = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$$

avec $m(E_j) \leq \varepsilon$. Si $\hat{G}$ est discret (i.e. G compact) on choisit simplement $m(E_j) = \varepsilon = 1$. Etant donné une suite aléatoire $t = (t_j) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ on considère la fonction

$$(1.1)\quad \varphi_t(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(\xi) e^{2\pi i t_j} \quad \text{où} \quad \varphi_j = \mathbb{1}_{E_j}\varphi .$$

Soit dt la mesure de probabilité naturelle sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Un calcul classique ([3], p. 215), utilisant la formule de Plancherel sur le tore, fournit pour tout entier $p \geq 1$ l'estimation en norme L^{2p}

$$(1.2)\quad \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \|\hat{\varphi}_t\|_{2p}^{2p} dt = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!^2}{\alpha!^2} \|\varphi_.^{*\alpha}\|_2^2 ,$$

où la somme est étendue aux suites presque nulles $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ de module p et où la notation $\varphi_.^{*\alpha}$ désigne le produit de convolution $\varphi_0^{*\alpha_0} * \varphi_1^{*\alpha_1} * \dots$. Les inégalités de Hausdorff-Young et de Cauchy-Schwarz entraînent les majorations

$$(1.3)\quad \|\varphi_.^{*\alpha}\|_2 \leq \|\varphi_0\|_2 \|\varphi_0\|_1^{\alpha_0 - 1} \|\varphi_1\|_1^{\alpha_1} \dots \leq \epsilon^{\frac{p-1}{2}} \|\varphi_0\|_2^{\alpha_0} \|\varphi_1\|_2^{\alpha_1} \dots .$$

D'après (1.2), (1.3) et l'inégalité $\frac{p!^2}{\alpha!^2} \leq p! \frac{p!}{\alpha!}$ il s'ensuit donc

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \|\hat{\varphi}_t\|_{2p}^{2p} dt \leq p!\epsilon^{p-1} (\Sigma \|\varphi_j\|_2^2)^p = p!\epsilon^{p-1} \|\varphi\|_2^{2p} ,$$

<u>Inégalité de Khintchine</u>. - <u>Il existe</u> $t \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ <u>tel que</u>

$$(1.4)\quad \|\hat{\varphi}_t\|_{2p} \leq (p!\epsilon^{p-1})^{\frac{1}{2p}} \|\varphi\|_2 .$$

L'inégalité élémentaire $(|\hat{\varphi}_t| - \eta)_+ \leq (p-1)^{p-1} p^{-p} \eta^{1-p} |\hat{\varphi}_t|^p$, $\eta > 0$, fournit alors le

LEMME. - <u>Si</u> φ_t <u>satisfait l'inégalité de Khintchine, on a pour tout</u> $\eta > 0$

$$(1.5)\quad \|(|\hat{\varphi}_t| - \eta)_+\|_{L^2(G)} \leq C_{p,\epsilon} \eta^{1-p} \|\varphi\|_2^p$$

<u>avec</u> $C_{p,\epsilon} = (\epsilon^{p-1} p!)^{\frac{1}{2}} (p-1)^{p-1} p^{-p}$.

2. DEMONSTRATION DU THEOREME LKK .

Nous démontrons la version suivante du théorème, qui donne des estimations précises en normes L^2 et L^∞ .

THEOREME LKK. - Soit M un réel ≥ 17 et $\epsilon > 0$. Alors pour tout $\varphi \in L^2(\hat{G})$ il existe une fonction $f \in L^2(G) \cap C_0(G)$ vérifiant les propriétés

(2.1) $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ presque partout sur $\hat{G}$,

(2.2) $\|f\|_2 \leq (1+\frac{1}{M})\|\varphi\|_2$

(2.3) $\|f\|_\infty \leq \sqrt{\epsilon}\,(1+\sqrt{2M/e})\|\varphi\|_2$

avec $\epsilon = 1$ si G est compact, ou bien respectivement

(2.2') $\|f\|_2 \leq 1,186\,\|\varphi\|_2$

(2.3') $\|f\|_\infty \leq 3,685\sqrt{\epsilon}\,\|\varphi\|_2$.

Le théorème LKK résulte du lemme (1.5) grâce à un procédé de construction itératif général, implicitement contenu dans [4] et formalisé par S.V. Hruščev (voir Kisliakov [5]). Comme dans [4] il suffit en fait de vérifier l'existence de $f \in L^2(G) \cap L^\infty(G)$.

Soient δ_j , η_j , θ_j trois suites positives sommables qui seront précisées ultérieurement et $r_j(z) = z\min(1,\eta_j/|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. On construit une suite de fonctions $g_j \in L^2(G)$ ayant les propriétés suivantes :

(2.4) si $f_j = r_0(g_0) + \ldots + r_{j-1}(g_{j-1}) + g_j$ alors
$$|\hat{f}_j| \geq |\varphi|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_{j-1})]^{-1} ,$$

(2.5) $\|g_j\|_2 \leq \theta_j$,

(2.6) $\|(|g_j| - \eta_j)_+\|_2 \leq C_{p,\epsilon}\,\eta_j^{1-p}\,\theta_j^p$.

On suppose $\|\varphi\|_2 = 1$ pour simplifier, et on choisit $g_0(x) = \check{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}_t(-x)$ où φ_t est donnée par le lemme (1.5). On a donc $\hat{f}_0 = \hat{g}_0 = \varphi_t$ et les propriétés (2.4,5,6) sont vérifiées avec $\theta_0 = \|\varphi\|_2 = 1$. Supposons construites $g_0,\dots,g_j$ et soit $h_j = r_0(g_0) +\dots+ r_j(g_j)$. Alors

$$\|f_j - h_j\|_2 = \|g_j - r_j(g_j)\|_2 = \|(|g_j| - \eta_j)_+\|_2 \leq C_{p,\varepsilon}\eta_j^{1-p}\theta_j^p .$$

On définit alors $\psi \in L^2(\hat{G})$ par

(2.7) $\psi(\xi) = 0$ si (cas favorable) $|\hat{h}_j(\xi)| \geq |\varphi(\xi)|[(1+\delta_0)\dots(1+\delta_j)]^{-1}$

(2.8) $\psi(\xi) = 2\,|\varphi(\xi)|[(1+\delta_0)\dots(1+\delta_j)]^{-1}$ sinon.

Dans ce dernier cas, on a $|\hat{h}_j(\xi)| \leq |\hat{f}_j(\xi)|(1+\delta_j)^{-1}$ d'après (2.4), ce qui entraîne

$$0 \leq \psi(\xi) \leq \frac{2}{\delta_j}|\hat{f}_j(\xi) - \hat{h}_j(\xi)| ,$$

$$\|\psi\|_2 \leq \frac{2}{\delta_j}\|f_j - h_j\|_2 \leq 2C_{p,\varepsilon}\delta_j^{-1}\eta_j^{1-p}\theta_j^p .$$

On définit alors $g_{j+1} = \check{\psi}_t$ où ψ_t est associée à ψ par (1.5). Cette fonction satisfait (2.5) et (2.6) si l'on pose

(2.9) $\theta_{j+1} = 2C_{p,\varepsilon}\delta_j^{-1}\eta_j^{1-p}\theta_j^{-p}$.

Comme $f_{j+1} = h_j + g_{j+1}$, on a d'autre part $\hat{f}_{j+1} = \hat{h}_j + \psi_t$ avec $|\psi_t| = \psi$, donc (2.4) est vérifié à l'ordre $j+1$ par construction de ψ. Les propriétés (2.4,5,6) montrent que la suite f_j converge vers une fonction $f = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j(g_j)$ qui vérifie les inégalités

(2.10) $\|f\|_2 \leq \sum_{j=0}^{+\infty}\theta_j$, $\|f\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{+\infty}\eta_j$, $|\hat{f}| \geq |\varphi|\prod_{j=0}^{+\infty}(1+\delta_j)^{-1}$.

Le choix $\delta_j = p^{-j-1}$, $\theta_j = p^{-pj/(p-1)}$, $\eta_j = \lambda\delta_j$,

$\lambda = \left(2C_{p,\varepsilon}p^{p^2/p-1}\right)^{1/p-1}$ satisfait la relation de récurrence (2.9) et conduit aux estimations (2.2) et (2.3) avec les constantes respectives

$$\sum \theta_j \Pi(1+\delta_j) = A_p = \frac{1}{1-p^{-\frac{p}{p-1}}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{p^j}\right) ,$$

$$\sum \eta_j \Pi(1+\delta_j) = \sqrt{\varepsilon}\, B_p = \sqrt{\varepsilon} \left(2p!^{\frac{1}{2}} p^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{p^j}\right) .$$

On vérifie enfin par un calcul numérique que $A_{11} < 1{,}186$, $B_{11} < 3{,}685$ et $A_p < 1+\frac{1}{M}$, $B_p < 1+\sqrt{2M/e}$ pour $p-1 \leq 2M < p$, $M \geq 17$. ∎

3. <u>APPLICATION AU THEOREME D'ORLICZ - PALEY - SIDON.</u>

Le théorème LKK apparaît comme une version forte du théorème OPS . En appliquant LKK à un groupe quotient U/D compact ($U \subset G$ ouvert, $D \subset U$ discret) on peut déduire la conséquence suivante relative aux espaces amalgames $\ell^p(L^q(G))$ (cf. [2]). L'espace $\ell^p(L^q(G))$ est par définition l'ensemble des f mesurables sur G telles que

$$\|f\|_{\ell^p(L^q)} = \left[\int_G \|\mathbb{1}_{x+E}\, f\|_q^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

où E est un voisinage compact de l'unité de G (cf. [1]).

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> K <u>une partie compacte de</u> G <u>d'intérieur non vide. Il existe un compact</u> $L \subset \hat{G}$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>tels que pour toute fonction</u> $\varphi \in \ell^2(L^\infty(\hat{G}))$ <u>il existe une fonction</u> $f \in C_K(G)$ <u>à support dans</u> K <u>telle que</u>

$$|\hat{f}| * \mathbb{1}_L \geq |\varphi| , \quad \|f\|_\infty \leq C\|\varphi\|_{\ell^2(L^\infty)} .$$

Par dualité ce corollaire entraîne une théorème de type OPS , à savoir que l'espace des multiplicateurs ponctuels de $\widehat{C_K(G)}$ dans $L^1(\hat{G})$ est $\ell^2(L^1(\hat{G}))$.

<u>REFERENCES</u>

[1] J.P. BERTRANDIAS, C. DUPUIS. - Transformation de Fourier sur les espaces $\ell^p(L^{p'})$;
Ann. Inst. Fourier, vol. 29, n° 1, 1979, pp. 189-206.

[2] J.P. DEMAILLY. - Sur les transformées de Fourier de fonctions continues et le théorème de de Leeuw - Katznelson - Kahane ;
à paraître dans le fascicule 1983/84 du groupe de travail d'Analyse harmonique de Grenoble.

[3] R.E. EDWARDS. - Fourier series. A modern introduction. Vol. II ;
Holt, Rinehart and Winston (1967), 2e édition, Springer (1982).

[4] K. DE LEEUW, Y. KATZNELSON, J.P. KAHANE. - Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues ;
C.R.A.S. Paris, t. 285 (19 déc. 1977), série A 1001.

[5] S.B. KISLIAKOV. - Fourier coefficients of analytic functions defined up to the boundary ;
preprint Univ. de Leningrad 1978 ; cf. aussi Théorie spectrale des fonctions et des opérateurs, Trudy Lenin. Mat. Institut, Acad. Nauk SSSR (1981), vol. 155, pp. 77-94 (en russe).

(12 juillet 84)