Inégalités de Morse holomorphes et Grand Théorème de Matsusaka (d'après Y.T. Siu)

Jean-Pierre Demailly, Institut Fourier, Grenoble

Dans tout cet exposé, X désignera une variété algébrique projective non-singulière, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, et L désignera un fibré en droites algébrique sur X (ou ce qui revient au même, holomorphe sur X, d'après le théorème GAGA de Serre).

On utilisera une notation additive pour le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ (groupe des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes de rang 1): on notera donc $-L$ le fibré dual $L^\star$ et $L + L'$ le produit tensoriel $L \otimes L'$ de deux fibrés en droites.

Rappelons que si $D = \sum \lambda_j D_j$ est un diviseur sur X, i.e. une combinaison linéaire formelle où les $D_j \subset X$ sont des hypersurfaces algébriques et les λ_j des coefficients entiers, on peut associer à D le faisceau $\mathcal{O}(D)$ des germes de fonctions méromorphes de la forme $f = h/g$ où h est holomorphe et où g a précisément D pour diviseur de zéros et de pôles. On a de façon évidente $\mathcal{O}(D + D') = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')$ et $\mathcal{O}(D)$ s'identifie au faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites (ce fibré sera encore noté $\mathcal{O}(D)$).

Rappelons enfin que l'on note $\mathcal{O}(-1)$ le fibré en droites tautologique au dessus de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^N$, et $\mathcal{O}(1)$ son dual.

Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Si $\sigma_0,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_N$ est une base de $H^0(X, L)$, on a une application rationnelle canonique

$$\begin{aligned} \Phi_L : X & - - - - \to \mathbb{P}^N \\ x & \longmapsto \big(\sigma_0(x) : \sigma_1(x) : \cdots : \sigma_N(x)\big) \end{aligned}$$

qui est bien définie et holomorphe sur le complémentaire $X \smallsetminus Z_L$ de "l'ensemble des points-base", à savoir l'ensemble

$$Z_L = \{x \in X; \sigma_0(x) = \sigma_1(x) = \cdots = \sigma_N(x) = 0\}\ .$$

A tout élément $v \in L_x^\star$, on peut associer le point

$$\big(v^\star\sigma_0(x), v^\star\sigma_1(x), \ldots, v^\star\sigma_N(x)\big) \in \mathbb{C}^{N+1},$$

appartenant à la droite $\mathbb{C} \cdot \Phi_L(x)$, i.e. à la fibre de $\mathcal{O}(-1)$ au point $\Phi_L(x)$. Ceci montre que $L^\star$ (resp. L) s'identifie à $\Phi_L^\star\mathcal{O}(-1)$ (resp. $\Phi_L^\star\mathcal{O}(1)$) au dessus de $X \smallsetminus Z_L$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathcal{O}(1) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X \smallsetminus Z_L & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Définition 1. — *On dit que L est très ample si Φ_L est partout définie sur X (i.e. $Z_L = \emptyset$) et induit un plongement $\Phi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, de sorte que $L \simeq \Phi_L^\star\mathcal{O}(1)$.*

DÉFINITION 2. — *On dit que L est ample si mL est très ample pour $m > 0$ suffisamment grand, de sorte que:*

$$\Phi_{mL} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N, \qquad mL = (\Phi_{mL})^\star \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)_{|X}.$$

Le théorème de plongement de Kodaira (1954) nous dit que si X est une variété complexe compacte possédant un fibré en droite holomorphe L équipé d'une métrique hermitienne C^∞ de *courbure définie positive*, alors X est algébrique projective et L est ample sur X. La réciproque est trivialement vraie, car on vérifie facilement que la métrique canonique du fibré $\mathcal{O}(1)$ est à courbure positive.

Rappelons que si $L_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}$ est une trivialisation holomorphe dans laquelle la métrique hermitienne de L est donnée par un *poids* φ, i.e.

$$\forall x \in U, \quad \forall \xi \in L_x \simeq \mathbb{C}, \qquad \|\xi\|^2 = |\xi|^2 e^{-\varphi(x)},$$

alors la forme de courbure de L est la forme d-fermée de type $(1,1)$

$$\Theta(L) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi = \frac{i}{2\pi}\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k.$$

En conséquence $\Theta(L) \geq 0$ si et seulement si φ est *plurisousharmonique*.

RÉCAPITULATION. —

L ample $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \Phi_{mL} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ pour $m \gg 0$

$\Updownarrow$

$\exists$ une métrique hermitienne sur L avec $\Theta(L) > 0$

$\Updownarrow$

$\exists$ une collection de poids φ *strictement* plurisousharmoniques définissant une métrique sur L.

NOTATIONS. —

$$\begin{aligned} c_1(L) = &\ \text{(première) classe de Chern de } L \\ = &\ \text{classe de cohomologie de } \Theta(L) \text{ dans } H^2_{DR}(X, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Si $L_1, \cdots, L_p$ sont des fibrés en droite holomorphes sur X et si Y est une sous-variété algébrique de dimension p de X, on notera suivant l'usage

$$L_1 \cdot L_2 \cdot \ \cdots \ \cdot L_p \cdot Y = \int_Y c_1(L_1) \wedge \cdots \wedge c_1(L_p)$$

et on écrira ce nombre d'intersection simplement $L_1 \cdot L_2 \cdot \ \cdots \ \cdot L_n$ si $Y = X$. En particulier, on pose

$$L^n = \int_X c_1(L)^n \ .$$

QUESTION FONDAMENTALE. — Étant donné un fibré ample L sur X, peut-on calculer explicitement un entier m_0 tel que mL soit très ample pour $m \geq m_0$?

Si on peut expliciter un tel entier m_0, alors on a pour $m \geq m_0$ un plongement

$$\Phi_{mL} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

et le degré de X dans $\mathbb{P}^N$ est

$$\deg(X) = \int_X c_1\big(\mathcal{O}(1)\big)^n = \int_X c_1(mL)^n = m^n L^n.$$

Conséquence. — Connaissant m_0 et le nombre d'intersection L^n, on obtient une borne explicite sur $\deg(X)$.

Groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe. — Si F est un fibré vectoriel holomorphe de rang r au dessus d'une variété analytique complexe M quelconque, on considère pour chaque entier p le complexe $(K^{p,\bullet}, \overline{\partial})$ des (p,q)-formes différentielles de classe C^∞ à valeurs dans le fibré vectoriel F (la graduation étant fournie par l'entier q). Le groupe de cohomologie de degré q de ce complexe est appelé groupe de cohomologie de Dolbeault de type (p,q) à valeurs dans F, noté $H^{p,q}(M,F)$. On a de manière évidente des isomorphismes

$$K^{p,q} \simeq \Omega^p_M \otimes K^{0,q}, \qquad H^{p,q}(M,F) \simeq H^{0,q}(M, \Omega^p_M \otimes F)$$

où $\Omega^p_M = \Lambda^p T^\star_M$, et l'isomorphisme dit "de Dolbeault" identifie ces groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à la cohomologie du faisceau des germes de sections holomorphes (ou algébriques) de $\Omega^p_M \otimes F$, notée $H^q(M, \Omega^p_M \otimes F)$.

Rappel: notion de polynôme de Hilbert. — D'après la formule de Riemann-Roch, la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\begin{aligned}\chi(X,kL) &= \sum_{0\leq j\leq n} (-1)^j \dim H^j(X,kL) \\ &= \frac{1}{n!}(a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_0)\end{aligned}$$

est un polynôme de degré n en k. Les coefficients $a_0, a_1, \cdots a_n$ dépendent seulement de $c_1(L)$ et des classes de Chern $c_j(X)$, en particulier

$$a_n = L^n, \quad a_{n-1} = -\frac{1}{2} K_X \cdot L^{n-1},$$

où $K_X = \Omega^n_X = \Lambda^n T^\star_X$ est le "fibré canonique" de la variété.

Le grand théorème de Matsusaka (Matsusaka, Amer. J. Math. 1970 et 1972, puis article avec Kollár en 1983). —
Considérons l'ensemble des paires (X,L) de variétés projectives non-singulières, polarisées par un fibré en droites ample L. Alors il existe une fonction

$$m_0(n, a_n, a_{n-1}) = \mu_0(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$$

telle que les paires (X,L) pour lesquelles (a_n, a_{n-1}) sont les deux premiers coefficients du polynôme de Hilbert de L soient toutes plongeables dans un espace *projectif $\mathbb{P}^N$ via Φ_{m_0L}, où $m_0 = m_0(n, a_n, a_{n-1})$. L'ensemble de ces paires peut alors être décrit comme une union finie de sous-variétés quasi-projectives irréductibles du schéma de Hilbert des sous-variétés de dimension n de $\mathbb{P}^N$ de degré $m_0^n a_n$.*

Question subsidiaire. — La fonction $m_0(n, a_n, a_{n-1})$ est-elle effectivement calculable ?

Observations. —

1) m_0 ne peut pas dépendre seulement de n.

$$X = \text{ courbe de genre } g, \qquad p \in X, \quad L = \mathcal{O}([p]) \text{ de degré 1.}$$

Dans ce cas il est classique que $h^0(X, mL) = 1$ pour $m < g$, si p est un point générique. En conséquence $m_0 \geq g$.

2) m_0 ne peut pas dépendre seulement de n et de L^n. Même exemple !

3) Des valeurs “universelles” de m_0, i.e. ne dépendant que de n, peuvent être obtenues si mL est remplacé par un fibré en droites “adjoint”, c'est-à-dire un fibré de la forme $K_X + mL$. En petites dimensions, on connaît les résultats suivants:

$n = 1$: L ample $\Rightarrow K_X + 3L$ très ample (facile)

$n = 2$: L ample $\Rightarrow K_X + 4L$ très ample (I. Reider 1987).

Conjecture de Fujita (1986). —

$$\forall n, \quad L \text{ ample } \Rightarrow K_X + (n+2)L \text{ très ample.}$$

En dehors de quelques résultats partiels dus à Ein et Lazarsfeld et qui sont quasi optimaux en dimension 3, le meilleur résultat général actuellement connu en dimension $n \geq 3$ semble être le suivant:

Théorème (J.P. Demailly, Journal Diff. J. 1993). —

$$\forall n, \quad L \textit{ ample } \Rightarrow 2K_X + 12n^n L \textit{ très ample.}$$

Preuve. Elle est de nature analytique. Kollár a proposé une approche purement algébrique, mais les résultats accessibles par cette méthode semblent pour l'instant moins fins. Les principaux outils analytiques utilisés sont:

⋆ les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$ (1965)

⋆ le théorème d'Aubin-Calabi-Yau (1977)

⋆ la théorie des courants positifs et des nombres de Lelong.

Nous allons essayer de préciser les principales idées.

Estimations L^2 de Hörmander. — Ces estimations, dont le point de départ est la formule de Bochner, ont été développées successivement par Kodaira, Akizuki-Nakano, Andreotti-Vesentini et Hörmander. On peut à juste titre estimer que c'est un des outils les plus puissants dont on dispose actuellement en géométrie analytique ou algébrique (au moins pour la caractéristique 0).

Soit X une variété algébrique projective (ou même seulement kählérienne complète), équipée d'une métrique kählérienne ω. Soit L un fibré holomorphe en droites sur X muni d'une métrique hermitienne de classe C^∞ associée à la fonction poids φ. Soit enfin $dV = dV_\omega$ l'élément de volume kählérien et soit

$$\lambda_1(x) \geq \ldots \geq \lambda_n(x)$$

les valeurs propres de la forme de courbure $\Theta(L)$ par rapport à ω en tout point $x \in X$. Alors pour toute forme u de type (p,q) et de classe C^∞ à valeurs dans L et à support compacte, on a l'inégalité dite de Bochner-Kodaira-Nakano:

$$||\overline{\partial} u||^2_\varphi + ||\overline{\partial}^\star u||^2_\varphi \geq \int_X (\lambda_1 + \cdots + \lambda_q - \lambda_{p+1} - \cdots - \lambda_n)|u|^2 e^{-\varphi} dV.$$

La démonstration repose sur des calculs classiques de commutation d'opérateurs en géométrie kählérienne.

Nous nous restreindrons désormais au cas $(p,q) = (n,q)$. On obtient dans ce cas l'inégalité plus maniable

$$||\overline{\partial} u||^2_\varphi + ||\overline{\partial}^\star u||^2_\varphi \geq \int_X (\lambda_1 + \cdots + \lambda_q)|u|^2 e^{-\varphi} dV.$$

Le membre de gauche est minoré par $C||u||^2_\varphi$ si la forme de courbure $\Theta(L)$ est définie positive. Il n'y a donc pas de formes harmoniques u de type (n,q) avec $q > 0$ (une forme u est dite *harmonique* si $\overline{\partial} u = \overline{\partial}^\star u = 0$). Rappelons que pour tout fibré vectoriel hermitien F, la théorie de Hodge donne un isomorphisme

$$H^q(X,F) \simeq \{(0,q)\text{-formes harmoniques à valeurs dans } F\}.$$

Comme une (n,q)-forme à valeurs dans L s'identifie à une $(0,q)$-forme à valeurs dans $K_X \otimes L$, cet isomorphisme implique le

Théorème d'annulation de Kodaira (1954). —

$$L \text{ ample} \quad \Rightarrow \quad H^q(X, K_X + L) = 0, \quad \forall q \geq 1.$$

En fait, ce théorème d'annulation qualitatif s'accompagne d'estimées L^2 très utiles, dues à Hörmander et Andreotti-Vesentini.

Théorème. — *Soit (X,ω) une variété kählérienne compacte et L un fibré en droites sur X muni d'une métrique hermitienne associée à un poids φ, satisfaisant la condition de courbure*

$$\Theta(L) \geq \varepsilon\omega, \qquad \varepsilon > 0,$$

(on suppose seulement $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$, de sorte que $\Theta(L) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ est bien définie au sens des distributions). Alors pour toute forme v de type (n,q) à valeurs dans L telle que

$$\overline{\partial} v = 0 \quad \textit{et} \quad \int_X |v|^2 e^{-\varphi} dV < +\infty,$$

il existe une $(n, q-1)$-forme u telle que

$$\overline{\partial} u = v \quad \text{et} \quad \int_X |u|^2 e^{-\varphi} dV \leq (q\varepsilon)^{-1} \int_X |v|^2 e^{-\varphi} dV.$$

Preuve. Si la métrique est lisse, l'inégalité B-K-N implique

$$||\overline{\partial} u||_\varphi^2 + ||\overline{\partial}^\star u||_\varphi^2 \geq q\varepsilon ||u||^2$$

pour toute forme u de classe C^∞, et l'estimation souhaitée résulte alors facilement de la théorie élémentaire des opérateurs dans les espaces de Hilbert. Le cas $\varphi \in L^1_{\rm loc}$ s'en déduit par des procédés de régularisation standards pour les fonctions plurisousharmoniques. □

Corollaire (Hörmander-Bombieri-Skoda). — *Soit L un fibré en droites holomorphe équippé d'une métrique hermitienne de courbure $\Theta(L) \geq \varepsilon\omega$, dont le poids φ présente en un point $x_0 \in X$ une singularité logarithmique de coefficient γ, i.e.*

$$\varphi(z) \leq \gamma \log |z - x_0|^2 + O(1),$$

et telle que $e^{-\varphi}$ est localement sommable sur un voisinage pointé $V_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Alors

(i) *Si $\gamma \geq n$, il existe une section holomorphe $h \in H^0(X, K_X + L)$ telle que $h(x_0) \neq 0$.*

(ii) *Plus généralement, si $\gamma \geq n + s$ pour un entier $s \geq 0$, il existe une section holomorphe $h \in H^0(X, K_X + L)$ dont le jet d'ordre s $J^s h(x_0)$ est prescrit d'avance.*

Preuve. Soit σ une section holomorphe locale de $K_X \otimes L$ et P un polynôme de degré s dans des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ au voisinage de x_0, tels que $P(z)\sigma(z)$ ait le jet prescrit en x_0. On choisit une fonction plateau ψ à support dans la carte locale et égale à 1 au voisinage de x_0, et on résout l'équation

$$\overline{\partial} u = v, \qquad \text{où} \quad v = \overline{\partial}(\psi P \sigma) = (\overline{\partial}\psi) P \sigma \quad \text{est de type } (n, 1).$$

Comme le support de v ne contient pas x_0, la condition d'intégrabilité $\int_X |v|^2 e^{-\varphi} dV < +\infty$ est trivialement satisfaite. La condition $\int_X |u|^2 e^{-\varphi} dV < +\infty$ impose à u de s'annuler à un ordre au moins $s+1$ en x_0, car

$$e^{-\varphi(z)} \geq c|z - x_0|^{-2(n+s)} \qquad \text{près de } x_0.$$

Il en résulte que $h = \psi P \sigma - u$ est holomorphe sur X et possède le même jet d'ordre s que $P\sigma$ en x_0. □

Utilisation du théorème d'Aubin-Calabi-Yau. — Grâce au théorème précédent, pour construire suffisamment de sections de $K_X + L$ et obtenir que ce fibré est très ample, il suffit de montrer l'existence de métriques dont le poids φ possède des pôles logarithmiques isolés. Pour cela l'idée est la suivante: on choisit a priori un poids φ_0 de classe C^∞ donnant une forme de courbure $\Theta(L)_0$ définie positive,

puis on remplace le poids par $\varphi = \varphi_0 + \psi$, ce qui donne une nouvelle forme de courbure
$$\Theta(L) = \Theta(L)_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\psi.$$
On résout alors l'équation de Monge-Ampère complexe
$$\Big(\Theta(L)_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\psi\Big)^n = f,$$
où $f > 0$ est une forme volume donnée. D'après un cas particulier important du théorème d'Aubin-Calabi-Yau, cela est possible pour toute forme f de classe C^∞ telle que
$$\int_X f = \int_X \Theta(L)^n = L^n.$$
On fait converger f vers la somme d'une forme volume de densité uniforme et d'une mesure de Dirac en un point donné x_0. L'observation principale, que nous ne détaillerons pas ici, est que la solution ψ acquiert dans ces conditions la singularité logarithmique cherchée au point x_0. (La théorie des courants est utilisée principalement pour contrôler les singularités de ψ aux points voisins de x_0, via des inégalités d'auto-intersection pour les courants. Pour cela on fait un usage intensif de la théorie des nombres de Lelong).

En combinant ces idées avec les inégalités de Morse holomorphes, Y.T. Siu (1993) a été capable de prouver une version effective du grand théorème de Matsusaka. Dans la seconde partie de cet exposé, nous montrerons qu'il est possible d'améliorer encore les bornes obtenues par Siu pour obtenir dans certains cas des bornes quasi-optimales. Voici les principales idées mises en oeuvre.

Inégalités de Morse holomorphes (J.P. Demailly, Ann. Inst. Fourier 1985). *Soit X une variété complexe compacte, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, et soit E un fibré en droites hermitien sur X (pas nécessairement semi-positif). Alors $\forall q = 0, 1, \ldots, n$*
$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} h^j(X, kE) \le \frac{k^n}{n!} \int_{X(L,\le q)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$$
où
$$X(L,q) = \{x \in X\,;\ \Theta(E)_x \text{ a pour signature } (n-q,q)\}$$
$$X(L,\le q) = \bigcup_{0\le j\le q} X(L,j).$$

Ce résultat se démontre au moyen de la théorie spectrale des Laplaciens complexes associées aux connexions de Chern des fibrés holomorphes mis en jeu. Il y a aujourd'hui plusieurs approches possibles, l'une basée sur des arguments de minimax à la Courant-Hilbert, l'autre, due à Bismut (1986), reposant sur une étude approfondie du noyau de la chaleur.

Les inégalités de Morse holomorphes sont un complément très utile à la formule de Riemann-Roch dans la mesure où elles donnent des informations précises (encadrement de la dimension) pour chaque groupe de cohomologie $H^j(X,kE)$ pris isolément. Néanmoins, cette information est difficile à exploiter, car il y a peu de circonstances où les intégrales de courbures soient accessibles au calcul. Y.T. Siu a fait récemment la très intéressante observation que les inégalités de Morse holomorphes peuvent être "traduites" en un énoncé purement algébrique.

DÉFINITION. — *Un fibré en droites L est dit nef (numériquement effectif) si pour toute courbe complexe fermée $C \subset X$ on a $L \cdot C = \deg(L_{|C}) \geq 0$.*

Sur une variété projective, on montre aisément que L est *nef* si et seulement si la courbure de L est *presque semi-positive*, autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une métrique hermitienne φ_ε de classe C^∞ sur L telle que

$$\Theta_{\varphi_\varepsilon}(L) \geq -\varepsilon\omega,$$

où ω est une forme de Kähler sur X donnée.

COROLLAIRE ALGÉBRIQUE DES INÉGALITÉS DE MORSE. — *Soit $E = F - G$ un fibré en droites holomorphe sur une variété algébrique projective X, où F et G sont des fibré en droites nefs. Alors pour tout $q = 0, 1, \ldots, n = \dim X$ on a l'inégalité de Morse*

$$\sum_{0\leq j\leq q} (-1)^{q-j} h^j(kE) \leq \frac{k^n}{n!} \sum_{0\leq j\leq q} (-1)^{q-j} \binom{n}{j} F^{n-j} \cdot G^j + o(k^n).$$

En ajoutant $\varepsilon\omega$ aux formes de courbure de F et G, $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, on peut écrire $\Theta(E) = \Theta_\varepsilon(F) - \Theta_\varepsilon(G)$ où $\Theta_\varepsilon(F) = \Theta(F) + \varepsilon\omega$ et $\Theta_\varepsilon(G) = \Theta(G) + \varepsilon\omega$ sont définies positives. Soient

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$$

les valeurs propres de $\Theta_\varepsilon(G)$ par rapport à $\Theta_\varepsilon(F)$. L'énoncé original des inégalités de Morse implique

$$\sum_{0\leq j\leq q} (-1)^{q-j} h^j(kE) \leq$$
$$\leq \frac{k^n}{n!} \int_{\{x;\lambda_{q+1}(x)<1\}} (-1)^q \prod_{1\leq j\leq n} (1-\lambda_j) \Theta_\varepsilon(F)^n + o(k^n).$$

D'autre part, nous avons

$$\binom{n}{j} \Theta_\varepsilon(F)^{n-j} \wedge \Theta_\varepsilon(G)^j = \sigma_n^j(\lambda)\, \Theta_\varepsilon(F)^n,$$

où $\sigma_n^j(\lambda) = j$-ième fonction symétrique élémentaire en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Par conséquent

$$\sum_{0\leq j\leq q} (-1)^{q-j} \binom{n}{j} F^{n-j} \cdot G^j = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_X \sum_{0\leq j\leq q} (-1)^{q-j} \sigma_n^j(\lambda)\, \Theta_\varepsilon(F)^n.$$

Pour démontrer le Corollaire algébrique, il suffit donc de vérifier que

$$\sum_{0\leq j\leq n} (-1)^{q-j} \sigma_n^j(\lambda) - \mathbf{1}_{\{\lambda_{q+1}<1\}} (-1)^q \prod_{1\leq j\leq n} (1-\lambda_j) \geq 0$$

pour tous $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$, où $\mathbf{1}_{\{\ldots\}}$ désigne la fonction caractéristique d'un ensemble. Cela résulte d'une récurrence facile sur n (on écrit simplement que $\sigma_n^j(\lambda) = \sigma_{n-1}^j(\lambda) + \sigma_{n-1}^{j-1}(\lambda)\,\lambda_n$).

Dans le cas $q = 1$, nous obtenons la borne inférieure particulièrement intéressante

$$h^0(kE) - h^1(kE) \geq \frac{k^n}{n!}(F^n - nF^{n-1}\cdot G) - o(k^n).$$

Ceci montre qu'un certain multiple kE possède des sections non nulles dès que $F^n - nF^{n-1}\cdot G > 0$.

Conséquence. — *Supposons que F et G soient nefs et que F soit gros (c'est-à-dire $F^n > 0$). Alors les grands multiples de $mF - G$ possédent des sections dès que*

$$m > n\,\frac{F^{n-1}\cdot G}{F^n}.$$

Dans cette dernière condition, le facteur n est optimal: on le voit facilement en prenant $F = \mathcal{O}(a,\ldots,a)$ et $G = \mathcal{O}(b_1,\ldots,b_n)$ sur $X = \mathbb{P}_1^n$; la condition du Corollaire est alors $m > \sum b_j/a$, tandis que $k(mF-G)$ a une section si et seulement if $m \geq \sup b_j/a$; ceci montre qu'on ne peut remplacer n par $n(1-\varepsilon)$.

En combinant ce qui précède avec les estimations L^2 de Hörmander on obtient facilement le résultat effectif suivant.

Théorème. — *Soit L un fibré en droites ample au dessus d'une variété projective X de dimension n et soit B un fibré en droites nef au dessus de X. Alors $2K_X + mL - B$ possède une section non nulle dès que*

$$m > n\,\frac{L^{n-1}\cdot B}{L^n} + C_n, \qquad \text{avec par exemple}\ \ C_n = 12\,n^n.$$

Preuve. Ici C_n est une constante telle que $K_X + C_nL$ peut être équipé d'une métrique hermitienne (non nécessairement lisse) telle que le poids φ satisfasse la condition (i) dans le Théorème d'Hörmander-Bombieri-Skoda. Le fait que C_n existe et qu'on puisse prendre $C_n = 12n^n$ est un sous-produit de la démonstration du théorème sur la grande amplitude de $2K_X + 12n^nL$. Le Théorème ci-dessus est alors démontré en considérant $K_X + L'$ où $L' = (K_X + C_nL) + (mL - B)$ est équipé de la métrique produit de la métrique de $K_X + C_nL$ et d'une métrique à courbure ≥ 0 sur $mL - B$, laquelle existe si $m > n(L^{n-1}\cdot B)/L^n$, du fait de l'existence de diviseurs effectifs associés à des sections de $H^0(X, k(mL-B))$. Grâce au théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda, on en déduit que $K_X + L' = 2K_X + C_nL + mL - B$ a une section pour $m > n(L^{n-1}\cdot B)/L^n$, et ceci est équivalent à l'énoncé du Théorème.

Maintenant, on remplace B par $B+2(K_X+(n+1)L)$ qui est encore nef grâce à un résultat récent de Fujita, affirmant que

$$L \text{ ample} \Rightarrow K_X+(n+1)L \text{ nef}.$$

Ceci donne:

Corollaire. — *Si L est ample et si B est nef, alors $mL-B$ admet une section non nulle pour*

$$m > n\frac{L^{n-1}\cdot B + 2L^{n-1}\cdot K_X}{L^n} + C_n + 2(n^2-1).$$

Ici encore l'estimation n'est pas très loin d'être optimale: la quantité $2\,L^{n-1}\cdot K_X$ ne peut pas être remplacée par quelque chose de plus petit que $\frac{1}{2}L^{n-1}\cdot K_X$ (prendre X égal à un produit de courbes C_j de genre g_j grand et $B=0$; notre condition pour que $L=\mathcal{O}(a_1[p_1])\otimes\ldots\otimes\mathcal{O}(a_n[p_n])$ donne $H^0(X,mL)\neq 0$ devient $m>2\sum(2g_j-2)/a_j+C'_n$, alors que la condition optimale est $m>\sup(g_j-1)/a_j$).

Jusqu'à ce point, les résultats obtenus s'étendent au cas où X possède des singularités (les inégalités de Morse sont en effet encore vraies dans le cas singulier, comme on le voit aisément par un argument de désingularisation). Il en résulte qu'on peut appliquer la même méthode pour obtenir l'énoncé plus général suivant:

Théorème. — *Soit L un fibré en droites ample sur une variété projective X de dimension n, et soit B un fibré en droites nef au dessus de X. Pour toute sous-variété algébrique irréductible $Y\subset X$ de dimension p, soit ω_Y le faisceau des germes de p-formes holomorphes sur $Y_{\rm reg}$ qui sont L^2 dans un voisinage de l'ensemble des singularités (on peut montrer facilement que ω_Y coïncide avec $\pi_\star K_{\tilde X}$ pour n'importe quelle désingularisation $\pi:\tilde X\to X$ de X). Soit $C'_n=3(3n-2)^n$. Alors pour*

$$m > p\frac{L^{p-1}\cdot B\cdot Y}{L^p\cdot Y},$$

le faisceau $\omega_Y\otimes\mathcal{O}(mL-B+K_X+C'_nL)_{|Y}$ admet une section non nulle sur Y.

Ici C'_n est une constante telle que $K_X+C'_nL$ puisse être muni de métriques hermitiennes possédant un pôle logarithmique isolé de la forme $\alpha\log|z-x_0|+O(1)$, $\alpha\geq p$, en n'importe quel point x_0. Une telle constante existe et peut être prise égale à $3(n+2p)^n\leq C'_n$ (pour voir cela on utilise encore le Théorème d'Aubin-Calabi-Yau).

Maintenant, on considère le fibré en droites très ample $H=2(K_X+C'_nL)$ et on applique le lemme élémentaire suivant (pour vérifier ce lemme, on plonge X dans l'espace projectif par Φ_H, et on fait une projection générique de Y sur un sous-espace projectif de dimension $=\dim Y$).

Lemme. — *Soit $Y\subset X$ une sous-variété algébrique irréductible de dimension p. Alors pour tout entier $\lambda\geq H^p\cdot Y$, le faisceau $\mathcal{H}om(\omega_Y,\mathcal{O}((\lambda(\lambda-1)-p-1)H)_{|Y}))$ admet une section non triviale.*

Puisque $(\lambda+p+1/2)H$ est aussi très ample et puisque $H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{O}(mL-B+\frac{1}{2}H))\neq 0$ par le Théorème ci-dessus, le Lemme implique:

Corollaire. — *Pour $Y\subset X$ irréductible de dimension p et pour tous entiers*

$$m>p\frac{L^{p-1}\cdot B\cdot Y}{L^p\cdot Y},\qquad \lambda\geq H^p\cdot Y,$$

l'espace $H^0(Y,mL-B+\lambda^2H)$ contient une section non triviale. Lorsque $p=n$, l'hypothèse sur λ peut être affaiblie en $\lambda\geq 1$.

Pour démontrer le Grand Théorème de Matsusaka, il suffit d'obtenir une borne effective sur m pour que $mL-B$ soit nef; alors $K_X+(K_X+12n^nL)+(mL-B)$ est très ample (a fortiori $mL-B+H$ est très ample), et nous avons seulement à remplacer B by $B+2(K_X+2(n+1)L)$ pour obtenir un critère de grande amplitude de $mL-B$.

En utilisant le dernier Corollaire, on construit par récurrence une suite de sous-variétés algébriques (non nécessairement irréductibles)

$$X=Y_n\supset Y_{n-1}\supset\ldots\supset Y_1\supset Y_0$$

telles que Y_p soit de dimension p et Y_{p-1} soit l'ensemble des zéros d'une section $\sigma_p\in H^0(Y_p,\mathcal{O}(m_pL-B+\lambda_p^2H))$ pour des entiers convenables $m_p,\lambda_p\geq 1$.

On peut prendre $\lambda_n=1$ et $m_n>n\,L^{n-1}\cdot B/L^n$. Comme $H-C''_nL$ est nef pour $C''_n=2(C'_n-n-1)$, on voit que le p-cycle $Y_p=\sum\mu_{p,j}Y_{p,j}$ satisfait

$$\begin{aligned}Y_p&\equiv(m_nL-B+\lambda_n^2H)\cdot\ldots\cdot(m_{p+1}L-B+\lambda_{p+1}^2H)\\&\leq\Big(\lambda_n^2+\frac{m_n}{C''_n}\Big)\cdots\Big(\lambda_{p+1}^2+\frac{m_{p+1}}{C''_n}\Big)H^{n-p}.\end{aligned}$$

Les conditions que doivent satisfaire m_p et λ_p sont

$$m_p>p\frac{L^{p-1}\cdot B\cdot Y_{p,j}}{L^p\cdot Y_{p,j}},\qquad \lambda_p\geq H^p\cdot Y_{p,j},\quad\forall j.$$

Comme $L^p\cdot Y_{p,j}\geq 1$, $Y_{p,j}\leq Y_p$ et $L\leq\frac{1}{C''_n}H$, il est suffisant d'avoir

$$\begin{aligned}m_p&>\frac{p}{(C''_n)^{p-1}}\Big(\lambda_n^2+\frac{m_n}{C''_n}\Big)\cdots\Big(\lambda_{p+1}^2+\frac{m_{p+1}}{C''_n}\Big)H^{n-1}\cdot B,\\ \lambda_p&\geq\Big(\lambda_n^2+\frac{m_n}{C''_n}\Big)\cdots\Big(\lambda_{p+1}^2+\frac{m_{p+1}}{C''_n}\Big)H^n.\end{aligned}$$

Si la seconde inégalité est réalisée, la première est vérifiée dès que

$$m_p>\frac{p\lambda_p}{(C''_n)^{p-1}}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}.$$

Par conséquent les inégalités sont certainement vérifiées si nous définissons λ_p et m_p par les formules de récurrence

$$\begin{aligned}\lambda_p&=\lambda_n^2\lambda_{n-1}^2\ldots\lambda_{p+1}^2H^n\prod_{p+1\leq k\leq n}\Big[2+\frac{k}{(C''_n)^k}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big],\\ m_p&=C''_n\lambda_p\Big[1+\frac{p}{(C''_n)^p}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big],\end{aligned}$$

où les crochets désignent des parties entières. La première formule donne aisément

$$\lambda_p = (H^n)^{3^{n-p-1}} \prod_{p+1\le k\le n} \Big[2 + \frac{k}{(C''_n)^k}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big]^{3^{k-p-1}}.$$

Les valeurs les plus grandes sont obtenues pour $p = 1$, à savoir

$$\lambda_1 = (H^n)^{3^{n-2}}\Big(2 + \frac{2}{(C''_n)^2}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big)^{1+3+\ldots+3^{n-2}},$$

et nous pouvons prendre m_1 légèrement plus grand que le produit de cette quantité par $H^{n-1}\cdot B/H^n$. On déduit de cela que $m_1L - B + \lambda_1^2 H$ est nef. En effet, si Γ est une courbe irréductible, il existe un entier $p = 1,\ldots,n$ tel que Γ soit contenue dans Y_p mais pas dans Y_{p-1}. Alors σ_p ne s'annule pas identiquement sur Γ et

$$(m_1L - B + \lambda_1^2 H)\cdot\Gamma \ge (m_pL - B + \lambda_p^2 H)\cdot\Gamma \ge 0.$$

Grâce aux arguments précédents, nous concluons que $m_1L - B + \mu_1 H$ est très ample pour des entiers m_1, μ_1 tels que

$$\mu_1 = \lambda_1^2 + 1 \le (H^n)^{2\cdot 3^{n-2}}\Big(2 + \frac{2}{(C''_n)^2}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big)^{3^{n-1}},$$
$$m_1 \le \frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}(H^n)^{3^{n-2}}\Big(2 + \frac{2}{(C''_n)^2}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big)^{3^{n-1}/2}.$$

Après remplacement de B par $B + \mu_1 H$, on conclut que $mL - B$ est très ample pour

$$m \ge M = \Big(\mu_1 + \frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big)(H^n)^{3^{n-2}}\Big(\frac{2\mu_1}{(C''_n)^2} + 2 + \frac{2}{(C''_n)^2}\frac{H^{n-1}\cdot B}{H^n}\Big)^{3^{n-1}/2}.$$

Ces bornes inférieures peuvent être remplacées par les bornes plus simples mais plus généreuses

$$\mu'_1 = (2\,H^n + H^{n-1}\cdot B)^{3^{n-1}}, \qquad M' = 2\mu'_1(H^n)^{3^{n-2}}(\mu'_1)^{3^{n-1}/2} \le (\mu'_1)^{3^{n-1}}.$$

Par conséquent, nous obtenons les résultats suivants:

Théorème. — *Si L est ample et si B est nef, alors $mL - B$ est très ample pour*

$$m \ge (2\,H^n + H^{n-1}\cdot B)^{9^{n-1}}, \qquad \text{où}\quad H = 2(K_X + 3(3n-2)^nL).$$

Corollaire. — *Si L est ample, alors mL est très ample pour $m \ge (2\,H^n)^{9^{n-1}}$.*

Il est très vraisemblable que ces bornes extrêmement généreuses peuvent être grandement améliorées (un des maillons faibles à améliorer en tout premier lieu est le lemme élémentaire concernant l'existence de sections de $\mathcal{H}om(\omega_Y, mH)$).

Remarque. — On peut utiliser l'inégalité de concavité

$$(A^n)^{1-\frac{1}{j}}(A^{n-j}\cdot B^j)^{\frac{1}{j}} \le A^{n-1}\cdot B$$

pour les fibrés en droites nefs $A = mL$, $B = K_X + (n+1)L$ pour exprimer toutes les bornes uniquement en fonction des nombres d'intersection L^n et $L^{n-1} \cdot K_X$. En effet, nous avons

$$(A+B)^n = \sum \binom{n}{j} A^{n-j} \cdot B^j \leq \sum \binom{n}{j} \frac{(A^{n-1} \cdot B)^j}{(A^n)^{j-1}} = A^n \Big(1 + \frac{A^{n-1} \cdot B}{A^n}\Big)^n.$$

En prenant $A = \alpha_n L$, $\alpha_n = 3(3n-2)^n - n - 1$, il vient

$$(K_X + 3(3n-2)^n L)^n \leq \alpha_n^n L^n \big(1 + \frac{1}{\alpha_n}(n + 1 + L^{n-1} \cdot K_X / L^n)\big)^n,$$
$$2\, H^n \leq 2^{n+1}(K_X + 3(3n-2)^n L)^n \leq (8n)^n L^n (3 + 2^{1-n} L^{n-1} \cdot K_X / L^n)^n.$$

La borne sur m pour que mL soit très ample devient

$$m \geq \big((8n)^n L^n\big)^{9^{n-1}} (3 + 2^{1-n} L^{n-1} \cdot K_X / L^n)^{n 9^{n-1}}.$$