

# Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Henstock-Kurzweil pour les fonctions d'une variable

Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>

version du 17 novembre 2007

## Introduction

L'objectif de ce texte est de proposer une « trame » pour l'enseignement de l'intégration depuis le lycée jusqu'aux premières années de l'université. Pour cela, nous développons les bases de la théorie de l'intégration telles qu'elles ont été posées et grandement éclaircies par Jaroslav Kurzweil et Ralph Henstock à la fin des années 1950. Au fil des chapitres, le niveau mathématique de l'exposition glisse progressivement d'un niveau très élémentaire jusqu'à un niveau de second cycle universitaire.

Même si au début une partie des résultats doit être admise ou démontrée de manière heuristique du fait des contraintes de temps ou des prérequis, nous pensons que la démarche mathématique utilisée dans l'enseignement doit respecter chaque fois que cela est possible les principes d'une progression par généralisations successives compatibles avec les exposés qui ont précédé (« progression concentrique »). Il est donc très utile d'introduire dès le début des définitions qui sont susceptibles d'être rendues rigoureuses et formalisées, et d'adopter un ordre de présentation des concepts et une articulation logique tels que la théorie n'aura pas à être substantiellement changée le jour où viendra la formalisation complète.<sup>(1)</sup>

- 
- (1) À l'heure actuelle, l'intégration est souvent abordée en plusieurs étapes qui sont les suivantes :
- a) En terminale, une première étape qui consiste à introduire l'intégrale comme « aire sous la courbe », avec un état d'esprit qui se ressent obligatoirement de l'appauvrissement continu de la conceptualisation depuis 2 décennies. Il en résulte qu'il est devenu très difficile de formaliser complètement la théorie, ce qui veut probablement dire qu'on ne peut guère espérer que le cours donne de véritables démonstrations, mais seulement au mieux quelques indications de preuves complétées par des considérations heuristiques.
  - b) Dans les premières années d'université, les enseignants présentent en général une version plus ou moins édulcorée de la théorie de « l'intégrale de Riemann », à l'aide d'encadrements par des fonctions en escalier, et des preuves qui tendent de plus en plus à disparaître du fait du recul des connaissances fondamentales requises (pratique des  $\varepsilon$  et  $\delta$ , continuité uniforme, ...)
  - c) En Master 1ère année apparaîtra dans les bons cas une théorie plus solide de l'intégration reposant sur la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Mais il est de notoriété publique que ce sujet qui fâche a tendance aujourd'hui à être de moins en moins traité, surtout dans les filières dites « Master enseignement ».
- Cette situation présente de nombreux inconvénients. La théorie de l'intégrale de Riemann n'est pas une « bonne théorie », ni du point de vue didactique ni du point de vue mathématique. La présentation n'en est pas très simple : il faut manipuler constamment des encadrements de fonctions, utiliser la continuité uniforme pour démontrer l'intégrabilité des fonctions continues, faire des découpages de  $\varepsilon$  et  $\delta$  parfois peu éclairants. Il y a de nombreuses restrictions ou pathologies, des théorèmes essentiels comme ceux de la convergence monotone ne sont pas valables, etc. Plus tard, l'introduction de l'intégrale de Lebesgue viendra balayer ce travail en montrant qu'il s'agissait en fait d'une théorie bancale et incomplète. Si les étudiants échappent à l'intégrale de Lebesgue – comme cela arrive à un nombre de plus en plus grand de CAPESiens – ils n'auront donc jamais eu l'occasion de se voir exposés une théorie « sérieuse » de l'intégration, ce qui est préoccupant.

Le choix de l'intégrale de Henstock-Kurzweil présente l'avantage de fournir des définitions assez simples – peut-être plus simples que celle de Riemann puisque les encadrements de fonctions ne sont plus nécessaires, que l'on n'a plus besoin de la continuité uniforme, que tous les théorèmes de base se démontrent en quelques lignes – et, en même temps, d'être assez puissante pour contenir les parties élémentaires de la théorie de Lebesgue ... Dans ces conditions, il paraît quelque peu anachronique que la théorie n'ait pas encore trouvé sa juste place dans l'enseignement !

Nous suivons ici d'assez près le livre « Gauge integrals » de Charles Swartz [Sw], en l'allégeant autant que faire se peut, pour atteindre très rapidement la preuve des théorèmes fondamentaux (rapport entre intégration et primitive, intégration par parties, changement de variable, dérivabilité des intégrales indéfinies de fonctions continues...). Nous développons ensuite les résultats plus spécifiques à la théorie de Henstock-Kurzweil pour atteindre les théorèmes de convergence monotone et dominée. L'existence de la mesure de Lebesgue et ses propriétés fondamentales figurent parmi les conséquences directes, sans qu'il y ait besoin d'introduire au préalable le langage général des tribus et des mesures dénombrablement additives. Les étudiants auront donc en fait un premier exemple motivant sous la main lorsque ces notions plus générales seront introduites. Enfin, les définitions ad hoc des diverses intégrales généralisées, impropres et semi-convergentes deviennent également accessoires, puisque toutes ces notions peuvent être exprimées en une seule définition naturelle contenant les cas utiles : l'intégrale de Henstock-Kurzweil autorise par nature même la « semi-convergence » ...

Les premières étapes nous paraissent éventuellement utilisables au lycée, à condition d'admettre quelques-unes des démonstrations – et en prenant comme perspective que c'est l'intégrale de Henstock-Kurzweil qui sera développée ensuite, de sorte que les énoncés présentant des hypothèses artificielles superflues n'ont pas lieu d'être.

Le cours qui suit a été à l'origine inspiré par des notes synthétiques rédigées par Eric Charpentier [Ch] à l'Université de Bordeaux autour de 2002, et fait des emprunts à de multiples sources (cf. bibliographie). Ces notes ont été ensuite développées sous forme de cours photocopié par Jean-Yves Briend à Marseille [Br] (après que je l'ai informé des suggestions d'Eric Charpentier). Le présent texte a fait l'objet de plusieurs rédactions successives depuis l'automne 2005, et a lui-même inspiré ultérieurement des cours ou manuels mis en chantier par plusieurs collègues. Je voudrais dans ce cadre signaler d'utiles remarques et questions formulées par Xavier Buff, auteur du chapitre sur l'intégration pour le L2 dans la collection de manuels “Licence-Tout-en-Un” dirigée par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel [RW], et remercier ces deux derniers pour leur intérêt et leurs encouragements.

# Table des matières

Introduction .....	1
Table des matières .....	3

## Chapitre I

### Définitions et résultats fondamentaux

1. Sommes de Riemann .....	5
2. Définition de l'intégrale d'une fonction .....	9
3. Propriétés élémentaires de l'intégrale .....	14
4. Le théorème fondamental de l'Analyse .....	17
5. Méthodes de calcul des primitives et des intégrales .....	19
6. Calcul d'aires et de volumes .....	23
7. Encadrement par des fonctions en escalier et intégrabilité .....	26
8. Convergence uniforme, continuité et dérivabilité en fonction de paramètres .....	34

## Chapitre II

### Théorèmes de convergence

1. Lemme de Henstock et théorème de Hake .....	39
2. Fonctions absolument intégrables .....	44
3. Le théorème de convergence monotone .....	46
4. Mesure de Lebesgue et ensembles négligeables .....	48
5. Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée .....	51
6. Lemme de recouvrement de Vitali et différentiabilité des intégrales indéfinies ...	54
7. Ensembles et fonctions mesurables .....	57

Références bibliographiques .....	63
-----------------------------------	----



# Chapitre I

## Définitions et résultats fondamentaux

### Cas des fonctions d'une variable

L'objectif de ce chapitre est de proposer une présentation rigoureuse et complète des premiers éléments de la théorie de l'intégration. Compte tenu de cette ambition, l'exposé est nécessairement théorique, et donc beaucoup plus exigeant que d'autres textes ou manuels qui se contentent de donner des techniques de calcul, et qui s'appuient seulement sur une intuition de la notion d'aire en lieu et place de justifications mathématiques complètes. Un prérequis indispensable est d'avoir déjà assimilé l'art de couper les  $\varepsilon$  en quatre – ou d'être prêt à faire l'effort de creuser la question. Le public visé est celui des élèves de Terminale très motivés – la théorie de base ne fait jamais appel à aucune notion qui dépasse le niveau du lycée. La plupart des notes de bas de page sont destinés à des lecteurs plus avancés et ne peuvent normalement pas être comprises par des personnes qui aborderaient la théorie pour la première fois ; de même, les passages marqués d'un \* ou de deux \*\* peuvent être omis en première lecture ; les sections 7 et 8 sont moins élémentaires et correspondent plutôt à un niveau de première année d'université.

#### 1. Sommes de Riemann

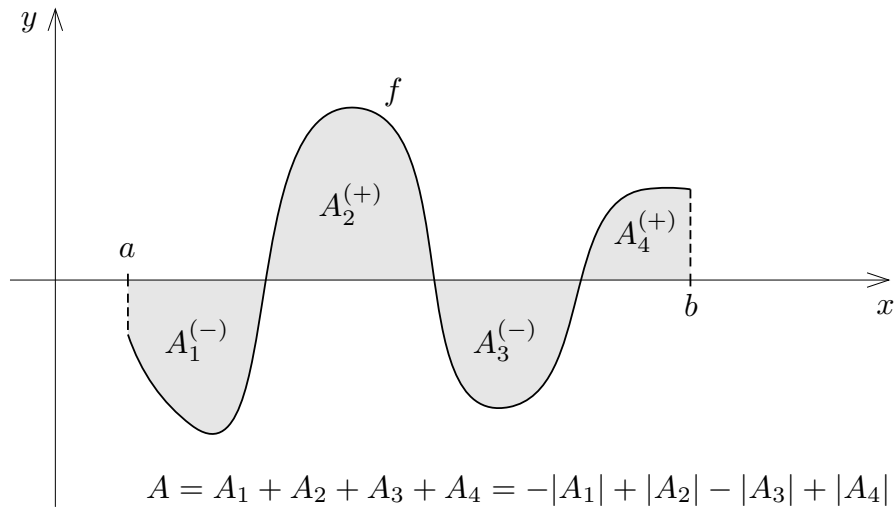
Dans toute cette section,  $a$  et  $b$  désignent deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction, définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La portion du plan comprise entre le graphe de  $f$  et l'axe horizontal est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que

$$0 \leq y \leq f(x) \text{ si } f(x) \geq 0, \quad f(x) \leq y \leq 0 \text{ si } f(x) \leq 0.$$

Pour une fonction  $f$  suffisamment régulière, nous souhaitons évaluer l'aire  $A$  de cette portion de plan, en comptant positivement les surfaces situées au-dessus de l'axe horizontal, et négativement celles situées au-dessous (Fig. 1). Nous parlerons de « l'aire algébrique »<sup>(2)</sup> située sous le graphe de  $f$ .

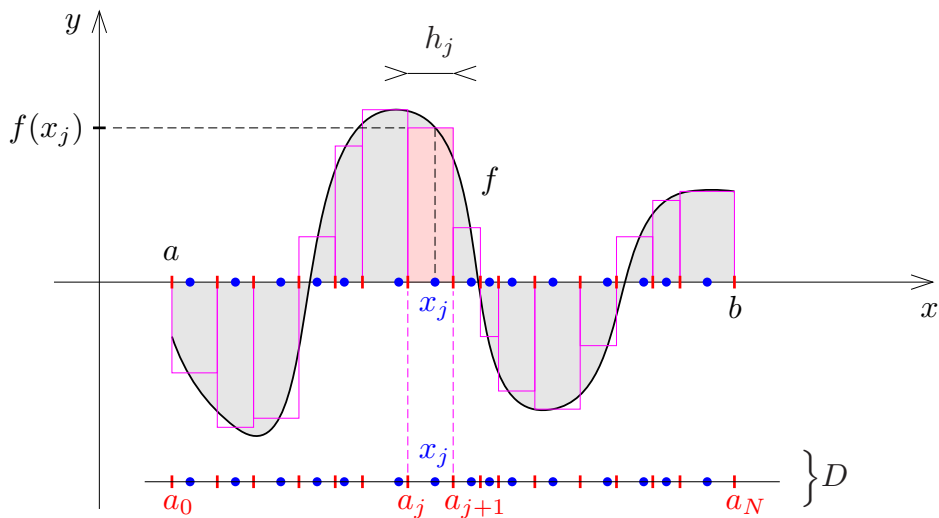
---

(2) L'approche des intégrales par les aires nous paraît infiniment préférable à celle qui consiste à introduire a priori l'intégrale par le calcul des primitives, ne serait-ce que parce que cette façon de voir dépouille l'intégrale de son sens géométrique (et qu'en outre elle escamote l'unique façon de démontrer en général l'existence des primitives...)



**Fig. 1.** Aire algébrique située sous le graphe de  $f$ .

L'idée est de découper l'intervalle  $[a, b]$  au moyen d'une subdivision en sous-intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$ , puis de sommer les aires de rectangles basés sur les intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$ . La figure 2 ci-dessous résume le procédé.



**Fig. 2.** Somme de Riemann associée à  $f$  sur  $D$ .

La somme des aires des rectangles figurés ci-dessus est donnée par  $\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)$ , et on est ainsi conduit à poser la définition suivante.

**(1.1) Définition.**

(a) On appelle « subdivision pointée » de l'intervalle  $[a, b]$  la donnée de  $N + 1$  points

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$$

et de  $N$  points  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  tels que

$$\forall j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad x_j \in [a_j, a_{j+1}].$$

Elle sera notée

$$D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}.$$

Les réels  $h_j = a_{j+1} - a_j$  (amplitudes des intervalles) sont les « pas » de la subdivision.

- (b) Soit  $D$  une subdivision pointée de l'intervalle  $[a, b]$  et  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle « somme de Riemann » associée à  $f$  sur  $D$ , le réel

$$S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) h_j.$$

La somme de Riemann  $S_D(f)$  est l'aire algébrique de la réunion des rectangles de largeur  $h_j$  et de hauteur  $f(x_j)$  (Fig. 2). Il s'agit bien d'une aire algébrique, puisque  $f(x_j)h_j$  est compté positivement si  $f(x_j) > 0$  et négativement si  $f(x_j) < 0$ .

Intuitivement l'aire  $A$  cherchée est la limite de  $S_D(f)$  quand les pas  $h_j$  tendent vers 0. Un choix possible consiste par exemple à prendre une subdivision en sous-intervalles égaux

$$a_j = a + jh = a + j \frac{b-a}{N}, \quad 0 \leq j \leq N \quad \text{où} \quad h_j = h = \frac{b-a}{N},$$

que l'on peut combiner avec un choix quelconque des points  $x_j$ .

**(1.2) Exemple.** Comme premier exemple, considérons la fonction identité  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour  $N \geq 1$ , posons :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{N}, \dots, \quad a_j = \frac{j}{N}, \dots, \quad a_N = 1$$

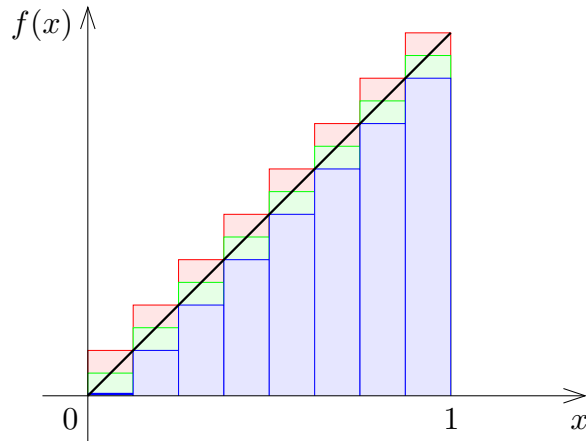
Les pas de cette subdivision sont tous égaux à  $1/N$ . Voici trois calculs de sommes de Riemann, selon que l'on place les points  $x_j$  au début, au milieu ou à la fin des intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$  (rappelons que la somme des  $N$  premiers entiers vaut  $N(N+1)/2$ ).

$$(1.2 \text{ a}) \quad x_j = a_j : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N-1}{2N},$$

$$(1.2 \text{ b}) \quad x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2} : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2j+1}{2N} \frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2} \sum_{j=0}^{N-1} 2j+1 = \frac{1}{2},$$

$$(1.2 \text{ c}) \quad x_j = a_{j+1} : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j+1}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j+1 = \frac{N+1}{2N}.$$

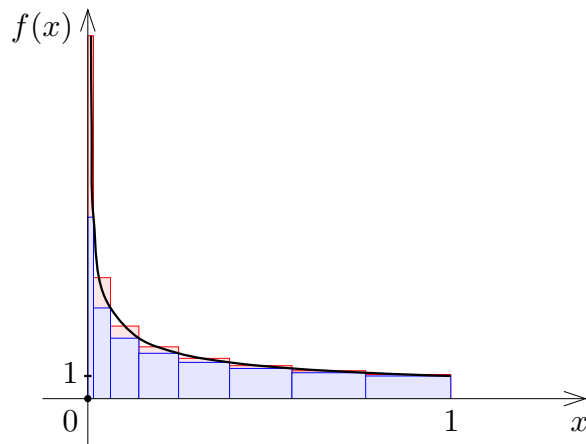
La seconde somme est égale à  $1/2$  pour tout  $N$ , les deux autres tendent vers  $1/2$  quand  $N$  tend vers l'infini. L'aire du triangle sous le graphe de la fonction est bien  $1/2$  :



**Fig. 3.** Sommes de Riemann associées à l'identité sur  $[0, 1]$ .

**(1.3) Exemple\*.** Nous considérons ici une situation où la fonction  $f$  n'est plus bornée. On prend  $[a, b] = [0, 1]$  et  $f$  telle que  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  si  $x \in ]0, 1]$  et  $f(0) = 0$ . On introduit une subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$  telle que  $a_j = (j/N)^2$  pour  $0 \leq j \leq N$  et on pose  $x_j = (t_j/N)^2$  avec  $t_j \in [j, j+1]$ . On a alors  $a_{j+1} - a_j = (2j+1)/N^2$  et  $f(x_j) = N/t_j$  si  $t_j > 0$ , d'où

$$S_D(f) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j \leq N-1, t_j > 0} \frac{2j+1}{t_j}.$$



**Fig. 4.** Sommes de Riemann associées à  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  sur  $[0, 1]$ .

Le choix le plus simple est  $t_j = j + \frac{1}{2}$ , qui donne  $\frac{2j+1}{t_j} = 2$  et donc  $S_D(f) = 2$ . Si on choisit plutôt  $t_j = j + 1$ , on obtient la valeur minimale possible pour  $S_D(f)$ , mais comme  $\frac{2j+1}{j+1} \rightarrow 2$  quand  $j \rightarrow +\infty$ , il est facile de voir que l'on a encore  $S_D(f) \rightarrow 2$  pour  $N \rightarrow +\infty$  (on peut observer par exemple que  $\frac{2j+1}{j+1} = 2 - \frac{1}{j+1} \geq 2 - 1/\sqrt{N}$  pour  $\sqrt{N} \leq j \leq N$ ). Comme  $a_{j+1} - a_j \leq (2N-1)/N^2 \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , ce calcul amène à penser que l'aire du domaine non borné défini par  $0 < x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 1/\sqrt{x}$  est bien finie et égale à 2.  $\square$



Dans la suite, nous aurons besoin pour des raisons à la fois théoriques et pratiques de considérer des sommes de Riemann sur des subdivisions arbitraires. Il est facile de voir à partir de la définition 1.1 (b) que ces sommes vérifient les propriétés suivantes.

#### (1.4) Propriétés fondamentales.

- (a) Linéarité. Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions quelconques et  $\lambda, \mu$  des constantes réelles, alors

$$S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g).$$

- (b) Monotonie. Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions quelconques, alors

$$f \geq g \quad \Rightarrow \quad S_D(f) \geq S_D(g).$$

En particulier, si  $f \geq 0$ , alors  $S_D(f) \geq 0$ .

- (c) Formule de Chasles. Soient  $a < b < c$  des réels et  $f$  une fonction définie sur  $[a, c]$ . Si  $D_1$  est une subdivision pointée de  $[a, b]$  et  $D_2$  une subdivision pointée de  $[b, c]$ , alors  $D_1 \cup D_2$  est une subdivision pointée de  $[a, c]$  et

$$S_{D_1 \cup D_2}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f).$$

## 2. Définition de l'intégrale d'une fonction

La première idée qui vient à l'esprit est de considérer des subdivisions pointées  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$  dont les pas  $h_j = a_{j+1} - a_j$  sont tels que  $0 < h_j \leq \delta$  avec  $\delta$  tendant vers 0, et de regarder si les sommes de Riemann de Riemann  $S_D(f)$  convergent bien vers une limite  $A$ . Cette limite sera alors interprétée comme étant l'aire cherchée. On aboutit à la définition suivante, qui est la définition historiquement introduite par Cauchy et Riemann.

**(2.1) Définition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. On dit que  $f$  est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) s'il existe un réel  $A$  qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de  $f$ , tel que pour toute marge d'erreur  $\varepsilon > 0$  donnée a priori, on peut trouver un réel  $\delta > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  de  $[a, b]$  on ait

$$h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |S_D(f) - A| \leq \varepsilon.$$

Le nombre réel  $A$  de la définition précédente est appelé intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et noté

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

et on dit que  $\int_a^b f(x) dx$  est la limite des sommes de Riemann  $S_D(f)$ , lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Dans cette définition, on peut par exemple se contenter de prendre une subdivision en  $N$  sous-intervalles de pas constant  $h = \frac{b-a}{N}$ , et on obtient alors la conséquence immédiate suivante.

**(2.2) Convergence des sommes de Riemann.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + \frac{j}{N}(b-a)\right) && [\text{cas } x_j = a_j] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N f\left(a + \frac{j}{N}(b-a)\right) && [\text{cas } x_j = a_{j+1}] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + \frac{2j+1}{2N}(b-a)\right) && \left[\text{cas } x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right]. \end{aligned}$$

Si l'aire  $\int_a^b f(x) dx$  située sous le graphe de  $f$  est connue d'une manière ou d'une autre, on peut alors en déduire la valeur des limites correspondantes ; il faut savoir pour cela que la fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann, on démontrera plus tard (cf. théorèmes 7.6 et 7.10) que c'est le cas si  $f$  est continue ou continue par morceaux.

**(2.3) Exemple.** Considérons la somme

$$\frac{1}{N^2} \left( \sqrt{1(N-1)} + \sqrt{2(N-2)} + \dots + \sqrt{(N-1)1} \right)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{N} \left( \sqrt{\frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)} + \sqrt{\frac{2}{N} \left(1 - \frac{2}{N}\right)} + \dots + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N}} \right).$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x(1-x)}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Sa limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , est égale à :  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ . Or, le graphe  $y = \sqrt{x(1-x)}$  de cette fonction est un demi-arc du cercle  $x^2 - x + y = 0$ , soit encore  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , c'est donc un demi-cercle de centre  $\frac{1}{2}$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ . La limite de la sommation est égale à l'aire du demi-disque, qui vaut  $\pi/8$ .  $\square$

Cependant, on s'aperçoit assez vite que la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann impose des restrictions assez gênantes sur la fonction  $f$  :

**(2.4) Condition nécessaire.** *Toute fonction  $f$  Riemann-intégrable est bornée.*

*Démonstration.* En effet, selon la définition 2.1, prenons  $\delta > 0$  donnant une erreur au plus  $\varepsilon$ . Pour une subdivision  $D$  de pas constant  $h \leq \delta$ , à savoir  $h = (b-a)/N$  avec  $N \geq (b-a)/\delta$ , nous devons avoir la majoration  $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon$ , donc

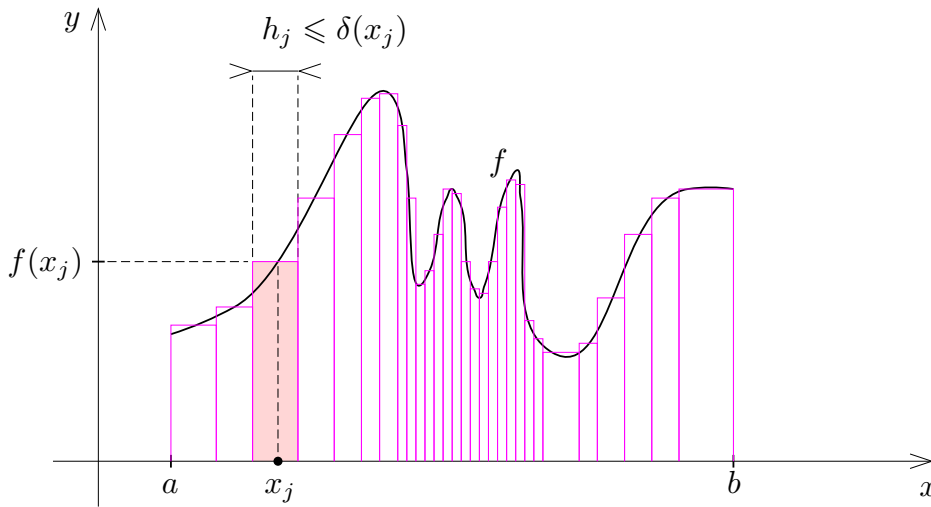
$$|S_D(f)| = \left| \frac{b-a}{N} \sum_{0 \leq j < N} f(x_j) \right| \leq |A| + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{0 \leq j < N} f(x_j) \right| \leq \frac{N}{b-a} (|A| + \varepsilon),$$

ceci pour tout choix des points  $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$ . Choisissons pour l'un des points  $x_j$  un point  $x \in [a, b]$  quelconque, et pour les autres les points  $a_j$  de la subdivision. Il vient alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq \sum_{0 \leq j < N} |f(a_j)| + \frac{N}{b-a}(|A| + \varepsilon),$$

ce qui montre que  $f$  doit être bornée. □

Cette restriction que  $f$  soit bornée est très gênante, puisqu'on a vu à l'exemple (1.3) qu'il existait des fonctions non bornées pour lesquelles l'aire située sous le graphe est finie et calculable sans difficulté. D'autre part, d'un point de vue concret de calcul numérique, on peut être amené à faire des calculs d'aires pour des fonctions bornées qui « oscillent plus » à certains endroits qu'à d'autres :



**Fig. 5.** Somme de Riemann à pas variable.

Dans ce cas, on sent bien intuitivement que l'on a intérêt à resserrer davantage les pas  $h_j$  aux endroits où  $f$  oscille davantage. Plutôt que de supposer que  $h_j \leq \delta$  où  $\delta$  est un réel positif fixé, il vaudra donc mieux demander que les pas  $h_j$  satisfassent une condition  $h_j \leq \delta(x_j)$  où  $\delta(x_j)$  est une quantité positive assez petite dépendant de l'endroit où l'on prend le rectangle de hauteur  $f(x_j)$ . On choisira alors des fonctions  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  positives qui serviront à majorer les pas  $h_j$ . Une telle fonction sera appelée une *jauge* sur  $[a, b]$ .

**(2.5) Définition.** Soit  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction positive quelconque. Une subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$  de  $[a, b]$  sera dite  $\delta$ -fine si

$$\forall j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta(x_j).$$

Si  $\delta_*$  et  $\delta$  sont deux jauges telles que  $\delta_* \leq \delta$ , alors toute subdivision  $\delta_*$ -fine est aussi  $\delta$ -fine. Le résultat suivant, appelé *lemme de Cousin*, affirme que la définition précédente n'est jamais vide de contenu.

**(2.6) Lemme.** Soit  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une jauge. Alors il existe une subdivision pointée  $D$  de l'intervalle  $[a, b]$  qui est  $\delta$ -fine.

*Démonstration.\** Elle est basée sur un procédé de dichotomie. Nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que  $[a, b]$  n'admet pas de subdivision pointée  $\delta$ -fine. Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Divisons l'intervalle  $[a_0, b_0]$  en deux, et considérons les deux moitiés  $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$  et  $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$  : si chacune des deux admettait une subdivision  $\delta$ -fine, la réunion de ces deux subdivisions serait une subdivision  $\delta$ -fine de  $[a_0, b_0]$ . Donc l'une des deux moitiés au moins n'admet pas de subdivision  $\delta$ -fine : on note celle-ci  $[a_1, b_1]$ .

On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés  $[a_k, b_k]$ , de longueur  $(b-a)/2^k$ , dont aucun n'admet de subdivision  $\delta$ -fine. Les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Soit  $x_0$  cette limite. Puisque  $\delta(x_0) > 0$ , il existe  $k_0$  tel que

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset [x_0 - \frac{1}{2}\delta(x_0), x_0 + \frac{1}{2}\delta(x_0)].$$

Donc la subdivision pointée de  $[a_{k_0}, b_{k_0}]$  formée seulement de l'intervalle tout entier et du point  $x_0$  est  $\delta$ -fine. D'où la contradiction.<sup>(3)</sup>  $\square$

**(2.7) Définition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. On dit que  $f$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil (ou HK-intégrable) s'il existe un réel  $A$  qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de  $f$ , tel que pour toute marge d'erreur  $\varepsilon > 0$  donnée a priori, on peut trouver une jauge  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  en sorte que pour toute subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  de  $[a, b]$  on ait

$$D \text{ } \delta\text{-fine} \Rightarrow |S_D(f) - A| \leq \varepsilon.$$

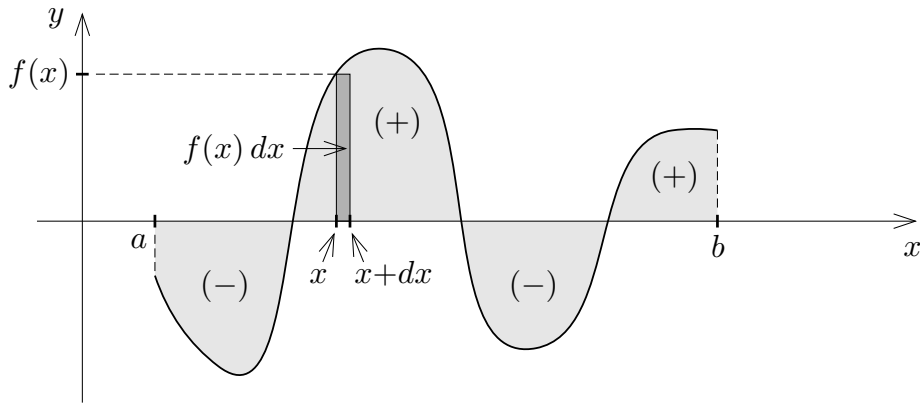
(une telle jauge  $\delta$  sera dite  $\varepsilon$ -adaptée à  $f$ ). Le nombre réel  $A$  de la définition précédente est appelé intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ , on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) = \lim_{\text{HK}, D} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)$$

et on dit que  $\int_a^b f(x) dx$  est la limite (au sens de Henstock-Kurzweil) des sommes de Riemann, lorsque la subdivision  $D$  devient de plus en plus fine<sup>(4)</sup>.

- (3) Le lecteur ayant quelques connaissances de topologie aura reconnu un cas élémentaire du théorème de Borel-Lebesgue relatif à la compacité du segment  $[a, b]$ . Cependant, notre but est de rester aussi élémentaire que possible – sans éluder les difficultés – donc il nous a paru préférable de faire la démonstration dans le cadre strict des subdivisions pointées. [On notera que celle-ci permet en fait d'énoncer un résultat un peu plus précis : pour toute jauge  $\delta$  il existe une subdivision pointée  $\delta$ -fine de  $[a, b]$  formée d'intervalles dont les longueurs sont de la forme  $(b-a)/2^{k_j}$ . En effet, il suffit d'utiliser un raisonnement par l'absurde avec ce type d'intervalles pour aboutir à une contradiction.] Quoi qu'il en soit, la démonstration de 2.6 est probablement assez difficile pour la classe Terminale, c'est pour quoi nous l'avons marquée d'un astérisque \*, comme toutes les parties plus délicates qui vont suivre.
- (4) L'intégrale de Henstock-Kurzweil est parfois appelée aussi *intégrale de jauge* ou encore *intégrale de Riemann généralisée*. Elle a été introduite au milieu des années 1950, alors que l'intégrale de Riemann remonte au 19ème siècle. Bien qu'en apparence la définition de Henstock-Kurzweil diffère très peu de celle de l'intégrale de Riemann, il se trouve qu'elle jouit de propriétés beaucoup meilleures, tout en procurant des démonstrations souvent plus simples et en éliminant beaucoup d'hypothèses superflues, par exemple le fait que  $f$  soit nécessairement bornée.

Cette définition est de façon évidente plus générale que celle de Riemann, par conséquent toute fonction intégrable au sens de Riemann est aussi intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. D'autre part, si une jauge  $\delta$  est  $\varepsilon$ -adaptée, alors toute jauge  $\delta_* \leq \delta$  est encore  $\varepsilon$ -adaptée. Nous utiliserons cette observation à plusieurs reprises dans la section suivante. La notation  $dx$  intervient pour rappeler qu'à la limite on considère des rectangles «infiniment» fins de largeur  $dx = a_{j+1} - a_j$ , considérée comme accroissement infiniment petit de la variable  $x$  (voir Fig. 6 ci-après), et l'écriture symbolique  $\int_a^b f(x) dx$  se lit «somme de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$ .».

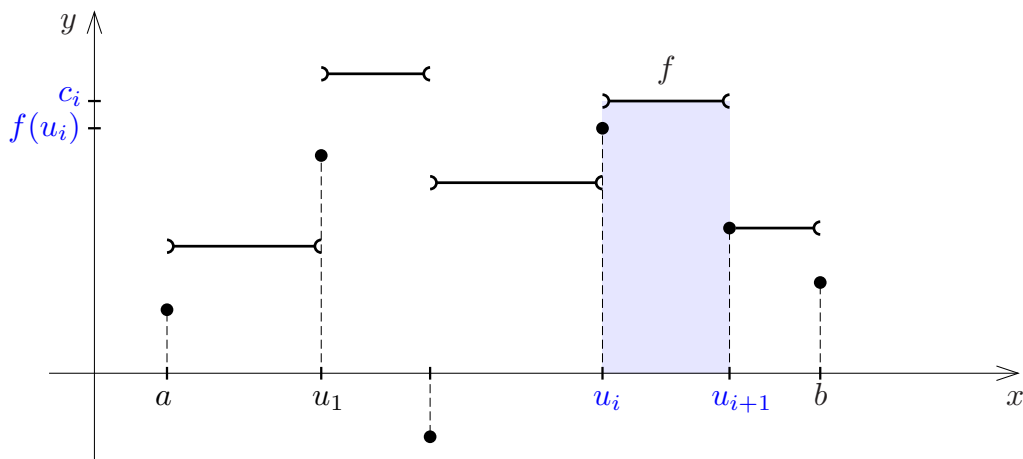


**Fig. 6.** Intégrale et son élément différentiel  $f(x) dx$ .

**(2.8) Exemple.** On appelle fonction en escalier sur  $[a, b]$  une fonction  $f$  telle qu'il existe des points  $(u_i)_{0 \leq i \leq p}$  de  $[a, b]$  et des constantes réelles  $c_i$  telles que

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b \quad \text{et} \quad f(x) = c_i \quad \text{sur} \quad ]u_i, u_{i+1}[ ,$$

les valeurs  $f(u_i) \in \mathbb{R}$  étant elles-mêmes quelconques, éventuellement différentes des valeurs  $c_i$ .



**Fig. 7.** Une fonction en escalier.

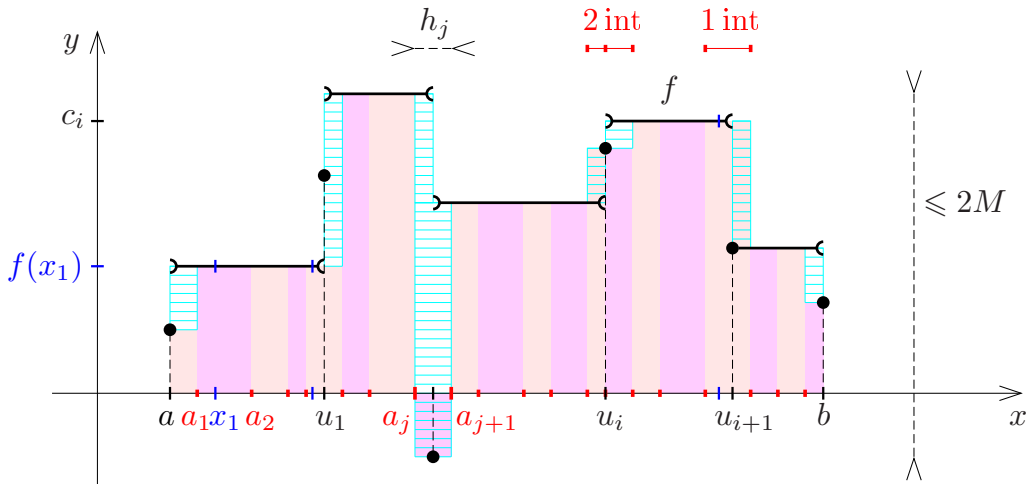
Nous affirmons :

Toute fonction en escalier  $f$  est intégrable au sens de Riemann, et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(u_{i+1} - u_i).$$

*Démonstration.\** La fonction  $f$  est bornée, la borne supérieure de  $|f|$  est donnée par

$$M = \sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f| = \max\{c_i, |f(u_j)|\}.$$



**Fig. 8.** Sommes de Riemann d'une fonction en escalier.

Soit  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  une subdivision  $\delta$ -fine pour une certaine constante  $\delta > 0$  (les points  $a_j$  n'ont a priori aucun rapport avec les points de subdivision  $u_i$  de la fonction en escalier). La somme de Riemann  $S_D(f) = \sum f(x_j)h_j$  est représentée par par la somme des aires des rectangles de couleur rosée de la Fig. 8 (avec les points  $a_j$  en rouge et les points de marquage  $x_j$  en bleu – tous ceux-ci n'étant pas représentés). La différence entre les aires  $S_D(f)$  et  $\sum c_i(u_{i+1} - u_i)$  (partie en noir du graphe) est représentée par les zones hachurées en bleu clair. Nous avons au plus  $2p$  intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$  qui contiennent l'un des points intermédiaires  $u_i$ , à savoir un à chaque extrémité et un ou deux pour chacun des points  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, p - 1$ . Pour chacun de ces intervalles, le terme  $f(x_j)h_j$  mis en jeu diffère de l'aire des deux rectangles délimités par le graphe de  $f$  par au plus  $2Mh_j \leq 2M\delta$ , puisque  $|f(x) - f(x_j)| \leq 2M$  et  $h_j \leq \delta$ . Au total on a donc

$$\left| S_D(f) - \sum_{0 \leq i \leq p-1} c_i(u_{i+1} - u_i) \right| \leq 2p \times 2M\delta = 4pM\delta.$$

Il suffit alors de choisir  $\delta = \varepsilon/(4pM)$  pour conclure. □

### 3. Propriétés élémentaires de l'intégrale

Les propriétés énoncées dans cette section sont, dans l'ordre, la linéarité, la monotonie et la relation de Chasles. Elles sont obtenues par passage à la limite à partir des propriétés analogues des sommes de Riemann  $S_D(f)$  (propriétés 1.4 (a,b,c)), et valent pour l'intégrabilité au sens de Riemann et de Henstock-Kurzweil indifféremment.

**(3.1) Linéarité.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions intégrables sur  $[a, b]$  et  $\lambda, \mu$  des constantes réelles, alors  $\lambda f + \mu g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

*Démonstration.* En termes de limites de sommes de Riemann sur des subdivisions pointées  $D$  de  $[a, b]$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx &= \lim_{\text{HK}, D} S_D(\lambda f + \mu g) = \lim_{\text{HK}, D} \lambda S_D(f) + \mu S_D(g) \\ &= \lambda \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) + \mu \lim_{\text{HK}, D} S_D(g) \\ &= \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Pour analyser plus en détail cet argument, reprenons le calcul en termes de jauges, une marge d'erreur  $\varepsilon > 0$  étant fixée a priori. Posons

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad B = \int_a^b g(x) dx.$$

Il existe par hypothèse des jauges  $\delta_1, \delta_2$  telles que si  $D$  est  $\delta_1$ -fine alors  $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon$  et si  $D$  est  $\delta_2$ -fine alors  $|S_D(g) - B| \leq \varepsilon$ . Prenons une subdivision  $D$   $\delta$ -fine avec  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Comme  $S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)$  on en déduit

$$|S_D(\lambda f + \mu g) - (\lambda A + \mu B)| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Ceci montre que  $\lambda f + \mu g$  est intégrable et que son intégrale est bien  $\lambda A + \mu B$ .

**(3.2) Remarque.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction qui est nulle partout sauf en un nombre fini de points  $u_i \in [a, b]$ , alors  $f$  est Riemann-intégrable d'intégrale nulle<sup>(5)</sup>. C'est en effet un cas très particulier de fonction en escalier, et on peut appliquer la formule de l'exemple 2.8 avec  $c_i = 0$ . Il en résulte que si deux fonctions  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diffèrent en un nombre fini de points, alors l'intégrabilité de l'une équivaut à l'intégrabilité de l'autre et on a  $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b h(x) dx$  (puisque  $f = g - h$  est d'intégrale nulle).  $\square$

<sup>(5)</sup> Pour l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil, ce résultat est vrai plus généralement dans le cas où  $f$  est nulle partout en dehors d'un ensemble dénombrable de points  $E \subset [a, b]$ . Voir l'exercice 9.22.

**(3.3) Monotonie.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions intégrables sur  $[a, b]$

$$f \geq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

*Démonstration.* Cela résulte de l'inégalité sur les sommes de Riemann  $S_D(f) \geq S_D(g)$ , par passage à la limite.  $\square$

**(3.4) Relation de Chasles.** Soient  $a < b < c$  des réels et  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et intégrable sur  $[b, c]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Ceci vaut aussi bien pour l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil que pour l'intégrabilité au sens de Riemann.

*Démonstration.* Fixons un réel  $\varepsilon > 0$  et choisissons des jauges  $\delta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $\delta_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$   $\varepsilon$ -adaptées à  $f$  sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$  respectivement. Autrement dit, si on écrit

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad A_2 = \int_b^c f(x) dx, \quad A = A_1 + A_2,$$

on aura  $|S_{D_1}(f) - A_1| \leq \varepsilon$  et  $|S_{D_2}(f) - A_2| \leq \varepsilon$  pour toutes subdivisions pointées  $\delta_1$ -fines  $D_1$  de  $[a, b]$  et  $\delta_2$ -fines  $D_2$  de  $[b, c]$ . Si nous supposons démontrée l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, c]$ , c'est-à-dire l'existence de la limite  $\lim_{\text{HK}, D} S_D(f)$  lorsque  $D$  parcourt les subdivisions pointées de  $[a, c]$ , alors on peut prendre une jauge  $\delta$  sur  $[a, c]$  telle que  $\delta \leq \delta_1$  sur  $[a, b]$  et  $\delta \leq \delta_2$  sur  $[b, c]$ , et une subdivision  $D = D_1 \cup D_2$   $\delta$ -fine égale à la réunion d'une subdivision  $D_1$   $\delta_1$ -fine de  $[a, b]$  et d'une subdivision  $D_2$   $\delta_2$ -fine de  $[b, c]$ . On obtient dans ces conditions  $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$ , donc  $|S_D(f) - A| \leq 2\varepsilon$  et la relation désirée

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) = A = A_1 + A_2 = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

s'ensuit en prenant  $\varepsilon$  arbitrairement petit. La seule difficulté qui reste est de démontrer l'existence de la limite  $\lim_{\text{HK}, D} S_D(f)$  pour des subdivisions  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  de  $[a, c]$  ne comprenant pas nécessairement  $a_j = b$  comme l'un des points intermédiaires, ce qui est a priori requis pour prouver l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, c]$ . La méthode consiste à redécouper l'intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  de  $D$  qui contient le point  $b$ , et à estimer de combien on modifie ainsi la somme de Riemann  $S_D(f)$ .

**(3.5)\* Preuve de l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, c]$  sous les hypothèses de 3.4.** Dans le cas de l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil, la preuve est très simple. On définit une jauge  $\delta$  sur  $[a, c]$  en posant

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x), (b-x)/2) & \text{si } x \in [a, b[, \\ \min(\delta_2(x), (x-b)/2) & \text{si } x \in ]b, c], \\ \min(\delta_1(b), \delta_2(b)) & \text{si } x = b. \end{cases}$$



de sorte que  $\delta \leq \delta_1$  sur  $[a, b]$  et  $\delta \leq \delta_2$  sur  $[b, c]$ . Soit  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  une subdivision  $\delta$ -fine. Si  $x_j < b$ , alors on a  $a_{j+1} \leq x_j + \delta(x_j) < x_j + (b - x_j) = b$ . De même, si  $x_j > b$ , alors  $a_j \geq x_j - \delta(x_j) > x_j - (x_j - b) = b$ . Ceci montre que le seul cas où  $[a_j, a_{j+1}]$  peut contenir le point  $b$  est le cas  $x_j = b$ , ce qui permet de découper l'intervalle pointé  $([a_j, a_{j+1}], b)$  en les deux intervalles pointés  $([a_j, b], b)$  et  $([b, a_{j+1}], b)$ . On produit ainsi une subdivision pointée  $D_1$   $\delta_1$ -fine de  $[a, b]$  et une subdivision pointée  $D_2$   $\delta_2$ -fine de  $[b, c]$  telles que  $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$ . On a donc  $|S_D(f) - A| \leq 2\varepsilon$  et la conclusion s'ensuit comme précédemment.  $\square$

Dans le cas de l'intégrabilité au sens de Riemann, la preuve donnée ci-dessus n'est pas valable, car la jauge  $\delta$  produite n'est pas constante. On sait cependant de plus que  $f$  est bornée, disons  $|f| \leq M$  (si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$ , elle y est nécessairement bornée d'après la condition 2.4). Prenons pour  $D$  une subdivision pointée  $\delta$ -fine avec  $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si l'un des intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$  contient  $b$  en son intérieur, on remplace son point de marquage  $x_j$  par  $x'_j = b$ , ce qui donne après découpage comme ci-dessus une nouvelle subdivision  $D' = D_1 \cup D_2$   $\delta$ -fine telle que

$$S_{D'}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f) \Rightarrow |S_{D'}(f) - A| \leq 2\varepsilon.$$

On a de plus

$$|S_D(f) - S_{D'}(f)| = |(f(x_j) - f(b))h_j| \leq 2M\delta,$$

par conséquent  $|S_D(f) - A| \leq 4\varepsilon$  dès que  $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2, \varepsilon/M)$ . Ceci entraîne bien l'intégrabilité de  $f$  au sens de Riemann sur l'intervalle  $[a, c]$ , ainsi que la formule de Chasles.  $\square$

Pour des réels  $a, b$  qui ne vérifient pas nécessairement  $a < b$ , on pose

$$(3.6) \quad \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{si } a = b, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{si } a > b.$$

On peut vérifier que la relation de Chasles reste valable dans tous les cas, quel que soit l'ordre des réels  $a, b, c$ , à condition bien sûr que  $f$  soit intégrable sur chacun des intervalles mis en jeu.

## 4. Le théorème fondamental de l'Analyse

On appelle théorème fondamental de l'analyse, le fait que l'intégration (calcul d'aires) et la dérivation (calcul de tangentes et de différentielles) sont des opérations inverses l'une de l'autre.

**(4.1) Théorème.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors  $f'$  est intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).}$$

*Démonstration.*<sup>(6)</sup> Commençons par une preuve heuristique (c'est-à-dire simplifiée, mais non rigoureuse). Soit  $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j\}$  une subdivision pointée assez fine. On a par définition

$$\int_a^b f'(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} f'(x_j)(a_{j+1} - a_j).$$

Mais  $f'(x_j)$  peut être vu comme une approximation de la pente de  $f$  sur l'intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  et on a donc  $f'(x_j)(a_{j+1} - a_j) \simeq f(a_{j+1}) - f(a_j)$ , d'où

$$\int_a^b f'(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = f(b) - f(a).$$

Il n'est pas difficile de rendre cet argument rigoureux. L'hypothèse de l'existence de  $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  signifie par définition que pour tout point  $x \in [a, b]$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $\delta(x) > 0$  tel que

$$y \in [a, b], \quad 0 < |y - x| \leq \delta(x) \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{et donc}$$

$$y \in [a, b], \quad y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)| \leq \varepsilon|y - x|$$

(puisque l'inégalité est vraie aussi de manière évidente pour  $y = x$ ). Prenons une subdivision pointée  $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j\}$   $\delta$ -fine, c'est-à-dire telle que  $h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta(x_j)$ . En appliquant l'égalité ci-dessus à  $x = x_j$  et  $y = a_j$  ou  $y = a_{j+1}$ , il vient

$$\begin{aligned} |f(a_j) - f(x_j) - (a_j - x_j)f'(x_j)| &\leq \varepsilon|a_j - x_j| = \varepsilon(x_j - a_j), \\ |f(a_{j+1}) - f(x_j) - (a_{j+1} - x_j)f'(x_j)| &\leq \varepsilon|a_{j+1} - x_j| = \varepsilon(a_{j+1} - x_j). \end{aligned}$$

En faisant la différence, l'inégalité  $|v - u| \leq |u| + |v|$  donne

$$|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)| \leq \varepsilon(a_{j+1} - a_j).$$

La sommation de ces inégalités pour  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  implique en définitive

$$|f(b) - f(a) - S_D(f')| \leq \varepsilon(b - a),$$

par conséquent

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f') = f(b) - f(a). \quad \square$$

Notons qu'on retrouve ainsi le résultat important suivant qui, alternativement (et de manière plus classique) est démontré au moyen du théorème des accroissements finis.

<sup>(6)</sup> Le théorème 4.1 est un résultat particulièrement impressionnant de la théorie de Henstock-Kurzweil, que ni la théorie de Riemann ni même la théorie de Lebesgue ne permettent d'obtenir. Ce « défaut » de la théorie de Lebesgue avait amené A. Denjoy [Dj1] à proposer en 1912 une théorie de « l'intégrale totale » qui lui permit de rétablir la validité du Théorème 4.1 (cf. aussi les travaux de O. Perron [Pe]). Cette théorie se révélera a posteriori essentiellement équivalente à la théorie de Henstock-Kurzweil, mais avec un formalisme et des justifications beaucoup plus compliquées.

**(4.2) Corollaire.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , telle que  $f' = 0$  (resp.  $f' \geq 0$ ,  $f' \leq 0$ ). Alors  $f$  est constante (resp. croissante, décroissante).

*Démonstration.* En effet, pour tous points  $a < b$  dans  $I$ , on voit que  $f(b) - f(a)$  est égal à 0 (resp. positif ou nul, négatif ou nul). □

Le théorème fondamental peut aussi se s'énoncer comme une formule de calcul d'une intégrale à partir de la primitive d'une fonction<sup>(7)</sup>.

**(4.3) Calcul des intégrales au moyen de primitives.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  admet une primitive  $F$  (c'est-à-dire si  $F$  est dérivable et  $F' = f$ ), alors  $f$  est intégrable et

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{encore noté} \quad [F(x)]_a^b.}$$

Pour exploiter cette formule, il convient de connaître une liste suffisante de primitives de fonctions usuelles – en connaître un certain nombre par cœur devient vite indispensable pour être en mesure de calculer les intégrales de manière efficace. Compte tenu de la formule 4.3, la primitive  $F$  d'une fonction continue  $f$ , là où elle est définie, sera notée sous la forme

$$(4.4) \quad F(x) = \int f(x) dx + C,$$

où  $C$  désigne une constante quelconque. Une écriture de la forme  $\int f(x) dx$  est parfois appelée *intégrale indéfinie*. Voici une liste de primitives qui permet déjà de calculer un bon nombre d'intégrales usuelles. Les variables  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  représentent ici des nombres réels quelconques avec  $a \neq 0$ .

$$\begin{array}{ll} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 & \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \\ \int \ln|x| dx = x \ln|x| - x + C & \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \\ \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C & \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotan x + C \\ \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \end{array}$$

---

(7) On notera que pour en arriver là, on a eu besoin de nettement moins de théorie que dans l'approche classique de l'intégrale de Riemann. En effet, dans cette approche, il faut au préalable connaître l'intégrabilité des fonctions continues, et avoir démontré que la dérivée de l'intégrale indéfinie d'une fonction continue  $f(x)$  est égale à cette fonction, pour en conclure que l'intégrale indéfinie est une primitive de  $f$ . Par ailleurs, toutes les hypothèses superflues (fonctions  $C^1$  dans les intégrations par parties ou les changements de variable) disparaissent ...

## 5. Méthodes de calcul des primitives et des intégrales

Il convient d'observer qu'il est en général impossible d'explicitier en termes de fonctions usuelles la primitive de beaucoup de fonctions pourtant relativement simples. Ainsi on peut montrer que  $e^{x^2}$  ou  $\ln(\sin x)$  ont des primitives qui ne peuvent pas s'exprimer en termes des fonctions trigonométriques, puissances, exponentielles, logarithmes et leurs composées. Lorsque le calcul est possible, on s'appuie le plus souvent sur l'une des deux formules importantes qui suivent.

**(5.1) Formule d'intégration par parties.** Soient  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables. Le produit  $uv$  est alors dérivable et  $(uv)' = u'v + uv'$ . Par conséquent  $uv' = (uv)' - u'v$  est intégrable si et seulement si  $u'v$  l'est, et dans ce cas

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

On a donc la formule

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,}$$

qui peut encore se récrire de manière plus abrégée

$$\boxed{\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.}$$

En termes de primitives et avec la notation des intégrales indéfinies, on peut aussi écrire

$$\boxed{\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.}$$

**(5.1 a) Exemple.** Soit  $n \geq 1$  un entier naturel, on cherche à calculer une primitive  $F_n$  de  $f_n(x) = x^n e^{-x}$ . La fonction  $f_n$  est déjà écrite comme produit de deux fonctions, que l'on sait intégrer. Intégrons par parties en prenant  $u(x) = x^n$  et  $v'(x) = e^{-x}$  (d'où, par exemple,  $v(x) = -e^{-x}$ ):

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int x^n e^{-x} dx = [x^n(-e^{-x})] - \int n x^{n-1}(-e^{-x}) dx \\ &= -x^n e^{-x} - n \int x^{n-1} e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x) \quad (+ C). \end{aligned}$$

Comme  $F_0(x) = -e^{-x}$ , cette relation de récurrence permet de calculer  $F_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ :

$$F_n(x) = -\left(\sum_{p=0}^n n(n-1)\dots(p+1)x^p\right)e^{-x} \quad (+ C).$$

**(5.1 b) Exemple.** De même, pour  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , en posant  $u'(x) = x^a$  et  $v(x) = (\ln x)^n$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int x^a (\ln x)^n dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} dx \\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx \\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(a+1)^2} \int x^a (\ln x)^{n-2} dx. \end{aligned}$$

Par récurrence, ceci donne

$$\int x^a (\ln x)^n dx = x^{a+1} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{(a+1)^{p+1}} (\ln x)^{n-p}.$$

**(5.2) Formule de changement de variable.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant une primitive  $F$ . On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il est souvent commode de changer de variable, en posant  $x = \varphi(t)$  pour une certaine fonction  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  dérivable telle que  $\varphi(\alpha) = a$  et  $\varphi(\beta) = b$  (on ne suppose pas nécessairement  $a \leq b$  ni  $\alpha \leq \beta$ ). Il vient alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F \circ \varphi(t)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

On a donc la formule fondamentale

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi d\varphi.}$$

En pratique, on effectue les substitutions

$$\boxed{x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),}$$

en prenant soin de changer les bornes comme indiqué. En termes d'intégrales indéfinies, si  $F$  désigne une primitive de  $f$ , on peut écrire

$$\boxed{F(x) = F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.}$$

*Exemple.* Le cas particulier  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $F(x) = \ln|x|$  implique

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln|\varphi(t)| + C.$$

De même, le cas  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $F(x) = \arctan x$  implique

$$\int \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2} dt = \arctan \varphi(t) + C.$$

Ceci permet par exemple de trouver successivement les formules

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C \\ \int \cotan x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx &= \int \left( \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \ln |\tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\ \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} \, dx = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

**(5.3) Intégration des polynômes trigonométriques.** Pour calculer l'intégrale d'un polynôme trigonométrique  $\int P(\cos x, \sin x) \, dx$  on utilise ce qu'on appelle la *méthode de linéarisation*, qui consiste à trouver une combinaison linéaire de la forme

$$P(\cos x, \sin x) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Pour cela on remplace  $\cos x$  et  $\sin x$  en fonction de l'exponentielle complexe (formules d'Euler)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ce qui permet d'exprimer  $P(\cos(x), \sin(x))$  comme combinaison linéaire des fonctions  $e^{inx}$  et  $e^{-inx}$ . On remplace finalement ces fonctions par  $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$  (ou bien, si  $P$  est réel, on prend la partie réelle du résultat. Par exemple

$$\begin{aligned} \cos^2 x \sin^3 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{i}{2^5} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{i}{32} (e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{16} (-\sin 5x + \sin 3x + 2 \sin x). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \cos 3x - 2 \cos x \right) + C.$$

**(5.4) Intégration des fractions rationnelles.** Une fraction rationnelle est une fonction définie comme le quotient  $P/Q$  de deux polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients réels ou complexes. La division euclidienne de  $P$  par  $Q$  s'écrit  $P = EQ + R$  avec un quotient  $E$  et un reste  $R$  qui sont des polynômes tels que  $\deg R < \deg Q$ . On a alors

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}.$$

Le quotient  $E$  s'appelle aussi *la partie entière* de la fraction rationnelle, et  $R/Q$  la *partie polaire*. Elle est telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)/Q(x) = 0$ .

**(5.4 a) Cas où  $Q(x) = (x - \alpha)^m$ .** En écrivant  $R$  comme un polynôme en  $X = x - \alpha$ , soit  $R(x) = \sum_{0 \leq j < m} c_j (x - \alpha)^j$ , on voit que  $P/Q$  admet une écriture de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{(x - \alpha)^j}.$$

Si  $\alpha$  est réel, la primitive se calcule sans peine puisque

$$\int \frac{1}{x - \alpha} dx = \ln|x - \alpha| + C, \quad \int \frac{1}{(x - \alpha)^j} dx = -\frac{1}{j-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{j-1}} + C \quad \text{si } j > 1.$$

**(5.4 b) Cas où  $Q$  est un trinôme du second degré.** Si  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ , le calcul des racines réelles ou complexes donne une factorisation  $Q(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ . Si les racines  $\alpha, \beta$  sont réelles et distinctes, on écrit

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right),$$

ce qui donne aussitôt

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| + C.$$

Dans le cas d'un trinôme réel  $ax^2 + bx + c$  de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , les racines sont complexes et on procède différemment. On a en effet

$$Q(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a((x - \gamma)^2 + \delta^2)$$

avec  $\gamma = -b/2a$  et  $\delta = \sqrt{|\Delta|}/2|a|$ , les racines complexes étant  $\alpha = \gamma + i\delta$ ,  $\bar{\alpha} = \gamma - i\delta$ . Après division euclidienne de  $P$  par  $Q$ , on est ramené à intégrer des expressions de la forme

$$\int \frac{\lambda x + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx.$$

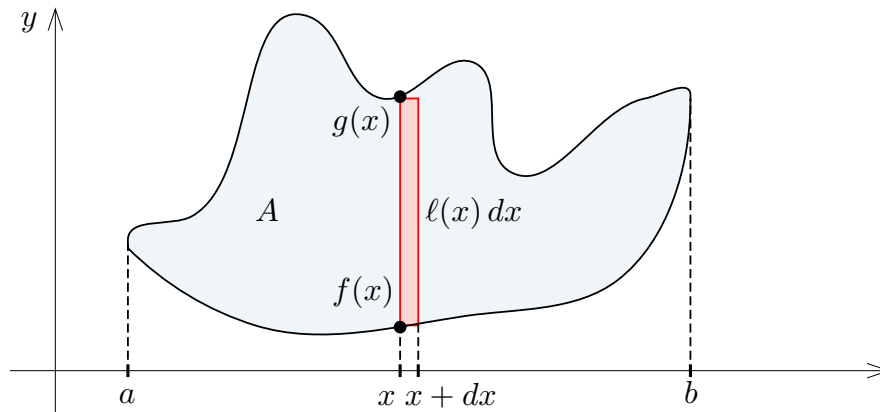
Dans ce cas on écrit  $\lambda x + \mu = \lambda(x - \gamma) + (\lambda\gamma + \mu)$  et on observe que  $(x - \gamma)$  est la moitié de la dérivée du dénominateur, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int \frac{\lambda x + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx &= \int \frac{\lambda(x - \gamma)}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx + \int \frac{\lambda\gamma + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \lambda \ln((x - \gamma)^2 + \delta^2) + (\lambda\gamma + \mu) \int \frac{1}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \lambda \ln((x - \gamma)^2 + \delta^2) + \frac{\lambda\gamma + \mu}{\delta} \arctan \frac{x - \gamma}{\delta} + C. \end{aligned}$$

## 6. Calcul d'aires et de volumes

Nous commencerons par une application concrète très importante qui est le calcul des aires et des volumes.

**(6.1) Calcul d'aires<sup>(7)</sup>.** Par définition même, l'intégrale d'une fonction  $f$  calcule l'aire algébrique située sous son graphe. Pour un domaine plan quelconque, la frontière est en général délimitée par les graphes de plusieurs fonctions (deux au moins, davantage si le domaine comporte des « trous » ou des « renforcements »).



**Fig. 9.** Aire d'un domaine délimité par des graphes de fonctions.

Comme on le voit par soustraction des aires situées sous les graphes de  $f$  et  $g$  respectivement (et en remplaçant si nécessaire  $f$ ,  $g$  par  $f + C$ ,  $g + C$  pour avoir des fonctions positives), l'aire du domaine plan est égale à la différence

$$A = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

L'aire d'un tel domaine plan est donc donnée par l'intégrale par rapport à  $x$  de la longueur  $\ell(x) = g(x) - f(x)$  des sections « verticales » du domaine :

$$A = \int_a^b \ell(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

À titre d'exemple, cherchons l'aire délimitée par l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , de demi-axes  $a$  et  $b$ . Le domaine délimité par l'ellipse est compris entre les graphes des fonctions  $g(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$  et  $f(x) = -g(x)$  pour  $x \in [-a, a]$ , ce qui donne

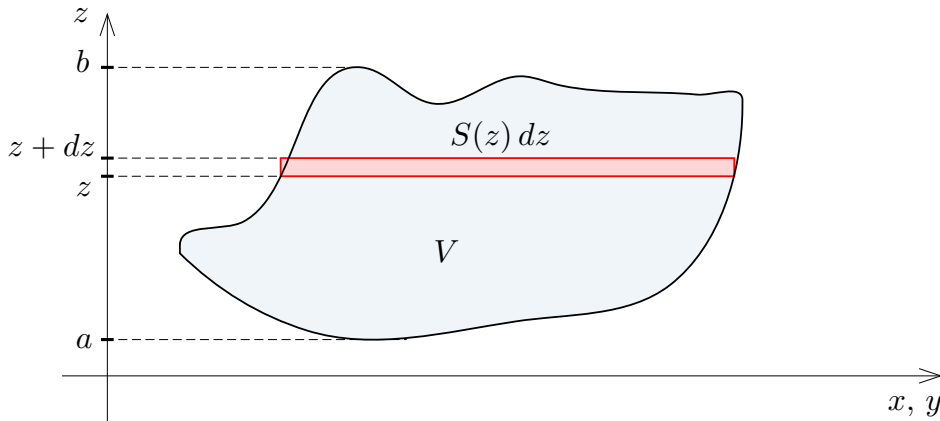
$$A = \int_{-a}^a 2g(x) dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Le changement de variable  $x = a \sin t$  avec  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  donne  $dx = a \cos t dt$ , d'où

$$A = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi ab. \quad \square$$



**(6.2) Calcul de volumes**<sup>(8)</sup>. La procédure est essentiellement la même : on effectue des sections planes (disons par exemple en coupant par un plan horizontal  $z = \text{Cte}$ ), et on suppose connue l'aire  $S(z)$  d'une telle section plane (cette aire aura en général été évaluée elle-même par un calcul intégral comme expliqué au paragraphe 6.1).



**Fig. 10.** Calcul d'un volume par tranchage dans la direction  $z$ .

Dans ce cas, le volume est donné par

$$V = \int_a^b S(z) dz.$$

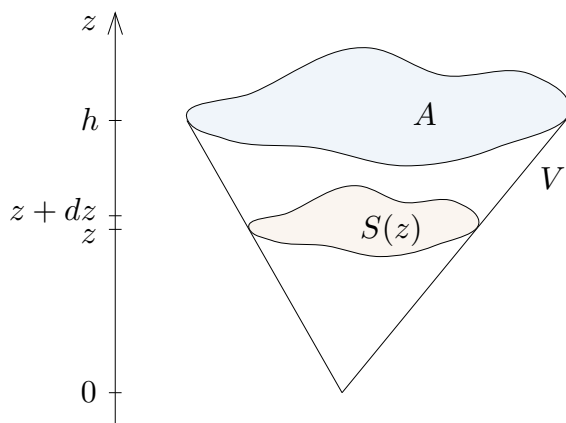
Une application immédiate est le calcul du volume de la boule de rayon  $R$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . L'aire de la section  $z = \text{Cte}$  est l'aire  $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$  du disque  $x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$  de rayon  $\sqrt{R^2 - z^2}$ . On trouve donc

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz = 2\pi [R^2 z - z^3/3]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Une autre application est la formule donnant le volume d'un cône – éventuellement « oblique » – ayant une base d'aire  $A$  connue et une hauteur  $h$ .

On entend ici par cône la réunion des segments issus d'un point (sommets), ayant pour autre extrémité un point quelconque d'un domaine plan (choisi comme base). Pour faire le calcul, il est commode de choisir le sommet du cône comme origine et de fixer un repère orthonormé tel que la base du cône soit contenue dans le plan  $z = h$ .

<sup>(8)</sup> La définition de l'aire (et de même du volume), pour des domaines « mesurables » arbitraires de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$  requiert des concepts sophistiqués de la théorie de l'intégration que nous ne pouvons pas développer ici. La démonstration complète des formules 6.1 et 6.2 s'appuie ainsi sur le célèbre théorème dit de Fubini. Nous renvoyons à la section 18 de notre exposé complet pour une preuve détaillée dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Henstock-Kurzweil. Il n'est pas incorrect ici de considérer que les formules données pour la surface et le volume sont en quelque sorte des définitions de ces grandeurs.



**Fig. 11.** Calcul du volume d'un cône.

Comme l'aire de l'homothétique de rapport  $\lambda$  d'un domaine plan est multipliée par  $\lambda^2$ , et comme le domaine d'aire  $S(z)$  est homothétique du domaine d'aire  $A$  dans le rapport  $\lambda = z/h$ , on a

$$S(z) = \frac{z^2}{h^2}A.$$

On en déduit que le volume du cône vaut

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h \frac{z^2}{h^2} A dz = \left[ \frac{1}{3} z^3 \right]_0^h \frac{1}{h^2} A,$$

ce qui prouve la formule classique

$$V = \frac{1}{3} Ah.$$

On peut appliquer le même raisonnement pour un cône sphérique, c'est-à-dire un cône ayant pour sommet le centre d'une sphère, et pour base un domaine de cette sphère (plutôt qu'un domaine plan). Si  $R$  est le rayon de la sphère et  $A$  l'aire du domaine sphérique, on trouve alors comme précédemment  $V = \frac{1}{3} AR$ . Dans le cas où la base est la sphère toute entière, le cône est la boule elle-même, d'où  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ . On en déduit ainsi la valeur de l'aire de la sphère

$$A = 4\pi R^2.$$

## 7. Encadrement par des fonctions en escalier. Intégrabilité des fonctions continues ou monotones par morceaux <sup>(9)</sup>

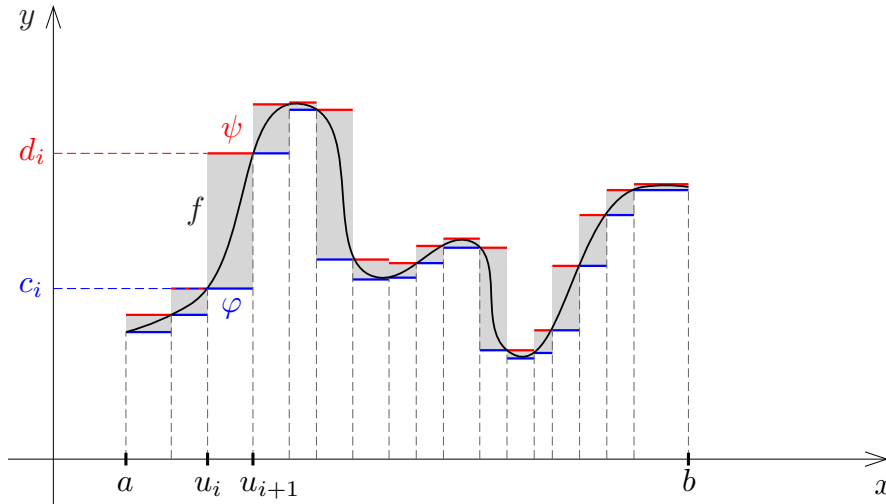
Nous nous proposons de démontrer ici que quelques classes usuelles de fonctions (notamment les fonctions continues ou monotones par morceaux) sont intégrables.

<sup>(9)</sup> À partir de ce point, le niveau théorique de l'exposé augmente sensiblement, nous considérons donc que cela relève plutôt de l'enseignement supérieur – le théorème (7.10) peut être admis d'emblée en Terminale si l'on souhaite ensuite être en mesure d'énoncer et de démontrer le corollaire 7.7.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. L'idée est de considérer des encadrements

$$(7.1) \quad \varphi \leq f \leq \psi$$

de  $f$  par des fonctions en escalier  $\varphi, \psi$ , comme figuré sur le schéma ci-dessous.



**Fig. 12.** Encadrement d'une fonction bornée  $f$  par des fonctions en escalier.

On peut supposer ici que les fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\psi$  sont exprimées au moyen de la même subdivision  $a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b$ , sinon il est toujours possible de redécouper les subdivisions qui les définissent pour arriver à une subdivision commune [de plus, comme les valeurs  $\varphi(u_i), \psi(u_i)$  ne jouent pas de rôle dans les intégrales, on peut choisir par exemple  $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$ ]. Dans cette situation, l'erreur due à l'encadrement de l'aire est précisément

$$(7.2) \quad \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{0 \leq i \leq p-1} (d_i - c_i)(u_{i+1} - u_i)$$

(somme des aires des rectangles dessinés en grisé sur la Fig. 12). On obtient ainsi le

**(7.3) Critère d'intégrabilité au sens de Riemann.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un encadrement  $\varphi \leq f \leq \psi$  de  $f$  par des fonctions en escalier  $\varphi, \psi$  telles que

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{0 \leq i \leq p-1} (d_i - c_i)(u_{i+1} - u_i) \leq \varepsilon.$$

Alors  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$  et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx ; \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx ; \psi \geq f \right\}.$$

*Démonstration.* Considérons les ensembles de valeurs prises par les intégrales de fonctions en escalier  $\varphi$  qui minorent et  $\psi$  qui majorent, c'est-à-dire

$$E_1 = \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx ; \varphi \leq f \right\}, \quad E_2 = \left\{ \int_a^b \psi(x) dx ; \psi \geq f \right\},$$

et  $S = \sup E_1$ ,  $I = \inf E_2$ . Il est clair que pour tout  $A_1 = \int_a^b \varphi(x) dx \in E_1$  et tout  $A_2 = \int_a^b \psi(x) dx \in E_2$  on a  $A_1 \leq A_2$ . L'hypothèse de la condition signifie que pour un choix adéquat de  $\varphi$ ,  $\psi$  on a  $A_2 - A_1 \leq \varepsilon$ . Ceci entraîne bien  $S = \sup E_1 = I = \inf E_2$ . Comme toute fonction en escalier est intégrable avec des jauges constantes (cf. exemple 2.4), il existe  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \quad h_j \leq \delta_1 \text{ pour tout } j &\Rightarrow |S_D(\varphi) - A_1| \leq \varepsilon, \\ \forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \quad h_j \leq \delta_2 \text{ pour tout } j &\Rightarrow |S_D(\psi) - A_2| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or nous avons  $A_1 \leq S = I \leq A_2$  et  $A_2 - A_1 \leq \varepsilon$ . Prenons une subdivision pointée  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$  vérifiant  $h_j \leq \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Nous obtenons dans ces conditions  $S_D(\varphi) \leq S_D(f) \leq S_D(\psi)$ , donc

$$S_D(f) \leq S_D(\psi) \leq A_2 + \varepsilon \leq I + 2\varepsilon, \quad S_D(f) \geq S_D(\varphi) \geq A_1 - \varepsilon \geq S - 2\varepsilon.$$

Par suite en posant  $A = S = I$  il vient  $|S_D(f) - A| \leq 2\varepsilon$ . La suffisance du critère d'intégrabilité est démontrée.  $\square$

**(7.4)\* Complément.** *Le critère 7.3 est en fait une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Pour voir la nécessité de la condition, supposons  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-intégrable et soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  satisfaisant la définition 2.5. Considérons une subdivision pointée  $\delta$ -fine  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  quelconque. En faisant varier indépendamment chaque  $x_j$  dans l'intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$ , on trouve

$$\begin{aligned} \sup_{\{x_j\}} S_D(f) &= \sup_{\{x_j\}} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j(a_{j+1} - a_j), \\ \inf_{\{x_j\}} S_D(f) &= \inf_{\{x_j\}} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} m_j(a_{j+1} - a_j) \end{aligned}$$

où  $M_j = \sup_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x)$ ,  $m_j = \inf_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x)$ . Puisque  $A - \varepsilon \leq S_D(f) \leq A + \varepsilon$ , on voit en passant au sup et à l'inf que

$$A - \varepsilon \leq \sum_{j=0}^{N-1} m_j(a_{j+1} - a_j) \leq \sum_{j=0}^{N-1} M_j(a_{j+1} - a_j) \leq A + \varepsilon.$$

Ceci entraîne en particulier qu'aucune des bornes  $M_j$  ne peut être égale à  $+\infty$  et qu'aucune des bornes  $m_j$  ne peut être égale à  $-\infty$ , et par conséquent que  $f$  est bornée. Si on définit les fonctions en escalier  $\varphi$ ,  $\psi$  par

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in ]a_j, a_{j+1}[ , \quad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

on obtient un encadrement  $\varphi \leq f \leq \psi$  tel que

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq 2\varepsilon,$$

et on voit que la condition du critère 7.3 est bien satisfaite. □

Une application directe de 7.3 est la preuve de l'intégrabilité des fonctions monotones ou continues (dans la suite de ce paragraphe, tous les résultats concerneront donc l'intégrabilité au sens de Riemann.)

**(7.5) Théorème.** *Toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotone est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Supposons par exemple  $f$  croissante et soit  $a = u_1 < \dots < u_p = b$  une subdivision  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ , où  $\delta > 0$  est une constante. De manière évidente, on définit un encadrement  $\varphi \leq f \leq \psi$  de  $f$  par des fonctions en escalier en posant

$$\varphi(x) = f(u_j) \text{ sur } ]u_j, u_{j+1}[ , \quad \psi(x) = f(u_{j+1}) \text{ sur } ]u_j, u_{j+1}[$$

(et  $\varphi(u_j) = \psi(u_j) = f(u_j)$  comme déjà convenu). Ceci donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} (f(u_{j+1}) - f(u_j))(u_{j+1} - u_j) \\ &\leq \delta \sum_{0 \leq j \leq N-1} (f(u_{j+1}) - f(u_j)) = \delta(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

On voit ainsi que la condition 7.3 est vérifiée en prenant  $\delta$  assez petit. □

**(7.6) Théorème** *Toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . La continuité de  $f$  en tout point  $x \in [a, b]$  implique l'existence d'un réel  $\delta(x) > 0$  tel que

$$\forall x' \in [a, b], \quad x' \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0 \leq j < N}$  une subdivision pointée  $\delta$ -fine. En prenant  $x = x_j$  et en faisant parcourir à  $x'$  l'intervalle  $[a_j, a_{j+1}] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]$ , on déduit de la majoration  $|f(x') - f(x_j)| \leq \varepsilon$  que les bornes inf et sup

$$m_j = \inf_{x' \in [a_j, a_{j+1}]} f(x'), \quad M_j = \sup_{x' \in [a_j, a_{j+1}]} f(x')$$

sont comprises entre  $f(x_j) - \varepsilon$  et  $f(x_j) + \varepsilon$ , par conséquent  $M_j - m_j \leq 2\varepsilon$ . On obtient ainsi un encadrement  $\varphi \leq f \leq \psi$  de  $f$  par des fonctions en escalier  $\varphi, \psi$  telles que

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in ]a_j, a_{j+1}[ , \quad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

et de plus

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} (M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j) \\ &\leq 2\varepsilon \sum_{0 \leq j \leq N-1} a_{j+1} - a_j = 2\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Ceci montre que le critère 7.3 est satisfait, donc  $f$  est intégrable.<sup>(10)</sup> □

**(7.7) Théorème.** *Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  admet une primitive  $F$ , donnée par*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

*Les autres primitives sont les fonctions de la forme  $F_1(x) = F(x) + C$  où  $C$  est une constante.*

*Démonstration.* Nous savons que l'intégrale donnant  $F(x)$  existe par le Théorème 7.6. La relation de Chasles donne

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'hypothèse de continuité dit que  $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$  pour  $|t - x| \leq \delta(x)$ , on a donc

$$f(x) - \varepsilon = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon) dt \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon) dt = f(x) + \varepsilon$$

pour  $|h| \leq \delta(x)$ , ce qui signifie que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Si on a une autre primitive  $F_1$ , il vient  $(F_1 - F)' = f' - f' = 0$ , donc  $F_1 - F = C$  constante. □

**(7.8) Proposition.**

- (a) *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue positive ou nulle, on a  $\int_a^b f(x) = 0$  si et seulement si  $f = 0$ .*
- (b) *Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues et  $f \leq g$ , on a  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$  dès que  $f$  et  $g$  se sont pas égales.*

---

<sup>(10)</sup> On remarquera que dans cette preuve l'utilisation explicite de la propriété de continuité uniforme de la fonction  $f$  n'a pas été nécessaire, ce qui est une simplification appréciable susceptible de rendre la preuve abordable dès la classe terminale [avec des vitamines tout de même!].

*Démonstration.* (a) Si  $f$  n'est pas nulle, il existe un point  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) > 0$ , et on pose alors  $\varepsilon = f(x_0)/2$ . La continuité de  $f$  en  $x_0$  implique qu'il existe un intervalle  $[x_0, x_0 + \eta]$  (ou  $[x_0 - \eta, x_0]$ , si  $x_0 = b$ ) sur lequel  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ . On voit donc qu'il existe un sous-intervalle  $[c, d]$  de  $[a, b]$  de longueur  $d - c = \eta > 0$  sur lequel  $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \geq \varepsilon$ . Par suite  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq (d - c)\varepsilon > 0$ .

(b) Si  $f \leq g$  et  $f \neq g$ , alors  $h = g - f \geq 0$  n'est pas nulle, donc  $\int_a^b h(x) dx > 0$  d'après (a). □

**(7.9) Formule de la moyenne.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que la « valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  » soit égale à  $f(c)$  :*

$$\boxed{\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = f(c).}$$

*Démonstration.* Soit  $m = \min_{[a,b]} f$ ,  $M = \max_{[a,b]} f$ . Supposons d'abord  $f$  non constante. D'après la proposition 7.8 (b) appliquée aux inégalités  $m \leq f \leq M$ , nous avons

$$m(b - a) < \int_a^b f(x) dx < M(b - a), \quad \text{soit} \quad m < \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx < M.$$

La formule de la moyenne est donc une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f(]a, b[)$  est un intervalle qui contient l'intervalle  $]m, M[$ . Si  $f$  est égale à une constante  $C$ , le résultat est évident, les deux membres de la formule étant égaux à  $C$  quel que le soit le choix de  $c \in ]a, b[$ . □

**(7.10) Une généralisation.** *On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (resp. monotone) par morceaux s'il existe une subdivision*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$$

*telle que  $f$  soit continue (resp. monotone) sur chaque intervalle  $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$  et possède des limites à droite et à gauche finies en chaque point  $\alpha_j$  tel que  $j < N$  (resp.  $j > 0$ ). Toute fonction continue ou monotone par morceaux est intégrable au sens de Riemann.*

*Démonstration.* En effet, la restriction  $f|_{] \alpha_j, \alpha_{j+1} [}$  diffère d'une fonction continue (resp. monotone) par une fonction en escalier nulle sur  $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$  (et prenant des valeurs adéquates en  $\alpha_j$  et  $\alpha_{j+1}$ ). Par conséquent  $f|_{] \alpha_j, \alpha_{j+1} [}$  est intégrable au sens de Riemann, et l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b]$  résulte de la relation de Chasles. □

Nous démontrons maintenant une généralisation du théorème fondamental 4.1. Observons d'abord que comme une fonction nulle sauf sur un ensemble fini est d'intégrale nulle (remarque 3.2), on peut envisager d'intégrer des fonctions  $f$  qui sont seulement définies sur le complémentaire  $[a, b] \setminus E$  d'un ensemble fini  $E$  : on se ramène au cas d'une fonction partout définie en étendant  $f$  arbitrairement sur  $[a, b]$ , par exemple en

posant  $\tilde{f}(x) = 0$  sur  $E$ . L'intégrale ainsi calculée est indépendante du prolongement  $\tilde{f}$  choisi.

**(7.11) Théorème.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble fini  $E = \{u_i; 1 \leq i \leq p\}$  tel que  $f$  soit dérivable sur  $[a, b] \setminus E$ . Alors  $f'$  (étendue arbitrairement aux points  $u_i$ ) est HK-intégrable sur  $[a, b]$  et on a*

$$\boxed{\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).}$$

*Démonstration.\** Supposons pour simplifier  $f'$  définie par  $f'(u_i) = 0$  aux points où  $f$  n'est pas dérivable. On reprend la démonstration du théorème 4.1. La dérivabilité de  $f$  sur  $[a, b] \setminus E$  implique l'existence d'une fonction  $\delta : [a, b] \setminus E \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que

$$y \in [a, b], \quad y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)| \leq \varepsilon|y - x|$$

pour tout  $x \in [a, b] \setminus E$ , ce qui donne

$$|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)| \leq \varepsilon|a_{j+1} - a_j|$$

pour toute subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$   $\delta$ -fine, lorsque  $x_j \in [a, b] \setminus E$ . D'autre part, si  $x_j = u_i \in E$ , la continuité de  $f$  au point  $u_i$  entraîne l'existence de  $\delta_i > 0$  tel que tout point  $x \in [u_i - \delta_i, u_i + \delta_i]$  satisfasse  $|f(x) - f(u_i)| \leq \varepsilon 2^{-i}$ . On pose alors  $\delta(u_i) = \delta_i$ . Dans ce cas il vient  $|f(a_{j+1}) - f(a_j)| \leq 2\varepsilon 2^{-i}$  si  $x_j = u_i$ , ce qui donne

$$|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)| \leq 2\varepsilon 2^{-i}.$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$|f(b) - f(a) - S_D(f')| \leq \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon,$$

(car  $\sum_{1 \leq i \leq p} 2\varepsilon 2^{-i} \leq 2\varepsilon$ ), ce qui démontre le théorème. □

**(7.12)\* Remarque.** On peut voir facilement que le théorème 7.11 est en fait encore vrai avec un ensemble  $E = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  dénombrable.

**(7.13) Corollaire.** *Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  admet une primitive  $F$  sur  $]a, b[$ , et si cette primitive  $F$  admet une limite à droite  $F(a + 0)$  en  $a$  et une limite à gauche  $F(b - 0)$  en  $b$ , alors  $f$  est HK-intégrable sur  $[a, b]$  (si  $f$  n'est pas a priori définie en  $a$  et  $b$ , on peut lui attribuer des valeurs  $f(a), f(b) \in \mathbb{R}$  arbitraires), et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b - 0) - F(a + 0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+0} F(x).}$$



*Démonstration.* Il suffit en effet de prolonger  $F$  par continuité sur  $[a, b]$  en posant  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$  et  $F(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ , puis d'appliquer le théorème 7.11 à sa dérivée  $F'$  qui est définie sur  $]a, b[ = [a, b] \setminus E$  avec  $E = \{a, b\}$ .  $\square$

Un exemple typique d'application du corollaire 7.13 est celui de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{sur l'intervalle } ]-1, 1[.$$

Dans ce cas, on a en effet une primitive  $F(x) = \arcsin(x)$  qui se prolonge en une fonction continue sur  $[-1, 1]$ . On obtient par conséquent

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi.$$

Plus généralement, le corollaire 7.13 nous amène à la définition des « intégrales impropres ».

**(7.14) Intégrales «impropres».** Soit  $I = [a, b[ \subset \mathbb{R}$  un intervalle semi-ouvert, où  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , et soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple continue ou monotone par morceaux) sur tout intervalle  $[a, \beta] \subset [a, b[$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est convergente au point  $b$  si la limite

$$A = \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^\beta f(x) dx$$

existe dans  $\mathbb{R}$  (en particulier finie), et on pose alors  $\int_a^b f(x) dx = A$ .

On donne une définition analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert  $]a, b]$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , en considérant la limite  $\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_\alpha^b f(x) dx$  avec  $[\alpha, b] \subset ]a, b]$ , et on dit qu'on a convergence sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  si les intégrales sur  $]a, c]$  et  $[c, b[$  convergent pour tout point intermédiaire  $c \in ]a, b[$ .

**(7.15) Exemples.** On vérifiera que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^b} dx = \frac{1}{b-1}$$

convergent respectivement pour  $a < 1$  et  $b > 1$ , et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx = \frac{1}{c}$$

converge pour tout  $c > 0$ . En utilisant le calcul de la primitive de  $x^n e^{-x}$  donné au point (5.1 a), on obtient également le résultat classique

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! .$$

**(7.16)\*\* Convergence absolue.** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction HK-intégrable sur tout intervalle fermé borné  $[a, \beta]$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est absolument convergente si de plus  $|f|$  est HK-intégrable sur chaque intervalle  $[a, \beta] \subset [a, b[$  et si la limite

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^\beta |f(x)| dx$$

existe dans  $\mathbb{R}$  (donc en particulier si elle est finie).

On donne une définition analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert  $]a, b]$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , en considérant la limite  $\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_\alpha^b f(x) dx$  avec  $[a, b] \subset ]a, b]$ , et on dit qu'on a convergence sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  si les intégrales sur  $]a, c]$  et  $[c, b[$  convergent pour tout point intermédiaire  $c \in ]a, b[$ .

Le critère de Cauchy\* permet de voir qu'il y a convergence (resp. convergence absolue) de l'intégrale sur  $]a, b[$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\beta_\varepsilon < b$  tel que pour tous  $\beta, \gamma \in [\beta_\varepsilon, b[$ ,  $\beta < \gamma$ , on ait

$$\left| \int_\beta^\gamma f(x) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \text{resp.} \quad \int_\beta^\gamma |f(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Comme  $\left| \int_\beta^\gamma f(x) dx \right| \leq \int_\beta^\gamma |f(x)| dx$ , il est clair que la convergence absolue implique la convergence.

## 8. Convergence uniforme, continuité et dérivabilité d'intégrales en fonction de paramètres\*\*

Soit  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions réelles. On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers une limite  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si la distance uniforme de  $f_n$  à  $f$  tend vers 0 c'est-à-dire si

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

**(8.1) Théorème de convergence uniforme.** Soit  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions réelles convergeant uniformément vers une limite  $f$ . Si les fonctions  $f_n$  sont Riemann-intégrables (resp. HK-intégrables), alors  $f$  est Riemann-intégrable (resp. HK-intégrable) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Démonstration.* Posons  $A_n = \int_a^b f_n(x) dx$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0$  tels que  $|f_n - f| \leq \varepsilon$  pour  $n \geq n_0$ . Nous avons  $|f_p - f_q| \leq 2\varepsilon$  pour  $p, q \geq n_0$ , d'où  $|A_p - A_q| \leq 2\varepsilon(b - a)$ . La suite  $(A_n)$  est donc une suite de Cauchy, par conséquent la limite  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  existe. De plus, il existe une jauge  $\delta$  (resp. une jauge constante dans le cas de l'intégrabilité au sens de Riemann) telle que pour toute subdivision pointée  $D$  de pas  $h_j \leq \delta(x_j)$  on ait  $|S_D(f_{n_0}) - A_{n_0}| \leq \varepsilon$ . Il vient à la limite  $|A - A_{n_0}| \leq 2\varepsilon(b - a)$  tandis que

$|S_D(f) - S_D(f_{n_0})| \leq \sum |f(x_j) - f_{n_0}(x_j)| h_j \leq \varepsilon(b - a)$ . En mettant bout à bout ces inégalités il vient

$$|S_D(f) - A| \leq \varepsilon + 3\varepsilon(b - a),$$

donc  $f$  est bien intégrable sur  $[a, b]$  d'intégrale  $A = \lim A_n$ . □

**(8.2) Remarque.** Pour obtenir l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil de la limite  $f = \lim f_n$ , il suffirait d'avoir une estimation de la forme  $|f_n - f| \leq \varepsilon_n g$  avec  $g \geq 0$  HK-intégrable (non nécessairement bornée) et  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Nous obtiendrons de toutes façons des théorèmes de convergence beaucoup meilleurs encore dans ce cas, cf. chapitre II.

Rappelons qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  est dite *réglée* si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point de l'intérieur  $I^\circ$ , ainsi qu'une limite à droite en  $a = \inf I$  si  $a \in I$  et à gauche en  $b = \sup I$  si  $b \in I$ .

**(8.3) Lemme.** *Toute fonction réglée sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  est limite uniforme de fonctions en escalier.*

**(8.4) Corollaire.** *Toute fonction réglée sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  y est Riemann-intégrable.*

*Démonstration du lemme et de son corollaire.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\delta(x) > 0$  et des constantes  $c^+ = \lim_{\xi \rightarrow x+0} f(\xi)$ ,  $c^- = \lim_{\xi \rightarrow x-0} f(\xi)$  telles que  $|f(x) - c^-| \leq \varepsilon$  sur  $[x - \delta(x), x] \cap [a, b]$  et  $|f(x) - c^+| \leq \varepsilon$  sur  $[x, x + \delta(x)] \cap [a, b]$ . D'après le lemme I.2.6, on peut trouver une subdivision pointée  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$   $\delta$ -fine. Ceci nous permet de définir une fonction en escalier  $\varphi$  en posant

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) &= f(x_j), & \varphi(a_j) &= f(a_j), \\ \varphi|_{]a_j, x_j[} &= c_j^- = \lim_{\xi \rightarrow x_j-0} f(\xi), & \varphi|_{]x_j, a_{j+1}[} &= c_j^+ = \lim_{\xi \rightarrow x_j+0} f(\xi). \end{aligned}$$

Par construction nous avons  $|f - \varphi| \leq \varepsilon$  sur  $[a, b]$ . Il en résulte que  $f$  est Riemann-intégrable comme limite uniforme de fonctions en escalier. □

On va maintenant tirer du théorème de convergence uniforme les propriétés usuelles de continuité et de dérivabilité sous le signe somme des intégrales dépendant de paramètres. Des résultats beaucoup plus forts sont vrais, mais on aura besoin pour cela de théorèmes de convergence plus subtils que le théorème 8.1 (cf. Chapitre II, section 5).

**(8.5) Lemme.** *Soit  $T \subset \mathbb{R}^d$  une partie quelconque et  $f : [a, b] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une application continue. Alors, si  $t_0 \in T$ , la famille de fonctions  $f_t : x \mapsto f(x, t)$  converge uniformément vers la fonction  $f_{t_0} : x \mapsto f(x, t_0)$  quand  $T \ni t$  tend vers  $t_0$ . Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $t_0$  tel que pour  $t \in T \cap V$ , on ait  $|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [a, b]$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x_0 \in [a, b]$ , l'hypothèse de continuité au point  $(x_0, t_0)$  implique qu'il existe un voisinage  $V_{x_0, t_0}$  de  $t_0$  (dépendant de  $x_0$ ) et un voisinage

$$U_{(x_0, t_0)} = [x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0)] \times V_{x_0, t_0} \quad \text{de } (x_0, t_0)$$

tel que  $(x, t) \in U_{(x_0, t_0)} \cap ([a, b] \times T)$  implique  $|f(x, t) - f(x_0, t_0)| \leq \varepsilon/2$ . En appliquant ceci en particulier pour  $t = t_0$  et en faisant la différence, on voit que pour tout  $t \in T \cap V_{x_0, t_0}$  et tout  $x \in [x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0)]$  on a  $|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$ . D'après le lemme I.2.6, il existe une subdivision pointée  $D = ([a_i, a_{i+1}], x_i)$  de  $[a, b]$  qui est  $\delta$ -fine. Par conséquent  $[a_i, a_{i+1}] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$ , et en prenant  $t \in V = \bigcap_i V_{x_i, t_0}$  on voit que la conclusion du lemme est vérifiée.  $\square$

De là, on déduit aussitôt le théorème de continuité des intégrales dépendant de paramètres.

**(8.6) Continuité sous le signe somme.** Soit  $T \subset \mathbb{R}^d$  une partie quelconque et  $f : [a, b] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une application continue. Alors l'application

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

est continue sur  $T$ .

*Démonstration.* Avec les notations du lemme 8.5, on trouve

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \leq (b - a)\varepsilon$$

pour  $t \in T \cap V$ , ce qui prouve la continuité de  $F$  au point  $t_0$ .  $\square$

**(8.7) Dérivation sous le signe somme.** Soit  $T$  un intervalle de la droite réelle et  $f : [a, b] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction telle que

- (a)  $f$  est continue sur  $[a, b] \times T$  ;
- (b)  $f$  admet en tout point une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  qui est elle-même continue sur  $[a, b] \times T$ .

Alors l'application  $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$  est de classe  $C^1$  sur  $T$  et pour tout  $t_0 \in T$  on a

$$F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

*Démonstration.* Soit  $t \in T$ . En appliquant le théorème des accroissements finis à  $t \mapsto f(x, t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$ , on voit que

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) dx$$

pour un certain point  $c = c_{t,x} \in ]t_0, t[$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . En appliquant le lemme 8.5 à la fonction continue  $g(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ , on voit qu'il existe un voisinage  $V = ]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$  de  $t_0$  tel que  $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $t \in V$ . Sous cette

hypothèse on a également  $c(x, t) \in ]t_0, t[ \subset V$ , donc  $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)| \leq \varepsilon$  et par suite

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx \right| = \left| \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right) dx \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

On a donc bien  $F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx$ , et cette relation montre que  $F'$  est continue d'après le théorème 8.6. □

Pour un paramètre  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ , nous avons le résultat analogue suivant.

**(8.8) Différentiabilité sous le signe somme.** Soit  $T \subset \mathbb{R}^d$  une partie ouverte et  $f : [a, b] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction telle que

- (a)  $f$  est continue sur  $[a, b] \times T$  ;
- (b)  $f$  admet en tout point des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t)$  qui sont elles-mêmes continues sur  $[a, b] \times T$ .

Alors l'application  $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$  est de classe  $C^1$  sur  $T$  et on a

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) dx.$$

*Démonstration.* Il suffit en effet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme séparément pour chaque variable  $t_j$  pour voir que les dérivées partielles  $\partial F / \partial t_j$  existent, et d'invoquer ensuite le théorème de continuité pour voir que ces dérivées partielles sont continues sur  $T$ . □

Il est bon parfois de connaître également la formule de différentiation sous le signe somme dans le cas où l'intégrale est calculée sur des intervalles dépendant du paramètre.

**(8.9) Formule générale de dérivation sous le signe somme.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $T \subset \mathbb{R}$  des intervalles. On considère une intégrale de la forme

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

où  $a, b : T \rightarrow I$  sont des fonctions de classe  $C^1$  et  $f : I \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction continue admettant une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial t}$  continue sur  $I \times T$ . Alors l'application  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $T$  et on a

$$F'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + b'(t)f(b(t), t) - a'(t)f(a(t), t).$$

*Démonstration.* On pose

$$\Phi(t, u, v) = \int_u^v f(x, t) dx.$$

Plaçons-nous sur un sous-intervalle fermé borné  $T' = [t_1, t_2] \subset T$ , et soit

$$A = \min_{t \in T'} a(t) \in I, \quad B = \max_{t \in T'} b(t) \in I.$$

Nous avons  $[A, B] \subset I$ , donc les hypothèses des théorèmes 8.5 et 8.6 sont satisfaites sur  $[A, B] \times T'$ . On voit par conséquent que  $\Phi$  admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, t)$$

(pour cette dernière égalité, il suffit d'échanger les bornes  $u$  et  $v$ ). De plus, ces trois dérivées partielles sont continues en les variables  $(t, u, v)$ . Pour  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$  c'est clair par hypothèse, tandis que pour  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  cela résulte de l'estimation

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, u, v) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0, u_0, v_0) \right| \leq M(|u - u_0| + |v - v_0|) + \left| \int_{u_0}^{v_0} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right) dx \right|$$

dans laquelle  $M$  est un majorant de  $|\frac{\partial f}{\partial t}|$  sur le pavé  $[A, B] \times T'$ . On déduit de tout cela que  $\Phi(t, u, v)$  et  $F(t) = \Phi(t, a(t), b(t))$  sont de classe  $C^1$ . De plus

$$F'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, a(t), b(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(t, a(t), b(t)) a'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(t, a(t), b(t)) b'(t)$$

ce qui donne la formule (8.9) attendue. □

# Chapitre II

## Théorèmes de convergence

Nous établissons ici un pont direct entre la théorie de Henstock-Kurzweil et la théorie de la mesure. Ceci se fait en observant que l'intégrale de jauge satisfait les théorèmes de convergence fondamentaux que sont le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée. Ceci permet d'établir de manière naturelle l'existence de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}$ .

### 1. Lemme de Henstock et théorème de Hake

Le but du lemme de Henstock est d'obtenir des estimations fines pour les sommes de Riemann calculées sur des familles de sous-intervalles de  $[a, b]$  qui ne constituent pas nécessairement un découpage complet. Nous aurons d'abord besoin du critère d'intégrabilité de Cauchy, qui donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir la valeur  $A$  de l'intégrale.

**(1.1) Critère de Cauchy.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$  fermé borné. Pour que  $f$  soit HK-intégrable (resp. Riemann-intégrable), il faut et il suffit que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une jauge  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  (resp. une constante  $\delta > 0$ ), telle que pour toutes subdivisions pointées  $D$  et  $D'$   $\delta$ -fines on ait  $|S_{D'}(f) - S_D(f)| \leq \varepsilon$ .*

*Démonstration.* Si  $f$  est HK-intégrable d'intégrale  $A$ , pour chaque jauge  $\delta$  qui est  $\varepsilon/2$ -adaptée à  $f$ , les inégalités  $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon/2$  et  $|S_{D'}(f) - A| \leq \varepsilon/2$  pour  $D, D'$   $\delta$ -fines entraînent  $|S_{D'}(f) - S_D(f)| \leq \varepsilon$ . La réciproque est une conséquence de la complétude de  $\mathbb{R}$ , ou, de façon équivalente, de l'existence de bornes supérieures et inférieures pour les parties bornées de  $\mathbb{R}$ . En effet, supposons que pour tout entier  $n \geq 1$  il existe une jauge  $\delta_n$  telle que

$$|S_{D'}(f) - S_D(f)| \leq \varepsilon_n = 1/n \quad \text{lorsque } D \text{ et } D' \text{ sont } \delta_n\text{-fines.}$$

Quitte à remplacer  $\delta_n$  par  $\min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  on peut supposer la suite  $\delta_n$  décroissante. L'encadrement précédent montre que les quantités

$$M_\ell = \sup \{ S_{D'}(f) ; D' \text{ } \delta_\ell\text{-fine} \}$$

sont bornées et vérifient  $|M_\ell - S_D(f)| \leq 1/n$  pour tout  $\ell \geq n$  et toute subdivision  $D$   $\delta_n$ -fine. De plus la suite  $(M_\ell)$  est décroissante bornée, et si on pose  $A = \inf\{M_\ell\}$ , on trouve  $|A - S_D(f)| \leq 1/n$  pour toute subdivision  $D$   $\delta_n$ -fine. Ceci implique

$$\lim_{\text{HK}, D} S_D(f) = A = \inf_{\ell > 0} M_\ell, \quad \text{donc } f \text{ HK-intégrable d'intégrale } A. \quad \square$$

Nous aurons besoin aussi du résultat élémentaire suivant qui complète l'énoncé de la relation de Chasles, en nous limitant au cas des fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil (la preuve pour les fonctions Riemann-intégrables serait identique).

**(1.2) Proposition.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction HK-intégrable. Alors la restriction  $f|_{[c, d]}$  à tout sous-intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$  est encore HK-intégrable.*

*Démonstration.* On utilise le critère de Cauchy. Étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\delta$  sur  $[a, b]$  telle que  $|S_D(f) - S_{D'}(f)| \leq \varepsilon$  pour toutes subdivisions pointées  $\delta$ -fines  $D$  et  $D'$  de  $[a, b]$ . Soient maintenant  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux subdivisions pointées de  $[c, d]$  qui sont  $\delta|_{[c, d]}$ -fines. En considérant grâce au lemme I.2.6 des subdivisions de  $[a, c]$  et de  $[d, b]$  qui sont  $\delta$ -fines, on peut compléter  $\Delta$  et  $\Delta'$  en des subdivisions pointées  $D$  et  $D'$  de  $[a, b]$  qui sont elles-mêmes  $\delta$ -fines. On obtient alors

$$|S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f)| = |S_D(f) - S_{D'}(f)| \leq \varepsilon.$$

La proposition est démontrée.  $\square$

**(1.3) Lemme de Henstock.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction HK-intégrable sur  $[a, b]$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta$  une jauge  $\varepsilon$ -adaptée à  $f$  sur  $[a, b]$ . Soient enfin  $([a_i, b_i])_{1 \leq i \leq N}$  des sous-intervalles de  $[a, b]$  d'intérieurs deux à deux disjoints, et  $x_i \in [a_i, b_i]$ ,  $1 \leq i \leq N$ , des points choisis dans ces sous-intervalles. Si ceux-ci sont  $\delta$ -fins, c'est-à-dire si  $b_i - a_i \leq \delta(x_i)$ , alors*

$$(a) \quad \left| \sum_{i=1}^N f(x_i)(b_i - a_i) - \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx \right| \leq \varepsilon;$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^N \left| f(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\eta > 0$  arbitrairement petit. On considère les intervalles  $[c_j, d_j]$  formant les composantes connexes de  $[a, b] \setminus \bigcup_i ]a_i, b_i[$  et  $\delta_j \leq \delta$  une jauge sur  $[c_j, d_j]$  choisie de sorte que

$$\left| S_{D_j}(f) - \int_{c_j}^{d_j} f(x) dx \right| \leq \eta$$

pour toute subdivision pointée  $\delta_j$ -fine  $D_j$  de  $[c_j, d_j]$ . En prenant la réunion des  $([a_i, b_i], x_i)$  et des  $D_j$ , on obtient une subdivision pointée  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ , par conséquent

$$\left| \sum_i f(x_i)(b_i - a_i) + \sum_j S_{D_j}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$



En soustrayant toutes les inégalités précédentes et en tenant compte du fait que  $\int_a^b f(x) dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx + \sum_j \int_{c_j}^{d_j} f(x) dx$ , il vient

$$\left| \sum_i f(x_i)(b_i - a_i) - \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx \right| \leq \varepsilon + k\eta$$

où  $k$  est le nombre d'intervalles  $[c_j, d_j]$  mis en jeu. Comme  $\eta > 0$  est arbitraire, l'inégalité (a) s'ensuit.

Pour obtenir (b), on applique séparément l'inégalité (a) aux intervalles  $[a_i, b_i]$  pour lesquels  $f(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ), et on fait la somme.  $\square$

**Corollaire 1.4.** *Pour toute fonction  $f$  HK-intégrable sur  $[a, b]$ , l'intégrale indéfinie  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est continue sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de prouver que  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\int_x^{x+h} f(t) dt$  tend vers 0 avec  $h$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\delta$  une jauge  $\varepsilon$ -adaptée à  $f$  sur  $[a, b]$ . Prenons  $h$  tel que  $|h| \leq \delta(x)$ . En appliquant le lemme de Henstock 1.3 (a) à l'unique intervalle  $[a_1, b_1] = [x, x+h]$  avec  $x_1 = x \in [a_1, b_1]$ , il vient

$$\left| f(x)h - \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \varepsilon,$$

donc

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \varepsilon + |f(x)h| \leq 2\varepsilon$$

pour  $|h| \leq \min(\delta(x), \varepsilon/|f(x)|)$ . La proposition est démontrée.  $\square$

On se propose maintenant de donner la définition de l'intégrale de Henstock-Kurzweil sur un intervalle quelconque  $I$  de  $\mathbb{R}$ , non nécessairement fermé ni borné. La définition est essentiellement identique, excepté le fait que les subdivisions pointées  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$  ne sont plus supposées recouvrir tout l'intervalle  $I$  (du fait que la fonction  $f$  n'est pas nécessairement définie aux bornes et que l'intervalle d'intégration est peut-être infini). Au lieu de cela, on suppose que le support  $\text{Supp}(D) = [a_0, a_N]$  est un sous-intervalle fermé borné  $[\alpha, \beta] \subset I$  «assez grand». La définition générale peut donc se formuler comme suit.

**(1.5) Définition.** *Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est dite intégrable au sens de Henstock-Kurzweil (HK-intégrable) s'il existe un réel  $A$  tel que pour toute erreur  $\varepsilon > 0$  donnée a priori, on puisse trouver un intervalle fermé borné  $[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \subset I$  et une jauge  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\delta(x) > 0$ , telle que pour toute subdivision pointée  $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$  avec  $[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \subset \text{Supp}(D) = [a_0, a_N] \subset I$ , on ait*

$$h_j \leq \delta(x_j) \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(f) - A| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note

$$A = \int_I f(x) dx,$$

et on appelle  $A$  l'intégrale de  $f$  sur  $I$ .

Observons que si  $I$  contient l'une de ses bornes on peut toujours supposer que  $[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]$  contient aussi cette borne, puisque ceci ne fait que réduire l'ensemble des subdivisions  $D$  à considérer ; on fera toujours cette hypothèse. Si  $I$  est fermé borné on est donc conduit à prendre  $[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] = I$ , de sorte que la définition 1.5 est équivalente à celle déjà donnée. Notons tout de suite la caractérisation simple suivante, qui montre que calculer des intégrales HK sur des intervalles non fermés bornés est la même chose que de calculer ce que l'on appelle parfois des « intégrales impropres », à savoir des limites d'intégrales prises par rapport à leurs bornes.<sup>(11)</sup>

**(1.6) Théorème de Hake.** *La fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est HK-intégrable sur un intervalle  $I = [a, b[$  ( $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ) si et seulement si elle est HK-intégrable sur tout intervalle fermé borné  $[a, \beta]$  avec  $\beta < b$  et si  $\lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx$  existe. Dans ce cas*

$$\int_{[a, b[} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx.$$

*Démonstration.* 1) Supposons  $f$  HK-intégrable sur  $[a, b[$  d'intégrale  $A = \int_{[a, b[} f(x) dx$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . La définition 1.5 implique l'existence de  $\beta_\varepsilon < b$  et d'une jauge  $\delta$  sur  $[a, b[$  telle que  $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon$  pour toute subdivision pointée  $\delta$ -fine  $D$  vérifiant  $\text{Supp}(D) \supset [a, \beta_\varepsilon]$ . En particulier  $|S_D(f) - S_{D'}(f)| \leq 2\varepsilon$  si  $D$  et  $D'$  sont deux telles subdivisions. Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux subdivisions pointées  $\delta$ -fines de même support  $[a, \beta]$ , on peut les compléter sur  $[\beta, \beta_\varepsilon]$  par une subdivision  $\delta$ -fine pour obtenir  $D$  et  $D'$  qui seront  $\delta$ -fines sur  $[a, \beta_\varepsilon]$  (si  $\beta_\varepsilon \leq \beta$ , on prend simplement  $D = \Delta$ ,  $D' = \Delta'$ ). Ceci donne

$$|S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f)| \leq |S_D(f) - S_{D'}(f)| \leq 2\varepsilon,$$

et le critère de Cauchy implique alors comme dans la proposition 1.5 que  $f$  est HK-intégrable sur  $[a, \beta]$ . De plus, si on prend  $\beta \geq \beta_\varepsilon$ , les sommes de Riemann  $S_\Delta(f)$   $\delta$ -fines de support  $[a, \beta]$  vérifient  $|S_\Delta(f) - A| \leq \varepsilon$ , et par passage à la limite on a

$$\left| \int_a^\beta f(x) dx - A \right| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent  $\lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx = A = \int_{[a, b[} f(x) dx$ .

2) Inversement, supposons que  $f$  soit HK-intégrable sur tout intervalle  $[a, \beta]$ ,  $\beta < b$ , et que  $A = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx$  existe. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Par hypothèse, on peut choisir une suite strictement croissante  $(\beta_k)_{k \geq 1}$  telle que  $|\int_a^{\beta_k} f(x) dx - A| \leq 2^{-k} \varepsilon$  pour tout  $\beta \in [\beta_k, b[$ . Choisissons maintenant pour tout  $k \geq 0$  une jauge  $\delta_k$  sur  $[\beta_k, \beta_{k+1}]$  (avec

<sup>(11)</sup> Ce mot « impropre » n'est utilisé que parce que le résultat correspondant à (1.6) n'est vrai ni pour l'intégrale de Riemann ordinaire, ni même pour l'intégrale de Lebesgue. Là encore, l'intégrale de Henstock-Kurzweil se révèle être à la fois plus puissante et plus naturelle, les intégrales impropres deviennent des intégrales « normales » ! Bien entendu, si on souhaite alléger l'exposé de la théorie et introduire les « intégrales impropres » sans avoir à étudier au préalable le lemme de Henstock, on peut tout aussi bien prendre le théorème 1.6 comme définition de  $\int_{[a, b[} f(x) dx$ .

$\beta_0 = a$ ), telle que  $|S_{D_k}(f) - \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f(x) dx| \leq 2^{-k}\varepsilon$  pour toute subdivision  $\delta_k$ -fine  $D_k$  de  $[\beta_k, \beta_{k+1}]$ . Comme dans la démonstration de la relation de Chasles, on définit une jauge  $\delta$  sur  $[a, b[$  par

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_0(a) & \text{si } x = a, \\ \min(\delta_k(x), x - \beta_k, \beta_{k+1} - x) & \text{si } x \in ]\beta_k, \beta_{k+1}[, \\ \min(\delta_{k-1}(\beta_k), \delta_k(\beta_k)) & \text{si } x = \beta_k, k \geq 1. \end{cases}$$

Alors toute subdivision  $\delta$ -fine  $D$  d'un intervalle  $[a, \beta]$ ,  $\beta_k \leq \beta < \beta_{k+1}$ , se décompose en des subdivisions  $D_j$  de  $[\beta_j, \beta_{j+1}]$  pour  $0 \leq j < k$ , et de  $[\beta_k, \beta]$  pour  $j = k$ . On a par conséquent  $|S_{D_j}(f) - \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} f(x) dx| \leq 2^{-j}\varepsilon$  pour  $j < k$  et  $|S_{D_k}(f) - \int_{\beta_k}^{\beta} f(x) dx| \leq 2^{-k}\varepsilon$  d'après le lemme de Henstock. Comme  $S_D(f) = \sum_{0 \leq j \leq k} S_{D_j}(f)$ , il vient

$$|S_D(f) - A| \leq \left| S_D(f) - \int_a^{\beta} f(x) dx \right| + \left| \int_a^{\beta} f(x) dx - A \right| \leq \sum_{0 \leq j \leq k} 2^{-j}\varepsilon + 2^{-k}\varepsilon = 2\varepsilon$$

pour toute subdivision  $\delta$ -fine  $D$  telle que  $\beta \geq \beta_1$ . Ceci signifie que  $f$  est HK-intégrable sur  $[a, b[$  et que  $\int_{[a, b[} f(x) dx = A$ . □

Bien entendu, on a un énoncé analogue pour un intervalle d'intégration de la forme  $]a, b]$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , avec une preuve presque identique. De manière générale, nous avons l'énoncé commode suivant.

**(1.7) Théorème.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque.*

- (a) *Au sens de Henstock-Kurzweil, l'intégrabilité de  $f$  sur  $I$  équivaut à l'intégrabilité de  $f$  sur tout intervalle  $I' \subset I$  ayant mêmes extrémités, et alors les intégrales sur  $I$  et  $I'$  sont égales.*
- (b) *Si  $f$  est HK-intégrable sur  $I$ , elle est HK-intégrable sur tout sous-intervalle  $J \subset I$ .*
- (c) *Si  $I = J \cup K$  est la réunion de deux intervalles adjacents,  $f$  est HK-intégrable sur  $I$  si et seulement si elle est HK-intégrable sur  $J$  et sur  $K$ , et alors (relation de Chasles)*

$$\int_I f(x) dx = \int_J f(x) dx + \int_K f(x) dx.$$

*Démonstration.* On commence par observer que (c) est vérifié pour  $J = [a, b]$  ou  $]a, b]$ , couplé à  $K = [b, c]$  ou  $[b, c[$ . Le fait que l'intégrabilité sur  $I$  implique l'intégrabilité sur  $J$  et  $K$  peut s'obtenir directement par le critère de Cauchy, comme on l'a fait dans la proposition 1.2, et la preuve de la relation de Chasles est identique à celle de (I.3.4).

On voit alors grâce à (c) que la seule chose qui reste à démontrer est la suivante : si  $f$  est définie sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$ , les conditions d'intégrabilité sur les deux intervalles  $[a, b]$  et  $[a, b[$  (disons) sont équivalentes, et les intégrales sont égales. Or, il n'est pas restrictif de travailler avec des jauges  $\delta$  choisies en sorte que  $\delta(x) \leq \varepsilon/(1 + |f(x)|)$  pour tout  $x$ . Dans ce cas chaque terme  $f(x_j)h_j$  des sommes de Riemann est inférieur ou égal à  $|f(x_j)|\delta(x_j) \leq \varepsilon$ . La prise en compte de l'intervalle  $[a_{N-1}, b]$  et du terme extrême  $f(x_{N-1})h_{N-1} = f(x_{N-1})(b - a_{N-1})$  dans une somme de

Riemann sur  $[a, b]$  n'a donc aucune importance, et on voit que l'intégrabilité sur  $[a, b[$  implique l'intégrabilité sur  $[a, b]$ .

Inversement, si  $D$  est une subdivision  $\delta$ -fine de  $[a, \beta]$  avec  $\beta \geq b - \delta(b)$ , on la complète par l'intervalle pointé  $([\beta, b], b)$  pour obtenir une subdivision  $\delta$ -fine recouvrant tout  $[a, b]$ , et les deux sommes de Riemann diffèrent d'au plus  $\varepsilon$ . Par conséquent l'intégrabilité sur  $[a, b]$  implique l'intégrabilité sur  $[a, b[$ .  $\square$

## 2. Fonctions absolument intégrables

Étant donné une fonction  $f$  HK-intégrable sur un intervalle  $I$ , il peut fort bien se produire que l'intégrale  $\int_I |f(x)| dx$  soit divergente, en d'autres termes, que la fonction  $|f|$  ne soit pas HK-intégrable. Un exemple classique est celui de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , ou encore  $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ . Ceci justifie la définition suivante.

**(2.1) Définition.** *On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument intégrable sur  $I$  si à la fois  $f$  et  $|f|$  sont HK-intégrables sur  $I$ , ou, de façon équivalente, si  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = \max(-f, 0)$  sont HK-intégrables sur  $I$ .*

L'équivalence des deux conditions résulte en effet des formules immédiates<sup>(12)</sup>

$$f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|), \quad f_- = \frac{1}{2}(|f| - f), \quad f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Si  $f$  est absolument intégrable sur  $I$ , on a

$$-\int_I f_-(x) dx \leq \int_I f(x) dx = \int_I f_+(x) dx - \int_I f_-(x) dx \leq \int_I f_+(x) dx,$$

et comme les membres de droite et de gauche sont majorés par  $\pm \int_I |f(x)| dx$  on en déduit

$$(2.2) \quad \left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

Un critère commode pour l'intégrabilité de  $|f|$  est le suivant.

**(2.3) Critère d'intégrabilité absolue.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction HK-intégrable. Alors on a*

$$\int_I |f(x)| dx = \sup_D \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right|$$

où le *sup* est pris sur toutes les subdivisions pointées  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0 \leq j < N}$  de support  $\text{Supp}(D) = [a_0, a_N] \subset I$ , et  $|f|$  est HK-intégrable sur  $I$  si et seulement si le membre de droite est fini.

<sup>(12)</sup> On remarquera qu'il ne suffit pas de supposer  $|f|$  HK-intégrable dans cette définition, du moins dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel augmentée de l'axiome du choix (ZFC - la théorie la plus couramment utilisée ...). Dans cette théorie, il existe en effet des parties  $E \subset [0, 1]$  qui sont non mesurables, et la fonction  $f = \chi_E - \chi_{[0,1] \setminus E}$  est de valeur absolue  $|f| = 1$  HK-intégrable sur  $[0, 1]$ , tandis que  $f$  n'est pas HK-intégrable.

*Démonstration.* Si  $|f|$  est HK-intégrable, on a d'après (2.2)

$$\left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right| \leq \int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(x)| dx,$$

donc on voit immédiatement que

$$\sup_D \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

Dans l'autre sens, supposons d'abord  $I = [a, b]$  fermé borné, et soit  $S$  le sup des sommes intervenant dans le critère 2.3. Soit  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$  une subdivision pointée de  $[a, b]$  qui réalise le sup  $S$  à  $\varepsilon$  près. Étant donné  $\varepsilon > 0$ , on choisit une jauge  $\delta$  adaptée à  $\varepsilon$ , telle qu'on ait en outre  $\delta(x) \leq \min(x - a_j, a_{j+1} - x)$  sur  $]a_j, a_{j+1}[$ . Toute subdivision  $D' = ([a'_k, a'_{k+1}], x_k)$   $\delta$ -fine se ramène alors à une subdivision obtenue en redécoupant chaque intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  en sous-intervalles. Le lemme de Henstock 1.3 (b) combiné à l'inégalité triangulaire  $||u| - |v|| \leq |u - v|$  implique

$$\left| \sum_{k=0}^{N'-1} \left( |f(x'_k)| h'_k - \left| \int_{a'_k}^{a'_{k+1}} f(x) dx \right| \right) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, la formule de Chasles donne que chaque intégrale  $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx$  est une somme d'intégrales  $\int_{a'_k}^{a'_{k+1}} f(x) dx$ ,  $N_j \leq k < N_{j+1}$ , donc

$$S - \varepsilon \leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right| \leq \sum_{k=0}^{N'-1} \left| \int_{a'_k}^{a'_{k+1}} f(x) dx \right| \leq S.$$

On en déduit  $|\sum_k |f(x'_k)| h'_k - S| \leq 3\varepsilon$ , donc  $|f|$  est bien HK-intégrable d'intégrale  $\int_a^b |f(x)| dx = S$ . Le cas d'un intervalle  $I$  quelconque s'obtient au moyen du théorème de Hake, par passage à la limite sur les bornes de l'intégrale.  $\square$

**(2.4) Corollaire.** *Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont HK-intégrables et si  $|f| \leq g$ , alors  $f$  est absolument intégrable.*

*Démonstration.* On applique le critère 2.3, en observant que

$$\sup_D \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right| \leq \sup_D \sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g(x) dx \leq \int_I g(x) dx < +\infty. \quad \square$$

**(2.5) Corollaire.** *L'ensemble  $\tilde{L}^1(I)$  des fonctions absolument intégrables est un espace vectoriel, et l'intégrale de la valeur absolue*

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| dx$$

définit une semi-norme sur  $\widetilde{L}^1(I)$ , c'est-à-dire que

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tous  $f, g \in \widetilde{L}^1(I)$ .

*Démonstration.* L'intégrabilité absolue de  $f + g$  découle de l'inégalité triangulaire  $|f + g| \leq |f| + |g|$  dans laquelle on sait que le membre de droite est HK-intégrable. Ceci implique également l'inégalité triangulaire pour la semi-norme  $\|\cdot\|_1$ .  $\square$

**(2.6) Remarque.**  $\|\cdot\|_1$  n'est pas une norme sur  $\widetilde{L}^1(I)$  car il existe des fonctions  $f$  non nulles telles que  $\|f\|_1 = 0$ . Il suffit par exemple qu'il existe un ensemble dénombrable  $E$  tel que  $f(x)$  soit nul sur  $[a, b] \setminus E$ . On verra au paragraphe 5 comment on peut néanmoins construire un espace normé complet à partir de  $\widetilde{L}^1(I)$ .

**(2.7) Remarque.** Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont HK-intégrables, il n'est pas vrai en général que  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  sont intégrables (ce n'est même pas vrai si  $g = 0$ !). Cependant, cela est vrai si  $f, g \geq 0$ ; pour le voir il suffit en effet de poser

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|, \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|.$$

Plus généralement, c'est vrai s'il existe une fonction  $h$  HK-intégrable telle que  $h \leq f$  et  $h \leq g$ , car on peut alors écrire

$$\min(f, g) = h + \min(f - h, g - h), \quad \max(f, g) = h + \max(f - h, g - h),$$

et de même s'il existe une fonction  $h$  HK-intégrable telle que  $f \leq h$  et  $g \leq h$ , car on peut alors écrire

$$\min(f, g) = h - \max(h - f, h - g), \quad \max(f, g) = h - \min(h - f, h - g).$$

### 3. Le théorème de convergence monotone

L'un des points centraux de la théorie de l'intégration est de comprendre ce qui se passe pour la limite d'une suite d'intégrales de fonctions. Le cas le plus fondamental est celui d'une suite monotone de fonctions.

**(3.1) Théorème.** Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  une suite croissante de fonctions HK-intégrables sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , convergeant vers  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  en tout point de  $I$ . Alors  $f$  est HK-intégrable sur  $I$  si et seulement si la suite croissante  $A_n = \int_I f_n(x) dx$  est majorée, et alors

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

*Démonstration.* Commençons par traiter le cas où  $I = [a, b]$  est fermé borné. Si  $f$  est HK-intégrable, alors

$$A_n = \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx < +\infty,$$

par conséquent la suite croissante  $(A_n)$  est bornée. Inversement, si elle est bornée, elle admet une limite  $A$ . On se propose alors de montrer que  $f$  est HK-intégrable d'intégrale  $A$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . On peut choisir un entier  $n_0$  tel que

$$A - \varepsilon \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq A \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Pour chaque indice  $n$ , choisissons une jauge  $\delta_n$  adaptée à  $f_n$  pour une tolérance d'erreur  $2^{-n}\varepsilon$ . Enfin, pour chaque  $x \in [a, b]$ , choisissons un indice  $N(x) \geq n_0$  tel que

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) \quad \text{pour } n \geq N(x).$$

On définit une jauge  $\delta$  par  $\delta(x) = \delta_{N(x)}(x)$ . Soit  $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0 \leq j < s}$  une subdivision pointée  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} |S_D(f) - A| &\leq \left| \sum_{0 \leq j < s} (f(x_j) - f_{N(x_j)}(x_j))h_j \right| \\ &+ \left| \sum_{0 \leq j < s} \left( f_{N(x_j)}(x_j)h_j - \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_{N(x_j)}(x) dx \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{0 \leq j < s} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_{N(x_j)}(x) dx - A \right|. \end{aligned}$$

Par définition de  $N(x)$ , la première somme du membre de droite est majorée par  $\varepsilon \sum h_j = \varepsilon(b - a)$ . Comme  $N(x_j) \geq n_0$ , on voit facilement que la troisième somme est majorée par

$$\left| \int_a^b f_{n_0}(x) dx - A \right| \leq \varepsilon.$$

En effet, grâce à la monotonie de la suite  $(f_n)$ , on a

$$\int_a^b f_p(x) dx \leq \sum_{0 \leq j < s} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_{N(x_j)}(x) dx \leq \int_a^b f_q(x) dx$$

avec  $p = \min(N(x_j))$ ,  $q = \max(N(x_j))$   $q \geq p \geq n_0$ . Reste la deuxième somme du membre de droite. Pour cela, on regroupe les indices  $j$  tels que  $N(x_j)$  soit égal à un indice  $n$  donné. Le lemme de Henstock 1.3 (a) implique

$$\left| \sum_{N(x_j)=n} \left( f_n(x_j)h_j - \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_n(x) dx \right) \right| \leq 2^{-n}\varepsilon.$$

En sommant sur toutes les valeurs de  $n$ , on voit que la deuxième somme est majorée par  $2\varepsilon$ . Au total nous avons  $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon(b - a + 3)$ , par conséquent  $f$  est HK-intégrable d'intégrale  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ . Il nous reste à traiter le cas d'un intervalle  $I$  quelconque. Quitte à remplacer  $f_n$  par  $f_n - f_0$ , on peut supposer  $f_n \geq 0$  pour tout  $n$  (et donc  $f \geq 0$ ). Dans ce cas, pour tout intervalle fermé borné  $[a, b] \subset I$ , on a d'après ce qui précède et grâce à la positivité de  $f_n$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Par conséquent, en faisant tendre  $a$  vers la borne inf de  $I$  et  $b$  vers la borne sup de  $I$ , on voit que  $f$  est HK-intégrable et que

$$\int_I f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$$

(pourvu que la limite intervenant dans le membre de droite soit finie). Si  $f$  est HK-intégrable sur  $I$  l'autre inégalité est évidente puisque  $f_n \leq f$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**(3.2) Remarque.** On a bien entendu un résultat entièrement analogue pour les suites décroissantes de fonctions. On le déduit aussitôt en remplaçant  $(f_n)$  par  $(-f_n)$ .

## 4. Mesure de Lebesgue et ensembles négligeables

Commençons par la définition et les propriétés fondamentales de la mesure de Lebesgue.

**(4.1) Théorème et définition.** Si  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $E$  est intégrable si sa fonction caractéristique  $\chi_E$  est HK-intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et si c'est le cas, on définit la mesure de Lebesgue de  $E$  par

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) dx.$$

La mesure de Lebesgue jouit des propriétés suivantes :

- (a) Si  $E$  et  $F$  sont des parties intégrables, alors  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  sont intégrables. Si  $E \subset F$ , alors  $m(E) \leq m(F)$ .
- (b) Si  $(E_n)$  est une suite croissante de parties intégrables,  $\bigcup E_n$  est intégrable si et seulement si la suite  $m(E_n)$  est bornée, et alors  $m(\bigcup E_n) = \lim m(E_n)$ .
- (c) Si  $(E_n)$  est une suite décroissante de parties intégrables, alors  $\bigcap E_n$  est intégrable et  $m(\bigcap E_n) = \lim m(E_n)$ .
- (d) Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de parties intégrables deux à deux disjointes, la réunion  $\bigcup E_n$  est intégrable si et seulement si la série  $\sum m(E_n)$  converge, et alors

$$m(\bigcup E_n) = \sum m(E_n),$$

*Démonstration.* (a) Il suffit d'appliquer la remarque 4.7, en observant que

$$\chi_{E \cup F} = \max(\chi_E, \chi_F), \quad \chi_{E \cap F} = \min(\chi_E, \chi_F), \quad \chi_{E \setminus F} = \chi_E - \chi_{E \cap F}.$$

Par ailleurs  $E \subset F$  implique  $\chi_E \leq \chi_F$ .

(b) et (c) résultent du théorème de convergence monotone appliqué à la suite  $f_n = \chi_{E_n}$ , qui est croissante sous l'hypothèse (b) et décroissante sous l'hypothèse (c).



(d) On pose  $F_n = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n$ . Alors  $F_n$  est intégrable d'après (a), et comme  $\chi_{F_n} = \sum_{0 \leq k \leq n} \chi_{E_k}$  on a bien  $m(F_n) = \sum_{0 \leq k \leq n} m(E_k)$ . D'après (b) on obtient

$$m\left(\bigcup E_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(F_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} m(E_k),$$

la suite  $m(F_n)$  étant bornée si et seulement si la série converge. □

**(4.2) Définition.** *On dit*

- (a) *qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est négligeable si  $|f|$  est intégrable et  $\int_I |f(x)| dx = 0$ .*
- (b) *qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  est négligeable si sa fonction caractéristique  $\chi_E$  est négligeable, autrement dit si  $m(E) = 0$ .*

**(4.3) Propriétés des fonctions et ensembles négligeables.**

- (a) *Si  $f \geq 0$  est négligeable et si  $|g| \leq f$ , alors  $g$  est négligeable.*
- (b) *Si  $E$  est négligeable, toute partie  $F \subset E$  est négligeable.*
- (c) *Toute réunion finie ou dénombrable  $\bigcup_{n \geq 0} E_n$  de parties négligeables est négligeable.*
- (d) *Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est négligeable si et seulement si  $E_f = \{x \in I; f(x) \neq 0\}$  est négligeable.*

*Démonstration.* (a) résulte aussitôt par passage à la limite de la majoration des sommes de Riemann correspondantes  $\sum |g(x_j)| h_j \leq \sum f(x_j) h_j$ .

(b) Si  $F \subset E$  on a  $0 \leq \chi_F \leq \chi_E$ , donc  $E$  négligeable  $\Rightarrow F$  négligeable d'après (a).

(c) Posons  $F_n = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n$  et  $F = \bigcup E_n$ . Alors  $0 \leq \chi_{F_n} \leq \chi_{E_0} + \chi_{E_1} + \dots + \chi_{E_n}$ , donc  $\chi_{F_n}$  est négligeable. Le théorème de convergence monotone montre que la limite croissante  $\chi_F = \lim \chi_{F_n}$  est elle aussi négligeable.

(d) Supposons  $f$  négligeable, et soit  $g_n(x) = \min(\chi_E(x), n|f(x)|)$ . Alors  $(g_n)$  est une suite croissante de fonctions HK-intégrables telles que  $0 \leq g_n \leq n|f|$  et  $\lim g_n = \chi_E$ . Elles vérifient donc  $\int_I g_n(x) dx = 0$ , et on obtient  $\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) dx = \int_I \chi_E(x) dx = 0$  par le théorème de convergence monotone. Inversement si  $\chi_E$  est négligeable, on considère  $h_n(x) = \min(|f(x)|, n\chi_E(x))$  qui est une suite croissante de fonctions négligeables convergeant vers  $|f|$  sur  $I$ , par suite  $f$  est négligeable. □

Il résulte de ce qui précède que les ensembles et fonctions négligeables ne jouent aucun rôle dans la théorie de l'intégration. Par exemple, si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  diffèrent sur un ensemble négligeable, alors  $f - g$  est négligeable et par suite l'intégrabilité de  $f$  équivaut à celle de  $g$  et dans ce cas  $\int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx$ . De manière générale, on dit qu'une propriété  $P(x)$  dépendant d'un nombre réel  $x$  est vraie presque partout si l'ensemble  $E$  des  $x$  tels que  $P(x)$  ne soit pas vraie est négligeable. Ces résultats permettent de poser les définitions suivantes.

**(4.4) Espace  $L^1(I)$ .** L'ensemble  $N(I)$  des fonctions négligeables est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\tilde{L}^1(I)$  des fonctions absolument intégrables. On note

$$L^1(I) = \tilde{L}^1(I)/N(I)$$

l'espace quotient. Les classes d'équivalence sont constituées de fonctions égales presque partout – ces classes seront encore notées comme s'il s'agissait de fonctions, en considérant qu'on s'autorise à changer éventuellement leurs valeurs sur un ensemble négligeable. Par définition de la semi-norme  $\| \cdot \|_1$ , nous avons  $\|f\|_1 = 0$  si et seulement si  $f \in N(I)$ , c'est-à-dire  $f = 0$  dans  $L^1(I) = \tilde{L}^1(I)/N(I)$ . Par conséquent  $f \mapsto \|f\|_1$  définit une vraie norme sur  $L^1(I)$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer une version nettement renforcée du théorème de convergence monotone.

**(4.5) Version forte du théorème de convergence monotone.** *Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions HK-intégrables. On suppose que  $(f_n(x))$  est une suite croissante pour presque tout  $x \in I$ .*

(a) *Si  $(f_n(x))$  converge presque partout vers une limite  $f(x)$  où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction HK-intégrable, alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx < +\infty.$$

(b) *Inversement, si la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$  est finie, alors l'ensemble  $E$  des réels  $x \in I$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  est négligeable. De plus, la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) & \text{si } x \notin E, \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

*est HK-intégrable et satisfait (a).*

*Démonstration.* (a) Soit  $E$  l'ensemble des réels  $x$  tels que ou bien  $(f_n(x))$  ne soit pas une suite croissante, ou bien c'est une suite croissante mais  $\lim f_n(x) = +\infty$ , ou bien encore  $f(x) \neq \lim f_n(x) < +\infty$ . Par hypothèse,  $E$  est un ensemble négligeable (comme réunion finie d'ensembles négligeables). Quitte à redéfinir  $f_n(x)$  et  $f(x)$  comme étant égales à 0 en tout point de  $E$ , on a  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) < +\infty$  partout sur  $I$  et on peut alors appliquer le théorème de convergence monotone « ordinaire » 3.1.

(b) Quitte à redéfinir les  $f_n$  par 0 sur un ensemble négligeable, on peut supposer que la suite  $(f_n(x))$  est croissante pour tout  $x \in I$ . En remplaçant  $f_n$  par  $f_n - f_0$ , on peut également supposer  $f_n \geq 0$  pour tout  $n$ . Par hypothèse  $0 \leq \int_I f_n(x) dx \leq M < +\infty$ . Pour  $n$  et  $p$  entiers,  $p > 0$ , soit  $E_{n,p}$  l'ensemble des  $x \in I$  tels que  $f_n(x) > p$ . Nous avons  $\chi_{E_{n,p}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \min(1, N(f_n - p)_+)$  comme limite croissante, et de plus  $0 \leq \chi_{E_{n,p}} \leq \frac{1}{p} f_n$ , donc  $\chi_{E_{n,p}}$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \chi_{E_{n,p}}(x) dx \leq \frac{1}{p} \int_I f_n(x) dx \leq M/p.$$

Or  $(E_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'ensembles dont la réunion est l'ensemble  $E_p$  des  $x \in I$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) > p$ . Ceci prouve que  $E_p$  est intégrable et que  $m(E_p) \leq M/p$ . Maintenant, l'ensemble  $E$  des réels  $x \in I$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$  est l'intersection décroissante  $\bigcap_{p \geq 0} E_p$ , par suite  $E$  est négligeable. Quitte à redéfinir

$f_n(x) = 0$  sur  $E$ , nous pouvons appliquer le théorème de convergence monotone ordinaire pour conclure que  $f = \lim f_n$  est HK-intégrable.  $\square$

Désormais, on s'autorisera à écrire des intégrales dans lesquelles figurent des fonctions qui prennent les valeurs  $+\infty$  ou  $-\infty$ , pourvu que cela soit sur un ensemble négligeable  $E$  – en fait, si on le souhaite, on pourra toujours redéfinir ces fonctions comme valant 0 ou toute autre valeur réelle en chaque point de  $E$ . Dans ce contexte, le théorème de convergence monotone peut se reformuler comme la possibilité de commuter intégration et passage à la limite monotone :

$$(4.6) \quad \boxed{(f_n) \text{ monotone} \Rightarrow \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx,}$$

dès lors que l'un des deux membres est fini.

### 5. Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée

On déduit ici du théorème de convergence monotone plusieurs autres résultats fondamentaux de convergence. Le premier, dit lemme de Fatou, est très utile dans bien des situations.

**(5.1) Lemme de Fatou.** *Soient  $f_n, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions HK-intégrables telles que  $f_n \geq g$  presque partout. Si  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx < +\infty$ , alors  $f = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est finie presque partout et HK-intégrable, et on a*

$$\int_I \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $f_n$  par  $f_n - g$ , on peut supposer  $f_n \geq 0$  (et  $g = 0$ ). De manière générale la  $\liminf$  d'une suite est obtenue comme une limite croissante

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \inf_{k \in [n, +\infty[} u_k.$$

Or pour tout  $n \geq 0$  nous avons

$$\int_I \inf_{k \in [n, +\infty[} f_k(x) dx \leq \inf_{k \in [n, +\infty[} \int_I f_k(x) dx$$

puisque l'intégrande  $\varphi_n(x) = \inf_{k \in [n, +\infty[} f_k(x)$  du membre de gauche est majoré par  $f_k$  pour chaque  $k \in [n, +\infty[$  (de plus  $\varphi_n$  est HK-intégrable comme limite décroissante de la suite  $p \mapsto \varphi_{n,p}(x) = \min_{k \in [n,p]} f_k(x)$  quand  $p \rightarrow +\infty$ ). Le lemme de Fatou résulte maintenant du théorème de convergence monotone (4.6) appliqué à la suite croissante  $(\varphi_n)$ .  $\square$

On a bien entendu l'énoncé symétrique, à savoir que si  $f_n \leq h$  avec  $h$  HK-intégrable pour tout  $n$ , alors

$$(5.2) \quad \int_I \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$$

pourvu que le second membre ne soit pas  $-\infty$ . En combinant (5.1) et (5.2), on obtient le

**(5.3) Théorème de la convergence encadrée.** *Soient  $f_n, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions HK-intégrables telles que  $g \leq f_n \leq h$  presque partout. On suppose que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  existe presque partout. Alors  $f$  est HK-intégrable sur  $I$  et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

*Démonstration.* Le lemme de Fatou donne en effet

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx \leq \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$$

puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$  et que les membres de gauche et de droite sont encadrés par  $\int_I g(x) dx$  et  $\int_I h(x) dx$ .  $\square$

**(5.4) Théorème de convergence dominée.** C'est le cas particulier du théorème de convergence encadrée où la suite  $(f_n)$  vérifie la condition plus forte  $|f_n| \leq g$  pour une certaine fonction  $g \geq 0$  HK-intégrable. Dans ce cas toutes les fonctions  $f_n$  sont absolument intégrables et la limite  $f = \lim f_n$  vérifie  $\|f\|_1 = \lim \|f_n\|_1$ .<sup>(13)</sup>

**(5.5) Séries convergentes dans  $L^1$ .** *Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions absolument intégrables telles que  $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ . Alors la série  $\sum f_n$  converge dans  $L^1(I)$ .*

*Démonstration.* Posons  $S_n = |f_0| + |f_1| + \dots + |f_n|$ . C'est une suite croissante de fonctions absolument intégrables telles que  $\int_I S_n(x) dx \leq \sum \|f_n\|_1 < +\infty$ . Le théorème de convergence monotone montre que la somme  $S(x) = \sum |f_n(x)|$  converge presque partout. En particulier  $\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$  existe presque partout comme somme d'une série absolument convergente, et le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles  $\varphi_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$  implique que  $\varphi$  est absolument intégrable, du fait que  $0 \leq |\varphi_n| \leq S$ . Nous avons de plus  $|\varphi - \varphi_n| \leq \sum_{k \in [n+1, +\infty[} |f_k|$  donc  $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \leq \sum_{k \geq n+1} \|f_k\|_1$ , et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_1 = 0$ .  $\square$

Comme conséquence immédiate, nous avons le

**(5.6) Théorème.**  $L^1(I)$  est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace normé complet).

<sup>(13)</sup> En fait les deux théorèmes sont équivalents, puisque le théorème de la convergence encadrée se ramène au cas de fonctions  $\geq 0$  en observant que l'on a  $0 \leq f_n - g \leq h - g$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence purement formelle de (5.5). Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $L^1(I)$ . Il existe une sous-suite  $(u_{n_k})$  telle que  $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k}$ . Ceci implique que la série  $\sum(u_{n_{k+1}} - u_{n_k})$  converge vers une limite  $S$  dans  $L^1(I)$ , et donc que la sous-suite  $(u_{n_k})$  converge vers  $u = S + u_{n_0}$ . Il en résulte que la suite  $(u_n)$  converge elle aussi vers  $u$ .  $\square$

On peut tirer du théorème de convergence encadrée des propriétés très agréables de continuité et de dérivabilité sous le signe somme des intégrales dépendant de paramètres qui généralisent les résultats du § 1.<sup>(14)</sup>

**(5.7) Théorème.** *Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $T$  une partie de  $\mathbb{R}^d$  et  $t_0$  un point de l'adhérence de  $T$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f : I \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction telle que*

- (a) *Pour tout  $t \in T$ , l'application  $I \ni x \mapsto f(x, t)$  est HK-intégrable ;*
- (b) *Il existe des fonctions  $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  HK-intégrables et un voisinage  $V$  de  $t_0$  tel que  $g(x) \leq f(x, t) \leq h(x)$  pour tout  $t \in T \cap V$  et presque tout  $x \in I$  (l'ensemble négligeable  $N(t) \subset I$  correspondant peut dépendre de  $t$ ).*
- (c) *Pour presque tout  $x \in I$ , l'application  $T \ni t \mapsto f(x, t)$  possède une limite  $\varphi(x)$  quand  $t \rightarrow t_0$ .*

*Alors  $\varphi$  est HK-intégrable sur  $I$  et*

$$\lim_{T \ni t \rightarrow t_0} \int_I f(x, t) dx = \int_I \varphi(x) dx.$$

**(5.8) Continuité sous le signe somme.** *Sous les hypothèses 5.7 (a, b), si  $t_0 \in T$  et si  $T \ni t \mapsto f(x, t)$  est continue en  $t_0$  pour presque tout  $x \in I$ , on a*

$$\lim_{T \ni t \rightarrow t_0} \int_I f(x, t) dx = \int_I f(x, t_0) dx,$$

*c'est-à-dire que l'application  $F(t) = \int_I f(x, t) dx$  est continue en  $t_0$ .*

*Démonstration de (5.7).* Il suffit de montrer qu'il y a convergence pour toute suite  $t_n \in T$  tendant vers  $t_0$ . Or par hypothèse, nous avons  $\varphi_n(x) = f(x, t_n) \rightarrow \varphi(x)$  sauf sur un ensemble négligeable  $E \subset I$ , tandis que  $g(x) \leq \varphi_n(x) \leq h(x)$  en dehors de  $N(t_n)$ . Il suffit d'appliquer le théorème de convergence encadrée, les hypothèses étant satisfaites en dehors de l'ensemble négligeable  $E' = E \cup \bigcup N(t_n)$ .  $\square$

**(5.9) Dérivation sous le signe somme.** *Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $T \subset \mathbb{R}$  des intervalles,  $t_0 \in T$  un point fixé et  $f : I \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction tels que*

- (a) *pour tout  $t \in T$ , l'application  $I \ni x \mapsto f(x, t)$  est HK-intégrable ;*
- (b) *pour presque tout  $x \in I$ , l'application  $t \mapsto f(x, t)$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  sur  $T$ , et celle-ci est continue en  $t_0 \in T$  ;*

<sup>(14)</sup> Comme on va le voir, on peut le faire sous des conditions même plus générales que dans la théorie de Lebesgue, avec des intégrales non nécessairement absolument convergentes – on profite en cela de ce que la convergence encadrée est plus générale que la convergence dominée. Les preuves sont cependant identiques.

- (c) *il existe un voisinage  $V$  de  $t_0$  et des fonctions  $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  HK-intégrables telles que  $g(x) \leq \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \leq h(x)$  pour tout  $t \in T \cap V$  et presque tout  $x \in I$  (l'ensemble négligeable  $N(t) \subset I$  correspondant peut dépendre a priori de  $t$ ).*

Alors l'application  $F(t) = \int_I f(x, t) dx$  est différentiable au point  $t_0$  et on a

$$F'(t_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

De plus si  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  est continue sur  $T$  pour presque tout  $x \in I$ , alors  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $T$  et la formule ci-dessus a lieu pour tout  $t_0 \in T$ .

*Démonstration.* En appliquant le théorème des accroissements finis à  $t \mapsto f(x, t)$ , on voit que

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_I \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) dx$$

pour un certain point  $c = c_{t,x} \in ]t_0, t[$ . Soit  $V = ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  tel que (c) ait lieu, et soit  $(t_n)$  une suite de points dense dans  $V$ . Par continuité, on voit que l'hypothèse (c) est vérifiée pour tout  $x \in I \setminus N'$  et  $t \in T \cap V$ , avec  $N' = \bigcup N(t_n)$ . Soit  $E$  un ensemble négligeable en dehors duquel (b) a lieu. Lorsque  $x \in I \setminus (E \cup N')$  et  $t \rightarrow t_0$  nous avons

$$g(x) \leq \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) \leq h(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0).$$

Le résultat découle alors de nouveau du théorème de convergence monotone.  $\square$

Pour un paramètre  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ , nous avons le résultat analogue suivant.

**(5.10) Différentiabilité sous le signe somme.** *Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $T \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Soit  $f : I \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction telle que*

- (a) *pour tout  $t \in T$ , l'application  $I \ni x \mapsto f(x, t)$  est HK-intégrable ;*  
 (b) *pour presque tout  $x \in I$ , l'application  $t \mapsto f(x, t)$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t)$  continues sur  $T$  ;*  
 (c) *pour tout point  $t_0 \in T$ , il existe un voisinage  $V$  de  $t_0$  et des fonctions  $g_j, h_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  HK-intégrables telles que  $g_j(x) \leq \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) \leq h_j(x)$  pour tout  $t \in T \cap V$  et presque tout  $x \in I$  (l'ensemble négligeable  $N_j(t) \subset I$  correspondant peut dépendre a priori de  $t$ ).*

Alors l'application  $F(t) = \int_I f(x, t) dx$  est différentiable sur  $T$  et on a

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) dx.$$

## 6. Lemme de recouvrement de Vitali et différentiabilité presque partout des intégrales indéfinies

Nous commençons par un lemme de recouvrement très utile, puis nous en donnons quelques applications fondamentales.

**(6.1) Lemme de recouvrement de Vitali.** *Soit  $\mathcal{V} = \{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une famille de sous-intervalles fermés  $J_\alpha = [c_\alpha, d_\alpha]$  de longueur  $m(J_\alpha) = d_\alpha - c_\alpha > 0$  d'un intervalle fermé borné  $[a, b]$ , et  $E$  une partie de  $[a, b]$ . On dit que  $\mathcal{V}$  est un recouvrement de Vitali de  $E$  si pour tout  $x \in E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un intervalle  $J \in \mathcal{V}$  tel que  $x \in J$  et  $m(J) < \varepsilon$ . Alors :*

- (a) *il existe une famille finie ou dénombrable  $J_k$  d'intervalles deux à deux disjoints de  $\mathcal{V}$  et une partie négligeable  $N$  de  $[a, b]$  telles que  $E \subset \bigcup_{k \geq 0} J_k \cup N$  ;*
- (b) *on peut de plus choisir  $N$  contenu dans une intersection  $\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} J'_k$  avec des intervalles fermés  $J'_k \subset [a, b]$  tels que  $\sum_{k \geq 0} m(J'_k) < +\infty$ .*

*Démonstration.* On définit par récurrence  $J_0, J_1, \dots, J_k$  comme suit. On pose

$$F_0 = \emptyset, \quad F_k = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_{k-1} \quad \text{si } k \geq 1,$$

et on considère  $\mathcal{V}_{E,k} \subset \mathcal{V}$  la sous-famille des intervalles  $J \in \mathcal{V}$  tels que  $J$  contienne un point  $x \in E$  et  $J \subset [a, b] \setminus F_k$ . S'il existe un entier  $k$  tel que  $E \setminus F_k = \emptyset$  pour un certain  $k$ , alors la famille finie  $(J_0, \dots, J_{k-1})$  répond à la question et le lemme est démontré avec  $N = \emptyset$ . Sinon  $E \setminus F_k \neq \emptyset$  pour tout  $k \geq 0$  et alors la famille  $\mathcal{V}_{E,k}$  est non vide : en effet,  $x \in E \setminus F_k$  étant fixé, il existe des intervalle  $J \in \mathcal{V}$  contenant  $x$  vérifiant  $m(J) < \varepsilon = d(x, F_k)$ , de sorte qu'on a nécessairement  $J \subset [a, b] \setminus F_k$ . Soit  $\mu_k$  le sup de la longueur de tous les intervalles  $J \in \mathcal{V}_{E,k}$  ; on choisit  $J_k \in \mathcal{V}_{E,k}$  en sorte que  $m(J_k) \geq \frac{1}{2}\mu_k$ . Les intervalles  $J_k$  sont bien disjoints par construction, et on a par conséquent  $\sum m(J_k) \leq b - a < +\infty$ , donc  $\sum \mu_k \leq 2 \sum m(J_k) < +\infty$ .

Nous allons montrer que  $N = E \setminus \bigcup_{k \geq 0} J_k$  est négligeable. Soit  $x \in N$ . Pour tout entier  $n$ , on a  $x \in [a, b] \setminus F_n$ , et il existe un intervalle  $J \in \mathcal{V}$  de longueur  $m(J) < d(x, F_n)$  contenant  $x$ . Par suite  $J \subset [a, b] \setminus F_n$ . Or, si  $J \subset [a, b] \setminus F_k$ , alors  $J \in \mathcal{V}_{E,k}$  et  $m(J) \leq \mu_k$  par définition de  $\mu_k$ . Comme  $\lim \mu_k = 0$  ceci ne peut se produire que pour un nombre fini d'indices  $k$ . Choisissons le plus grand indice  $k$  possible, de sorte que  $k \geq n$ ,  $J \subset [a, b] \setminus F_k$  et  $J \cap F_{k+1} \neq \emptyset$ . Ceci implique que  $J \cap J_k \neq \emptyset$ , et comme  $m(J) \leq \mu_k \leq 2m(J_k)$ , nous voyons que  $J$  est contenu dans l'intervalle  $J'_k$  de même centre que  $J_k$  et de longueur  $5m(J_k)$ . Nous avons par conséquent  $N \subset \bigcup_{k \geq n} J'_k$  et comme ceci est vrai pour tout  $n$  on voit que  $N \subset \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} J'_k$ . Cependant

$$\sum_{k \geq 0} m(J'_k) \leq 5 \sum_{k \geq 0} m(J_k) \leq 5(b - a) < +\infty$$

et donc  $m(\bigcup_{k \geq n} J'_k) \leq \sum_{k \geq n} m(J'_k) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par conséquent  $N$  est négligeable et (a) est démontré. Pour obtenir (b), il suffit de remplacer éventuellement  $J'_k$  par  $J'_k \cap [a, b]$  pour avoir à coup sûr  $J'_k \subset [a, b]$ . □

**(6.2) Théorème.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}$  une partie intégrable. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un ouvert  $U = \bigcup_{k \geq 0} ]c_k, d_k[$  contenant  $E$  tel que  $m(U) = \sum_{k \geq 0} (d_k - c_k) \leq m(E) + \varepsilon$ .*

*Démonstration.* (1) Commençons par le cas où  $E$  est borné,  $E \subset [a, b]$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\delta$  une jauge  $\varepsilon$ -adaptée à  $f = \chi_E$  sur  $[a, b]$ . On considère la famille d'intervalles fermés

$$\mathcal{V}_\delta = \{[x - h, x + h] \cap [a, b]; x \in E, h \leq \frac{1}{2}\delta(x)\}.$$

C'est un recouvrement de Vitali de  $E$ . Il existe par conséquent des intervalles fermés disjoints  $[c_k, d_k] \in \mathcal{V}_\delta$  et un ensemble négligeable  $N$  tels que  $E \subset \bigcup_{k \geq 0} [c_k, d_k] \cup N$ , avec de plus  $N \subset \bigcup_{k \geq 0} [c'_k, d'_k]$ ,  $\sum_{k \geq 0} (d'_k - c'_k) \leq \varepsilon$ .

Grâce au lemme 1.3, la famille finie d'intervalles pointés disjoints  $([c_k, d_k], c_k)_{0 \leq k \leq n}$  peut être complétée en une subdivision  $\delta$ -fine  $D$  de  $[a, b]$ . Comme  $c_k \in E$ , on en déduit

$$\sum_{k=0}^n (d_k - c_k) = \sum_{k=0}^n \chi_E(c_k)(d_k - c_k) \leq S_D(\chi_E) \leq \int_a^b \chi_E(x) dx + \varepsilon = m(E) + \varepsilon.$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , il vient à la limite  $\sum_{k=0}^n (d_k - c_k) \leq m(E) + \varepsilon$ , donc

$$E \subset \bigcup_{k \geq 0} ]c_k - \varepsilon 2^{-k}, d_k + \varepsilon 2^{-k}[ \cup \bigcup_{k \geq 0} ]c'_k - \varepsilon 2^{-k}, d'_k + \varepsilon 2^{-k}[.$$

C'est une réunion d'intervalles ouverts dont la longueur totale est majorée par

$$\bigcup_{k \geq 0} (d_k - c_k) + \bigcup_{k \geq 0} (d'_k - c'_k) + 4 \sum_{k \geq 0} \varepsilon 2^{-k} \leq m(E) + \varepsilon + \varepsilon + 8\varepsilon = m(E) + 10\varepsilon.$$

Quitte à remplacer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/10$ , le résultat est démontré dans le cas où  $E$  est borné.

(2) Dans le cas général  $E \subset \mathbb{R}$ , on écrit  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E \cap [n, n + 1[$ , et on trouve pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  un ouvert  $U_n$  contenant  $E \cap [n, n + 1[$  tel que

$$m(U_n) \leq m(E \cap [n, n + 1]) + \varepsilon 2^{-|n|-2}.$$

Alors  $U = \bigcup U_n$  contient  $E$  et on a  $m(U) \leq m(E) + \varepsilon$ . □

**(6.3) Corollaire.** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a)  $E$  est négligeable.
- (b) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite finie ou dénombrable d'intervalles ouverts  $(]c_k, d_k])_{k \geq 0}$  tels que  $E \subset \bigcup_{k \geq 0} ]c_k, d_k[$  et  $\sum_{k \geq 0} (d_k - c_k) \leq \varepsilon$ .
- (c) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite finie ou dénombrable d'intervalles fermés  $([c_k, d_k])_{k \geq 0}$  tels que  $E \subset \bigcup_{k \geq 0} [c_k, d_k]$  et  $\sum_{k \geq 0} (d_k - c_k) \leq \varepsilon$ .

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) grâce à 6.2, tandis que (b)  $\Rightarrow$  (c) est évident, et (c)  $\Rightarrow$  (a) en prenant une intersection dénombrable avec  $\varepsilon = 1/n \rightarrow 0$ . □

**(6.4) Théorème.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction HK-intégrable et  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  son intégrale indéfinie. Alors  $F$  est presque partout dérivable de dérivée  $F'(x) = f(x)$ .

*Démonstration.* Comme nous allons le voir, il s'agit d'une conséquence directe du lemme de Henstock, combiné avec le lemme de recouvrement de Vitali. Il suffit de



démontrer que  $F$  admet presque partout une dérivée à droite  $F'(x+0) = f(x)$ , puisque le même raisonnement s'appliquera aussi à la dérivée à gauche.

Soit  $E$  l'ensemble des points  $x \in [a, b[$  tels que ou bien  $F$  n'admet pas de dérivée à droite, ou bien  $F$  admet une dérivée à droite mais  $F'(x+0) \neq f(x)$ . Il s'agit de montrer que  $E$  est négligeable. Écrivons  $E = \bigcup_{p>0} E_p$ , où  $E_p$  est l'ensemble des points  $x \in [a, b[$  tels que pour tout  $\eta > 0$  il existe  $x' \in ]x, x + \eta] \cap [a, b[$  tel que

$$\left| f(x) - \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \right| \geq \frac{1}{p}.$$

Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $\delta$  une jauge  $\varepsilon$ -adaptée à  $f$ . On observe que la famille  $\mathcal{V}_\delta$  des intervalles  $[x, x']$  vérifiant la minoration précédente et tels que  $x' - x \leq \delta(x)$  forme un recouvrement de Vitali de  $E_p$ . Il existe par conséquent une famille finie ou dénombrable  $([x_k, x'_k])$  d'intervalles disjoints de  $\mathcal{V}_\delta$  (dépendant de  $\varepsilon$ ) et un ensemble négligeable  $N_{p,\varepsilon}$  tels que  $E_p \subset R_{p,\varepsilon} = \bigcup [x_k, x'_k] \cup N_{p,\varepsilon}$ . Le lemme de Henstock 1.3 (b) appliqué à la famille finie d'intervalles  $([x_k, x'_k])_{0 \leq k \leq n}$  donne

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \left| f(x_k)(x'_k - x_k) - \int_{x_k}^{x'_k} f(t) dt \right| = \sum_{0 \leq k \leq n} \left| f(x_k) - \frac{F(x'_k) - F(x_k)}{x'_k - x_k} \right| (x'_k - x_k) \leq 2\varepsilon$$

puisque cette famille est  $\delta$ -fine par construction. On en déduit  $\sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{p}(x'_k - x_k) \leq 2\varepsilon$  pour tout  $n$ , donc  $m(R_{p,\varepsilon}) = m(\bigcup_{k \geq 0} [x_k, x'_k]) \leq 2p\varepsilon$ . En écrivant  $E_p \subset \bigcap_{n>0} R_{p,1/n}$  on voit que l'ensemble  $E_p$  est négligeable, donc  $E = \bigcup_{p>0} E_p$  l'est aussi.  $\square$

## 7. Ensembles et fonctions mesurables

Une fonction intégrable peut être extrêmement irrégulière du point de vue de la continuité (par exemple  $\chi_{\mathbb{Q}}$  est HK-intégrable, bien qu'elle soit partout discontinue). Une fonction intégrable doit tout de même satisfaire certaines propriétés très faibles de régularité locale, pour lesquelles les ensembles négligeables ne jouent aucun rôle. C'est précisément l'objet de la notion de mesurabilité.

**(7.1) Définition.** *On dit qu'une partie  $E \subset \mathbb{R}$  est mesurable si  $E \cap [a, b]$  est intégrable pour tout intervalle fermé borné  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .*

Compte tenu des propriétés des ensemble intégrables (cf. (4.1)), il suffit de vérifier que l'intersection  $E \cap [-n, n]$  est intégrable pour tout entier  $n$ . Le théorème suivant découle immédiatement de (4.1).

**(7.2) Théorème.** *Toute réunion dénombrable  $\bigcup E_n$ , toute intersection dénombrable  $\bigcap E_n$  de parties mesurables  $E_n$  est mesurable. Le complémentaire  $\complement E$  d'une partie mesurable  $E$  est mesurable. Tout intervalle, toute partie ouverte ou fermée  $E \subset \overline{\mathbb{R}}$  est mesurable.*

La dernière assertion résulte du fait que les intervalles sont trivialement mesurables, et du fait qu'une partie ouverte de  $\overline{\mathbb{R}}$  est réunion finie ou dénombrable d'intervalles. On peut étendre la mesure de Lebesgue aux parties mesurables en posant

$$m(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(E \cap [-n, n]), \quad m(E) \in [0, +\infty].$$

Les parties intégrables sont alors exactement les parties mesurables de mesure  $m(E) < +\infty$ , et la propriété d'additivité de la mesure d'une réunion dénombrable de parties mesurables disjointes est encore valable lorsque les sommations sont prises dans  $[0, +\infty]$ . Nous avons la caractérisation suivante assez claire de la mesurabilité.

**(7.3) Caractérisation des ensembles mesurables.** *Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a)  $E$  est mesurable.
- (b) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une partie fermée  $F$  et une partie ouverte  $U$  telles que  $F \subset E \subset U$  et  $m(U \setminus F) \leq \varepsilon$ .
- (c) Il existe  $F$  un  $F_\sigma$  (= réunion finie ou dénombrable de fermés) et  $G$  un  $G_\delta$  (= intersection finie ou dénombrable d'ouverts) tels que  $F \subset E \subset G$  et  $m(G \setminus F) = 0$ .
- (d)  $E$  peut s'écrire comme une réunion  $E = F \cup N$  d'un  $F_\sigma$  et d'une partie négligeable.

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Commençons par le cas où  $E$  est borné,  $E \subset [a, b]$ . Alors  $E$  et  $E' = [a, b] \setminus E$  sont des parties intégrables. D'après le théorème (6.2) il existe des ouverts  $U$  et  $U'$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $E \subset U$ ,  $m(U \setminus E) \leq \varepsilon/2$ , et  $E' \subset U'$ ,  $m(U' \setminus E') \leq \varepsilon/2$ . On pose  $F = [a, b] \setminus U'$ . Il vient  $F \subset [a, b] \setminus E' = E \subset U$  et

$$m(U \setminus F) \subset m(U \setminus E) + m(E \setminus F) \leq m(U \setminus E) + m(U' \setminus E') \leq \varepsilon.$$

Dans le cas général, on pose  $E_n = E \cap [n, n+1]$ , et on trouve des parties fermées  $F_n \subset [n, n+1]$  et  $U_n \subset \mathbb{R}$  telles que  $F_n \subset E_n \subset U_n$  et  $m(U_n \setminus F_n) \leq \varepsilon 2^{-|n|-2}$ . Alors  $F = \bigcup F_n$  et  $U = \bigcup U_n$  répondent à la question puisque  $U \setminus F \subset \bigcup (U_n \setminus F_n)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Pour tout entier  $p > 0$ , on peut trouver un fermé  $F_p$  et un ouvert  $U_p$  tels que  $F_p \subset E \subset U_p$  et  $m(U_p \setminus F_p) < 1/p$ . Alors  $F = \bigcup F_p$  et  $G = \bigcup U_p$  répondent à la question, puisque  $G \setminus F \subset U_p \setminus F_p$  pour tout  $p$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) est évident, il suffit de poser  $N = E \setminus F$  qui est contenu dans  $G \setminus F$ , donc négligeable.

(d)  $\Rightarrow$  (a) résulte de (7.2). □

**(7.4) Théorème et définition.** *Soit  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  une fonction quelconque. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a) L'image réciproque  $f^{-1}([-\infty, c[)$  de tout intervalle ouvert de  $\overline{\mathbb{R}}$  est mesurable.
- (b) L'image réciproque  $f^{-1}([-\infty, c])$  de tout intervalle fermé de  $\overline{\mathbb{R}}$  est mesurable.
- (c) L'image réciproque  $f^{-1}(J)$  de tout intervalle  $J \subset \overline{\mathbb{R}}$  est mesurable, respectivement [(c')  $J$  ouvert], [(c'')  $J$  fermé],
- (d) L'image réciproque  $f^{-1}(U)$  de tout ouvert  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$  est mesurable.

On dit alors que la fonction  $f$  est mesurable.

*Démonstration.* L'équivalence de (a) et (b) résulte des égalités

$$f^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{n>0} f^{-1}([-\infty, c + 1/n]), \quad f^{-1}([-\infty, c[) = \bigcup_{n>0} f^{-1}([-\infty, c - 1/n])$$

si  $c \in \mathbb{R}$ . Le passage au cas d'intervalles  $J$  quelconques  $(c), (c'), (c'')$  se voit aisément en écrivant par exemple

$$f^{-1}(]c, d]) = f^{-1}([-\infty, d]) \cap \mathbb{C}f^{-1}([-\infty, c])$$

pour tous  $c < d$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Enfin l'équivalence avec (d) résulte du fait que tout ouvert  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$  est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints  $J_k$ , de sorte que  $f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(J_k)$ .  $\square$

Une conséquence immédiate de la définition est la suivante.

**(7.5) Proposition.** *Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction mesurable et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $g$  est continue ou monotone, alors  $g \circ f$  est mesurable.*

Par ailleurs, comme les ensembles négligeables sont mesurables, la mesurabilité n'est pas sensible au fait que la fonction  $f$  soit modifiée arbitrairement sur un ensemble négligeable. Un fait très utile est que la mesurabilité est préservée par passage à la limite dénombrable :

**(7.6) Proposition.** *Soit  $f_n : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une suite de fonctions mesurables. Alors  $\limsup f_n$  et  $\liminf f_n$  sont mesurables. Si  $(f_n)$  admet presque partout une limite  $f$ , alors  $f$  est mesurable.*

*Démonstration.* Posons  $f = \limsup f_n$ . Nous avons alors par définition  $f(x) < c$  si  $\exists p > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, f_n(x) < c - 1/p$ , c'est-à-dire

$$f^{-1}([-\infty, c]) = \bigcup_{p>0} \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}([-\infty, c - 1/p]),$$

ce qui montre que  $f$  est mesurable. La preuve pour  $\liminf f_n$  se déduit du cas de la  $\limsup$  en remplaçant  $(f_n)$  par  $(-f_n)$ . Si  $(f_n)$  admet une limite presque partout  $f$ , on conclut en écrivant par exemple  $f = \limsup f_n$  presque partout.  $\square$

**(7.7) Proposition.** *Toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  HK-intégrable est mesurable.*

*Démonstration.* Il est clair que les fonctions continues sont mesurables, puisque l'image inverse d'un intervalle ouvert est une partie ouverte (donc mesurable). Fixons  $a \in I$ , et soit  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  une intégrale indéfinie de  $f$  sur  $I$ . On sait que  $F$  est continue sur  $I$  (corollaire 4.3), et que  $f(x) = F'(x)$  presque partout (théorème 6.4). On peut donc écrire

$$f(x) = \lim f_n(x) \quad \text{p.p. avec} \quad f_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Comme les fonctions  $f_n$  sont continues, on en conclut que la limite presque partout  $f$  est mesurable.  $\square$

**(7.8) Proposition.** *Toute fonction mesurable  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  peut s'écrire  $f = \lim f_n$  où les fonctions  $f_n$  sont des fonctions intégrables étagées, c'est-à-dire des combinaisons linéaires finies  $\sum_{1 \leq k \leq p_n} c_{k,n} \chi_{E_{k,n}}$  de fonctions caractéristiques d'ensembles intégrables.*

*Si de plus  $f \geq 0$ , on peut choisir la suite  $(f_n)$  croissante et telle que  $0 \leq f_n \leq f$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $I = [a, b]$  fermé borné. On prend alors

$$\begin{aligned} c_{k,n} &= (k-1)2^{-n} - n, & E_{k,n} &= f^{-1}([c_{k,n}, c_{k,n} + 2^{-n}]), & \text{si } k &= 1, 2, \dots, n2^{n+1}, \\ c_{k,n} &= n, & E_{k,n} &= f^{-1}([n, +\infty]) & \text{si } k &= n2^{n+1} + 1, \\ c_{k,n} &= -n, & E_{k,n} &= f^{-1}([-\infty, -n]) & \text{si } k &= p_n = n2^{n+1} + 2, \end{aligned}$$

de sorte que les ensembles  $E_{k,n}$ ,  $1 \leq k \leq p_n$  forment une partition mesurable de  $I$ . Il est évident par construction que la fonction  $f_n = \sum c_{k,n} \chi_{E_{k,n}}$  vérifie  $|f_n - f| \leq 2^{-n}$  là où  $|f(x)| < n$ , tandis que  $|f_n(x)| = n$  avec le même signe que  $f(x)$  là où  $|f(x)| \geq n$ . On a donc bien  $\lim f_n = f$ . Lorsque  $I$  est borné, les ensembles  $E_{k,n}$  sont intégrables et la proposition est démontrée. Si  $I$  n'est pas borné, il suffit de remplacer  $E_{k,n}$  par  $E'_{k,n} = E_{k,n} \cap [-n, n]$  pour conclure la démonstration. En effet, il est facile de constater que  $0 \leq f_n \leq f$  et que la suite  $(f_n)$  est croissante lorsque  $f$  est elle-même positive ou nulle.  $\square$

**(7.9) Corollaire.** *Toute combinaison linéaire finie, tout produit de fonctions mesurables à valeurs réelles est encore mesurable. L'ensemble des fonctions mesurables  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  a donc une structure d'algèbre.*

*Démonstration.* Il suffit en effet d'observer que toute combinaison linéaire ou tout produit de fonctions étagées est encore une fonction étagée, et de passer à la limite.  $\square$

Le résultat suivant montre que la mesurabilité est la propriété de régularité requise pour obtenir l'intégrabilité, lorsqu'on a un encadrement par des fonctions HK-intégrables.

**(7.10) Proposition.** *Soit  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions telles que  $g \leq f \leq h$ . On suppose que  $g$  et  $h$  sont HK-intégrables et que  $f$  est mesurable. Alors  $f$  est HK-intégrable.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $f$  par  $f - g$  et  $h$  par  $h - g$ , on peut supposer  $0 \leq f \leq h$  avec  $h$  HK-intégrable. La proposition 7.8 implique que  $f = \lim f_n$  avec des fonctions  $f_n$  étagées HK-intégrables, que l'on peut choisir  $\geq 0$  d'après la démonstration. Toutes ces fonctions sont donc absolument intégrables, et on peut écrire  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min(f_n, h)$ . On voit donc que  $f$  est HK-intégrable comme limite dominée de fonctions HK-intégrables.  $\square$

Nous démontrons maintenant un résultat très important, à savoir la densité des fonctions continues à support compact dans  $L^1(I)$ .<sup>(15)</sup>

**(7.11) Densité des fonctions continues à support compact.**

(a) *Soit  $E \subset \mathbb{R}$  un ensemble mesurable. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  telle que  $g(x) = \chi_E(x)$  hors d'un ensemble ouvert  $V$  de mesure  $m(V) \leq \varepsilon$ .*

<sup>(15)</sup> Incidemment ce résultat (et plus spécifiquement 7.11 (d) ci-après) démontre que les fonctions absolument intégrables au sens de Henstock-Kurzweil sont exactement les fonctions intégrables au sens de Lebesgue pour la mesure de Lebesgue usuelle. Jusqu'à ce point, il était évident que l'espace  $L^1(I)$  de Henstock-Kurzweil contenait celui de Lebesgue, mais il n'était pas clair qu'il ne soit pas plus gros. Les deux théories se rejoignent donc dans le cas des fonctions absolument intégrables.

- (b) Soit  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction mesurable. Il existe une suite  $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  d'applications continues à support compact telles que  $g_n \rightarrow f$  presque partout.
- (c) Soit  $f \in L^1(I)$ . Il existe une suite  $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  d'applications continues à support compact telles que  $g_n \rightarrow f$  presque partout et  $\|g_n - f\|_1 \rightarrow 0$ .
- (d) L'espace  $\mathcal{C}_c(I)$  des fonctions continues à support compact dans  $I$  est dense dans  $L^1(I)$ , et  $L^1(I)$  s'identifie au complété de  $\mathcal{C}_c(I)$  pour la norme  $\| \cdot \|_1$ .

*Démonstration.* (a) Grâce à 7.4, choisissons  $F$  un ensemble fermé et  $U$  un ensemble ouvert tels que  $F \subset E \subset U$  et  $m(U \setminus F) \leq \varepsilon$ . On pose

$$g(x) = \frac{d(x, \mathbb{C}U)}{d(x, F) + d(x, \mathbb{C}U)}.$$

Il est clair que  $0 \leq g(x) \leq 1$  et que  $g$  est continue (le dénominateur ne s'annule pas puisque  $F$  et  $\mathbb{C}U$  sont des fermés disjoints). De plus  $g(x) = 1$  si  $x \in F$  et  $g(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{C}U$ , donc  $g$  répond à la question en posant  $V = U \setminus F$ .

(b) et (c). On se ramène d'abord au cas où  $f \geq 0$  : si le résultat est démontré dans ce cas, on écrit  $f = f_+ - f_-$  et

$$f_+ = \lim g'_n, \quad f_- = \lim g''_n, \quad f = \lim g'_n - g''_n \quad \text{presque partout}$$

avec  $g'_n$  et  $g''_n$  continues à support compact. On supposera donc dans la suite que  $f \geq 0$ . Dans ce cas, la proposition 7.8 fournit une suite croissante de fonctions étagées  $f_n = \sum_{1 \leq k \leq p_n} c_{k,n} \chi_{E_{k,n}}$  telles que  $f = \lim f_n$  en tout point. Quitte à perdre éventuellement la convergence aux extrémités de  $I$ , on peut supposer en outre qu'il existe une suite strictement croissante d'intervalles  $[a_n, b_n] \subset I^\circ$  tels que  $E_{k,n} \subset [a_n, b_n]$  pour tout  $k$ , sinon on remplace  $E_{k,n}$  par  $E_{k,n} \cap [a_n, b_n]$  avec des intervalles  $[a_n, b_n]$  choisis tels que  $\bigcup [a_n, b_n] = I^\circ$ . D'après (a), on peut trouver une fonction continue  $g_{k,n} : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g_{k,n} = \chi_{E_{k,n}}$  hors d'un ensemble ouvert  $V_{k,n}$  de mesure  $\leq 2^{-n}/p_n$  et à support dans  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  (disons). Par suite  $g_n = \sum_{1 \leq k \leq p_n} c_{k,n} g_{k,n}$  est continue à support compact dans  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I$  et coïncide avec  $f_n$  hors de  $V_n = \bigcup V_{k,n}$ ,  $m(V_n) \leq 2^{-n}$ . En dehors de  $W_p = \bigcup_{k > p} V_k$  qui est de mesure  $\leq 2^{-p}$ , il est clair que  $g_n \rightarrow f$  puisque  $g_n = f_n$  pour  $n > p$ , et par conséquent  $g_n \rightarrow f$  hors de l'ensemble négligeable  $N = \bigcap W_p$ . Ceci démontre (b). Si en outre  $f$  est intégrable, alors le théorème de convergence dominée appliqué à la suite décroissante  $f - f_n \rightarrow 0$  dominée par  $f$  montre que  $\lim \|f_n - f\|_1 = 0$ . En prenant de plus  $m(V_{k,n}) \leq 2^{-n}/(1 + p_n |c_n|)$ , il vient  $\|g_{n,k} - \chi_{E_{n,k}}\|_1 \leq 2^{-n}/(1 + p_n |c_{n,k}|)$ , donc  $\|g_n - f_n\|_1 \leq 2^{-n}$  et (c) s'ensuit.

(d) résulte de (c), puisque nous savons que  $L^1(I)$  est complet, et de plus  $\mathcal{C}_c(I)$  s'identifie à un sous-espace de  $L^1(I)$  d'après 4.6 (a). □

**(7.12) Caractérisation des fonctions mesurables (théorème de Lusin).**

Soit  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction quelconque. Il y a équivalence entre :

- (a)  $f$  est mesurable.
- (b) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie ouverte  $V \subset I$  de mesure  $m(V) \leq \varepsilon$  telle que la restriction  $f|_{I \setminus V}$  soit continue.

*Démonstration.* Commençons par le sens « facile ».

(b)  $\Rightarrow$  (a). Pour  $n$  entier  $> 0$ , fixons un ouvert  $V_n$  tel que  $m(V_n) \leq 2^{-n}$  et  $f|_{I \setminus V_n}$  continue. Quitte à remplacer  $V_n$  par  $V'_n = \bigcup_{k>n} V_k$ , on peut supposer que la suite  $V_n$  est décroissante. Posons alors  $f_n(x) = 0$  si  $x \in V_n$  et  $f_n(x) = f(x)$  si  $x \in I \setminus V_n$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Alors

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(U) &= f^{-1}(U) \cap (I \setminus V_n) && \text{si } 0 \notin U, \\ f_n^{-1}(U) &= V_n \cup (f^{-1}(U) \cap (I \setminus V_n)) && \text{si } 0 \in U. \end{aligned}$$

Dans les deux cas  $f_n^{-1}(U)$  est mesurable puisque  $f^{-1}(U) \cap (I \setminus V_n)$  est une partie ouverte de  $I \setminus V_n$  (et donc l'intersection d'un ouvert avec la partie mesurable  $I \setminus V_n$ ). Ceci prouve que  $f_n$  est mesurable. Comme  $f = \lim f_n$  hors de la partie négligeable  $N = \bigcap V_n$ , on voit que  $f$  est elle aussi mesurable.

(a)  $\Rightarrow$  (b). D'après 7.11 (b), il existe une suite d'applications continues  $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $g_n \rightarrow f$  presque partout. Comme  $\overline{\mathbb{R}}$  est homéomorphe à  $[-1, 1]$  par l'application  $x \mapsto x/(1 + |x|)$ , on peut tout aussi bien supposer que  $f$  et les  $g_n$  sont à valeurs dans  $[-1, 1]$ . Soit  $N \subset I$  un ensemble négligeable tel que  $g_n(x)$  converge vers  $f(x)$  pour tout  $x \in I \setminus N$ . Soit  $([a_p, b_p])_{p \geq 0}$  une suite croissante d'intervalles fermés bornés tels que  $I = \bigcup [a_p, b_p]$ . Pour chaque  $p$ , considérons

$$U_{p,n} = \{x \in [a_p, b_p]; \exists j, k \geq n, |g_j(x) - g_k(x)| > 2^{-p}\}.$$

C'est une partie ouverte de  $[a_p, b_p]$ , de plus la suite  $(U_{p,n})_{n \geq 0}$  est décroissante et  $\bigcap_{n \geq 0} U_{p,n} \subset N$  d'après le critère de Cauchy. Comme  $N$  est négligeable, nous avons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(U_{p,n}) \leq m(N) = 0$ , donc il existe un indice  $n(p)$  tel que  $m(U_{p,n(p)}) \leq 2^{-p}$ . Il n'est pas restrictif de supposer que l'on choisit  $n(p+1) > n(p)$  pour tout  $p$ . Soit  $V_p$  une partie ouverte de  $I$  contenant  $N \cup \bigcup_{q \geq p} U_{q,n(q)}$ , telle que  $m(V_p) \leq 2^{2-p}$ . Pour  $j \geq q \geq p$  et  $x \in [a_q, b_q] \setminus V_p$ , nous avons  $|g_{n(j)}(x) - g_{n(j+1)}(x)| \leq 2^{-j}$ . Ceci entraîne que  $f$  est la limite uniforme des  $g_{n(j)}$  sur toute partie compacte de  $I \setminus V_p$ , donc  $f|_{I \setminus V_p}$  est continue.  $\square$

## Références bibliographiques

- [Ba1] Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics (American Mathematical Society, Providence, RI), vol. 32 (2001) [suitable for advanced undergraduates].
- [Ba2] Robert G. Bartle. *Return to the Riemann integral*, American Mathematical Monthly **103** (1996) 625–632 [brief and easy to read].
- [BS] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons (2000) [suitable for advanced undergraduates].
- [Br] Jean-Yves Briend. *Intégration I, Licence de Mathématiques*, (page web)  
<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~briend/cours/cours.php>.
- [Ch] Eric Charpentier. *L'intégrale de Riemann complète*, (page web)  
<http://www.math.u-bordeaux.fr/~echarpen/>.
- [Dj1] Arnaud Denjoy. *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **154** (1912) 859–862.
- [Dj2] Arnaud Denjoy. *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bulletin Soc. Math. France **43** (1915) 161–248.
- [DS] John DePree and Charles Swartz. *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York (1988) [advanced undergraduate students, very readable].
- [Go1] Russell Gordon. *Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. (1994) [comprehensive introduction to the subject].
- [Go2] Russell Gordon. *Historical overview of Riemann and Henstock integrals*, Real Analysis Exchange **22** (1) (1996/7) 23–33.
- [Go3] Russell Gordon. *The use of tagged partitions in elementary real analysis*, Amer. Math. Monthly **105** (1998) 107–117.
- [He] Ralph Henstock. *The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable*, J. London Math. Soc., **30** (1955) 273–286.
- [Ku1] Jaroslav Kurzweil. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czech. Math. J. **7** (1957) 418–446.
- [Ku2] Jaroslav Kurzweil. *Henstock-Kurzweil integration: its relation to topological vector spaces*, World Scientific Publ. Co. (2000) [for advanced specialists in integration theory].
- [LL] Jitan Lu and Peng-Yee Lee. *On singularity of Henstock integrable functions*, Real Analysis Exchange **25** (1999), 795–798.
- [Ma] Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, Techniques, Évolutions*, De Broeck Université, Bruxelles, deuxième édition, 1997 (première édition 1992).
- [ML] Robert M. McLeod. *The Generalized Riemann Integral*, Carus Monograph (Mathematical Association of America, Washington, DC), vol. 20 (1980) [niveau introductif].
- [Mu] Pat Muldowney. *A general theory of integration in function spaces, including Wiener and Feynman integration*, Pitman Research Notes in Math. Series, John Wiley & Sons, New York (1987).
- [Pe] Oskar Perron. *Über den integralbegriff*, Sitzber. Heidelberg Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse Abt. A, **16** (1914) 1–16.
- [RW] Ouvrage collectif, *Mathématiques - Tout-en-un pour la Licence - Niveau L2, Cours et exercices corrigés*, Collection dirigée par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, Dunod, 2007.
- [Sc] Eric Schechter. *An Introduction to the gauge integral (also known as the generalized Riemann integral, the Henstock integral, the Kurzweil integral, the Henstock-Kurzweil integral, the HK-integral, the Denjoy-Perron integral, etc.)*, (web page)  
<http://www.math.vanderbilt.edu/~schemtex/ccg/gauge/>.
- [Sw] Charles Swartz. *Introduction to Gauge Integrals*, World Scientific Publ. Co., (2001) [suitable for advanced undergraduates].

- [Ye] Lee Peng Yee. *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific Publ. Co., Series in Real Analysis **2** (1989) [exposition of research-level material].
- [YV] Lee Peng Yee and Rudolf Výborný. *The Integral. An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (2000) [a combined textbook/research monograph, suitable for advanced undergraduates].