

Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire

Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>

version du 23 mars 2010

0. Introduction

L'objectif de ce texte est de proposer une piste pour l'enseignement de la géométrie élémentaire et pour la réflexion sur cet enseignement. La géométrie euclidienne se trouve être un domaine très privilégié des mathématiques, à l'intérieur duquel il est possible de mettre en œuvre depuis le point de départ des raisonnements riches, tout en faisant appel de manière remarquable à la vision et à l'intuition. Notre préoccupation est d'autant plus grande que l'évolution des programmes scolaires depuis 3 ou 4 décennies révèle une diminution très marquée des contenus géométriques enseignés, en même temps qu'un affaiblissement du raisonnement mathématique auquel l'enseignement de la géométrie permettait précisément de contribuer de façon essentielle.

Or, au delà de leurs applications dans tous les domaines des sciences, les mathématiques jouent un rôle crucial dans la formation de l'esprit critique des citoyens. Le raisonnement mathématique est un atout considérable pour évaluer la pertinence des assertions en tout genre issues de la société et du monde politique. A l'heure où une certaine expression politique tend à demander au public scolaire d'être le témoin docile de choix éthiques, gestionnaires ou sociétaux contestables – fussent-ils marqués du sceau européen – nous estimons au contraire que la rigueur du raisonnement mathématique et l'universalité de sa portée sont des garde-fous précieux. Encore faut-il pour cela que les connaissances scientifiques puissent être librement accessibles à tous, et que les politiques publiques favorisent leur création dans une vision à long terme au service du citoyen⁽¹⁾.

Une autre forme de liberté particulièrement importante pour les mathématiques est celle de leurs méthodes d'enseignement. Ceci est vrai particulièrement dans la situation

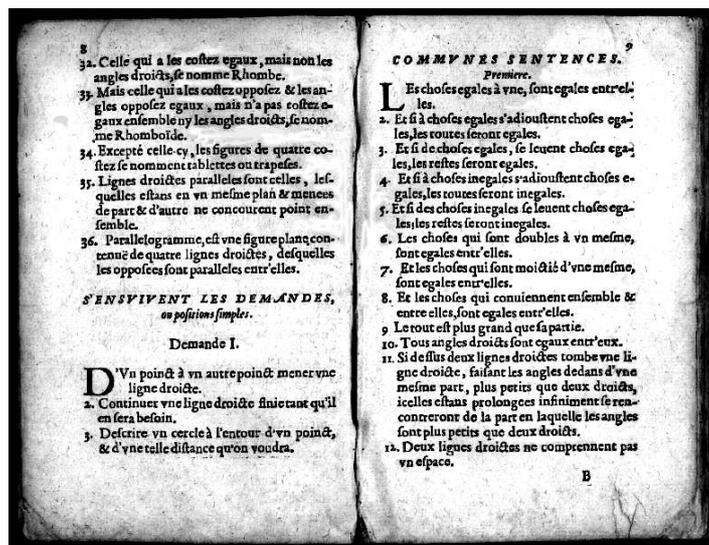
(1) Dans ce domaine, nous sommes préoccupés par la réforme du système de recherche français qui tend à réduire le rôle de la recherche fondamentale au profit de la seule recherche rentable à court terme. La liberté de création et de circulation des informations scientifiques est parfois gravement compromise par une gestion abusive des questions de propriété intellectuelle au bénéfice de la bulle spéculative et financière. Nous avons ici par exemple à l'esprit le scandale des traitements de lutte contre le sida, facturés à des prix exorbitants au pays en voie de développement par des laboratoires pharmaceutiques peu scrupuleux. Mais les mathématiques elles-mêmes ne sont pas à l'abri. Ainsi, un doctorant russe en cryptanalyse dénommé Igor Sklyarov et employé par la société russe ElcomSoft, fut arrêté le 16 juillet 2001 à Las Vegas après avoir donné une conférence sur la sécurité informatique. Il a été arrêté par le FBI, sur ordre de l'industrie américaine du livre, pour avoir diffusé des algorithmes arithmétiques susceptibles de contourner des mesures de protection logicielles, selon les termes du Digital Millennium Copyright Act. Sur ce plan, nous sommes heureux de constater l'émergence de communautés et d'acteurs nouveaux favorables à la libre diffusion des connaissances : logiciels libres, encyclopédie universelle Wikipedia, journaux scientifiques en libre accès, formats de documents libres et interopérables (TeX, Openoffice Document Format, ...)

d'incertitude qui prévaut sur la validité du modèle éducatif actuel, et qui rend d'autant plus nécessaire l'exploration de nouvelles pistes. De ce point de vue, nous avons espoir que la liberté pédagogique prévue par la loi d'orientation sur l'école soit vraiment appliquée par la hiérarchie éducative, et qu'elle soit concrètement permise par les nouveaux programmes en chantier. Compte tenu du précédent des mathématiques modernes, nous ne souhaitons pas – pour le cas improbable où certains décideurs viendraient à l'envisager – que le présent texte de propositions soit pris trop au pied de la lettre et devienne ainsi la source d'un nouveau dogmatisme !

Nous espérons néanmoins que l'approche décrite ci-dessous sera utile aux professeurs et aux auteurs de manuels de mathématiques. Idéalement, le contenu de ce texte devrait être maîtrisé aussi par tous les professeurs d'école, car même à l'école primaire, il apparaît difficile d'avoir un recul suffisant sur l'enseignement de la géométrie sans posséder l'essentiel des notions qui vont suivre (exception faite des sections 10, 11 et 12, qui portent sur des mathématiques plus avancées).

1. Point de vue sur les axiomatiques de la géométrie

Comme discipline constituée, la géométrie trouve son origine dans l'axiomatique établie par Euclide et ses successeurs, même si des connaissances géométriques élaborées préexistaient au développement de la science grecque.



Un extrait du livre d'Euclide

L'enseignement traditionnel de la géométrie institué en France au cours de la période 1880-1970 mettait en œuvre une approche directement inspirée d'Euclide : énoncé des axiomes et des propriétés fondamentales des objets et figures géométriques, puis utilisation des « cas d'égalité des triangles » comme point de départ du raisonnement géométrique.

Cette approche avait l'intérêt d'être très concrète et de donner lieu rapidement à des résultats et raisonnements riches en contenu. D'autre part, elle rendait fidèlement compte du caractère intrinsèque des propriétés géométriques, sans nécessiter le recours a priori au calcul et à l'algèbre. Les choix opérés faisaient écho à une tradition

mathématique bien ancrée au XIX^e siècle, ayant pour but de dégager les formes de la «géométrie pure», dont l'un des points culminants a été le développement de la géométrie projective par Poncelet.

L'axiomatique d'Euclide n'était cependant ni complète ni tout à fait satisfaisante sur le plan logique, ce qui a conduit des mathématiciens comme Pasch et Hilbert à mettre au point le système d'axiomes maintenant attribué à Hilbert, popularisé dans son célèbre mémoire *Grundlagen der Geometrie* [Hil] en 1899.



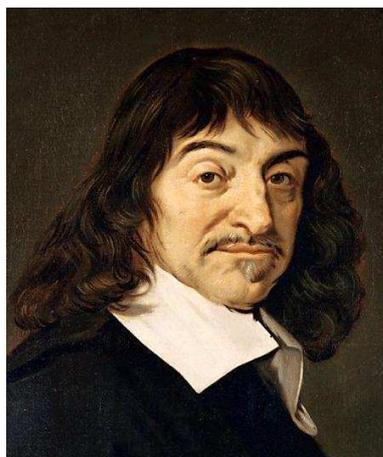
David Hilbert (1862–1943), en 1912

Il faut noter toutefois que le nombre élevé d'axiomes mis en jeu et la complexité logique du système rendent en réalité impossible son enseignement à un niveau élémentaire⁽²⁾, ce qui veut dire qu'un nombre substantiel de propriétés formellement démontrables devront être admises, et que la logique de cette axiomatique a toutes les chances d'échapper complètement à l'élève (et même à ses enseignants). Ceci n'est toutefois pas nécessairement un handicap majeur pour l'introduction et la compréhension des principaux résultats géométriques, comme la longue expérience de l'enseignement secondaire de la III^e République l'a amplement montré.

On peut noter cependant une certaine coupure avec les formes modernes beaucoup plus diversifiées du raisonnement géométrique, coupure déjà sensible avec la géométrie analytique introduite par Descartes dans la première moitié du XVII^e siècle. La réforme Lichnerowicz (plus connue sous le nom de réforme des "mathématiques modernes") a balayé ces points de vue en imposant brutalement un changement complet de paradigme : l'enseignement de la géométrie se devait selon Jean Dieudonné de commencer par les fondements de l'algèbre linéaire, traités qui plus est par une approche formelle et axiomatique dans le cadre le plus général possible. Or celle-ci présente une difficulté conceptuelle a priori, qui est que l'univers sensible des physiciens est celui de la géométrie euclidienne, avec en particulier la notion de longueur sous-jacente, alors que l'algèbre linéaire abstraite tend à vouloir faire commencer la géométrie avec un groupe d'invariance plus grand, à savoir le groupe de toutes les transformations linéaires. Si cette approche a pu tout de même donner des résultats satisfaisants au milieu des années

(2) Même sous la forme sensiblement améliorée présentée par E. Artin dans son célèbre ouvrage « Algèbre géométrique » [Art51], il apparaît que l'axiomatique de Hilbert peut difficilement être abordée avant la 3^e ou 4^e année d'université.

1970, notamment avec les 2 ou 3 promotions d'élèves qui avaient encore bénéficié des programmes de géométrie euclidienne traditionnelle au collège, il est apparu que les programmes s'enfermaient peu à peu dans un formalisme excessif et stérile. On peut citer en exemple la définition absconse de la droite affine donnée par les programmes de 4^e au cours des années 1975-1985 : c'est un ensemble muni d'un système de bijections avec l'ensemble des nombres réels, de sorte que deux bijections quelconques f, g se déduisent l'une de l'autre par une relation de la forme $g(M) = af(M) + b$ où a et b sont des nombres réels et $a \neq 0$.



de Descartes (1596–1650) à Dieudonné (1906–1992) et Lichnerowicz (1915–1998)

Les élèves ont fini par en faire une indigestion chronique - aggravée il est vrai par les multiples réformes intervenues dans le primaire, qui ont abouti de leur côté à un recul des possibilités de raisonnement et des savoirs fondamentaux en calcul. L'étape suivante, sous le ministère Chevènement en 1985, a résulté dans une série de coupes sombres dans les programmes. Ceux-ci ont été marqués par un nouvel affaiblissement des contenus enseignés en géométrie, dans des formes qui ne laissent plus place au collège qu'à des quasi-tautologies en guise de raisonnement. La « dégénérescence » de l'enseignement du raisonnement nous paraît en grande partie imputable à l'insuffisance de structuration logique des programmes et à l'absence d'un vocabulaire apte à formuler des énoncés riches et précis, comme par exemple le vocabulaire ensembliste devenu soudain suspect et donc frappé de bannissement quasi total. Bien que les programmes actuels du lycée donnent l'illusion de contenir encore des éléments substantiels de géométrie, on voit que la dominante est l'utilisation de calculs de géométrie analytique dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , sans qu'une formulation intrinsèque des concepts mis en jeu puisse se dégager clairement, en particulier l'idée essentielle que les objets géométriques sont indépendants des coordonnées choisies.

Il est donc indispensable d'en revenir à des modes d'enseignement de la géométrie qui posent clairement la nature géométrique des objets considérés, ce qui signifie que des définitions précises doivent pouvoir être données, et que les programmes doivent permettre d'obtenir et de démontrer des énoncés riches à partir des propriétés prises comme point de départ. En un mot, il convient d'en revenir, sous une forme explicite ou non, à une certaine forme de présentation axiomatique de la géométrie. Nous ne voulons pas dire par là que l'enseignement doit nécessairement adopter l'ordre de présentation très strict sous-tendu par l'axiomatique choisie (quelle qu'elle soit), mais celle-ci devrait

d'une part donner un cadre précis où les enseignants puissent se retrouver, et d'autre part guider la conception des programmes et des progressions.

Pour justifier notre souhait de dépasser l'approche d'Euclide encore utilisée dans l'enseignement il y a 50 ans, nous ferons observer que l'on bénéficie aujourd'hui d'un avantage considérable par rapport aux Grecs, qui est de disposer depuis François Viète et Simon Stevin de notations algébriques universellement admises, et depuis Descartes, de la possibilité d'aborder la géométrie au moyen des coordonnées et du calcul analytique.



François Viète (1540–1603)



Simon Stevin (1548–1620)

Pour ce qui est des nombres réels au sens moderne, la géométrie grecque semblait surtout mettre l'accent sur le concept de rapport de grandeurs de même nature, et la notion de fonction polynôme n'était pas dégagée en tant que telle – même si les Grecs savaient ramener les équations du second et du troisième degré à des problèmes géométriques.

L'approche que nous voulons proposer ici sera donc une synthèse des points de vue de Pythagore et Euclide avec celui de Descartes. La géométrie euclidienne se caractérise par la donnée d'une distance se calculant au moyen du théorème de Pythagore, et il se trouve alors que tous les objets dont on a besoin en géométrie euclidienne peuvent se définir à partir de la seule notion de longueur⁽³⁾. Ainsi, dans la reconstruction de la géométrie euclidienne que nous allons exposer, le théorème de Thalès peut se déduire de celui de Pythagore. Un autre avantage est que toutes les notions peuvent se définir à l'aide d'un formalisme minimal et intuitif. De fait, la théorie va comporter une seule propriété de départ, liée directement au théorème de Pythagore, que l'on peut en outre justifier au préalable par des considérations intuitives simples et visuelles (mais ce n'est certes pas la présence d'un seul axiome qui soit nécessairement le fait décisif – en réalité l'axiome «Pythagore+Descartes» que nous allons introduire s'apparente davantage à une description concise d'un modèle de la géométrie euclidienne qu'à un axiome proprement dit). Contrairement à l'approche issue de l'algèbre linéaire, nous partons

(3) Il est bien connu aujourd'hui que la donnée de la structure métrique détermine un grand nombre d'autres invariants, comme la mesure au sens de Hausdorff, la courbure riemannienne, etc. Ce point de vue a été très largement développé par Mikhail Gromov dans les 2 ou 3 dernières décennies. Voir par exemple M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

des notions de points et de figures géométriques plutôt que de celles beaucoup moins intuitives de vecteurs et d'espaces vectoriels, et l'idée de vecteur apparaîtra comme une construction a posteriori. Un autre de nos buts est de démontrer l'argument erroné que la géométrie élémentaire enseignée autrefois ne constitue pas une partie sérieuse ou utile des mathématiques, parce que non susceptible d'une formalisation rigoureuse au sens moderne.

Il y a certainement quelques désavantages à la synthèse qui va être exposée. L'un d'entre eux est d'être seulement une reconstruction moderne, qui, même si elle paraîtra tout à fait évidente au mathématicien contemporain (et aurait sans doute paru évidente aussi à Klein ou Hilbert), n'a probablement jamais été enseignée telle quelle à une quelconque époque. Un autre est de « rigidifier » d'emblée le modèle euclidien, donc de ne pas être le cadre adapté aux autres géométries d'incidence telles que les géométries affines ou projectives. Enfin, les nombres réels sont introduits a priori dans le modèle, donc il n'est pas question non plus d'accéder aux géométries sur d'autres corps que celui des réels. Mais pour une utilisation potentielle au collège ou au lycée, nous avons fait le choix délibéré de privilégier l'extrême simplicité à la généralité, et de nous focaliser sur le modèle euclidien et archimédien qui est aussi celui de la physique classique newtonienne...

2. Savoirs fondamentaux en calcul et en géométrie

Comme nous l'avons esquissé plus haut, l'enseignement de la géométrie est indissociable de celui du calcul arithmétique. Cela sera vrai en particulier pour l'étude du modèle euclidien (au sens moderne du terme), qui est fondé sur la notion de nombre réel. Nous décrirons donc tout d'abord les connaissances fondamentales en calcul mises en jeu.

2.1. L'école primaire et les quatre opérations

Il est indispensable que l'école primaire enseigne de nouveau le calcul écrit, afin d'aboutir à une maîtrise complète des algorithmes opératoires – les calculettes ne doivent être utilisées que lorsque l'élève y est parvenu. La pratique sûre et effective du calcul écrit suppose une connaissance fluide des tables d'addition et de multiplication (et leur lecture inverse : « tables de soustraction » et de « division »). Certains pédagogues minimalistes tendent à reporter l'essentiel de leur attention sur le calcul approché (estimations des ordres de grandeur) ou sur le calcul mental, mais les points suivants sont à peu près incontournables :

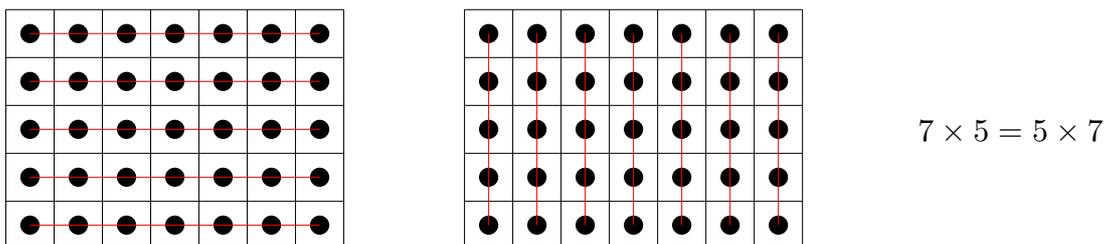
- bien que le calcul mental, comme le calcul écrit, implique la connaissance fluide des tables, ses procédures sont différentes, du fait de la nécessaire mémorisation des résultats intermédiaires. On procède ainsi par manipulation des unités, dizaines, centaines, milliers plutôt que sur les chiffres pris isolément, en partant d'ailleurs en général plutôt des chiffres de poids fort que des chiffres de poids faible comme c'est le cas avec les algorithmes posés usuels. En outre, la taille réduite des nombres mis en jeu ne permet pas d'atteindre le degré de généralité nécessaire pour une compréhension complète des algorithmes du calcul posé.
- s'il existe chez le jeune enfant une sorte de perception intuitive de la taille des nombres précédant son aptitude au calcul exact (perception qu'il convient bien sûr de ne pas contrecarrer), la fiabilité de la maîtrise du calcul approché et des ordres de grandeur n'est atteinte qu'au moyen d'éléments préalables du calcul exact, par exemple le calcul des puissances de dix combiné à la table de multiplication.
- enfin, même dans l'optique de la maîtrise du seul calcul approché, l'apprentissage d'un algorithme tel que celui de la division est un atout décisif : lorsque le diviseur comporte deux chiffres ou plus, l'obtention des chiffres du quotient fait fonctionner de manière très effective l'aptitude au calcul approché de la multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à plusieurs chiffres. En la circonstance, on sait bien que l'enfant a besoin de points de repère précis et d'objectifs clairement définis pour construire ses schémas mentaux, il ne suffit donc pas de déclarer le calcul approché comme un objectif pour qu'il se réalise par miracle.

Bien entendu la maîtrise des algorithmes est très loin de se suffire à elle-même, l'enfant ne peut accéder au sens des opérations qu'en résolvant aussi des problèmes concrets portant sur des grandeurs de la vie courante (nombre de pommes, monnaie, longueurs, poids...). Ce sens ne peut se construire de manière efficace que si les quatre opérations sont introduites simultanément, afin que l'enfant puisse comparer et éventuellement opposer l'usage des différentes opérations. C'est donc le plus tôt possible, au cours préparatoire et même à la maternelle, que les quatre opérations doivent être étudiées.

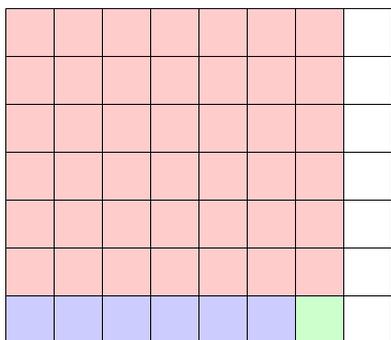
2.2. Synergie de l'enseignement du calcul et de la géométrie

C'est dès la maternelle que les considérations géométriques apparaissent, par exemple au travers des activités de dessin ou de coloriage. Il est utile de faire dessiner des motifs géométriques simples, des frises, etc.

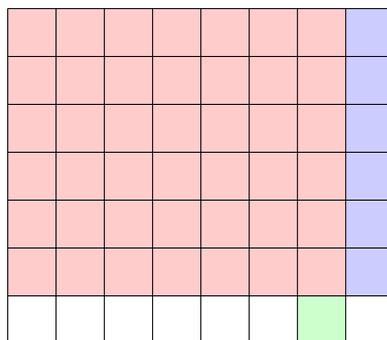
Au cours des premières années du primaire, le travail sur la géométrie doit venir solliciter les connaissances en calcul et réciproquement. Ainsi, le calcul du périmètre d'un rectangle permet de faire travailler l'addition, celui de son aire fait utilement mettre en pratique la multiplication et les changements d'unité. La représentation géométrique du rectangle donne la preuve de la commutativité de la multiplication :



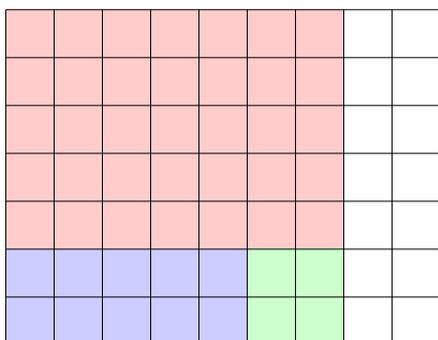
Certaines identités numériques comme $6 \times 8 = 7 \times 7 - 1$ ou $5 \times 9 = 7 \times 7 - 4$ peuvent se visualiser et s'expliquer géométriquement (il serait bon de faire la manipulation avec des pièces en bois pour solliciter tous les sens...)



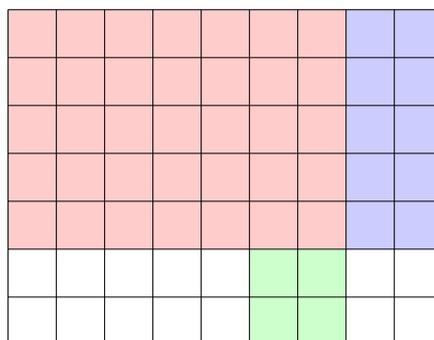
$$7 \times 7$$



$$6 \times 8 = 7 \times 7 - 1$$



$$7 \times 7$$



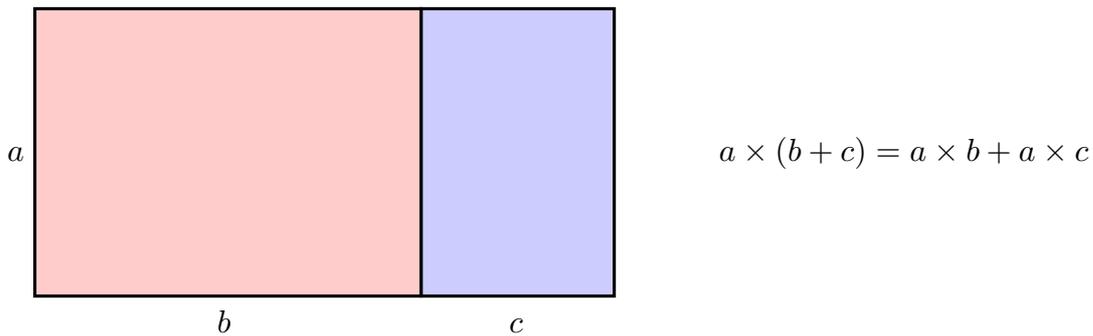
$$5 \times 9 = 7 \times 7 - 2 \times 2$$

Ces petits raisonnements sont bien de véritables démonstrations mathématiques, parmi les premières que l'on puisse présenter aux élèves.

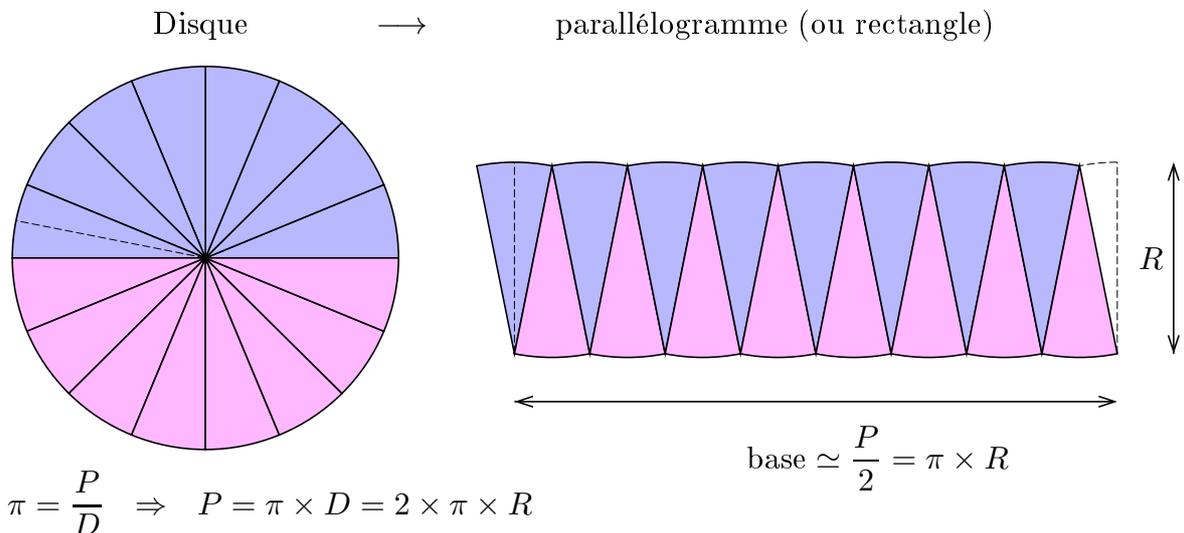
Venons-en aux aires. On commencera naturellement par le calcul de l'aire d'un rectangle dont les côtés comprennent un nombre entier de fois l'unité de longueur choisie. Plus tard, pour calculer l'aire d'un rectangle de côtés 1,2 m par 0,7 m, on se ramène en décimètres, ce qui donne

$$12 \text{ dm} \times 7 \text{ dm} = 84 \text{ dm}^2 = 0,84 \text{ m}^2,$$

sachant que $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$ et donc $1 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$. On voit donc que l'aire d'un rectangle est bien toujours le produit des longueurs des côtés, même lorsque ces longueurs sont des nombres décimaux. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se lit géométriquement :



Le calcul des aires et des volumes permet ainsi de consolider la compréhension du sens des opérations en liaison avec la manipulation des unités. Il est possible de donner en primaire de véritables démonstrations mathématiques non triviales – par exemple en CM1 ou en CM2 on peut donner la justification de la formule d'aire du disque :



À la limite, en augmentant le nombre de secteurs triangulaires, on voit donc que l'aire du disque est donnée par $\pi \times R \times R = \pi R^2$. Bien entendu, ce travail suppose que l'on ait au préalable soigneusement traité l'aire du rectangle, du triangle et du parallélogramme, avec là encore les découpages géométriques classiques pour justifier les formules. Le statut de la formule $P = \pi D = 2\pi R$ est différent, dans ce cas il s'agit plutôt d'une *définition* du nombre π : c'est le rapport du périmètre au diamètre, qui est indépendant du cercle considéré (on justifiera intuitivement que si le diamètre double ou triple, il en

est de même pour le périmètre, ce qui formellement résulte du théorème de Thalès...). Il est bien sûr souhaitable d'expérimenter en enroulant quelques tours d'une ficelle autour d'un tuyau de diamètre connu, pour trouver une valeur approchée de π .

De manière générale, l'enseignement de la géométrie doit se faire autour de manipulations concrètes : découpages, usage des instruments (règle, compas, rapporteur), tracés et constructions élémentaires (milieu, médiatrice, bissectrice, ...). Le travail sur papier quadrillé aide à former une première représentation intuitive des coordonnées cartésiennes ; il serait donc extrêmement utile d'envisager des activités dans cette direction dès le Cours Élémentaire.

2.3. Nombres négatifs, racines carrées, nombres réels

Avec la maîtrise des opérations élémentaires apparaissent naturellement les progressions arithmétiques et géométriques simples

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & a, & 2a, & 3a, & 4a, & 5a, & 6a, & 7a, & \dots \\ 1, & a, & a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & \dots \end{array}$$

où $na = a + a + \dots + a$ (répété n fois) et $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (répété n fois). Le cas particulier des carrés, des cubes et des puissances de 10 relève déjà de l'enseignement primaire.

C'est encore au moyen de considérations géométriques (règle graduée, thermomètre), que l'on ressent le mieux le besoin d'introduire les nombres négatifs, à commencer par les multiples entiers négatifs d'une unité :

$$\dots -5u, \quad -4u, \quad -3u, \quad -2u, \quad -u, \quad 0, \quad u, \quad 2u, \quad 3u, \quad 4u, \quad 5u, \quad 6u, \quad 7u \dots$$

Au début du collège, on peut ensuite enchaîner avec les nombres décimaux négatifs et les échelles de mesure « continues ». Le souhait d'étendre la propriété de distributivité de la multiplication aux nombres de signe quelconque permet de déduire la règle des signes pour le produit des nombres positifs et négatifs :

$$a \times (b + (-b)) = a \times b + a \times (-b),$$

et comme le membre de gauche vaut $a \times 0 = 0$ on doit avoir $a \times (-b) = -(a \times b)$.

À la fin du cycle primaire, la pratique sûre de la division posée permet d'observer la périodicité des restes et donc du développement décimal d'une fraction. Ceci est particulièrement apparent sur de nombreuses fractions de petit dénominateur conduisant à une périodicité très courte (dénominateurs tels que 3, 7, 9, 11, 21, 27, 33, 37, 41, 63, 77, 99, 101, 271 (...)) et leurs multiples par 2 et 5, qui conduisent à une période de longueur 6 au plus).

Les nombres réels apparaissent naturellement comme développements décimaux non périodiques avec l'introduction de la racine carrée. Cependant, l'usage prématuré des calculettes lié à l'absence de pratique suffisante du calcul décimal approché « à la main », par exemple des divisions, risque de conduire à une vision pauvre, trop formelle, de

la notion de racine carrée. Il convient absolument que les élèves soient confrontés au problème numérique de l'extraction de la racine carrée, par exemple de $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}(1,4)^2 &= 1,96 & (1,5)^2 &= 2,25 & \text{donc } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5, \\ (1,41)^2 &= 1,9881 & (1,42)^2 &= 2,0164 & \text{donc } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42, \\ (1,414)^2 &= 1,999396 & (1,415)^2 &= 2,002225 & \text{donc } 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \dots\end{aligned}$$

Nous recommandons cette réintroduction dès la cinquième, en même temps que la preuve du théorème de Pythagore, qui met en évidence la nécessité géométrique des racines carrées (bien sûr, ceci suppose en pratique que les graves déficiences du primaire aient été préalablement résolues...).

Lorsque ceci aura été compris, il deviendra possible de donner une définition précise générale de la notion de nombre réel, qui est une bonne occasion d'avoir une première approche implicite de la notion de limite :

(2.3.1) Définition. *Les nombres réels servent à mesurer les grandeurs, avec une précision illimitée. Un nombre réel s'exprime donc par un développement décimal illimité quelconque, non nécessairement périodique, autrement dit une suite $\pm \square\square\dots\square\square, \square\square\square\square\dots$ de chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre infini à droite de celle-ci, précédée du signe + ou du signe - (l'absence de signe signifiant implicitement qu'on met le signe +, sauf pour le nombre zéro $0 = 0,000\dots$ qui n'a pas de signe).*

D'un point de vue géométrique, un nombre réel correspond à un point sur un axe orienté, qui serait positionné à l'aide d'une « règle graduée de précision infinie ».

Nous préconisons de manière très ferme l'enseignement de l'algorithme d'extraction de la racine carrée « à la main », qui, comme tout algorithme effectif, met l'enfant en situation de maîtriser son environnement numérique (et lui fait voir, en la circonstance, l'absence de raison particulière qu'une racine carrée d'un nombre entier possède en général un développement décimal périodique). Ce serait là une excellente consolidation post-primaire de la pratique du calcul posé ; l'expérience montre que les enfants qui maîtrisent bien la division passent très facilement à l'algorithme de la racine carrée (une heure ou deux suffisent), de sorte que cet apprentissage n'engendre aucune perte de temps. Malheureusement, il n'est possible de tester ceci aujourd'hui que sur une fraction infime de la population scolaire, tellement la soupe est devenue insipide et la maîtrise des algorithmes opératoires incertaine...

Pour que la définition (2.3.1) devienne rigoureuse et précise, on doit expliquer aussi les développements décimaux propres et impropres⁽⁴⁾. On fait constater à l'élève que $0,999999\dots = 1$, en effet si $x = 0,999999\dots$, alors $10x = 9,999999\dots$, donc $10x - x = 9$ et ceci conduit à admettre nécessairement que $x = 1$, si on veut que les règles de calcul sur les nombres décimaux continuent à fonctionner sur les développements décimaux illimités. Plus généralement on a par exemple

$$0,34999999\dots = 0,35 = 0,35000000\dots$$

(4) Une fois que cela est fait, la définition (2.3.1) peut être considérée comme une définition formelle parfaitement acceptable des nombres réels – même si celle-ci a l'inconvénient, qui tient plus d'un léger manque d'élégance, de sembler dépendre du choix de la base 10.

Ces observations apparaissent comme des précisions à apporter à la définition (2.3.1) :

(2.3.2) Complément à la définition des nombres réels. *Les nombres décimaux ont deux écritures possibles, l'une finie (ou, ce qui revient au même, comportant une infinité de 0 consécutifs), appelée « développement propre », l'autre sous forme de « développement impropre » avec une infinité de 9 consécutifs et le chiffre précédent réduit d'une unité. Les nombres réels non décimaux n'ont qu'un seul développement décimal illimité.*

Les opérations sur les décimaux permettent de trouver le développement de la somme et du produit de deux nombres réels avec n'importe quelle précision donnée d'avance – donc de calculer la somme et le produit de deux nombres réels, au moins en principe⁽⁵⁾. La relation d'ordre est obtenue en comparant les décimales une à une.

À ce stade, dès la cinquième disons, on devrait pouvoir aboutir aux caractérisations importantes qui suivent (sous réserve que tous les programmes précédents aient été reconstruits de manière solide !):

(2.3.3) Caractérisation des nombres rationnels et décimaux.

- (a) *Un développement décimal représente un nombre rationnel (fraction de nombres entiers) si et seulement si ce développement est périodique à partir d'un certain rang.*
- (b) *Parmi les nombres rationnels, les nombres décimaux sont ceux dont le développement comporte au choix une infinité de 0 consécutifs (« développement décimal propre ») ou une infinité de 9 consécutifs (« développement décimal impropre »).*
- (c) *Les nombres réels non décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement ne comporte pas une suite infinie de décimales consécutives qui sont tous des 0 ou tous des 9; ils ont donc soit une infinité de décimales qui ne sont ni des 0 ni des 9, soit une alternance infinie (éventuellement irrégulière) de 0 et de 9 à partir d'un certain rang.*

Démonstration. (a) En effet, étant donné une fraction p/q simplifiée qui n'est pas un nombre décimal (c'est-à-dire que q a d'autres facteurs premiers que 2 et 5), l'algorithme de division avec virgule de p par q « ne tombe pas juste » et conduit à des restes qui figurent parmi $1, 2, \dots, q-1$. Au bout de $q-1$ étapes au plus après la virgule, on retombe nécessairement sur un reste déjà trouvé, de sorte que le développement est périodique et que la période est au plus de longueur $q-1$. Inversement, si on a un développement périodique, disons de longueur 5, soit par exemple

$$x = 0, 107\mathbf{23114}23114\mathbf{23114}23114\dots,$$

on observe que la division $1 : 99999$ donne

$$\frac{1}{99999} = 0, \mathbf{00001000010000100001}\dots,$$

(5) Pour une justification théorique complète, on a besoin du théorème sur la convergence des suites croissantes majorées de nombres réels, ce qui relève au mieux du lycée, cf. notre texte *Puissances, exponentielles, logarithmes, ...* pour plus de détails.

de sorte que

$$\frac{23114}{99999} = 23114 \times \frac{1}{99999} = 0,23114231142311423114\dots$$

$$\frac{23114}{99999000} = 0,00023114231142311423114\dots$$

En définitive, comme $0,107 = \frac{107}{1000}$, on obtient

$$x = \frac{107}{1000} + \frac{23114}{99999000} = \frac{107 \times 99999 + 23114}{99999000} = \frac{10723007}{99999000}$$

qui est bien un nombre rationnel. Ce procédé de mise en forme de fraction s'étend facilement à tout développement décimal périodique. L'affirmation (b) est seulement une reformulation de la définition (2.5), et (c) lui est équivalente. Le dernier cas de (c) est illustré par exemple par le nombre rationnel $1/11 = 0,09090909\dots$ \square

Toutes ces considérations sont consolidées par l'introduction du calcul algébrique et polynomial, la manipulation des inégalités et des encadrements, les identités remarquables. Il me paraît important de visualiser géométriquement $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$. Il serait utile de distribuer dans toutes les écoles primaires et tous les collèges de France des assemblages de pièces en bois permettant de visualiser $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ (car ce sujet peut même être abordé de manière concrète dès la fin de l'école primaire, à l'occasion de l'introduction des aires et des volumes). L'identité $(10a+b)^2 - 100a^2 = (20a+b)b$ intervient dans la justification de l'algorithme de la racine carrée. À un niveau plus élémentaire (disons au CM2) – et avec une justification seulement géométrique sur des carrés découpés dans du papier millimétré – la formule

$$(10a+5)^2 = 100a(a+1) + 25$$

peut servir au calcul mental efficace de carrés de nombres se terminant par 5 : ainsi $(75)^2 = 5625$, le nombre 56 étant obtenu en faisant $a(a+1) = 7 \times 8$.

3. Premiers pas de l'enseignement de la géométrie au collège

3.1. Concepts fondamentaux

Compte tenu de l'approche que nous souhaitons développer, la notion de longueur et de distance est l'une des notions primitives sur lesquelles nous allons nous appuyer – ceci ne devrait pas poser de difficulté particulière puisqu'il s'agit précisément de l'une des premières notions déjà enseignées à l'école primaire.

Les autres notions primitives sont celle de nombre réel (déjà discutée), et celles de point et d'ensemble de points : un point doit être pensé comme un objet géométrique qui n'a ni étendue ni épaisseur (ou plutôt une épaisseur et une étendue nulles); on en obtient une approximation en représentant une petite croix avec un crayon bien taillé. Une figure géométrique est constitué d'une collection ordonnée finie ou infinie de points –

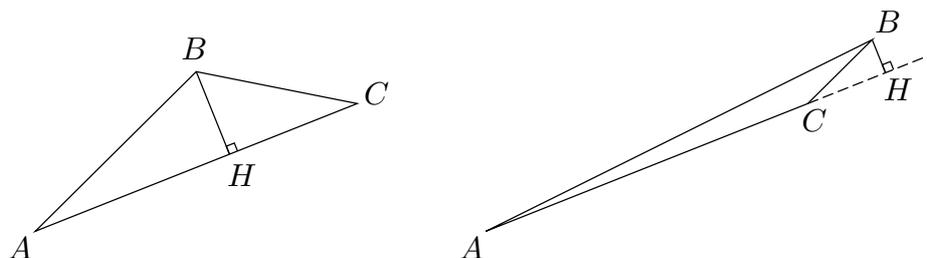
ainsi une ligne continue contient une infinité de points au sens mathématique du terme. Une droite, un plan sont également considérés comme des ensembles infinis de points.

On sera donc amené à raisonner avec les ensembles, et, pour cela, nous recommandons que le symbolisme ensembliste de base soit (ré)introduit dès le début du collège : ensembles définis en extension et en compréhension, notations $x \in E$ (l'élément x appartient à l'ensemble E), $A \subset B$ (l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B), $A \cup B$ (union de A et B), $A \cap B$ (intersection de A et B), $A \setminus B$ (différence ensembliste A moins B). À ce niveau, il s'agit seulement d'un langage et de notations utiles, pas d'une théorie axiomatique...

Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on note $d(A, B)$ (ou encore simplement AB) leur distance, qui est en général un nombre positif, nul si les points A et B sont confondus – concrètement cette distance se mesure avec une règle graduée. La première propriété fondamentale de la distance est la suivante :

3.1.1. Inégalité triangulaire. *Étant donnés trois points A, B, C , les distances vérifient toujours $AC \leq AB + BC$, autrement dit la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

Justification intuitive.



On abaisse la hauteur issue de B sur la droite (AC) et on note H le pied de la hauteur. Si H est situé entre A et C , on a $AC = AH + HC$, et d'autre part, si le triangle n'est pas aplati (c'est-à-dire si $H \neq B$), on a $AH < AB$ et $HC < BC$ (car dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que les deux autres côtés – on le vérifiera plus loin grâce au théorème de Pythagore). Si H est situé en dehors du côté $[A, C]$, disons au delà de C , on a déjà $AC < AH \leq AB$, et donc $AC < AB \leq AB + BC$. \square

Cette justification⁽⁶⁾ montre que l'égalité $AC = AB + BC$ est réalisée si et seulement si les points A, B, C sont alignés et si B est situé entre A et C (dans ce cas, on a $H = B$ sur la partie gauche du dessin ci-dessus). Ceci nous amène aux définitions naturelles suivantes reposant toutes sur la notion de distance, et sur elle seulement⁽⁷⁾.

3.1.2. Définitions (segments, droites, demi-droites).

(a) *Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on appelle segment $[A, B]$ d'extrémités A, B l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$.*

(6) Ce n'est pas une véritable démonstration puisqu'on s'appuie sur des notions non définies et des faits non encore démontrés, par exemple la notion de droite, la perpendicularité, l'existence d'un point de concours d'une droite avec sa perpendiculaire, etc. Ceci viendra après (sans qu'il y ait de cercle vicieux, les justifications auront juste servi à nous amener vers les bonnes définitions!).

(7) Ces définitions sont quant à elles parfaitement licites et rigoureuses, à partir des données primitives que sont les points et leurs distances mutuelles. Elles fonctionneraient encore par exemple en géométrie hyperbolique (ou même en géométrie riemannienne, du moins lorsqu'il y a unicité des géodésiques).

- (b) On dit que trois points A, B, C sont alignés avec B situé entre A et C si $B \in [A, C]$, et on dit qu'ils sont alignés (sans autre précision) si l'un d'eux appartient au segment formé par les deux autres.
- (c) Étant donné deux points distincts A, B , la droite (AB) est l'ensemble des points M alignés avec A et B ; la demi-droite $[A, B)$ d'origine A contenant B est l'ensemble des points M alignés avec A et B tels que M soit situé entre A et B , ou B entre A et M . Deux demi-droites de même origine sont dites opposées si leur réunion forme une droite.

La partie (a) de la définition correspond physiquement à la réalisation d'un segment de droite en tendant un fil mince et léger entre deux points A et B : si le fil est tendu, les points M situés entre A et B ne peuvent pas «dévier», sinon la distance AB est inférieure à la longueur du fil et on peut encore étirer celui-ci...

On peut passer ensuite à la notion d'axe: c'est une droite \mathcal{D} munie d'une origine O et d'une orientation, ce qui revient à choisir parmi les deux points situés à distance unité de O lequel sera représenté par $+1$ et lequel par -1 ; notons les respectivement I et I' . Un point M de $[O, I)$ sera représenté par le réel $x_M = +OM$ et un point M de la demi-droite opposée $[O, I')$ par le réel $x_M = -OM$. La mesure algébrique d'un bipoint (A, B) de cet axe est par définition $\overline{AB} = x_B - x_A$, qui est égal à $+AB$ ou $-AB$ suivant que A, B se suivent dans le sens de l'orientation ou dans le sens inverse. Pour trois points quelconques A, B, C de \mathcal{D} , on a la relation de Chasles

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Elle résulte du fait que $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ après simplification de l'expression algébrique.

À partir de la distance et des notions de segments, droites et demi-droites, nous pouvons maintenant définir rigoureusement et sans difficultés les plans, demi-plans, cercles, arcs de cercle, angles...⁽⁸⁾

3.1.3. Définitions.

- (a) Deux droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont dites concourantes si leur intersection est constituée d'exactly un point.
- (b) Un plan \mathcal{P} est un ensemble de points balayé par les droites (UV) telles que U décrit une droite \mathcal{D} et V une droite \mathcal{D}' , pour des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' concourantes données. Si A, B, C sont 3 points non alignés, on note (ABC) le plan associé par exemple aux droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (AC)$.⁽⁹⁾

(8) Bien entendu, cette longue succession de définitions est juste destinée à exposer l'enchaînement des concepts dans un ordre logique. Devant des élèves, ces définitions doivent être espacées dans le temps au fur et à mesure de l'introduction des notions, et entrecoupées d'illustrations, d'exercices et de travaux de construction avec les instruments.

(9) Ce qu'on entend par ensemble «balayé» par des droites désigne tout simplement la réunion de ces droites (qui sont en nombre infini). De manière générale, on pourrait définir par récurrence sur n un sous-espace affine S_n de dimension n comme l'ensemble balayé par les droites (UV) où U décrit une droite \mathcal{D} et V décrit un sous-espace S_{n-1} de dimension $n-1$ coupant \mathcal{D} en exactement un point. Nos définitions sont valables en toute dimension (même infinie), sans qu'il y ait besoin de préciser!

- (c) Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont dites parallèles si elles sont confondues, ou bien si elles sont contenues dans un même plan \mathcal{P} et ne coupent pas.
- (d) Un angle aigu \widehat{BAC} (ou secteur angulaire aigu) défini par deux demi-droites $[A, B)$, $[A, C)$ de même origine et non opposées est l'ensemble balayé par les segments $[U, V]$ avec $U \in [A, B)$ et $V \in [A, C)$.
- (e) Un angle obtus (ou secteur angulaire obtus) \widehat{BAC} est le complémentaire de l'angle aigu \widehat{BAC} dans le plan (ABC) , auquel on convient d'ajouter les demi-droites $[A, B)$ et $[A, C)$ comme bord.
- (f) Étant donné une droite \mathcal{D} et un point M situé hors de \mathcal{D} , le demi-plan bordé par \mathcal{D} contenant M est la réunion des secteurs angulaires \widehat{BAM} et \widehat{CAM} obtenus en écrivant \mathcal{D} comme réunion de deux demi-droites opposées $[A, B)$ et $[A, C)$; c'est la réunion de tous les segments $[U, V]$ tels que $U \in \mathcal{D}$ et $V \in [A, M)$. Le demi-plan opposé est celui associé à une demi-droite $[A, M')$ opposée à $[A, M)$. On parle aussi dans ce cas d'angles plats de sommet A .
- (g) Dans un plan \mathcal{P} , on appelle cercle de centre A et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} tels que $d(A, M) = AM = R$.
- (h) Un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un secteur angulaire ayant pour sommet le centre du cercle.
- (i) La mesure d'un angle (en degrés) est calculée proportionnellement à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur un cercle dont le centre est le sommet de l'angle, de sorte que le cercle complet corresponde à 360° . Un angle plat (découpé par un demi-plan bordant un diamètre du cercle) correspond à un arc formé par un demi-cercle et a pour mesure 180° . On appelle angle droit la moitié d'un angle plat, c'est-à-dire un angle correspondant à un quart de cercle, ou encore un angle de mesure égale à 90° .
- (j) Deux demi-droites de mêmes extrémités sont dites perpendiculaires si elles forment un angle droit.⁽¹⁰⁾

L'énoncé des propriétés des droites parallèles et des angles correspondants ou alternes-internes permet d'aboutir à la valeur de la somme des angles d'un triangle (puis, à partir de là, d'un quadrilatère).

La définition (i) appelle évidemment de nombreux commentaires. La première est le besoin d'une définition de la longueur d'un arc de cercle, ou plus généralement d'un arc de courbe : c'est la limite (ou encore la borne supérieure) des longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe, lorsqu'on subdivise en segments de plus en plus petits (cf. 2.2)⁽¹¹⁾. La seconde est l'indépendance de la mesure de l'angle par rapport au rayon du cercle choisi (c'est-à-dire par rapport à la taille du rapporteur utilisé comme instrument de mesure); cela résulte de la proportionnalité des longueurs d'arc aux rayons R , qui elle-même résulte du théorème de Thalès (cf. plus loin).

⁽¹⁰⁾ Les notions d'angle plat et d'angle droit, de même que la notion d'angle moitié relèvent déjà du primaire. A ce niveau, la meilleure façon d'aborder ces questions est probablement de pratiquer le pliage de feuilles papier. (La notion d'horizontalité et de verticalité étant des notions relatives, il vaut mieux les éviter pour introduire la perpendicularité, de façon à éviter les confusions probables).

⁽¹¹⁾ La définition précise et l'existence de la limite sont des questions difficiles qui ne peuvent pas être abordées avant le lycée, mais il paraît bon d'introduire déjà ces points de manière intuitive.

Par ailleurs, une règle de trois donne l'expression de la longueur d'arc sur un cercle de rayon R : un arc de 360° a pour longueur $2\pi R$, donc un arc de 1° a pour longueur 360 fois moins, c'est-à-dire $2\pi R/360 = \pi R/180$, et un arc de mesure a (en degrés) a pour longueur

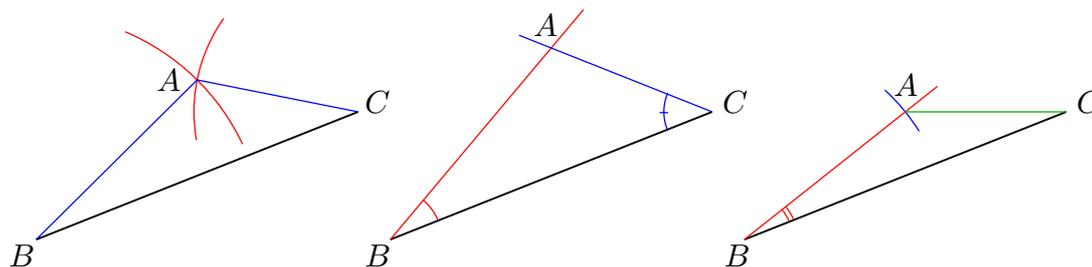
$$\ell = (\pi R/180) \times a = R \times a \times \pi/180.$$

3.2. Construction avec les instruments et cas d'isométrie des triangles

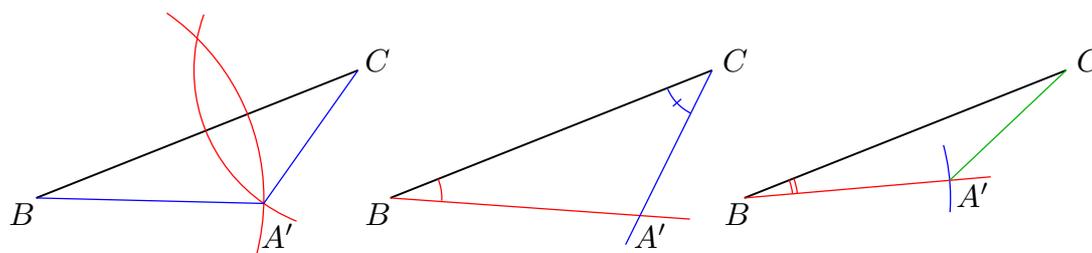
Il est indispensable d'illustrer toutes les notions géométriques introduites à l'aide de dessins et de construction effectuées à l'aide des instruments (règle, compas, rapporteur). Les constructions élémentaires à la règle et au compas, comme celles du milieu, de la médiane, de la bissectrice, devraient déjà relever de l'enseignement primaire. Suivent de près celles de la perpendiculaire et de la parallèle à une droite passant par un point.

Au début du collège, il convient de passer à un niveau de conceptualisation plus avancé et, par exemple, de poser le problème de construire un triangle ABC ayant une base BC donnée et deux autres éléments, à savoir :

- (3.2.1) les longueurs des côtés AB et AC ,
- (3.2.2) les mesures des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} ,
- (3.2.3) la longueur du côté AB et la mesure de l'angle \widehat{ABC} .



Dans le premier cas, on obtient la solution en traçant les cercles de centres B et C et de rayons AB et AC , dans le deuxième cas on utilise le rapporteur pour tracer deux secteurs angulaires de sommets B et C , dans le troisième cas on trace un secteur angulaire de sommet B et un cercle de sommet B . Dans chaque cas on voit qu'il y a exactement deux solutions, le deuxième triangle $A'BC$ solution étant symétrique de ABC par rapport à la droite (BC) :



On voit que les triangles ABC et ABC' ont dans les trois cas les mêmes longueurs de côtés. Ceci conduit à la notion très importante de *figures isométriques*.

3.2.4. Définition.

- (a) On dit que deux triangles sont isométriques si les côtés qui se correspondent sont de mêmes longueurs, de sorte que si le premier triangle a pour sommets A, B, C et les sommets correspondants du deuxième sont A', B', C' , on ait $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.
- (b) Plus généralement on dit que deux figures du plan ou de l'espace sont isométriques, la première étant définie par des points $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$ et la seconde par des points correspondants $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \dots$ si toutes les distances mutuelles $A'_i A'_j = A_i A_j$ coïncident.

La notion de figure isométriques est reliée à la notion physique de *corps solide*: un objet est dit solide si les distances mutuelles de ses composants (molécules, atomes) sont fixes au cours d'un mouvement; après un déplacement, les atomes qui occupaient des point A_i occupent de nouvelles positions A'_i et on a bien $A'_i A'_j = A_i A_j$. Ceci permet d'aboutir à une définition rigoureuse des mouvements et déplacements, qui ont un sens aussi bien du point de vue des mathématiques que de la physique.

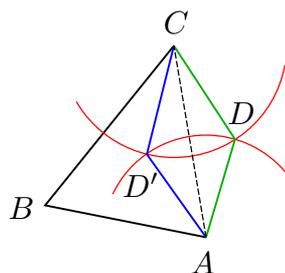
3.2.5. Définition. *Étant donné une figure (ou corps solide de l'espace) défini par les points $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$, on appelle mouvement une succession continue de positions $A_i(t)$ de ces points par rapport au temps t , de telle sorte que les distances $A_i(t)A_j(t)$ soient fixes. Si les points A_i constituent les positions initiales et les A'_i les positions finales, on dit que la figure $(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 \dots)$ est obtenue par déplacement de la figure $(A_1 A_2 A_3 A_4 \dots)$.*⁽¹²⁾

En dehors des déplacements, une autre façon de produire des figures isométriques est d'utiliser une symétrie miroir (symétrie par rapport à une droite dans le plan, symétrie par rapport à un plan dans l'espace)⁽¹³⁾. Ce fait s'observe déjà avec des triangles, et l'utilisation du papier calque s'impose dans ce contexte pour construire des triangles isométriques non superposables par déplacement sans sortir du plan; il sera de même utile de construire des solides élémentaires non superposables (tétraèdres non réguliers, par exemple).

3.2.6. Exercice. Pour que deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ soient isométriques, il ne suffit pas que les 4 côtés $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'D' = CD$, $D'A' = DA$ soient de mêmes longueurs, on doit aussi supposer que les deux diagonales $A'C' = AC$ et $B'D' = BD$ soient égales; une seule ne suffit pas comme le montre la construction ci-dessous :

(12) La notion de continuité utilisée est ici la notion usuelle de fonction continue d'une variable – on ne peut bien sûr en parler que de manière intuitive au niveau du collège. On démontrera plus loin qu'une isométrie entre deux figures ou corps solides s'étend en une isométrie affine de tout l'espace, et qu'un déplacement correspond à une isométrie affine positive, cf. section 10. La preuve n'est pas extrêmement difficile, mais ne peut pas être donnée avant la fin du lycée (cette éventualité paraît même optimiste au vu de la situation actuelle).

(13) Inversement, un théorème important – qu'on ne pourra démontrer que plus tard (cf. section 10), affirme que des figures isométriques se déduisent l'une de l'autre soit par un déplacement, soit par un déplacement précédé (ou suivi) d'une symétrie miroir.



Le travail de construction fait plus haut avec les triangles nous amène à énoncer en conclusion les cas d'isométrie des triangles.

3.2.7. Les cas d'isométrie des triangles⁽¹⁴⁾. *Pour que deux triangles soient isométriques, il faut et il suffit*

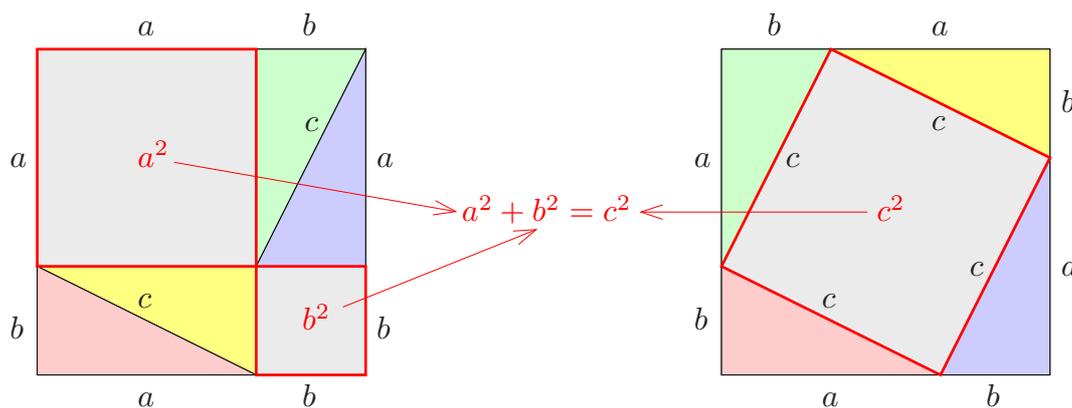
- (a) *qu'ils aient leurs trois côtés égaux (c'est la définition), ou*
- (b) *qu'ils aient un angle égal et les côtés adjacents égaux, ou*
- (c) *qu'ils aient un côté égal et les deux angles adjacents égaux.*

On notera que les conditions (b) et (c) ne sont pas suffisantes si on omet le mot adjacent – et il serait bon de montrer (ou de faire faire) des constructions mettant ce fait en évidence.

L'utilisation des cas d'isométrie en conjonction avec les propriétés des angles alternes-internes permet de démontrer les diverses caractérisations usuelles des quadrilatères (parallélogrammes, losanges, rectangles, carrés).

3.3. Le théorème de Pythagore

Voici une « preuve » très classique du théorème de Pythagore, obtenue par simple déplacement des pièces triangulaires colorées. Elle a l'avantage d'être à la fois visuelle et convaincante⁽¹⁵⁾.



(14) La démonstration formelle rigoureuse des propriétés d'isométrie décrites dans les 3 cas ne pourra être véritablement donnée qu'un peu plus loin, cf. section 8.

(15) De nouveau, dans notre contexte, il s'agit davantage que d'une justification que d'une preuve au sens formel. En effet, il faudrait prouver que le quadrilatère central de la figure de droite est bien un carré, ce qui peut certes se vérifier à l'aide des propriétés d'isométrie des triangles – mais n'oublions pas que celles-ci ne sont pas encore démontrées à ce stade. Plus sérieusement, le raisonnement utilise la notion d'aire, et il faudrait montrer l'existence d'une mesure d'aire dans le plan ayant toutes les propriétés voulues d'additivité et d'invariance par translation...

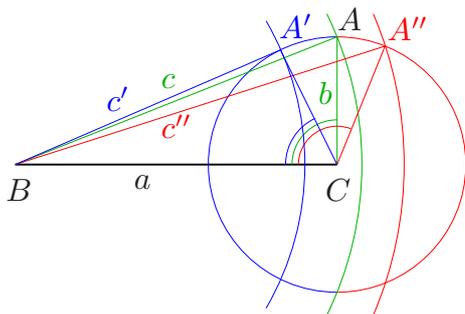
On compare, sur les dessins de droite et de gauche, l'aire de la différence entre le carré de côté $a + b$ et les quatre triangles rectangles colorés de côtés a, b, c , aire qui est représentée en gris. L'égalité des aires de part et d'autre implique $a^2 + b^2 = c^2$.

Complément. Soit (ABC) un triangle et a, b, c les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C .

(1) Si l'angle \widehat{C} est inférieur à un angle droit, on a $c^2 < a^2 + b^2$.

(2) Si l'angle \widehat{C} est supérieur à un angle droit, on a $c^2 > a^2 + b^2$.

Démonstration. Considérons le cas où (ABC) est rectangle : on a $c^2 = a^2 + b^2$.



Si l'angle \widehat{C} est $< 90^\circ$, on a $c' < c$.

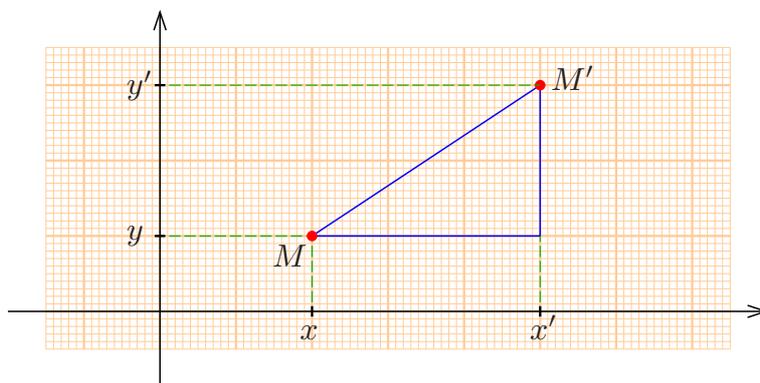
Si l'angle \widehat{C} est $> 90^\circ$, on a $c'' > c$.

Réciproque du théorème de Pythagore. D'après ce qui précède, si $c^2 = a^2 + b^2$, alors l'angle \widehat{C} ne peut être qu'un angle droit, donc le triangle est rectangle en C .

4. Coordonnées cartésiennes dans le plan

L'étape complémentaire indispensable est l'introduction des coordonnées cartésiennes et leur usage pour démontrer les propriétés précédemment admises (ou seulement justifiées de manière partielle), en travaillant dans des repères orthonormés.

4.1. Expression de la distance euclidienne



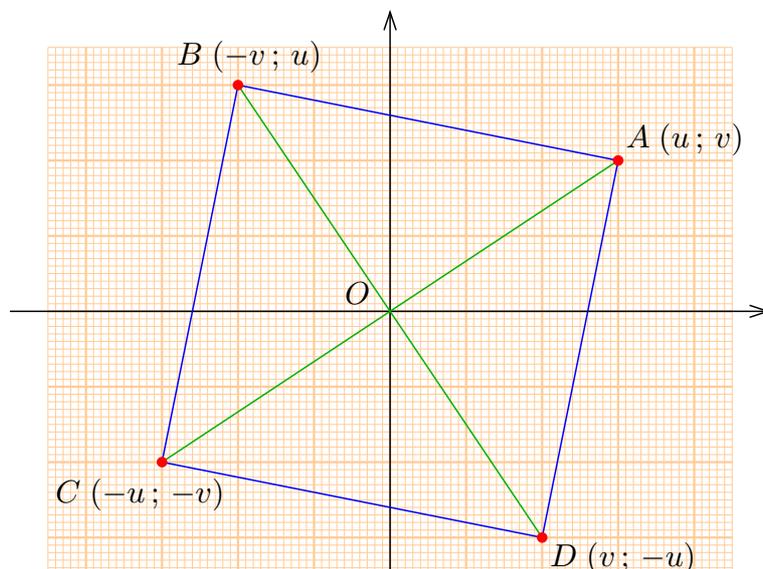
Le théorème de Pythagore montre que l'hypoténuse MM' est donnée par la formule $MM'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, puisque les deux côtés de l'angle droit sont $x' - x$ et $y' - y$ (au signe près). La distance de M à M' est donc

$$(4.1.1) \quad d(M, M') = MM' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

(on commencera évidemment par le cas de points donnés par des valeurs numériques concrètes).

4.2. Le carré

Considérons la figure formée par les points $A(u; v)$, $B(-v; u)$, $C(-u; -v)$, $D(v; -u)$.



La formule (4.1.1) donne

$$AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2 + v^2),$$

donc les 4 côtés sont de longueur égale à $\sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}$. De même on trouve

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{u^2 + v^2},$$

par conséquent les 4 triangles isocèles OAB , OBC , OCD et ODA sont isométriques, ce qui implique que $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODA} = 90^\circ$ et que les autres angles valent 45° . On a donc $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$, et la figure est bien un carré.

4.3. Droites « horizontales et verticales »

L'ensemble \mathcal{D} des points $M(x; y)$ tels que $y = c$ (où c une constante numérique donnée) est une droite « horizontale ». En effet, étant donnés trois points M, M', M'' d'abscisses $x < x' < x''$ on a

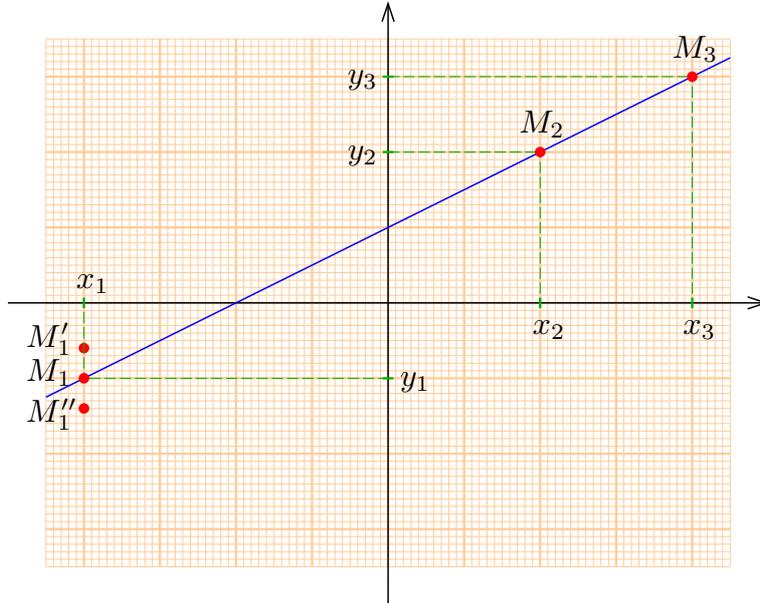
$$MM' = x' - x, \quad M'M'' = x'' - x', \quad MM'' = x'' - x$$

et donc $MM' + M'M'' = MM''$, ce qui implique que les points M, M', M'' sont alignés par définition. Si on considère \mathcal{D}_1 d'équation $y = c_1$ avec $c_1 \neq c$, c'est une autre droite horizontale et on a de façon évidente $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$, donc il s'agit de droites parallèles.

De même, l'ensemble \mathcal{D} des points $M(x; y)$ tels que $x = c$ est une « droite verticale » et les droites $\mathcal{D} : x = c$, $\mathcal{D}_1 : x = c_1$ sont parallèles.

4.4. Droite définie par une équation $y = ax + b$

Nous commencerons par le cas général $y = ax + b$ pour éviter des redites, mais avec les élèves il conviendrait sans doute de traiter d'abord le cas $y = ax$ qui correspond à la proportionnalité.



Considérons trois points $M_1 (x_1; y_1)$, $M_2 (x_2; y_2)$, $M_3 (x_3; y_3)$ satisfaisant les relations $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ et $y_3 = ax_3 + b$, avec par exemple $x_1 < x_2 < x_3$. Comme $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, on trouve

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + a^2)} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

et de même $M_2M_3 = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$, $M_1M_3 = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$. Ceci montre que $M_1M_2 + M_2M_3 = M_1M_3$, donc les points M_1, M_2, M_3 sont alignés. On voit d'autre part⁽¹⁶⁾ que si on prend un point $M'_1 (x, y'_1)$ qui est tel que $y'_1 > ax_1 + b$ alors ce point n'est pas aligné avec M_2 et M_3 , et de même pour $M''_1 (x, y''_1)$ tel que $y''_1 < ax_1 + b$.

Conséquence. *L'ensemble \mathcal{D} des points $M (x; y)$ tels que $y = ax + b$ est une droite.*

On appelle pente de la droite \mathcal{D} le rapport entre la «dénivellation verticale» et la «distance parcourue horizontalement», c'est-à-dire, pour deux points $M_1 (x_1; y_1)$, $M_2 (x_2; y_2)$ de \mathcal{D} le rapport

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Pour une droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$, le coefficient a s'interprète donc comme la pente de la droite (on l'appelle aussi parfois le «coefficient directeur» de \mathcal{D} .) Une droite horizontale est une droite de pente $a = 0$.

(16) La démonstration formelle rigoureuse est bien entendu possible à partir d'un calcul de distances, mais moins évidente que ce qui précède. On pourrait raisonner comme en § 5.2 pour changer de repère et se ramener à la droite $Y = 0$.

Lorsque le coefficient a devient très grand, la droite devient intuitivement très inclinée et de plus en plus proche d'une verticale. On conviendra qu'une droite verticale est de pente infinie. L'infini se note par le symbole ∞ .

Considérons deux points distincts $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, on voit qu'il existe une unique droite $\mathcal{D} : y = ax + b$ qui passe par M_1 et M_2 : la pente est donnée par $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et on trouve ensuite nécessairement $b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$. Si $x_1 = x_2$, l'unique droite \mathcal{D} passant par M_1, M_2 est la droite verticale d'équation $x = x_1$.

4.5. Intersection de deux droites définies par des équations

Considérons deux droites $\mathcal{D} : y = ax + b$ et $\mathcal{D}' : y = a'x + b'$. Pour trouver l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ on écrit que $y = ax + b = a'x + b'$, ce qui donne $(a' - a)x = -(b' - b)$, donc si $a \neq a'$ on trouve un point d'intersection unique $M(x; y)$ tel que

$$x = -\frac{b' - b}{a' - a}, \quad y = ax + b = \frac{-a(b' - b) + b(a' - a)}{a' - a} = \frac{ba' - ab'}{a' - a}.$$

L'intersection de \mathcal{D} avec une droite verticale $\mathcal{D}_1 : x = c$ est encore unique, on a immédiatement $x = c, y = ac + b$. Nous pouvons conclure :

Théorème. *Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ayant des pentes a, a' distinctes possèdent un point d'intersection unique : on dit qu'elles sont concourantes.*

Au contraire, si $a = a'$ et si de plus $b \neq b'$, il n'y a pas de solution possible, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$, il s'agit de droites parallèles distinctes. Si $a = a'$ et $b = b'$, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont égales, on les considère encore comme parallèles.

Conséquence 1. *Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' de pentes a, a' sont parallèles si et seulement si leurs pentes sont identiques (finies ou infinies).*

Conséquence 2. *Si \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{D}' et si \mathcal{D}' est parallèle à \mathcal{D}'' , alors \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{D}'' .*

Démonstration. En effet, si $a = a'$ et $a' = a''$, alors $a = a''$. □

On obtient enfin l'énoncé suivant qui n'est autre que le « postulat d'Euclide » (dans notre approche, il s'agit bien d'un théorème quasi-évident, et non d'un postulat !)

Conséquence 3. *Étant donné une droite \mathcal{D} et un point M_0 , il y a une unique droite \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} qui passe par M_0 .*

Démonstration. En effet, si \mathcal{D} est de pente a et si $M_0(x_0; y_0)$, on voit que

- pour $a = \infty$, l'unique droite possible est la droite \mathcal{D}' d'équation $x = x_0$
- pour $a \neq \infty$, la droite \mathcal{D}' a pour équation $y = ax + b$ avec $b = y_0 - ax_0$, autrement dit : \mathcal{D}' est l'unique droite d'équation $\mathcal{D}' : y - y_0 = a(x - x_0)$.

4.6. Condition d'orthogonalité de deux droites

Considérons une droite passant par l'origine $\mathcal{D} : y = ax$. Choisissons un point $M(u; v)$ situé sur \mathcal{D} , $M \neq O$, c'est-à-dire $u \neq 0$. On a alors $a = \frac{v}{u}$. On sait que le point

$M'(u'; v') = (-v; u)$ est tel que les droites $\mathcal{D} = (OM)$ et (OM') sont perpendiculaires d'après la construction du carré faite au paragraphe 4.2. Par conséquent, la pente de la droite $\mathcal{D}' = (OM')$ perpendiculaire à \mathcal{D} est donnée par

$$a' = \frac{v'}{u'} = \frac{u}{-v} = -\frac{u}{v} = -\frac{1}{a}$$

si $a \neq 0$. Si $a = 0$, la droite \mathcal{D} est l'axe horizontal, sa perpendiculaire est l'axe vertical de pente infinie, et la formule $a' = -\frac{1}{a}$ est encore vraie si on convient que $\frac{1}{0} = \infty$ (on utilise ici un infini ∞ dépourvu de signe).

Conséquence 1. Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' de pentes a, a' sont perpendiculaires si et seulement si leurs pentes vérifient la relation $a' = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{a'}$ (on convient ici que $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$).

Conséquence 2. Si $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}''$ alors \mathcal{D} et \mathcal{D}'' sont parallèles.

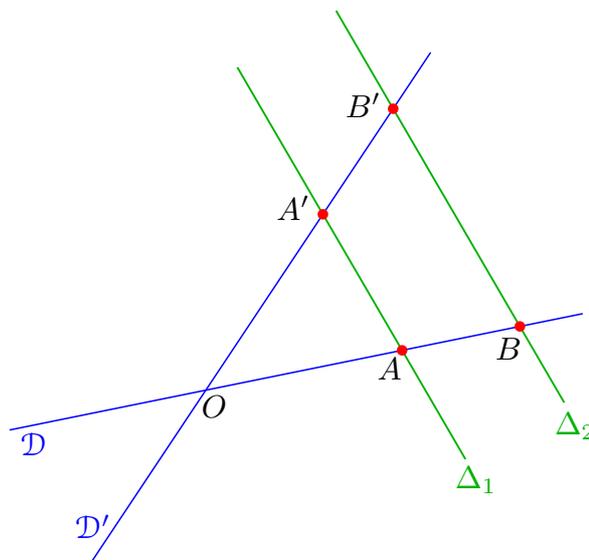
Démonstration. En effet les pentes vérifient $a = -\frac{1}{a'}$ et $a'' = -\frac{1}{a'}$, donc $a'' = a$. \square

4.7. Le théorème de Thalès

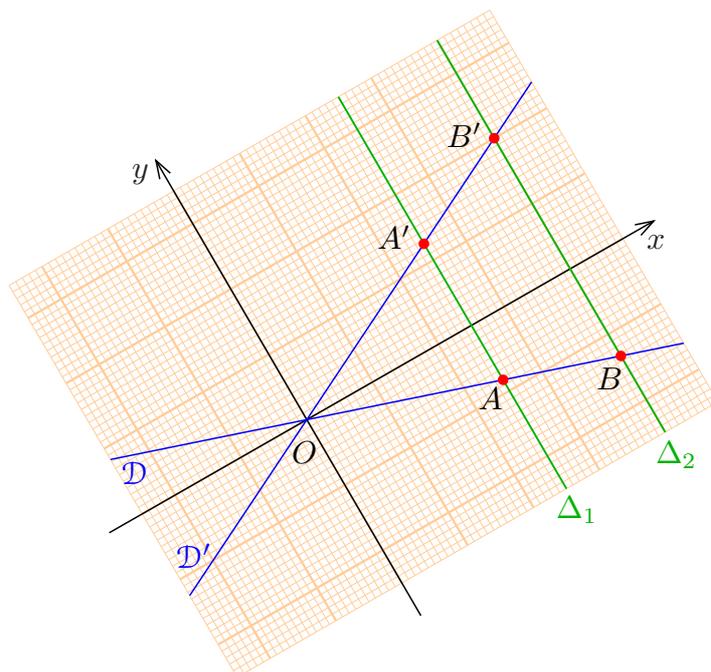
Nous énoncerons d'abord la « version euclidienne » du théorème, qui s'exprime en termes de rapports de distances plutôt que de rapports de mesures algébriques.

Théorème de Thalès. On considère deux droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ concourantes en un point O , et deux droites parallèles Δ_1, Δ_2 qui coupent \mathcal{D} en des points A, B , et \mathcal{D}' en des points A', B' supposés tous distincts de O . Alors on a les égalités de rapports

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}.$$



Démonstration. On procède à l'aide d'un calcul en coordonnées, en utilisant un repère orthonormé d'origine O tel que Ox soit perpendiculaire aux droites Δ_1, Δ_2 , et tel que Oy soit parallèle aux droites Δ_1, Δ_2 .



Dans ces coordonnées, les droites Δ_1 , Δ_2 sont les droites « verticales » d'équations $\Delta_1 : x = c_1$, $\Delta_2 : x = c_2$ avec $c_1, c_2 \neq 0$, et les droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' admettent des équations respectives $\mathcal{D} : y = ax$, $\mathcal{D}' : y = a'x$. On obtient alors

$$A(c_1, ac_1), \quad B(c_2, ac_2), \quad A'(c_1, a'c_1), \quad B'(c_2, a'c_2).$$

D'après le théorème de Pythagore, on trouve, en prenant les valeurs absolues :

$$OA = |c_1|\sqrt{1+a^2}, \quad OB = |c_2|\sqrt{1+a^2}, \quad OA' = |c_1|\sqrt{1+a'^2}, \quad OB' = |c_2|\sqrt{1+a'^2}, \\ AA' = |(a' - a)c_1|, \quad BB' = |(a' - a)c_2|.$$

On a $a' \neq a$ puisque \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont concourantes par hypothèse, donc $a' - a \neq 0$, et on voit alors facilement que

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{|c_2|}{|c_1|}. \quad \square$$

De manière plus précise, si on choisit des orientations sur \mathcal{D} , \mathcal{D}' pour en faire des axes et des orientations de même sens sur Δ_1 , Δ_2 , on voit qu'on a en fait les égalités de rapports de mesures algébriques

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

Réciproque du théorème de Thalès. Soient \mathcal{D} , \mathcal{D}' des droites concourantes en O . Si Δ_1 est concourante à \mathcal{D} , \mathcal{D}' en A, A' distincts, si Δ_2 est concourante à \mathcal{D} , \mathcal{D}' en B, B' distincts et si

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

alors Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

Démonstration. La preuve s'obtient aisément en considérant la parallèle δ_2 à Δ_1 qui passe par B , et son intersection β' avec \mathcal{D}' . On voit alors que $\overline{O\beta'} = \overline{OB'}$, donc $\beta' = B'$ et $\delta_2 = \Delta_2$, de sorte que $\Delta_2 = \delta_2 // \Delta_1$. \square

4.8. Conséquences des théorèmes de Thalès et Pythagore

La conjonction des cas d'isométries des triangles et des théorèmes de Thalès et Pythagore permet (très classiquement) d'établir de nombreux théorèmes de géométrie euclidienne. Une notion importante est celle de similitude.

Définition. Deux figures $(A_1A_2A_3A_4 \dots)$ et $(A'_1A'_2A'_3A'_4 \dots)$ sont dites semblables dans le rapport k ($k > 0$) si on a $A'_iA'_j/A_iA_j = k$ pour tous les segments $[A_i, A_j]$ et $[A'_i, A'_j]$ en correspondance.

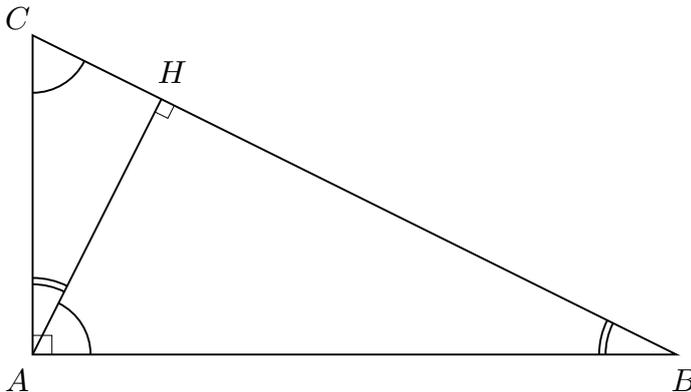
Un cas important de similitude est obtenu au moyen d'une homothétie de centre un point O donné : si O est choisi comme origine et si au point $M(x; y)$ on associe le point $M'(x'; y')$ tel que $x' = kx$, $y' = ky$, alors la formule (4.1.1) montre que l'on a $A'B' = |k|AB$, donc en associant à tout point A_i le point correspondant A'_i on obtient des figures semblables dans le rapport $|k|$; on parle de figures homothétiques de rapport k ; ce rapport peut être positif ou négatif (si $k = -1$ par exemple, il s'agit d'une symétrie de centre O). Les cas d'isométrie des triangles conduisent directement aux cas de similitudes.

Critères de similitude des triangles. Pour que deux triangles soient semblables, il faut et il suffit que l'un des cas suivants soit réalisé :

- (a) les trois côtés sont proportionnels dans un certain rapport $k > 0$ (c'est la définition);
- (b) les triangles ont un angle égal et les côtés adjacents proportionnels;
- (c) les triangles ont deux angles égaux.

Une bonne application des cas de similitude consiste à énoncer et démontrer les relations métriques dans le triangle rectangle : si le triangle ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A , on a les relations classiques

$$AB^2 = BH \cdot BC, \quad AC^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH, \quad AB \cdot AC = AH \cdot BC.$$



En effet (par exemple) la similitude des triangles rectangles ABH et ABC conduit à l'égalité de rapports

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \implies AB^2 = BH \cdot BC.$$

On aboutit aussi à la définition des cos, sin et tan d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Définition. *Étant donné un triangle ABC rectangle en A , on définit*

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}, \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}, \quad \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}.$$

Les rapports ne dépendent en effet que de l'angle \widehat{ABC} (qui détermine aussi l'angle complémentaire $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ABC}$), puisque des triangles rectangles qui ont un angle autre que l'angle droit égal sont toujours semblables d'après le critère (c). Le théorème de Pythagore permet d'aboutir au calcul des valeurs de cos, sin, tan pour les angles remarquables 0° , 30° , 45° , 60° , 90° .

4.9. Calcul d'aires et de volumes

Il est possible – et donc probablement souhaitable – de justifier les principales formules usuelles concernant les aires et volumes de solides usuels (cylindres, pyramides, cônes, sphère), en utilisant seulement les théorèmes de Thalès et Pythagore et des raisonnements géométriques très simples⁽¹⁷⁾. Nous indiquons ici comment on peut procéder – les raisonnements sont proches de ceux que connaissaient déjà Archimède plus de deux siècles avant JC (reformulés avec les notations algébriques modernes).

Volume d'un cône de base quelconque

Nous commencerons par étudier le volume d'un cône dont la base B est un domaine plan borné quelconque. On note \mathcal{P} le plan contenant cette base B et on considère un point O situé en dehors du plan \mathcal{P} .

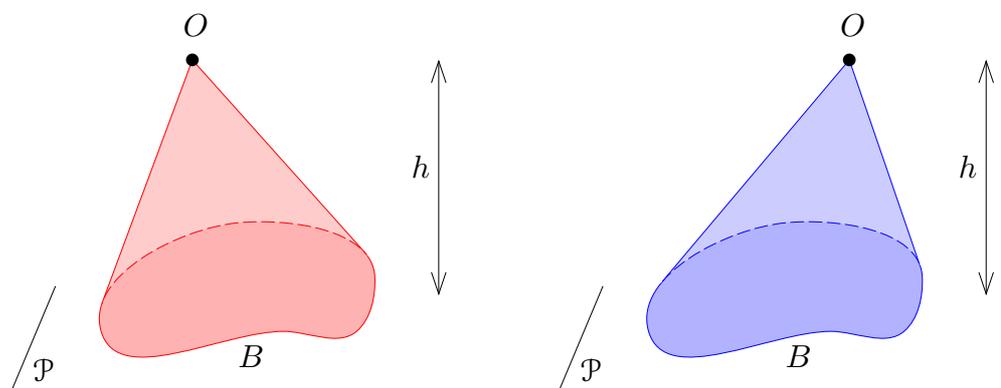
Définition. *Le cône de sommet O et de base B est la réunion des segments $[O, M]$ issus de O et d'extrémités $M \in B$. La hauteur h du cône est la distance du point O au plan \mathcal{P} qui contient B .*

Dans le cas où la base B est un disque, on parle de *cône circulaire* (droit ou oblique), lorsque la base est un triangle, le cône est un *tétraèdre*, et lorsque la base est un carré ou un rectangle, le cône est une *pyramide* (droite ou oblique).

On fait l'hypothèse qu'on peut calculer l'aire A de la base B (ce qui veut dire qu'en utilisant des quadrillages assez fins, l'aire approximative obtenue en comptant le nombre de carrés du quadrillage tend vers une limite quand le côté de ces carrés tend vers 0).

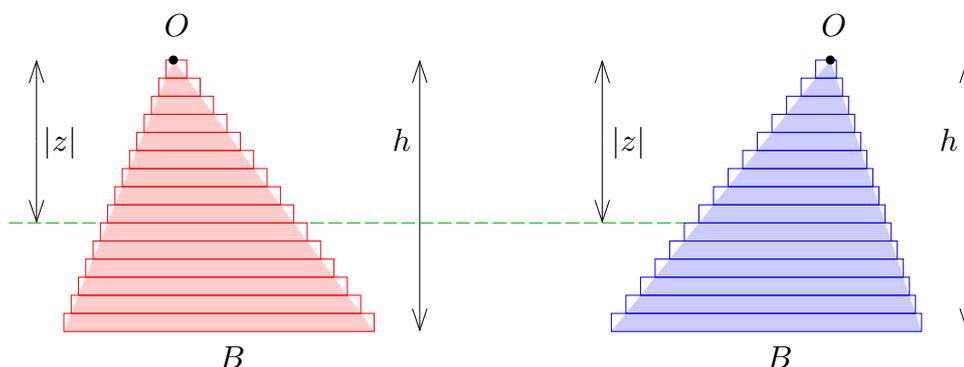
⁽¹⁷⁾ Nous parlons ici de « justification » plutôt que de démonstration parce que les fondements théoriques nécessaires (à savoir la théorie de la mesure) manquent – et manqueront sans doute encore pour 5 ou 6 années ou plus. Mais en réalité, on pourra s'apercevoir que ces justifications peuvent être rendues parfaitement rigoureuses une fois que les fondements considérés ici comme intuitifs seront rigoureusement établis. Il serait par exemple possible de prendre la formule (11.3) comme définition rigoureuse de la mesure p -dimensionnelle.

Si on choisit le sommet O comme origine et des coordonnées telles que le plan \mathcal{P} soit horizontal et situé « plus bas que O », alors \mathcal{P} s'écrit comme le plan d'équation $z = -h$. Une première observation importante est la suivante :



(4.9.1) *Le volume V du cône ne dépend que de la base B et de la hauteur h , mais pas de la position relative de O et de B (autrement dit, si on déplace B horizontalement par rapport à O , le volume ne change pas).*

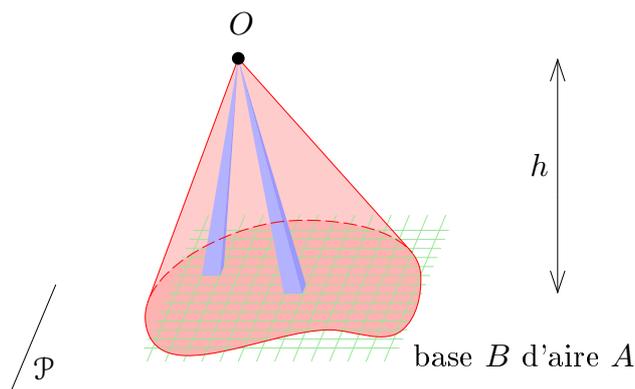
Pour démontrer (4.9.1), on découpe les deux cônes en tranches horizontales assez fines, comme figuré sur le dessin ci-après :



Si on remplace les tranches par des cylindres de parois latérales verticales (et dont les bases sont homothétiques à la base B dans le rapport $|z|/h$, comme sur le schéma ci-dessus), on commet une petite erreur, puisque les volumes calculés deviennent un peu supérieur à ceux des cônes ; cependant l'erreur devient de plus en plus petite quand le nombre de tranches augmente. Or, il est évident que les volumes des deux empilements de pièces cylindriques sont identiques, puisque celles-ci ont simplement été glissées horizontalement les unes par rapport aux autres.

La deuxième observation est la suivante :

(4.9.2) *La hauteur h étant donnée, le volume V du cône est proportionnel à l'aire A de la base B .*

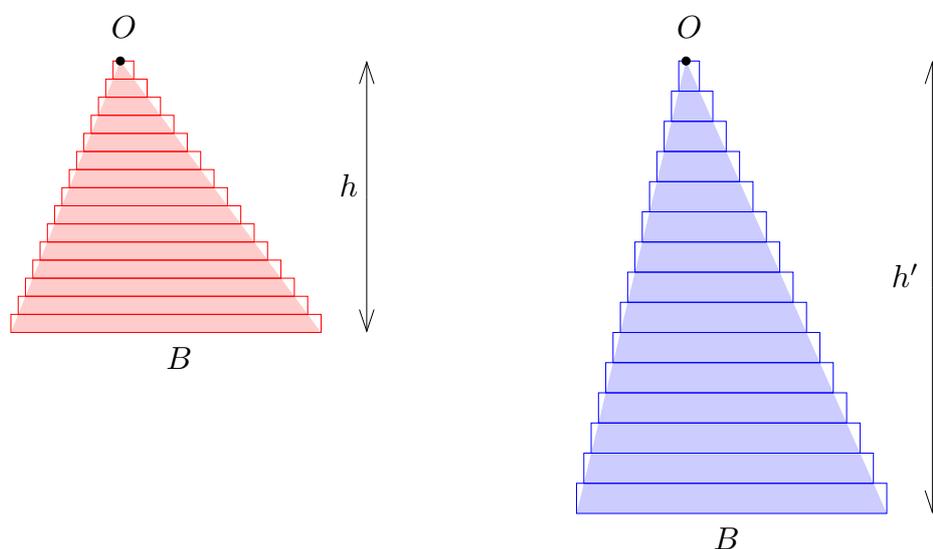


En effet, on peut calculer une valeur approchée de l'aire A de la base à l'aide d'un quadrillage, mais alors il résulte de (4.9.1) que le volume de toutes les pyramides obliques s'appuyant sur les différents carrés du quadrillage est le même. Ceci montre que le volume total de toutes ces pyramides est proportionnel au nombre n de carrés de quadrillage, et donc, à la limite, que le volume V du cône est proportionnel à l'aire A de la base.

Voici la troisième observation :

(4.9.3) *La base B étant donnée, le volume V du cône est proportionnel à la hauteur h .*

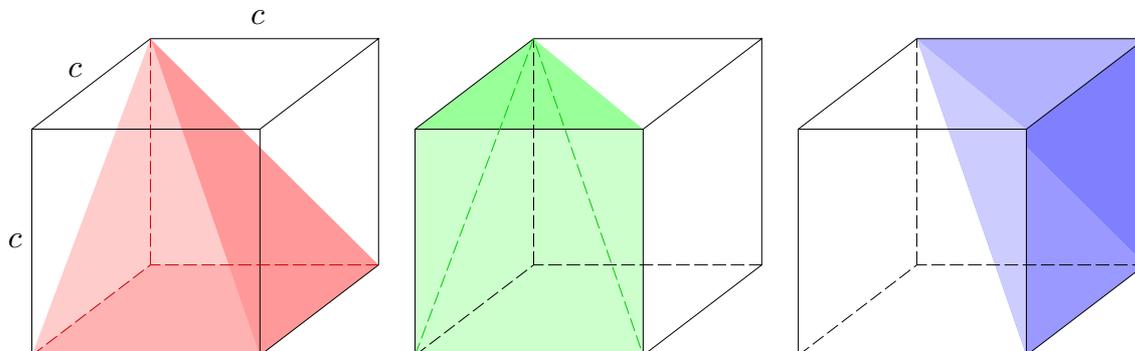
Pour démontrer cette propriété, on considère deux cônes ayant la même base B et des hauteurs h, h' différentes, et on évalue leurs volumes approchés à l'aide de tranches cylindriques :



Pour réaliser le deuxième cône, on dilate verticalement chaque pièce cylindrique dans le rapport h'/h . Comme le volume d'un cylindre est le produit de l'aire de sa base par la hauteur, on voit que le volume du deuxième empilement est proportionnel au premier dans le rapport h'/h . À la limite, quand les tranches deviennent de plus en plus fines, ceci démontre bien que le rapport des volumes des cônes vérifie $V'/V = h'/h$.

La quatrième et dernière étape est le calcul du volume d'une pyramide : on commence

par le cas d'une pyramide dont la base est un carré de côté c et dont la hauteur vaut aussi $h = c$. Le schéma suivant montre qu'on peut remplir le cube de côté c avec 3 pyramides isométriques de ce type (il serait utile de les construire et de vérifier qu'elles s'assemblent en un cube !)



Le volume de chacune des 3 pyramides figurées ci-dessus vaut donc le tiers de celui du cube, soit $V = \frac{1}{3}c^3$. Pour une pyramide de base carrée $A = c^2$ et de hauteur h quelconque, le volume doit être multiplié par h/c d'après (4.9.3), donc le volume vaut dans ce cas

$$V = \frac{h}{c} \times \frac{1}{3}c^3 = \frac{1}{3}c^2h.$$

Pour une base B quelconque, on utilise maintenant un quadrillage de la base comme dans la preuve de (4.9.2). Si n est le nombre de carrés de côté c contenus dans la base B , l'aire A de la base vaut approximativement $A \approx nc^2$ et on a donc

$$V \approx n \times \frac{1}{3}c^2h = \frac{1}{3}(nc^2)h \approx \frac{1}{3}Ah.$$

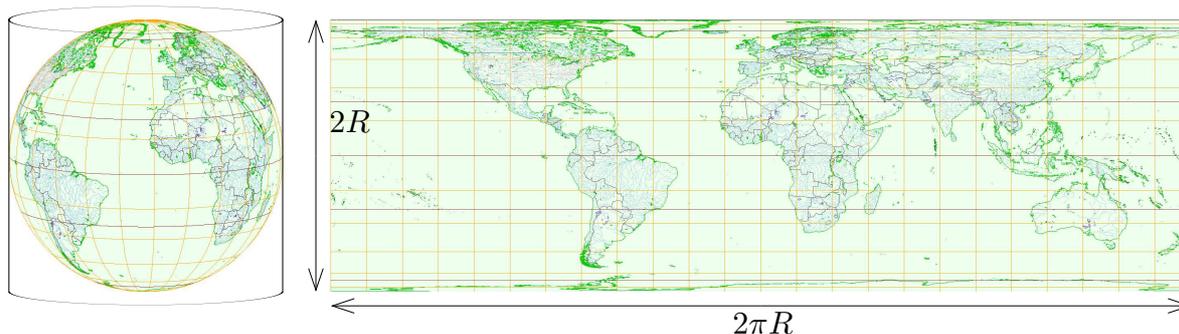
L'approximation devient de meilleure en meilleure quand le côté c tend vers 0, et à la limite, on voit que le volume d'un cône quelconque est donné par

$$(4.9.4) \quad V = \frac{1}{3}Ah.$$

Calcul de l'aire d'une sphère de rayon R

Comme deux sphères de même rayon sont isométriques, l'aire dépend uniquement du rayon R . Fixons le centre O de la sphère comme origine, et considérons le cylindre « vertical » tangent à la sphère le long de son équateur (donc de rayon égal à R), et plus précisément, la partie du cylindre comprise entre les plans horizontaux $z = -R$ et $z = R$. On effectue une projection de la sphère sur le cylindre : pour tout point M de la sphère on considère son projeté M' sur le cylindre qui est l'intersection de celui-ci avec la droite \mathcal{D}_M horizontale passant par M et s'appuyant sur l'axe Oz .

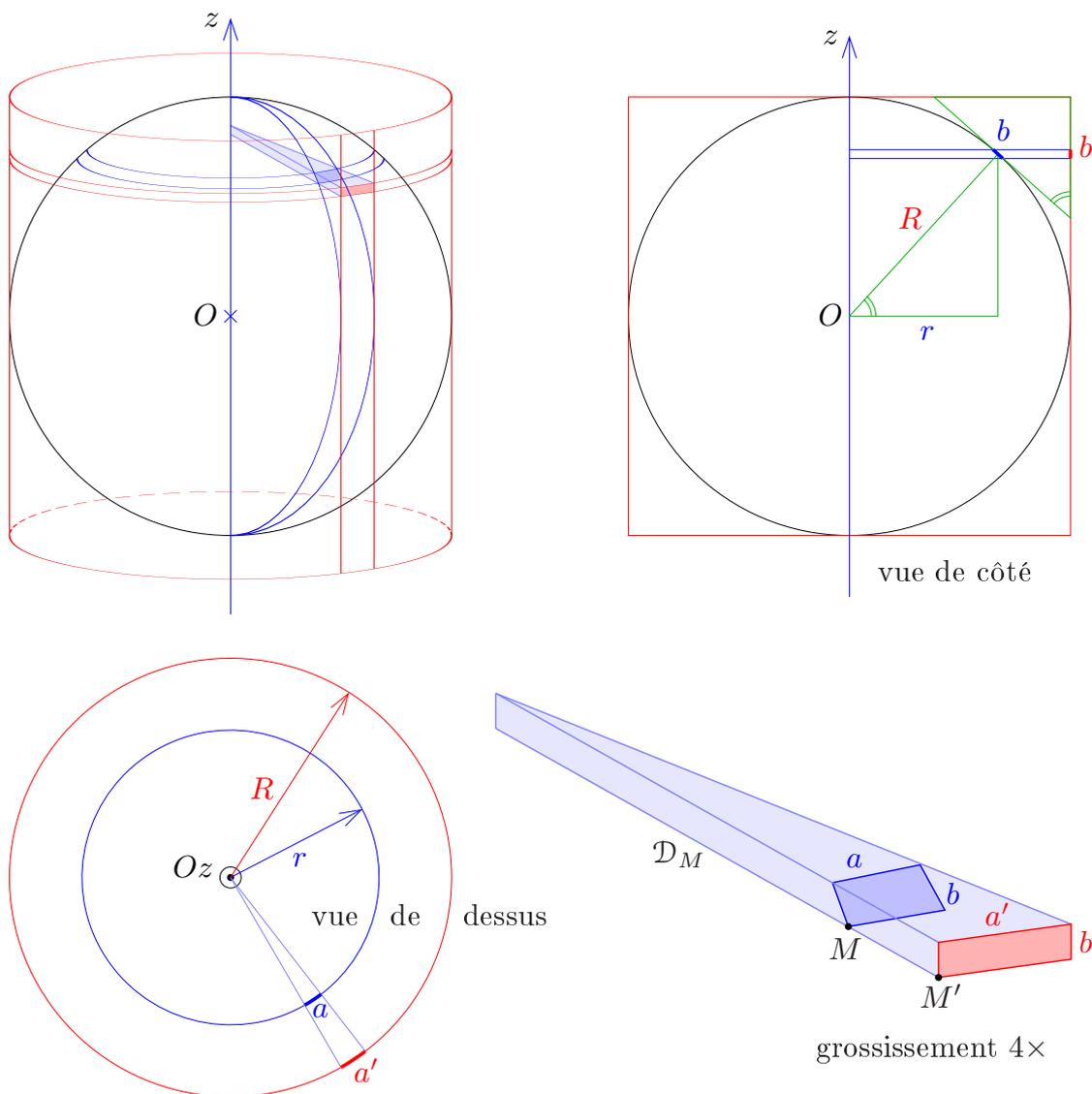
Cette projection est un mode de représentation cartographique assez courant du globe terrestre : après avoir coupé le cylindre le long du méridien de longitude 180° et déroulé celui-ci en un rectangle, on obtient ainsi la carte suivante de la Terre.



On va démontrer que la projection cylindrique conserve les aires, donc que l'aire de la sphère est égale à celle de la carte rectangulaire de côtés $2R$ et $2\pi R$:

$$(4.9.5) \quad A = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2.$$

Pour vérifier l'égalité des aires, on considère un « champ rectangulaire » délimité par les parallèles et méridiens, de dimensions très petites par rapport à celle de la sphère, de sorte qu'on puisse l'assimiler à une surface plane, c'est-à-dire à un véritable rectangle (sur la Terre par exemple, on ne s'aperçoit pas de la rotondité du globe à une échelle de quelques dizaines ou centaines de mètres).



Soient a, b les côtés du « champ rectangulaire » respectivement dans la direction des parallèles et des méridiens, et a', b' les côtés du rectangle correspondant, projeté sur le cylindre.

Dans la vue de dessus, le théorème de Thalès donne aussitôt

$$\frac{a'}{a} = \frac{R}{r}.$$

Dans la vue de côté, les deux triangles rectangles figurés en vert sont homothétiques (ils ont un angle égal, car les côtés adjacents sont deux à deux perpendiculaires). En appliquant de nouveau le théorème de Thalès à chacun de ces deux triangles et en comparant les côtés adjacents aux angles égaux, on obtient

$$\frac{b'}{b} = \frac{\text{petit côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{r}{R}.$$

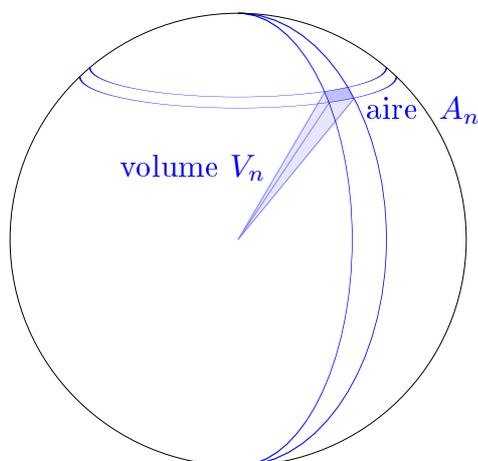
Le produit de ces deux égalités donne

$$\frac{a' \times b'}{a \times b} = \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} = \frac{R}{r} \times \frac{r}{R} = 1.$$

On en déduit que les aires des rectangles $a \times b$ et $a' \times b'$ sont égales, ce qui entraîne que la projection cylindrique conserve les aires, et donc en particulier que la formule (4.9.5) est bien vraie.

Volume d'une boule de rayon R

Pour obtenir le volume d'une boule⁽¹⁸⁾ de rayon R , on utilise un quadrillage de la sphère par méridiens et parallèles, et on calcule le volume des pyramides construites sur les champs rectangulaires ainsi délimités. Lorsque le maillage est suffisamment fin, on peut considérer que les champs rectangulaires sont pratiquement plans (on notera que ce raisonnement est l'exact analogue dans l'espace de la preuve de l'aire du disque donnée à la section 2.2). Soit A_1, A_2, A_3, \dots les aires des champs rectangulaires et V_1, V_2, V_3, \dots le volume des pyramides associées (la hauteur de ces pyramides vaut évidemment $h = R$). On note ici $n = 1$ ou 2 ou $3 \dots$



Volume des pyramides :

$$V_n = \frac{1}{3} A_n \times R$$

(18) On appelle « boule » le domaine de l'espace délimité par une sphère, de même qu'on appelle disque le domaine du plan délimité par un cercle.

Si $A = 4\pi R^2$ désigne l'aire totale de la sphère, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition montre que le volume V de la boule est donné par

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) \times R = \frac{1}{3}AR.$$

Ceci donne la formule cherchée pour le volume de la boule de rayon R :

$$(4.9.6) \quad V = \frac{1}{3}AR = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \times R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

5. Une approche axiomatique de la géométrie euclidienne

Bien que nous ayons pu jusqu'à présent suivre une approche extrêmement déductive par rapport à l'approche traditionnelle – tous les énoncés ou presque ont été « démontrés » à partir des définitions – il n'en reste pas moins que certaines démonstrations s'appuyaient sur des faits intuitifs, par exemple celle du théorème de Pythagore.

La seule solution pour sortir du cercle vicieux est de prendre certains des faits que nous voulons vrais comme des « axiomes », c'est-à-dire de les considérer comme des hypothèses premières dont on déduira toutes les autres par le raisonnement ; le choix d'autres hypothèses de départ conduirait à des géométries non euclidiennes (cf. section 11).

Comme nous allons le voir, la notion de plan euclidien peut se définir à l'aide d'un seul axiome, essentiellement équivalent à la conjonction du théorème de Pythagore – qui n'avait été que partiellement justifié – et de l'existence des coordonnées cartésiennes – que nous n'avions pas non plus discutée.

Dans le cas où l'idée d'utiliser une approche axiomatique effraierait, cette section peut tout à fait être omise – à condition de comprendre que les systèmes de coordonnées peuvent être changés à volonté (translatés, tournés, etc) en fonction des besoins.

5.1. Le modèle « Pythagore + Descartes »

Dans notre vision, la géométrie euclidienne plane est fondée sur la « définition axiomatique » suivante.

Définition. *On appellera plan euclidien un ensemble de points noté \mathcal{P} , muni d'une distance d , c'est-à-dire une application*

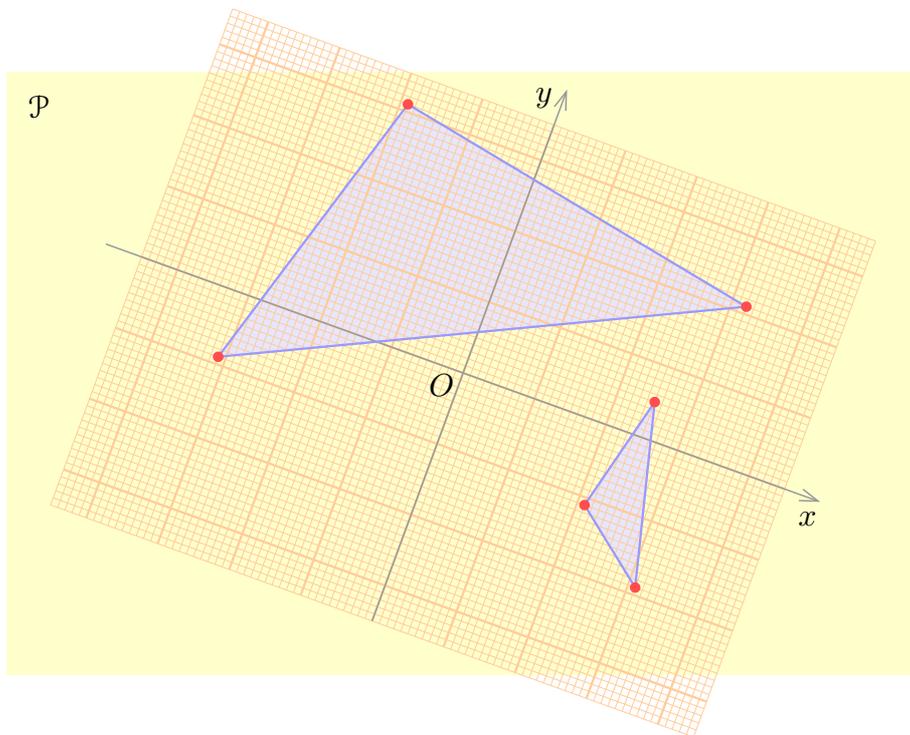
$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

de sorte qu'il existe des « systèmes de coordonnées orthonormés » : à tout point $M \in \mathcal{P}$ on peut faire correspondre un couple de coordonnées $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x; y)$ satisfaisant l'axiome⁽¹⁹⁾

$$(Pythagore + Descartes) \quad d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

pour tous points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$.

Il est bon de se représenter le choix d'un système de coordonnées orthonormé comme le fait de placer une feuille de papier millimétré transparent sur le plan \mathcal{P} dans lequel on travaille (et où nous avons représenté deux triangles figurés en bleu, par dessus lesquels on vient placer la feuille millimétrée transparente).



Il y a bien entendu une infinité de choix possibles pour le système de coordonnées, et nous allons étudier quelques manières simples de modifier les coordonnées.

5.1.1. Demi-tour de la feuille de papier millimétré autour de O

Ceci revient juste à changer l'orientation des axes, sans changer autrement leur position. Les nouvelles coordonnées $(X; Y)$ sont données par rapport aux anciennes par

$$X = -x, \quad Y = -y.$$

Comme $(-u)^2 = u^2$ pour tout nombre réel u , on voit que la formule

$$(*) \quad d(M, M') = \sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2}$$

sera vraie dans les nouvelles coordonnées si elle était vraie dans les coordonnées $(x; y)$.

5.1.2. Retournement de la feuille de papier millimétré le long de Ox

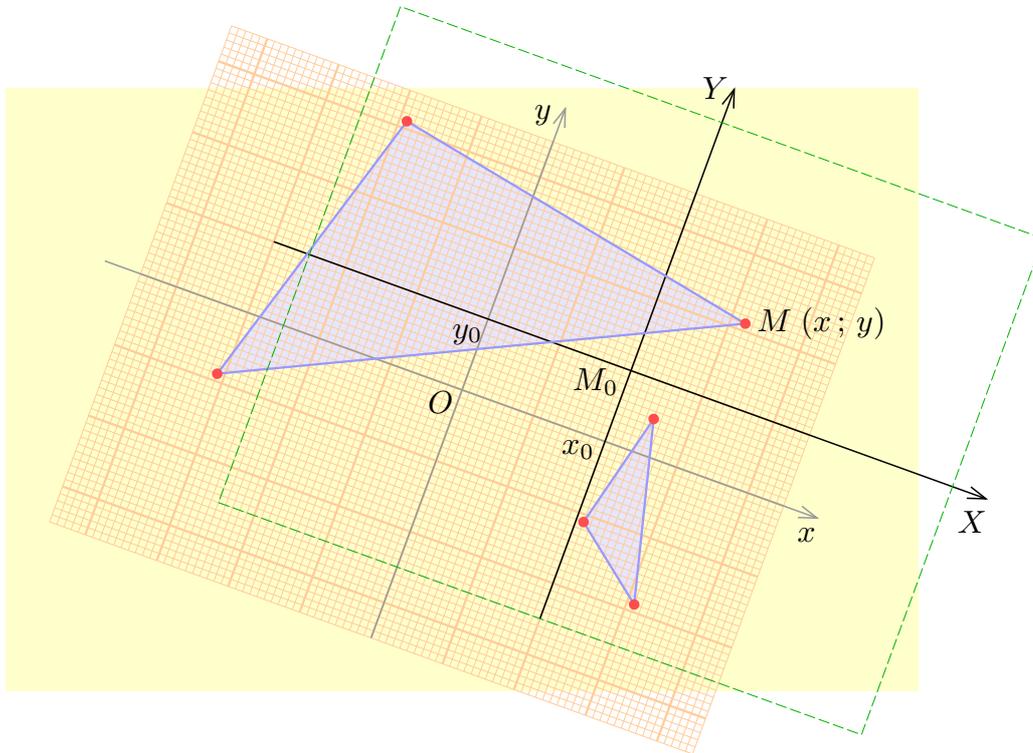
Ici Oy est inchangé, et l'orientation de Ox est inversée. On a $X = -x$, $Y = y$ et la formule $(*)$ est encore vraie.

5.1.3. Retournement de la feuille de papier millimétré le long de Oy

Ici Ox est inchangé, seule l'orientation de Oy est inversée. On a $X = x$, $Y = -y$ et la formule $(*)$ est encore vraie.

5.1.4. Changement d'origine

On remplace ici l'origine O par le point $M_0(x_0; y_0)$.



Les nouvelles coordonnées du point $M(x; y)$ sont données par

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0.$$

Pour deux points M, M' , on a dans ce cas

$$X' - X = (x' - x_0) - (x - x_0) = x' - x, \quad Y' - Y = (y' - y_0) - (y - y_0) = y' - y$$

et la formule (*) est encore inchangée.

5.1.5. Rotation des axes

On va montrer que l'origine O étant choisie, on peut amener le demi-axe Ox à passer par un point $M_1(x_1; y_1)$ quelconque distinct de O , ce qui est intuitivement évident par rotation de la feuille papier millimétré autour du point O , mais nécessite une démonstration à partir de l'axiome «Pythagore + Descartes». Ce point est plus délicat que ce qui précède, et la preuve formelle devra probablement être laissée de côté dans un premier temps – nous la donnons ici pour montrer qu'il n'y a pas de faille logique dans notre approche. On utilise l'égalité algébrique appelée *identité de Lagrange*

$$(au + bv)^2 + (-bu + av)^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + b^2u^2 + a^2v^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2),$$

valable pour tous nombres réels a, b, u, v , qui s'obtient en observant que les deux doubles produits se simplifient. Par conséquent, si a et b vérifient $a^2 + b^2 = 1$ (un tel exemple est $a = 3/5, b = 4/5$) et si on effectue le changement de coordonnées tel que

$$X = ax + by, \quad Y = -bx + ay$$

on aura, pour deux points M, M' quelconques

$$\begin{aligned} X' - X &= a(x' - x) + b(y' - y), & Y' - Y &= -b(x' - x) + a(y' - y), \\ (X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \end{aligned}$$

d'après l'identité de Lagrange avec $u = x' - x, v = y' - y$. Il est facile de voir d'autre part que

$$aX - bY = x, \quad bX + aY = y,$$

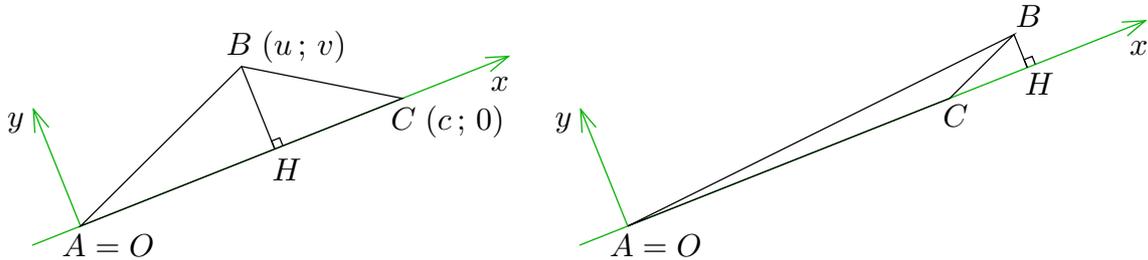
donc la transformation $(x; y) \mapsto (X; Y)$ est bijective. On en déduit que, au sens de notre définition, $(X; Y)$ est bien un système de coordonnées orthonormées. Si on choisit maintenant $a = kx_1, b = ky_1$, les coordonnées du point $M_1(x_1; y_1)$ sont transformées en

$$X_1 = ax_1 + by_1 = k(x_1^2 + y_1^2), \quad Y_1 = -bx_1 + ay_1 = k(-y_1x_1 + x_1y_1) = 0,$$

et la condition $a^2 + b^2 = k^2(x_1^2 + y_1^2) = 1$ est satisfaite en prenant $k = 1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Comme $X_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0$ et $Y_1 = 0$, le point M_1 est bien situé sur le demi-axe positif OX dans les nouvelles coordonnées.

5.2. L'inégalité triangulaire revisitée

La preuve donnée en 3.1.1, qui reposait sur des faits non complètement justifiés, peut maintenant être rendue rigoureuse.



Étant donnés trois points A, B, C distincts, on choisit O comme origine et on place le demi-axe Ox suivant la demi-droite $[A, C)$. Les trois points ont alors pour coordonnées

$$A(0; 0), \quad B(u; v), \quad C(c; 0), \quad c > 0,$$

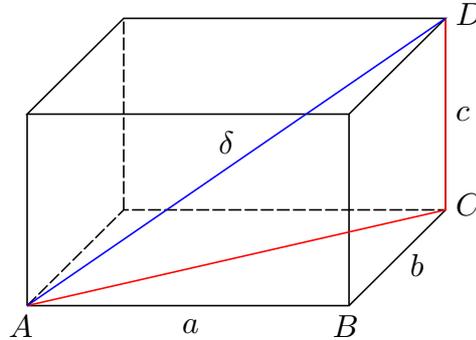
et le pied H de la hauteur est $H(u; 0)$. On trouve $AC = c$ et

$$AB = \sqrt{u^2 + v^2} \geq AH = |u| \geq u, \quad BC = \sqrt{(c-u)^2 + v^2} \geq HC = |c-u| \geq c-u.$$

On a donc bien $AC = c = u + (c-u) \leq AB + BC$ dans tous les cas. L'égalité n'est possible que si on a à la fois $v = 0, u \geq 0$ et $c-u \geq 0$, c'est-à-dire $u \in [0, c]$ et $v = 0$, autrement dit si B est sur le segment $[A, C]$ de l'axe Ox .

5.3. Axiomatique de l'espace

L'approche que nous avons décrite serait tout à fait apte à introduire la géométrie euclidienne en dimension quelconque, en particulier en dimension 3. La justification initiale est le calcul de la diagonale δ d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c :



Comme les triangles ACD et ABC sont rectangles en C et B respectivement, on a

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad \text{et} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

donc la « grande diagonale » du parallélépipède rectangle est donnée par

$$\delta^2 = AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

À partir de là, on peut donner la définition suivante.

Définition. On appellera *espace euclidien de dimension 3* un ensemble de points noté \mathcal{E} , muni d'une distance d , c'est-à-dire une application

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

de sorte qu'il existe des « systèmes de coordonnées orthonormés » : à tout point $M \in \mathcal{E}$ on peut faire correspondre un triplet de coordonnées $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x; y; z)$ satisfaisant l'axiome

$$(\text{Pythagore} + \text{Descartes}) \quad d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

pour tous points $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ de \mathcal{E} .

On pourrait bien entendu donner une définition analogue en dimension n quelconque, avec des systèmes de coordonnées $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité triangulaire se démontre presque sans changement : étant donné trois points A, B, C , on choisit A comme origine, avec la demi-droite $[A, C)$ comme demi-axe Ox , ce qui ramène le calcul à $B = (u; v; w)$ et $C = (c; 0; 0)$. Il faut au préalable vérifier que l'on peut trouver un système de coordonnées orthonormé qui pointe l'axe Ox dans la direction d'un point $M_1(x_1; y_1; z_1)$ quelconque : on commence par annuler z_1 par un changement $Y = ay + bz, Z = by - az$ des deux dernières coordonnées, ce qui ramène M_1 dans le « plan horizontal » $Z = 0$, puis on annule y_1 par la même méthode à l'aide d'un changement de variables portant sur x, y uniquement. Idem en dimension plus grande.

6. Fondements du calcul vectoriel

Nous travaillerons ici principalement dans le plan, mais il n'y aurait aucun changement autre que l'ajout de coordonnées supplémentaires en dimension 3 et plus.

6.1. Formule de la médiane

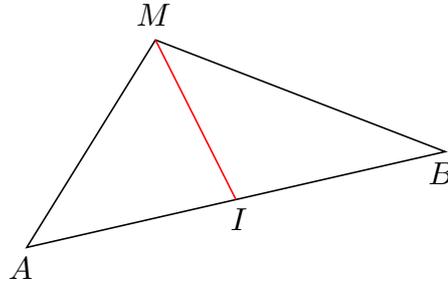
Étant donné des points A, B de coordonnées $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ dans un repère Oxy , le point I de coordonnées

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

vérifie $IA = IB = \frac{1}{2}AB$: c'est le milieu du segment $[A, B]$.

Formule de la médiane. Pour tout point $M(x; y)$, on a

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2 + 2IA^2.$$



Démonstration. En effet, un développement des carrés donne

$$(x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 = 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2,$$

tandis que

$$\begin{aligned} 2(x - x_I)^2 + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 &= 2(x^2 - 2x_Ix + x_I^2) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 \\ &= 2\left(x^2 - (x_A + x_B)x + \frac{1}{4}(x_A + x_B)^2\right) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 \\ &= 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2. \end{aligned}$$

On a donc bien

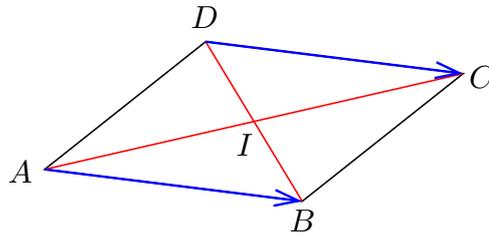
$$(x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 = 2(x - x_I)^2 + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2.$$

La formule de la moyenne s'obtient en ajoutant l'égalité analogue pour les coordonnées y et en appliquant le théorème de Pythagore. \square

Il résulte de la formule de la médiane qu'il existe bien un unique point M tel que $MA = MB = \frac{1}{2}AB$, en effet on trouve alors $MI^2 = 0$, donc $M = I$. Les formules données au début pour définir le milieu sont donc bien indépendantes des coordonnées choisies.

6.2. Parallélogrammes

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ se coupent en leur milieu :



On trouve donc la condition nécessaire et suffisante

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \quad y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = \frac{1}{2}(y_A + y_C),$$

ce qui équivaut encore à

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \quad y_B + y_D = y_A + y_C$$

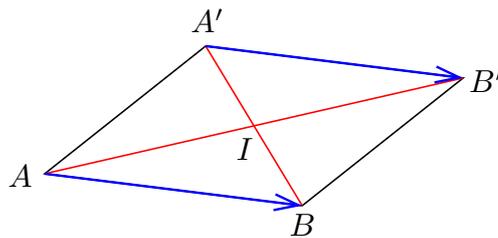
ou encore à

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \quad y_B - y_A = y_C - y_D,$$

autrement dit, la variation des coordonnées nécessaire pour aller de A en B est le même que pour aller de D en C .

6.3. Vecteurs

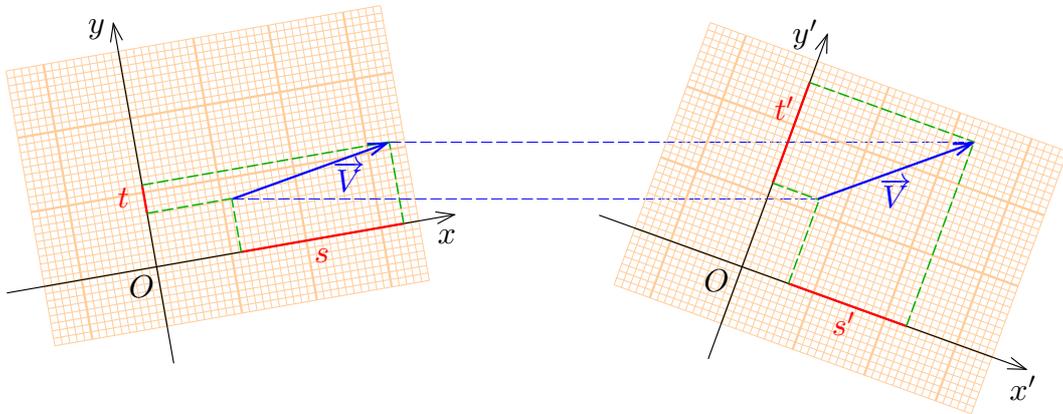
On appelle *bipoint* un couple ordonné (A, B) de points; on dit que A est l'*origine* et que B est l'*extrémité* du bipoint. Les bipoints (A, B) et (A', B') sont dits *équipollents* si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme (qui peut être éventuellement « plat » si les quatre points sont alignés).



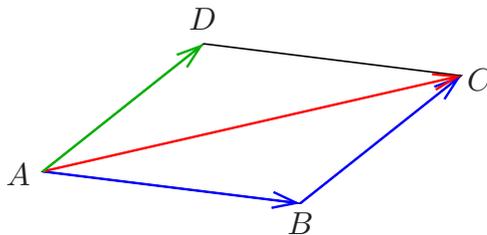
Définition. Étant donné deux points A, B , on appelle vecteur \overrightarrow{AB} la « variation de position » nécessaire pour aller de A en B . Étant donné un repère Oxy , cette « variation de position » se mesure dans la direction Ox par $x_B - x_A$ et dans la direction Oy par $y_B - y_A$. Si les bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents, les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux puisque les variations $x_{B'} - x_{A'} = x_B - x_A$ et $y_{B'} - y_{A'} = y_B - y_A$ sont les mêmes (ceci est vrai dans n'importe quel repère).

Les « composantes » du vecteur \overrightarrow{AB} dans le repère Oxy sont les nombres notés par définition sous la forme du couple $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Les composantes $(s; t)$

d'un vecteur \vec{V} dépend bien sûr du repère Oxy choisi : à un même vecteur \vec{V} correspondent des composantes différentes $(s; t)$, $(s'; t')$ dans des repères Oxy , $Ox'y'$ différents.



6.4. Addition des vecteurs



L'addition des vecteurs est définie par la *relation de Chasles*

$$(6.4.1) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

pour trois points A, B, C quelconques : si on fait la somme de la variation de position nécessaire pour aller de A en B , puis de B en C , on trouve la variation de position pour aller de A en C ; ainsi par exemple, pour la composante suivant Ox , on a

$$(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A.$$

De façon équivalente, si $ABCD$ est un parallélogramme, on peut aussi poser

$$(6.4.2) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

L'équivalence résulte de (6.4.1) et (6.4.2) résulte de ce que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ dans le parallélogramme $ABCD$. Pour tout choix de repère Oxy , la somme $\vec{U} + \vec{V}$ des vecteurs de composantes $(s; t)$, $(s'; t')$ a pour composantes $(s + s'; t + t')$.

Pour tout point A , le vecteur \overrightarrow{AA} a ses composantes nulles : on le note $\vec{0}$. On a de façon évidente $\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$ pour tout vecteur \vec{V} . D'autre part, la relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

pour tous points A, B . On posera donc

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA},$$

autrement dit l'opposé d'un vecteur s'obtient en échangeant origine et extrémité d'un bipoint qui le définit.

6.5. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Étant donné un vecteur \vec{V} de composantes $(s; t)$ dans un repère Oxy et un nombre réel λ quelconque, on définit $\lambda\vec{V}$ comme étant le vecteur de composantes $(\lambda s; \lambda t)$.

Cette définition est bien indépendante du repère Oxy choisi. En effet si $\vec{V} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\lambda \geq 0$, on a $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ où C est l'unique point situé sur la demi-droite $[A, B)$ tel que $AC = \lambda AB$. D'autre part, si $\lambda \leq 0$, on a $-\lambda \geq 0$ et

$$\lambda\overrightarrow{AB} = (-\lambda)(-\overrightarrow{AB}) = (-\lambda)\overrightarrow{BA}.$$

Enfin on a clairement $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. La multiplication des vecteurs par un nombre est distributive par rapport à l'addition des vecteurs (ceci résulte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble des nombres réels).

7. Équation cartésienne d'un cercle; fonctions trigonométriques

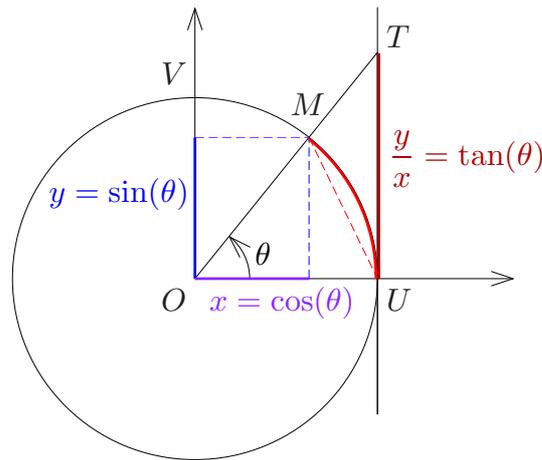
D'après le théorème de Pythagore, le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon dans le plan est l'ensemble des points M satisfaisant l'équation

$$AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

soit encore une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Inversement, l'ensemble des solutions d'une telle équation définit un cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ si $c < a^2 + b^2$, se réduit au point A si $c = a^2 + b^2$, et est vide si $c > a^2 + b^2$.

On appelle *cercle trigonométrique* \mathcal{C} le cercle unité de centre l'origine dans un plan orthonormé Oxy , c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 = 1$. Soit U le point de coordonnées $(1, 0)$ et V le point de coordonnées $(0, 1)$. Les fonctions trigonométriques \cos , \sin et \tan d'un angle quelconque sont alors définies par le schéma classique suivant⁽²⁰⁾ :

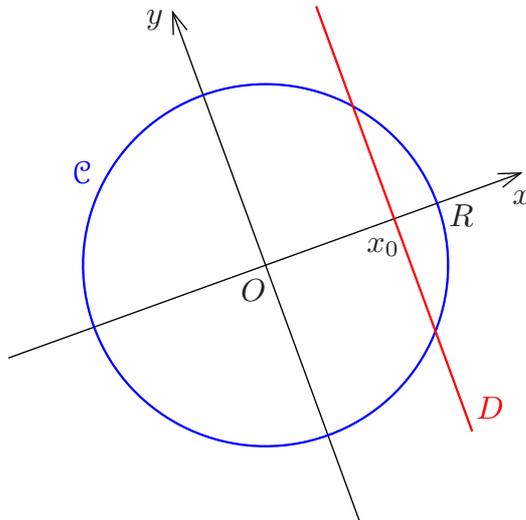


L'équation du cercle montre qu'on a la relation $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ pour tout θ .

(20) Il nous paraît indispensable à ce stade que les fonctions \cos , \sin , \tan aient déjà été introduites au préalable comme rapports de côtés dans un triangle rectangle, ceci dans le cas des angles aigus, et que leurs valeurs pour les angles remarquables 0° , 30° , 45° , 60° , 90° soient connues.

8. Intersection de cercles et de droites

Commençons par l'intersection d'un cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon R avec une droite \mathcal{D} quelconque. Pour simplifier les calculs, on choisit $A = O$ comme origine et on prend l'axe Ox perpendiculaire à la droite \mathcal{D} . La droite \mathcal{D} est alors « verticale » dans le repère Oxy . (Nous traitons ici d'emblée le cas général, mais il faut évidemment commencer par des exemples numériques simples...)



Ceci donne des équations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \quad \mathcal{D} : x = x_0,$$

d'où

$$y^2 = R^2 - x_0^2.$$

Par conséquent, si $|x_0| < R$, on a $R^2 - x_0^2 > 0$ et on trouve deux solutions $y = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$, ce qui correspond à deux points d'intersections $(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ et $(x_0, -\sqrt{R^2 - x_0^2})$ symétriques par rapport à l'axe Ox . Si $|x_0| = R$, on a une solution unique $y = 0$: la droite $\mathcal{D} : x = x_0$ est tangente au cercle \mathcal{C} au point $(x_0, 0)$. Si $|x_0| > R$, l'équation $y^2 = R^2 - x_0^2 < 0$ n'a pas de solution ; la droite \mathcal{D} ne coupe pas le cercle.

Considérons maintenant l'intersection d'un cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon R avec un cercle \mathcal{C}' de centre A' et de rayon R' . Soit $d = AA'$ la distance des deux centres. Si $d = 0$ les cercles sont concentriques et la discussion est immédiate (cercles confondus si $R = R'$, disjoints si $R \neq R'$). On supposera donc $A \neq A'$, c'est-à-dire $d > 0$. Quitte à choisir $O = A$ comme origine et $Ox = [A, A']$ comme demi-axe positif, on se ramène au cas où $A(0; 0)$ et $A'(d; 0)$. On trouve alors les équations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \quad \mathcal{C}' : (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \iff x^2 + y^2 = 2dx + R'^2 - d^2.$$

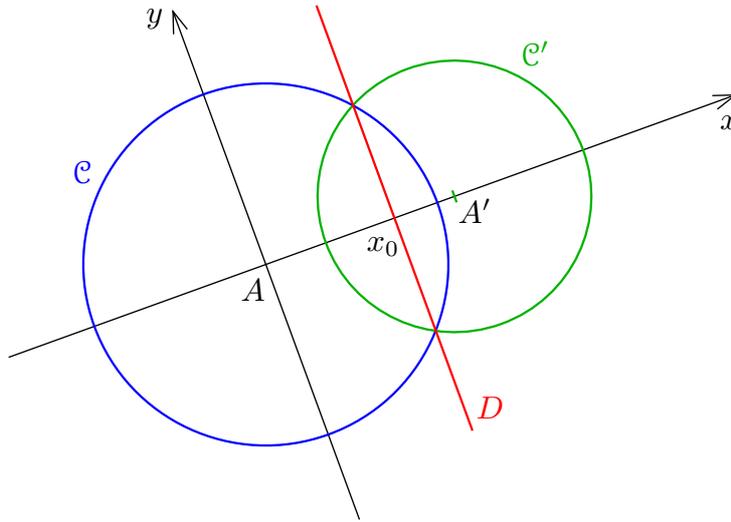
Si un point M appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, on a donc $2dx + R'^2 - d^2 = R^2$, d'où

$$x = x_0 = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - R'^2).$$

Ceci montre que l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est contenue dans l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ de \mathcal{C} avec la droite $\mathcal{D} : x = x_0$. Mais inversement, on voit que si $x^2 + y^2 = R^2$ et $x = x_0$, alors $(x; y)$ satisfait aussi l'équation

$$x^2 + y^2 - 2dx = R^2 - 2dx_0 = R^2 - (d^2 + R^2 - R'^2) = R'^2 - d^2$$

qui est l'équation de \mathcal{C}' , donc on a aussi $\mathcal{C} \cap D \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ et finalement $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap D$.



Les points d'intersection sont donc donnés par $y = \pm\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Par conséquent on a exactement deux solutions symétriques par rapport à la droite (AA') dès lors que $-R < x_0 < R$, ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} -2dR < d^2 + R^2 - R'^2 < 2dR &\iff (d+R)^2 > R'^2 \text{ et } (d-R)^2 < R'^2 \\ &\iff d+R > R', \quad d-R < R', \quad d-R > -R', \end{aligned}$$

soit encore $|R - R'| < d < R + R'$. Si l'une des inégalités est une égalité, ce qui correspond à $x_0 = \pm R$, on a une seule solution $y = 0$, les cercles sont tangents intérieurement si $d = |R - R'|$ et tangents extérieurement si $d = R + R'$.

On notera que ces résultats permettent d'obtenir une preuve complète et rigoureuse des trois cas d'isométrie des triangles : à changement de coordonnées orthonormées près, chacun des trois cas détermine entièrement les coordonnées des triangles, à symétrie près par rapport à Ox , une fois que l'on a choisi comme origine O l'un des sommets et comme demi-axe Ox la demi-droite qui porte le côté dont on connaît la longueur. Les triangles ainsi spécifiés sont donc isométriques.

9. Produit scalaire

La norme $\|\vec{V}\|$ d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur $AB = d(A, B)$ d'un bipoint quelconque qui le définit. À partir de là, on pose par définition

$$(9.1) \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}(\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2)$$

de sorte que l'on a en particulier $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$. Le nombre $\vec{U} \cdot \vec{V}$ s'appelle le *produit scalaire* de \vec{U} et \vec{V} , et $\vec{U} \cdot \vec{U}$ s'appelle aussi le carré scalaire de \vec{U} , noté \vec{U}^2 . On obtient par conséquent

$$\vec{U}^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2.$$

D'après la définition (9.1), nous avons

$$(9.2) \quad \|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V},$$

ce qui peut se récrire

$$(9.2') \quad (\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V}.$$

C'était la motivation principale de la définition : faire en sorte que l'identité des carrés soit vraie pour les produits scalaires. En dimension 2 et dans un repère orthonormé Oxy , on trouve $\vec{U}^2 = x^2 + y^2$; si \vec{V} a pour composantes $(x' ; y')$, la définition (9.1) implique

$$(9.3) \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)) = xx' + yy'.$$

En dimension n , on trouve de même

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n.$$

De là, on déduit que le produit scalaire est « bilinéaire », c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} (k\vec{U}) \cdot \vec{V} &= \vec{U} \cdot (k\vec{V}) = k\vec{U} \cdot \vec{V}, \\ (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \cdot \vec{V} &= \vec{U}_1 \cdot \vec{V} + \vec{U}_2 \cdot \vec{V}, \\ \vec{U} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) &= \vec{U} \cdot \vec{V}_1 + \vec{U} \cdot \vec{V}_2. \end{aligned}$$

Si \vec{U}, \vec{V} sont deux vecteurs, fixons un point A comme origine et écrivons $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, puis $\vec{V} = \overrightarrow{BC}$, de sorte que $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AC}$. Le triangle ABC est rectangle si et seulement si on a la relation de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire

$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2,$$

autrement dit, d'après (9.2), si et seulement si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.

Conséquence. *Les vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.*

Plus généralement, si on choisit une origine O et un point A tel que $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$, on peut également fixer les coordonnées pour que A appartienne à l'axe Ox , c'est-à-dire $A = (u ; 0)$. Pour tout vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ ($v ; w$) dans Oxy , on a alors

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = uv$$

tandis que

$$\|\vec{U}\| = u, \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Comme la demi-droite $[O, B)$ coupe le cercle trigonométrique au point $(kv; kw)$ avec $k = 1/\sqrt{v^2 + w^2}$, on a par définition

$$\cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = \cos(\widehat{AOB}) = kv = \frac{v}{\sqrt{v^2 + w^2}}.$$

Ceci donne les formules très utiles

$$(9.4) \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}), \quad \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}.$$

10. Espace vectoriels, applications affines et linéaires

À partir de cette étape, on dispose de tous les fondements nécessaires, et l'ordre dans lequel on peut aborder les notions devient beaucoup plus flexible – la plus grande partie de ce qui suit déborde sur les mathématiques du lycée et au delà.

On peut par exemple poursuivre l'étude du triangle et du cercle, et introduire peu à peu les principales transformations géométriques : (dans le plan) translations, homothéties, affinités, symétries axiales, projections, rotations par rapport à un point ; (dans l'espace) translations et homothéties, symétries par rapport à un point, une droite ou un plan, projections orthogonales sur un plan ou sur une droite, rotation par rapport à un axe. Les outils disponibles permettent à la fois de faire des raisonnements intrinsèques (avec angles, distances, rapports de similitude, ...), ou des calculs en coordonnées cartésiennes – il nous paraît bon que ces différentes techniques ne soient pas dissociées puisque ceci correspond à l'usage contemporain des mathématiques – la période « contemporaine » dont il s'agit remontant d'ailleurs à plusieurs siècles chez les mathématiciens, mécaniciens ou physiciens.

On peut commencer à mettre en évidence les phénomènes de linéarité, indépendamment de tout lien avec la distance. Ainsi, on peut introduire les notions de combinaison linéaire de vecteurs, de dépendance et indépendance linéaire, les bases et les repères non orthonormés, en relation avec la résolution des systèmes d'équations linéaires (par combinaisons ou substitutions – on aboutit assez rapidement à la notion de déterminant 2×2 , puis 3×3), à la manipulation des équations de droites, de plans.

Étant donné un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension n quelconque, ce qui a été fait à la section 6 fonctionne sans changement. On notera $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ associés aux points de \mathcal{E} . Cet ensemble est muni des deux lois $+$ d'addition des vecteurs et \cdot de multiplication par un scalaire, qui vérifient les propriétés usuelles :

- (A0) L'addition est une « loi de composition interne » $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$;
- (A1) L'addition des vecteurs est associative ;
- (A2) L'addition des vecteurs est commutative ;
- (A3) L'addition possède un élément neutre qui est $\vec{0}$;
- (A4) tout vecteur \vec{V} possède un opposé $-\vec{V}$ tel que $\vec{V} + (-\vec{V}) = (-\vec{V}) + \vec{V} = \vec{0}$.
- (M0) La multiplication par un scalaire $(\lambda, \vec{V}) \mapsto \lambda\vec{V}$ est une « loi de composition externe » $\mathbb{R} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$.

(M 1) Le scalaire 1 est élément neutre : $1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$.

(M 2) La multiplication scalaire vérifie la « pseudo-associativité » $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{V}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{V}$;

(M 3) On a distributivité à gauche $(\lambda + \mu) \cdot \vec{V} = \lambda \cdot \vec{V} + \mu \cdot \vec{V}$

(M 4) On a distributivité à droite $\lambda \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \lambda \cdot \vec{V} + \lambda \cdot \vec{W}$.

Chaque fois que l'on a un ensemble $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ munis de deux lois $+$ et \cdot vérifiant les propriétés (A 0,1,2,3,4) et (M 0,1,2,3,4) ci-dessus pour tous les scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs \vec{V}, \vec{W} , on dit qu'on a affaire à un espace vectoriel sur le corps des réels (cette terminologie vient du fait qu'on peut donner une définition analogue sur d'autres corps, par exemple le corps \mathbb{Q} des nombre rationnels).

Pour chacune des transformations $s : M \mapsto s(M)$ évoquées ci-dessus, on s'aperçoit que la transformation est donnée en coordonnées par des formules du type suivant : si $M(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $s(M)(y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a une écriture du type

$$(10.1) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i,$$

autrement dit, les coordonnées (y_i) de $s(M)$ sont des fonctions affines des coordonnées (x_i) de M . On peut plus généralement considérer une transformation $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ d'un espace \mathcal{E} de dimension n dans un espace \mathcal{F} de dimension p non nécessairement égale à n dimension (par exemple, une projection de l'espace \mathcal{E} de dimension 3 sur un plan $\mathcal{F} = \mathcal{P}$), et l'écriture est encore du même type. De manière matricielle (et après introduction du formalisme matriciel qui nous paraît recommandable en milieu ou fin de lycée – au moins en dimensions 1, 2 et 3), on peut écrire dans tous ces cas $Y = AX + B$. On dit alors que s est une transformation affine. Si N est un autre point de coordonnées $N : X' = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $s(N) : Y' = (y'_i)_{1 \leq i \leq p}$ son image, on voit que $Y' = AX' + B$, donc

$$\overline{s(M)s(N)} : Y' - Y = A(X' - X).$$

Par conséquent, si on note $\sigma : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}, \vec{V} \mapsto \sigma(\vec{V})$, la transformation vectorielle définie par $Y = AX$, on a la formule

$$(10.2) \quad \overline{s(M)s(N)} = \sigma(\overline{MN}),$$

et σ possède les propriétés essentielles de « linéarité »

$$(10.3) \quad \sigma(\vec{V} + \vec{W}) = \sigma(\vec{V}) + \sigma(\vec{W}), \quad \sigma(\lambda \vec{V}) = \lambda \sigma(\vec{V}).$$

Inversement, si $\sigma : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ vérifie (10.3), on montre aisément à l'aide d'une base que σ est donnée en coordonnées par une formule du type $Y = AX$; de plus, si $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ vérifie (10.2), alors en appliquant la formule au couple (O, M) et en notant B les coordonnées de $f(O)$, on voit que $Y - B = AX$, soit encore $Y = AX + B$, donc f est une transformation affine. Un théorème de « rigidité » essentiel de la géométrie euclidienne est le suivant (on peut se limiter au cas $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, qui est tout aussi intéressant !)

Définition. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces euclidiens et $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une transformation ponctuelle quelconque. On dit que s est une isométrie de \mathcal{E} dans \mathcal{F} si pour tout couple de points (M, N) de \mathcal{E} on a $d(s(M), s(N)) = d(M, N)$.

Théorème. Si $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une isométrie, alors s est une transformation affine, et son application linéaire associée $\sigma : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ est ce qu'on appelle une transformation orthogonale, c'est-à-dire une application vectorielle respectant l'orthogonalité et les produits scalaires :

$$(10.4) \quad \sigma(\vec{V}) \cdot \sigma(\vec{W}) = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

pour tous vecteurs $\vec{V}, \vec{W} \in \vec{\mathcal{E}}$.

Démonstration. Fixons une origine O , et définissons σ par

$$\sigma(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{s(O)s(M)}.$$

Les propriétés du produit scalaire donnent

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(O, M)^2 + d(O, N)^2 - d(M, N)^2). \end{aligned}$$

On obtient par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma(\overrightarrow{OM}) \cdot \sigma(\overrightarrow{ON}) &= \overrightarrow{s(O)s(M)} \cdot \overrightarrow{s(O)s(N)} \\ &= \frac{1}{2}(d(s(O), s(M))^2 + d(s(O), s(N))^2 - d(s(M), s(N))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(O, M)^2 + d(O, N)^2 - d(M, N)^2) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}. \end{aligned}$$

Ceci montre que σ vérifie (10.4). En développant par bilinéarité le carré scalaire

$$(\sigma(\lambda\vec{V} + \mu\vec{W}) - \lambda\sigma(\vec{V}) - \mu\sigma(\vec{W}))^2,$$

on voit alors en utilisant (10.4) que le résultat vaut

$$((\lambda\vec{V} + \mu\vec{W}) - \lambda\vec{V} - \mu\vec{W})^2 = 0,$$

donc $\sigma(\lambda\vec{V} + \mu\vec{W}) - \lambda\sigma(\vec{V}) - \mu\sigma(\vec{W}) = \vec{0}$ et σ est linéaire. Par différence, la formule $\sigma(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{s(O)s(M)}$ donne $\sigma(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{s(M)s(N)}$ pour deux points M, N quelconques, donc s est une application affine d'application linéaire associée σ , et le théorème est démontré. \square

Dans la même direction, on peut énoncer le «théorème des figures isométriques», qui lui-même permet d'aboutir à une justification mathématique complète de toutes les définitions et considérations physiques apparues dans la section 3.2.

Théorème. Soient $(A_1A_2A_3A_4 \dots)$ et $(A'_1A'_2A'_3A'_4 \dots)$ deux figures isométriques formées par des points A_i, A'_i d'un espace euclidien \mathcal{E} . Alors il existe une isométrie s de l'espace euclidien \mathcal{E} tout entier tel que $A'_i = s(A_i)$.

Démonstration. Considérons les sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}}'$ de $\vec{\mathcal{E}}$ formé par les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$ (resp. $\overrightarrow{A'_iA'_j}$). Comme

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_1A_j} - \overrightarrow{A_1A_i},$$

il suffit de prendre les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{V}_i = \overrightarrow{A_1A_i}$ (resp. $\vec{V}'_i = \overrightarrow{A'_1A'_i}$). En remplaçant O par A_1, M par A_i et N par A_j , la formule (10.5) implique

$$\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j = \overrightarrow{A_1A_i} \cdot \overrightarrow{A_1A_j} = \frac{1}{2}((A_1A_i)^2 + (A_1A_j)^2 - (A_iA_j)^2).$$

Ceci implique que $\vec{V}'_i \cdot \vec{V}'_j = \vec{V}_i \cdot \vec{V}_j$, par conséquent la transformation vectorielle

$$\sigma_0 : \sum \lambda_i \vec{V}_i \mapsto \sum \lambda_i \vec{V}'_i$$

définit une application linéaire orthogonale de $\vec{\mathcal{V}}$ sur $\vec{\mathcal{V}}'$ (σ_0 est bien définie, car si un vecteur a plusieurs représentations $\sum \lambda_i \vec{V}_i$, les images $\sum \lambda_i \vec{V}'_i$ correspondantes sont les mêmes, comme on le voit en observant que le carré scalaire de la différence est nul). En particulier, les espaces $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}}'$ sont de même dimension, et on peut prolonger σ_0 en une isométrie σ de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\vec{\mathcal{E}}$ en faisant la somme directe orthogonale $\sigma = \sigma_0 \oplus \tau$ avec une transformation orthogonale quelconque τ de $\vec{\mathcal{V}}^\perp$ sur $\vec{\mathcal{V}}'^\perp$ (celle-ci existe puisque $\vec{\mathcal{V}}^\perp$ et $\vec{\mathcal{V}}'^\perp$ sont de même dimension = $\dim \vec{\mathcal{E}} - \dim \vec{\mathcal{V}}$). On définit maintenant une isométrie affine s en considérant l'unique application affine $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui envoie A_1 sur A'_1 , et qui a comme application linéaire associée la transformation orthogonale σ . Comme $s(A_1) = A'_1$ et $\sigma(\vec{V}_i) = \vec{V}'_i$, c'est-à-dire $\sigma(\overrightarrow{A_1A_i}) = \overrightarrow{A'_1A'_i}$, on a bien $s(A_i) = A'_i$ pour tout i . \square

Pour aller un peu plus loin, on a besoin de connaître la structure précise des transformations orthogonales: on démontre qu'une transformation vectorielle de matrice A dans une base orthonormée est orthogonale si et seulement si sa matrice A vérifie ${}^tAA = \text{Id}$, ce qui équivaut à ce que les vecteurs colonnes forment une base orthonormée. En dimension 2, on obtient les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix},$$

qui correspondent respectivement à la rotation vectorielle d'angle α et à la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_{\alpha/2}$ d'angle $\alpha/2$ par rapport à Ox .

Dans ce dernier cas, le choix d'une nouvelle base orthonormée appropriée conduit à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En général, en dimension quelconque, on montre que pour toute transformation vectorielle orthogonale, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & & & & & \dots & \varepsilon \end{pmatrix},$$

pour des angles adéquats α_i et $\varepsilon = \pm 1$. La preuve s'obtient par récurrence sur la dimension, en observant qu'il existe ou bien une valeur propre réelle (nécessairement égale à ± 1), ou bien une valeur propre complexe non réelle, correspondant à un plan réel stable dans lequel la transformation opère comme une rotation d'angle α_i ; on s'appuie sur le fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable est stable; les valeurs propres -1 peuvent être regroupées 2 par 2 et correspondent à des rotations d'angle $\alpha_i = \pi$. Ceci laisse la possibilité d'au plus une valeur propre -1 isolée, qui figure ici à la dernière ligne sous la forme de la valeur propre $\varepsilon = \pm 1$ (mais cette ligne peut-être absente).⁽²¹⁾

En choisissant un paramètre $t \in [0, 1]$ (pensé comme un paramètre temps), et en définissant A_t comme la matrice associée aux angles $t\alpha_i$ et au paramètre $\varepsilon = \pm 1$ comme-ci dessus, on obtient une variation continue telle que $A_1 = A$ et $A_0 = \text{Id}$ ou $A_0 =$ matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Ceci montre que pour toute transformation isométrique $s : X \mapsto Y = AX + B$, on a une variation continue dans le temps $s_t : X \mapsto A_t X + tB$ telle que $s_1 = s$, tandis que s_0 est soit la transformation identique, soit la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Ceci montre que deux figures isométriques \mathcal{F} et $\mathcal{F}' = s(\mathcal{F})$ se déduisent l'une de l'autre par un mouvement continu $\mathcal{F}_t = s_t(\mathcal{F})$ tel que $\mathcal{F}_1 = s_1(\mathcal{F}) = s(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}_0 = s_0(\mathcal{F})$ coïncide soit avec \mathcal{F} soit avec la figure obtenue par symétrie miroir par rapport à un hyperplan.

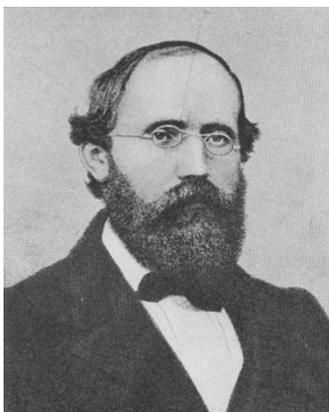
On notera qu'avec les notations précédentes nous avons $\det(A) = \varepsilon = \pm 1$. On dit que l'on a affaire à une *isométrie positive* si $\varepsilon = +1$ et à une *isométrie négative* si $\varepsilon = -1$.

(21) En dimension 3, la preuve se réduit facilement à la dimension 2, du fait que le polynôme caractéristique de degré 3 a nécessairement une valeur propre réelle. Ce résultat était au programme des classes de Terminale C des années 1970–1985 (le cas de dimension 2 était même introduit dès la classe de Première!). C'est hélas une bonne mesure de l'incroyable et consternante dégradation du niveau des études dans notre pays: ce résultat ne semble malheureusement même plus pouvoir être compris au niveau L2 de l'université, pour autant qu'il y soit mentionné et démontré explicitement.

Dans le cas d'une variation continue $t \mapsto A(t)$, le déterminant $\det(A(t))$ qui est une fonction continue ne peut « sauter » de la valeur 1 à la valeur -1 , et ce déterminant est donc constant dans le temps. Le mouvement d'un corps solide $t \mapsto s_t(\mathcal{F})$ à partir d'une position initiale (correspondant à $s_0 = \text{Id}$, donc à $\det A(0) = 1$) s'effectue donc uniquement par des isométries positives. Inversement, la discussion qui précède montre que toute isométrie positive peut se réaliser par un déplacement au sens de la définition (3.2.5) : mathématiquement, il y a donc coïncidence entre les notions de déplacement et d'isométrie positive.

11. Géométries non euclidiennes

L'approche de la géométrie fondée sur l'exploitation de la structure d'espace métrique n'est pas une simple curiosité propre à la géométrie euclidienne. Ainsi, les géométries non euclidiennes trouvent naturellement place dans le cadre général de la géométrie riemannienne, ainsi nommée en référence à Bernhard Riemann, l'un des principaux fondateurs de l'analyse complexe et de la géométrie différentielle modernes).



Bernhard Riemann (1826–1866)

Une *variété riemannienne* est par définition une variété différentielle X , c'est-à-dire un espace qui admet localement des systèmes de coordonnées différentiables réelles $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, muni d'une métrique infinitésimale g de la forme

$$ds^2 = g(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) dx_i dx_j.$$

Cette métrique représente le carré de la longueur d'un petit déplacement $dx = (dx_i)$ sur la variété. On suppose ici que $(a_{ij}(x))$ est une matrice symétrique définie positive et que les coefficients $a_{ij}(x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de x . Étant donné un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ continûment différentiable par morceaux, la longueur se calcule en posant

$$x = \gamma(t) = (\gamma_1; \dots; \gamma_n(t)), \quad dx = \gamma'(t) dt,$$

ce qui donne

$$(11.1') \quad ds = \|dx\|_{g(\gamma(t))} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t)} dt,$$

$$(11.1'') \quad \text{long}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t)} dt.$$

Etant donné deux points $a, b \in X$, la « distance géodésique » $d_g(a, b)$ de a à b est définie par $d_g(a, b) = \inf_{\gamma} \text{long}(\gamma)$ où l'inf est étendu à tous les chemins $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ d'extrémités $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. La géométrie euclidienne telle que nous l'avons décrite correspond au cas particulier d'une métrique riemannienne constante (on parle aussi de « métrique plate » pour signifier que la courbure est nulle)

$$(11.2') \quad ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

ce qui donne dans ce cas l'expression plus simple

$$(11.2'') \quad \text{long}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \gamma'_i(t)^2} dt.$$

La théorie de la relativité restreinte fait appel quant à elle à une métrique d'un type un peu différent, appelée métrique lorentzienne, qui est une métrique de signature $(3, 1)$ dans l'espace-temps einsteinien :

$$(11.3) \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2$$

où c désigne la vitesse de la lumière. La théorie de la relativité généralisée correspond au cas de métriques lorentziennes à coefficients variables, et son étude mène à celle des phénomènes de courbure qui décrivent les effets de la gravitation.

Pour en revenir à la géométrie en dimension 2, nous rappellerons ici brièvement la description de la géométrie non euclidienne de Lobatchevski à partir du modèle du disque de Poincaré muni de sa métrique hyperbolique invariante.



Nicolai Lobatchevski (1793-1856)



Henri Poincaré (1854-1912)

Définition. Sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ du plan complexe, avec $z = x + iy$, on considère la métrique dite de Poincaré

$$(11.4) \quad ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \Leftrightarrow ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

Un calcul montre que cette métrique est invariante par le groupe $\text{Aut}(\mathbb{D})$ des automorphismes holomorphes, constitué des transformations homographiques

$$h(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |\lambda| = 1, \quad a \in \mathbb{D}$$

qui préservent \mathbb{D} . Pour la métrique ci-dessus, la longueur d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{D}$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux se calcule en posant $z = \gamma(t)$, $dz = \gamma'(t) dt$, d'où

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

D'après la définition générale, la distance de Poincaré $d_P(a, b)$ de a à b est la distance géodésique définie par $d_P(a, b) = \inf_{\gamma} \text{long}(\gamma)$ où l'inf est étendu à tous les chemins $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{D}$ d'extrémités $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. Du fait que la métrique de Poincaré ds est invariante par $\text{Aut}(\mathbb{D})$, on déduit aussitôt que la distance d_p l'est aussi, autrement dit $d_P(h(a), h(b)) = d_P(a, b)$ pour tout $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ et tous points $a, b \in \mathbb{D}$.

Nous affirmons que le chemin de longueur minimale joignant le centre 0 du disque à un point quelconque $w \in \mathbb{D}$ est le segment $[0, w]$. En effet, si on écrit $z = \gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$ en coordonnées polaires, il vient

$$dz = (dr + ir d\theta) e^{i\theta}, \quad |dz| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \geq dr = r'(t) dt$$

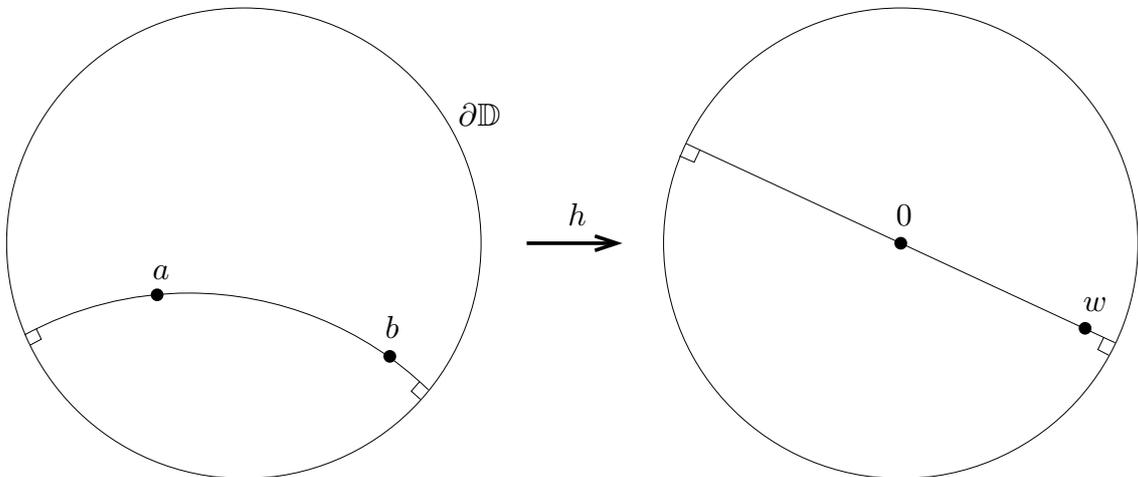
On obtient donc

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \geq \int_0^{|w|} \frac{dr}{1 - r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |w|}{1 - |w|},$$

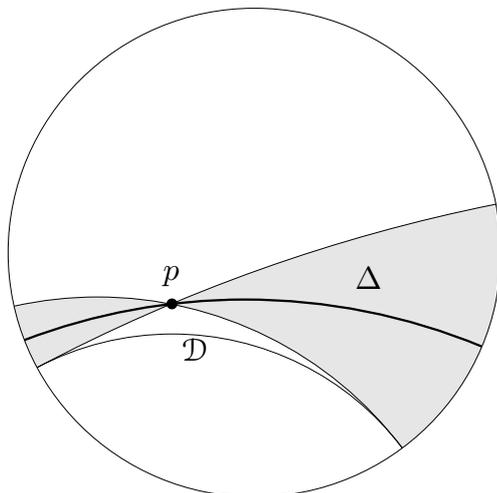
et ce calcul correspond précisément à la longueur du segment $[0, w]$. Pour trouver la distance de deux points quelconques a, b , on peut utiliser l'automorphisme $h(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ qui envoie a sur $h(a) = 0$ et b sur $w = h(b) = \frac{b-a}{1-\bar{a}b}$. On trouve ainsi

$$(11.5) \quad d_P(a, b) = d_P(h(a), h(b)) = d_P(0, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}{1 - \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}.$$

Cette distance gouverne la géométrie hyperbolique tout comme la formule de la distance issue du théorème de Pythagore gouverne la géométrie euclidienne.



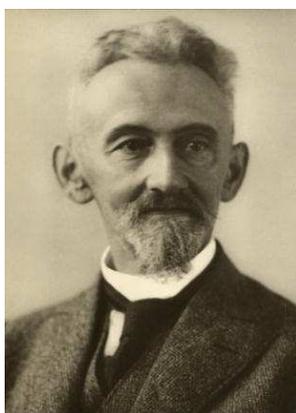
La géodésique (chemin le plus court) joignant a à b est l'image inverse par h du segment $[0, w]$. C'est donc un arc de cercle d'extrémités a et b , porté par un cercle orthogonal au bord \mathbb{D} (en effet le diamètre $\mathbb{R}w$ est orthogonal au bord $\partial\mathbb{D}$, donc leurs images inverses par h le sont, du fait du caractère conforme de h , et $\partial\mathbb{D}$ est évidemment invariant par h). La seule exception est le cas où $0, a, b$ sont alignés, auquel cas la géodésique est le segment de droite $[a, b]$ porté par un diamètre de \mathbb{D} . Les « droites hyperboliques » de \mathbb{D} sont donc les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au bord $\partial\mathbb{D}$.



En géométrie hyperbolique, on constate facilement que les axiomes d'incidence d'Euclide sont satisfaits, sauf précisément le 5^e postulat (postulat suivant lequel par tout point passe une unique parallèle à une droite donnée) : ici, par tout point p hors d'une « droite » \mathcal{D} donnée, il passe une infinité de « droites » Δ ne coupant pas la « droite » initiale. C'est la découverte surprenante faite par Lobatchevski en 1826, ruinant l'espoir de déduire le 5^e postulat des autres axiomes.

12. Quelques idées de Felix Hausdorff

Il y a bien d'autres circonstances où la structure métrique joue un rôle décisif; dans cette direction, nous allons décrire ici quelques idées importantes dues à Felix Hausdorff, l'un des fondateurs de la topologie moderne



Felix Hausdorff (1868–1942)

On peut ainsi introduire la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n sans faire référence à la structure d'espace vectoriel ou de groupe. Si (\mathcal{E}, d) est un espace métrique quelconque, on définit la *mesure de Hausdorff p -dimensionnelle* d'une partie A de \mathcal{E} comme

$$(12.1) \quad \mathcal{H}_p(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A) = \inf_{\text{diam } A_i \leq \varepsilon} \sum_i (\text{diam } A_i)^p$$

où $\mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_i (\text{diam } A_i)^p$ étendue à toutes les partitions dénombrables $A = \bigcup A_i$ avec $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$. Si on se restreint aux parties boréliennes, on peut voir qu'on obtient une mesure dénombrablement additive pour tout $p \geq 0$. Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec sa structure euclidienne habituelle, cette mesure coïncide pour p entier avec la mesure d'aide euclidienne p -dimensionnelle, à un facteur de proportionnalité près lié au volume de la boule euclidienne de dimension p . Mais pour p non entier, on obtient encore des mesures très utiles qui servent par exemple à calculer la « dimension de Hausdorff » des objets fractals. La définition (12.1) fonctionne tout aussi bien dans un espace métrique quelconque, par exemple dans les variétés riemanniennes.

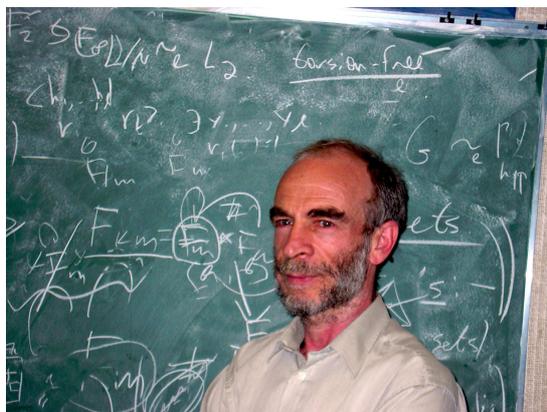
Une autre idée importante de Hausdorff est l'existence d'une structure métrique naturelle sur l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique (\mathcal{E}, d) . Si K, L sont deux parties compactes de \mathcal{E} , la *distance de Hausdorff* de K et L est définie comme

$$(12.2) \quad d_H(K, L) = \max \left\{ \max_{x \in K} \min_{y \in L} d(x, y), \max_{y \in L} \min_{x \in K} d(x, y) \right\}.$$

On peut vérifier que d_H est bien une distance ; l'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ des parties compactes de \mathcal{E} est ainsi muni d'une structure d'espace métrique. Lorsque (\mathcal{E}, d) est compact, on peut montrer que $(\mathcal{K}(\mathcal{E}), d_H)$ est lui-même compact.

13. Les travaux de Mikhail Gromov

L'étude des structures métriques constitue encore aujourd'hui un sujet de recherches extrêmement actif ; on peut citer en particulier les travaux de Mikhail Gromov sur les espaces de longueurs et les « espaces de modules » de variétés riemanniennes et leurs compactifications.



Mikhail Gromov (1943–), prix Abel 2009

Un espace de longueurs est par définition un espace métrique (\mathcal{E}, d) tel que pour tous points A, B de E il existe un point « milieu » I tel que $d(A, I) = d(I, B) = \frac{1}{2}d(A, B)$. Si

l'espace \mathcal{E} est complet, on peut alors construire par dichotomies successives un chemin γ d'extrémités A, B tel que $d(A, \gamma(t)) = (1 - t)d(A, B)$ et $d(\gamma(t), B) = t d(A, B)$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui peut être vu comme une géodésique joignant A et B . Il s'agit là d'une généralisation fructueuse des variétés riemanniennes – et donc en particulier des géométries euclidiennes et non euclidiennes.

Si X et Y sont deux espaces métriques compacts quelconques, on définit leur *distance de Gromov-Hausdorff* $d_{GH}(X, Y)$ comme étant l'inf des distances $d_H(f(X), g(Y))$ pour tous les plongements isométriques possibles $f : X \rightarrow \mathcal{E}$, $g : Y \rightarrow \mathcal{E}$ de X et Y dans un même espace métrique compact \mathcal{E} . Ceci fournit par une notion précieuse pour l'étude des déformations des variétés riemanniennes compactes, et pour la compactification de leurs « espaces de modules ».