GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Une généralisation du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg.*

Note de **Jean-Pierre Demailly**, présentée par Pierre Lelong.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré holomorphe en droites au dessus d'une variété projective lisse X . Nous montrons que la technique de géométrie différentielle de Bochner-Kodaira-Nakano et les estimations L^2 pour $\overline{\partial}$ permettent de retrouver très élémentairement le théorème de Kawamata et Viehweg [5,8,9]: si $\mathcal{L}$ est numériquement effectif, on a $H^q(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ pour $q < s$, où s est le plus grand entier tel que $c_1(\mathcal{L})^s \neq 0$. Plus généralement, notre méthode permet d'obtenir l'annulation lorsque $\mathcal{L}$ est tensorisé par un $\mathbf{Q}$–diviseur effectif non nécessairement à croisements normaux, sous une hypothèse naturelle d'intégrabilité du diviseur.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — A generalization of the Kawamata-Viehweg vanishing theorem.

Let $\mathcal{L}$ be a holomorphic line bundle over a projective manifold X . It is shown that the differential geometric technique of Bochner-Kodaira-Nakano and the L^2 estimates for $\overline{\partial}$ yield a very elementary proof of the Kawamata-Viehweg theorem [5,8,9]: if $\mathcal{L}$ is numerically effective, then $H^q(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ for $q < s$, where s is the largest integer such that $c_1(\mathcal{L})^s \neq 0$. More generally, our method implies a vanishing result when $\mathcal{L}$ is tensorized with an effective $\mathbf{Q}$–divisor which may have non normal crossings, under a natural integrability hypothesis for the divisor.

1. Enoncé des résultats. — Rappelons qu'un fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit *numériquement effectif* (nef) si $c_1(\mathcal{L})_{\restriction \Gamma} \geqslant 0$ pour toute courbe Γ dans X . On sait alors [6] que $c_1(\mathcal{L})^d_{\restriction Y} \geqslant 0$ pour toute sous-variété $Y \subset X$ de dimension d . Le critère de Nakai-Moishezon montre que $\mathcal{L}$ est nef si et seulement si $\mathcal{L}^k \otimes \mathcal{H}$ est ample pour tout fibré en droites $\mathcal{H}$ ample et tout entier $k \geqslant 0$. La *dimension de Kodaira* $\kappa(\mathcal{F})$ d'un fibré linéaire $\mathcal{F}$ est le maximum pour $m > 0$ du rang des morphismes $\Phi_m : X \setminus Z(V_m) \longrightarrow P(V_m^\star)$ définis par les espaces de sections $V_m = H^0(X, \mathcal{F}^m)$, avec la convention $\kappa(\mathcal{F}) = -\infty$ si $V_m = \{0\}$ pour tout m .

Définition. — *Nous dirons qu'un diviseur $D = \sum \alpha_j D_j$ à coefficients rationnels $\alpha_j > 0$ est intégrable sur X si pour tout point $x_0 \in X$ la fonction $\prod |g_j|^{-2\alpha_j}$ obtenue à partir de générateurs locaux g_j de l'idéal de D_j est sommable sur un voisinage de x_0 .*

Lorsque D est à croisements normaux, il est clair que D est intégrable si et seulement si $\alpha_j < 1$ pour tout j . Dans le cas général, il suffit que la multiplicité (ou nombre de Lelong) $m(D, x) = \sum \alpha_j \, m(D_j, x)$ soit < 1 en chaque point. Sinon, la condition d'intégrabilité pourra se vérifier en effectuant une suite d'éclatements qui relève D en un diviseur à croisements normaux (ceci est toujours possible d'après Hironaka [7]). Par cette méthode, on voit que si E est un diviseur effectif quelconque et si D est intégrable, alors $D + k^{-1}E$ est encore intégrable pour k assez grand. Notre principal résultat est le suivant :

Théorème. — *Soit $\mathcal{F}$ un fibré en droites dont une puissance positive vérifie $\mathcal{F}^k = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(D)$ avec $\mathcal{L}$ nef et avec un diviseur effectif D tel que $k^{-1}D$ soit intégrable. Soit s le plus grand entier tel que $c_1(\mathcal{L})^s \neq 0$. Alors*

$$H^q(X, \mathcal{F}^{-1}) = 0 \quad \textit{pour} \quad q < \max\{s, \kappa(\mathcal{F})\} .$$

En prenant $D = 0$ et $\mathcal{F} = \mathcal{L}$, on en déduit en particulier que $H^q(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ pour $\mathcal{L}$ nef et $q < s$.

Le théorème ci-dessus est une généralisation du théorème (2.13) de [5], qui correspond au cas où D est à croisements normaux et $\kappa(\mathcal{F}) = n$. La démonstration que nous allons donner est élémentaire dans le sens qu'elle évite l'usage des outils assez élaborés de géométrie algébrique qui apparaissaient dans les démonstrations antérieures. Elle ne fait appel essentiellement qu'à deux ingrédients : les critères usuels d'amplitude et d'effectivité numérique, et les estimations L^2 déduites de l'inégalité de courbure de Bochner-Kodaira-Nakano [1].

2. Estimations L^2 pour $\overline{\partial}$. — Soit ω une métrique kählérienne sur X , et $\mathcal{G}$ un fibré muni d'une métrique hermitienne C^∞ . Si $\lambda_1(x) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x)$ désignent les valeurs propres de la forme de courbure $c(\mathcal{G})$ en chaque point $x \in X$, on a l'inégalité classique de Bochner-Kodaira-Nakano :

$$||\overline{\partial}u||^2 + ||\overline{\partial}^\star u||^2 \geqslant \int_X (\lambda_1 + \ldots + \lambda_q - \lambda_{p+1} - \ldots - \lambda_n)|u|^2$$

pour toute (p,q)–forme u de classe C^∞ à valeurs dans $\mathcal{G}$. De là suit le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [1]: $H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{G}) = 0$ si $\mathcal{G} > 0$ et $p+q > n$, en prenant $\omega = c(\mathcal{G})$, d'où $\lambda_j = 1$. Le cas $p = n$ présente l'avantage supplémentaire que ω peut être choisie indépendamment de $c(\mathcal{G})$. En multipliant la métrique de $\mathcal{G}$ par un poids $e^{-\varphi}$, on obtient alors :

Proposition (estimations L^2 de Hörmander). — *On suppose qu'il existe une fonction φ intégrable sur X telle que $c(\mathcal{G}) + \partial\overline{\partial}\varphi \geqslant \varepsilon\omega$ au sens des distributions, où $\varepsilon > 0$. Alors pour toute (n,q)–forme v à valeurs dans $\mathcal{G}$ telle que $\overline{\partial}v = 0$ et $\int_X |v|^2 e^{-\varphi} < +\infty$, il existe une $(n, q-1)$–forme u telle que*

$$\overline{\partial}u = v \quad \text{et} \quad \int_X |u|^2 e^{-\varphi} \leqslant (q\varepsilon)^{-1} \int_X |v|^2 e^{-\varphi} \ .$$

L'hypothèse sur φ entraîne que φ est localement somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction C^∞ . En travaillant sur un ouvert affine (donc de Stein) de X , la preuve se ramène au cas connu où φ est C^∞ , après régularisation et passage à la limite décroissante.

Corollaire. — *S'il existe un poids φ tel que $e^{-\varphi}$ soit localement sommable sur X et $c(\mathcal{G}) + \partial\overline{\partial}\varphi \geqslant \varepsilon\omega$, $\varepsilon > 0$, alors $H^q(X, K_X \otimes \mathcal{G}) = 0$ pour $q > 0$.*

Soit v une (n,q)–forme fermée de classe C^∞ . La sommabilité de $e^{-\varphi}$ assure la finitude de $\int_X |v|^2 e^{-\varphi}$. Comme φ est majorée, on obtient une solution $u \in L^2(X)$ de $\overline{\partial}u = v$, ce qui entraîne classiquement l'existence d'une solution C^∞ .

3. Réduction du théorème au cas d'un fibré $\mathcal{L}$ ample. — Cette réduction est classique dans son principe, mais nous allons en rappeler ici les grandes lignes pour la commodité du lecteur. Posons $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Par récurrence sur n , on se ramène d'abord au cas $n = \max\{s, \kappa(\mathcal{F})\}$ en prenant des sections hyperplanes convenables. Supposons $n > \max\{s, \kappa(\mathcal{F})\}$ et choisissons un fibré en droites très ample $\mathcal{H}$ sur X . Le théorème de Fubini montre que pour le diviseur lisse A associé à une section générique de $\mathcal{H}$, le diviseur $k^{-1}D_{\restriction A}$ est intégrable sur A . De plus $\kappa(\mathcal{F}_{\restriction A}) \geqslant \kappa(\mathcal{F})$ et :

LEMME 1. — *On a* $c_1(\mathcal{L})^s_{\restriction A} \neq 0$.

En effet $\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{H}$ étant ample, on voit que $\big(c_1(\mathcal{L}) + (1/m)c_1(\mathcal{H})\big)^s$ est la classe de cohomologie d'un cycle rationnel $Z_m \geqslant 0$ de codimension s . En extrayant une limite faible quand m tend vers l'infini, on voit que $c_1(\mathcal{L})^s$ est représentée par un courant positif fermé T sur X , non nul par hypothèse. La classe $\{A\} = c_1(\mathcal{H})$ est représentée par une $(1,1)$–forme > 0 , donc si i_A est l'injection de A dans X on a

$$(i_A)_\star\big(c_1(\mathcal{L})^s_{\restriction A}\big) = c_1(\mathcal{L})^s \wedge \{A\} = \{T\} \wedge c_1(\mathcal{H}) \neq 0\ .\ \square$$

Quitte à remplacer $\mathcal{H}$ par une puissance, on peut supposer que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{F}(A)$ est ample. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}(-A) \longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}_{\restriction A} \longrightarrow 0\ .$$

L' hypothèse de récurrence donne $H^q(A, \mathcal{F}^{-1}_{\restriction A}) = 0$ pour $q < \max\{s, \kappa(\mathcal{F}_{\restriction A})\}$, et le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano implique $H^q(X, \mathcal{F}^{-1}(-A)) = 0$ pour $q < n$, donc on a bien $H^q(X, \mathcal{F}^{-1}) = 0$ pour $q < \max\{s, \kappa(\mathcal{F})\}$.

LEMME 2. — *Si $\mathcal{L}$ est nef, alors pour tout fibré en droites $\mathcal{G}$ on a*

$$h^q(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G}) \leqslant Cm^{n-1} \quad \text{pour} \quad q \geqslant 1\ ,$$
$$h^0(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G}) = \frac{1}{n!} c_1(\mathcal{L})^n\, m^n + \mathrm{O}(m^{n-1})\ .$$

La première ligne résulte de la suite exacte

$$H^{q-1}(A, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G}(A)_{\restriction A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G}(A)) = 0\ ,$$

en choisissant A assez ample pour que $K_X^{-1} \otimes \mathcal{G}(A)$ soit ample. La deuxième ligne résulte du fait que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{G})$ est un polynôme en m de terme dominant $(1/n!)c_1(\mathcal{L})^n\, m^n$. $\square$

Remarque. — Le lemme 2 montre que la dimension de Kodaira $\kappa(\mathcal{L})$ est égale à n si et seulement si $c_1(\mathcal{L})^n > 0$. Dans le cas $s < n$, on a en général $s \geqslant \kappa(\mathcal{L})$, car il existe une sous-variété $Y \subset X$ de dimension $d = \kappa(\mathcal{L})$ telle que $\kappa(\mathcal{L}_{\restriction Y}) = d$ et le lemme 2 donne $c_1(\mathcal{L})^d_{\restriction Y} > 0$. L'exemple où $\mathcal{L} \longrightarrow X = X_1 \times X_2$ est le produit tensoriel d'un fibré ample sur X_1 et d'un fibré plat non cyclique sur X_2 donne $s = \dim X_1$ et $\kappa(\mathcal{L}) = -\infty$.

Réduction au cas ample. — On peut supposer $n = \max\{s, \kappa(\mathcal{F})\}$ d'après ce qui précède. L'injection $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(D) = \mathcal{F}^m$ montre qu'on a toujours $\kappa(\mathcal{F}) \geqslant \kappa(\mathcal{L})$, donc le cas $n = s$ entraîne aussi $\kappa(\mathcal{F}) = n$ d'après la remarque. On peut alors supposer $\kappa(\mathcal{F}) = n$, d'où $\limsup\ m^{-n}\, h^0(X, \mathcal{F}^m) > 0$. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{O}(A)$ un fibré ample. La suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}^m \otimes \mathcal{H}^{-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}^m) \longrightarrow H^0(A, \mathcal{F}^m_{\restriction A})$$

montre que $\mathcal{F}^m \otimes \mathcal{H}^{-1}$ a des sections non triviales pour m assez grand, donc il existe un diviseur effectif E tel que $\mathcal{F}^m = \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}(E)$. Nous obtenons par conséquent

$$\mathcal{F}^{kp+m} = \mathcal{L}^p \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}(pD + E) = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{O}(D')\ ,$$

avec $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^p \otimes \mathcal{H}$ et $D' = pD + E$. De plus $\mathcal{L}'$ est ample et $(kp+m)^{-1}D' \leqslant k^{-1}D + (kp+m)^{-1}E$ est intégrable pour p assez grand.

Preuve du théorème lorsque $\mathcal{L}$ est ample. — On choisit sur $\mathcal{L}$ une métrique C^∞ à courbure > 0 , et on munit $\mathcal{O}(D)$ de la métrique singulière obtenue en prenant le carré du module d'une section de $\mathcal{O}(D)$, vue comme fonction méromorphe avec pôles le long de D . Pour cette métrique, la courbure de $\mathcal{O}(D)$ est le courant d'intégration $[D] \geqslant 0$, et la métrique associée sur $\mathcal{F}$ vérifie

$$c(\mathcal{F}) = k^{-1}c(\mathcal{L}) + k^{-1}[D] \geqslant k^{-1}c(\mathcal{L}) > 0$$

(bien que $\mathcal{F}$ ne soit pas nef en général!). L'hypothèse d'intégrabilité du diviseur $k^{-1}D$ montre que $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses du corollaire du paragraphe 2, par conséquent $H^q(X, K_X \otimes \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$, et le théorème s'ensuit par dualité de Serre.

4. Théorème de Bogomolov-Sommese [2]. — Dans le même esprit, nous pouvons obtenir une démonstration élémentaire de ce théorème sans utiliser le critère de dégénérescence de Deligne [3]. Soit $\mathcal{G}$ un fibré hermitien de dimension de Kodaira $d = \kappa(\mathcal{G})$. Soit $\Phi_m : X \setminus B \longrightarrow \mathbb{P}^N$ un morphisme de rang générique d défini par $H^0(X, \mathcal{G}^m)$. Munissons $\mathcal{G}$ de la métrique singulière définie par ces sections, et soit $e^{-\varphi}$ le poids associé. Soit u une p–forme holomorphe à valeurs dans $\mathcal{G}^{-1}$. Après régularisation de φ et passage à la limite, l'inégalité de courbure du paragraphe 2 donne :

$$0 = \int_X |\overline{\partial} u|^2 e^\varphi \geqslant \int_{X \setminus B} (\lambda_{p+1} + \ldots + \lambda_n)|u|^2 e^\varphi$$

où $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ sont les valeurs propres de $c(\mathcal{G}) + \partial\overline{\partial}\varphi \geqslant 0$ (pour $\mathcal{G}^{-1}$ les valeurs propres sont $-\lambda_j$). Il y a d valeurs propres $\lambda_j > 0$ sur l'ouvert de $X \setminus B$ où Φ_m est de rang d , par suite $u = 0$ pour $p < d$. On a donc :

$$H^0(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{G}^{-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad p < \kappa(\mathcal{G}) .$$

Bibliographie

[1] Y. Akizuki and S. Nakano. — *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 266–272.

[2] F. Bogomolov. — *Unstable vector bundles and curves on surfaces*, Proc. Intern. Congress of Math., Helsinki (1978), 517–524.

[3] P. Deligne. — *Théorie de Hodge II et III*, Publ. Math. IHES, **40** (1972), 5–57 et **44** (1975), 5–77.

[4] H. Esnault et E. Viehweg. — *Revêtements cycliques*, Algebraic Threefolds, Varenna 1981, Lecture Notes in Math. n°947, Springer-Verlag, Berlin (1982), 241–250.

[5] H. Esnault et E. Viehweg. — *Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems*, Invent. Math., **86** (1986), 161–194.

[6] R. Hartshorne. — *Ample subvarieties of algebraic varieties,* Lecture Notes in Math. n°156, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[7] H. Hironaka. — *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math., **79** (1964), 109–326.

[8] Y. Kawamata. — *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, Math. Ann., **261** (1982), 43–46.

[9] E. Viehweg. — *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math., **335** (1982), 1–8.

Institut Fourier, Université de Grenoble I,
Laboratoire n°188 associé au C.N.R.S. , BP 74, F–38402 Saint-Martin d'Hères
et *Les Alloves, 17, rue Saint-Exupéry, F–38400 Saint-Martin d'Hères*