C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. ???–???, 1997
Géométrie analytique/*Analytic Geometry*

Connexions méromorphes projectives partielles et variétés algébriques hyperboliques

Jean-Pierre DEMAILLY, Jawher EL GOUL

Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR 5582 du CNRS
BP 74, 100 rue des Maths, 38402 Saint-Martin d'Hères, France
E-mail: demailly@fourier.ujf-grenoble.fr, elgoul@fourier.ujf-grenoble.fr

Résumé. Nous introduisons la notion de connexion projective partielle à coefficients méromorphes, et montrons comment de telles connexions peuvent servir à construire des opérateurs wronskiens globaux agissant sur les jets de courbes holomorphes. Grâce à un théorème d'annulation du wronskien reposant sur des hypothèses de négativité de la courbure de Ricci et généralisant des résultats antérieurs de Green-Griffiths, Siu et Nadel, nous donnons des exemples explicites de surfaces algébriques hyperboliques dans $\mathbb{CP}^3$, de degré quelconque ≥ 11.

Meromorphic partial projective connections and hyperbolic projective varieties

Abstract. *We introduce a concept of partial projective connection with meromorphic coefficients, and show how such connections can be used to construct global Wronskian operators acting on jets of holomorphic curves. Thanks to a vanishing theorem for Wronskian operators, relying on negativity hypotheses for the Ricci curvature and generalizing prior results of Green-Griffiths, Siu and Nadel, we give explicit examples of hyperbolic algebraic surfaces in $\mathbb{CP}^3$, of arbitrary degree ≥ 11.*

Abridged English Version

Let X be a complex n-fold. Exploiting some ideas introduced by Y.T. Siu [7] and A. Nadel [6], we consider *meromorphic connections*

$$(*)\qquad \nabla_w v = \sum_{1\leq i,k\leq n}\Big(w_i\frac{\partial v_k}{\partial z_i}+\sum_{1\leq j\leq n}\Gamma^k_{ij}w_iv_j\Big)\frac{\partial}{\partial z_k} = d_wv+\Gamma\cdot(w,v)$$

acting on tangent vector fields $w=\sum_i w_i\partial/\partial z_i$, $v=\sum_k v_k\partial/\partial z_k$, with meromorphic *Christoffel symbols* $\Gamma=(\Gamma^k_{ij})_{1\leq i,j,k\leq n}$. Let B be the pole divisor of ∇ and $b\in H^0(X,\mathcal{O}(B))$ the corresponding

Note Présentée par Jean-Pierre Demailly

section. Given an entire curve $f:\mathbb{C}\to X$ that is not contained in the support $|B|$ of B, we define inductively covariant derivatives $f'_\nabla=f'$, $f^{(k+1)}_\nabla=\nabla_{f'}(f^{(k)}_\nabla)$ and get a *Wronskian operator*

$$(**)\qquad W_\nabla(f)=f'\wedge f''_\nabla\wedge\cdots\wedge f^{(n)}_\nabla.$$

Then $b(f)^{n(n-1)/2}W_\nabla(f)$ can be seen as a holomorphic section with values in the holomorphic line bundle $f^*\big(K_X^{-1}\otimes\mathcal{O}_X(\frac12 n(n-1)B)\big)$. Our starting point is the following vanishing theorem due to Y.T. Siu [7]: *If X is projective algebraic and $K_X\otimes\mathcal{O}_X(-\frac12 n(n-1)B)$ is ample, every non constant entire curve $f:\mathbb{C}\to X$ satisfies either $f(\mathbb{C})\subset|B|$ or $W_\nabla(f)\equiv 0$.* The proof of this fundamental result relies on the Ahlfors lemma and a use of negative curvature estimates, according to techniques first introduced by Green and Griffiths [5]. Our next observation is that not all Christoffel symbols are needed to compute the Wronskian: in fact Γ^k_{ij} is needed only modulo tensors of the form $\alpha_i\delta_{jk}+\beta_j\delta_{ik}$, and this leads to what we call a *partial projective connection.* Given a homogeneous polynomial $s=s_0+s_1+\cdots+s_n\in\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$, one obtains such partial projective connections on $\mathbb{C}^{n+1}$ and on its quotient $\mathbb{P}^n=(\mathbb{C}^{n+1}\smallsetminus\{0\})/\mathbb{C}^\star$ by solving a linear system

$$(***)\qquad \sum_{0\le k\le n}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial s_\ell}{\partial z_k}=\frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i\partial z_j},\qquad 0\le i,j,\ell\le n.$$

As in the work of A. Nadel [6], the corresponding connection ∇ is such that all hypersurfaces $Y_\alpha=\{\alpha_0s_0+\cdots+\alpha_ns_n=0\}$ are *totally geodesic.* If s is of degree p and s_j is divisible by $z_j^{p-k_j}$, $k_j\ll p$, it turns out that ∇ has very low pole orders, hence the divisor B is "small". From this and the above mentioned result of Siu, we derive our main result:

THEOREM. *Let $s=s_0+\cdots+s_n\in\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$ be a homogeneous polynomial of degree p such that s_j is divisible by $z_j^{p-k_j}$ and $\delta=\det(\partial s_\ell/\partial z_k)_{k,\ell}\not\equiv 0$. Let $Y:=\{s=0\}\subset\mathbb{P}^n$ and $Y_\alpha=\{\alpha_0s_0+\cdots+\alpha_ns_n=0\}$. Let ∇ be the connection whose Christoffel symbols are defined by $(**)$ and let B be its pole divisor. If $p>n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(n+1+\sum_{i=0}^n k_i)$, then every entire curve $f:\mathbb{C}\to Y$ satisfies either $f(\mathbb{C})\subset Y\cap|B|$ or $f(\mathbb{C})\subset Y\cap Y_\alpha$ for some hypersurface $Y_\alpha\ne Y$. In particular, if $n=3$ and $p\ge 11$, the projective surfaces*

$$Y=\{z_0^p+z_1^p+z_2^p+z_3^{p-2}(\varepsilon_0z_0^2+\varepsilon_1z_1^2+\varepsilon z_2^2+z_3^2)=0\}\subset\mathbb{P}^3$$

are hyperbolic in the sense of Kobayashi, except in a few explicit cases where Y is singular or contains a line (conditions (††) and (†††) in section 4 below).

---

1. Théorème d'annulation du Wronskien

Soit X une variété complexe de dimension n. En reprenant des idées de Y.T. Siu [7] et de A. Nadel [6], nous considérerons des *connexions méromorphes* ∇ opérant sur le fibré tangent T_X, c'est-à-dire des opérateurs définis par la relation $(*)$ ci-dessus, dont les *symboles de Christoffel* $\Gamma=(\Gamma^k_{ij})_{1\le i,j,k\le n}$, calculés relativement à des systèmes de coordonnées holomorphes $(z_1,\ldots,z_n)$ quelconques, sont méromorphes. Soit B le diviseur des pôles de ∇ (i.e. de ses coefficients Γ^k_{ij}) et $b\in H^0(X,\mathcal{O}(B))$ la section canonique associée. Alors $b\nabla$ est un opérateur à coefficients holomorphes.

Étant donné une courbe holomorphe $f : D(0,r) \to X$ non contenue dans le support $|B|$ de B, on définit inductivement les dérivées covariantes f', $f''_\nabla, \ldots, f^{(n)}_\nabla$ par $f^{(k+1)}_\nabla = \nabla_{f'}(f^{(k)}_\nabla)$. Le *Wronskien* de f relativement à ∇ est la section méromorphe de $f^*(\Lambda^n T_X) = f^*(K_X^{-1})$ telle que $W_\nabla(f) = f' \wedge f''_\nabla \wedge \cdots \wedge f^{(n)}_\nabla$. En compensant les pôles du Wronskien à l'aide d'une puissance de b, on obtient une section holomorphe $b(f)^{n(n-1)/2} W_\nabla(f)$, à valeurs dans le fibré en droite $f^*\big(K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(\frac{1}{2}n(n-1)B)\big)$. Notre point de départ est le théorème suivant dû à Y.T. Siu.

Théorème 1.1. ([7]). *Soit X une variété complexe compacte de dimension n munie d'une connexion méromorphe ∇ de diviseur de pôles B. Si $K_X \otimes \mathcal{O}_X(-\frac{1}{2}n(n-1)B)$ est ample, alors pour toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$, on a ou bien $f(\mathbb{C}) \subset |B|$ ou bien $W_\nabla(f) \equiv 0$.*

La démonstration initiale de Y.T. Siu reposait sur une généralisation très élaborée du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Le théorème 1.1 peut en fait se voir comme un cas particulier d'un théorème plus général énoncé par Green et Griffiths [5] (la démonstration de [5] est incomplète; une démonstration complète, reposant sur une étude de la géométrie des espaces fibrés de jets, est donnée dans [2]). Ainsi, 1.1 se déduit du théorème 1.2 ci-dessous appliqué à l'opérateur $P = b^{n(n-1)/2} W_\nabla$, à valeurs dans le dual A^{-1} du fibré $A = K_X \otimes \mathcal{O}_X(-\frac{1}{2}n(n-1)B)$ (P est d'ordre n et de degré $m = n(n+1)/2$).

Théorème 1.2. *Soit $P(f', f'', \ldots, f^{(k)})$ un opérateur différentiel algébrique d'ordre k à coefficients holomorphes sur une variété projective X, opérant sur les courbes (ou germes de courbes) holomorphes $f : D(0,R) \to X$, et à valeurs dans le dual A^{-1} d'un fibré en droites ample A. On suppose que P est homogène de degré m et "invariant par reparamétrisation", c'est-à-dire tel que*

$$P\big((f \circ \varphi)', (f \circ \varphi)'', \ldots, (f \circ \varphi)^{(k)}\big) = (\varphi')^m P(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \circ \varphi$$

pour tout germe de biholomorphisme φ reparamétrisant f. Alors pour toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ on a identiquement $P(f', f'', \ldots, f^{(k)}) = 0$ sur $\mathbb{C}$.

Remarque 1.3. Dans le cas où f est une courbe de Brody, c'est-à-dire une courbe entière à dérivée f' bornée, une démonstration beaucoup plus simple (reposant en définitive seulement sur les inégalités de Cauchy) est donnée dans [3]. Ce cas est suffisant pour traiter le problème de l'hyperbolicité d'une variété complexe compacte, d'après le théorème de Brody [1].

2. Connexions projectives partielles

Une observation importante est de voir que pour définir le Wronskien W_∇ on n'a pas besoin de connaître entièrement le tenseur Γ^k_{ij}, mais seulement modulo des tenseurs de la forme $\alpha_i \delta_{jk} + \beta_j \delta_{ik}$. En effet, soit $\widetilde{\nabla}$ une autre connexion telle qu'il existe des 1-formes méromorphes α et β avec $\widetilde{\nabla}_w v = \nabla_w v + \alpha(w) \cdot v + \beta(v) \cdot w$ pour tous champs de vecteurs v, w. On vérifie alors facilement par récurrence sur k que $f^{(k)}_{\widetilde{\nabla}}$ est somme de $f^{(k)}_\nabla$ et d'une combinaison linéaire des dérivées covariantes d'ordre inférieur, par suite $W_\nabla = W_{\widetilde{\nabla}}$. Ceci permet d'étendre le théorème d'annulation du Wronskien au cas des "connexions projectives partielles", définies comme suit.

Définition 2.1. *Une connexion projective partielle ∇ sur X est une section du faisceau quotient du faisceau des connexions méromorphes modulo l'addition de tenseurs méromorphes de la forme $(w, v) \mapsto \alpha(w) \cdot v + \beta(v) \cdot w$. En d'autres termes, ∇ est définie par la donnée de connexions méromorphes ${}_j\nabla$ sur les ouverts U_j d'un recouvrement de X, en sorte qu'on ait des relations de compatibilité ${}_k\nabla_w v - {}_j\nabla_w v = \alpha_{jk}(w) \cdot v + \beta_{jk}(v) \cdot w$ sur $U_j \cap U_k$.*

Exemple type 2.2. Soit W une variété complexe sur laquelle un groupe de Lie G agit librement et proprement. Soit $X = W/G$ la variété quotient et $\pi : W \to X$ la projection canonique. Étant donné une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur W et une section locale $\sigma : W/G \supset U \to W$ de π, on peut définir une connexion ${}_\sigma\nabla = \pi_*(\sigma^*(\widetilde{\nabla}))$ sur U telle que

$$(+) \qquad {}_\sigma\nabla_w v = \pi_*\big(\widetilde{\nabla}_{\sigma_* w}(\sigma_* v)\big)$$

pour tout couple de champs (w, v) sur U. Les différentes connexions ${}_\sigma\nabla$ se recollent en une connexion projective partielle sur W/G tout entier sous les conditions suivantes :

i) $\widetilde{\nabla}$ *est* G*-invariante.*

ii) *Pour tout couple de champs* G*-invariants* v *et* τ *sur* W *tel que* τ *soit dans le fibré tangent relatif* $T_{W/X} \subset T_W$*, il existe des* 1*-formes méromorphes* α *et* β *le long de* $T_{W/X}$ *telles que* $\widetilde{\nabla}_\tau v - \alpha(\tau)v$ *et* $\widetilde{\nabla}_v \tau - \beta(\tau)v$ *soient tangents à* $T_{W/X}$*.*

Lorsque $W = X \times G$ (ce qui n'est pas restrictif compte tenu du caractère local de l'assertion), la vérification se fait aisément en écrivant $\widetilde{\nabla} = d_X + d_G + \widetilde{\Gamma}$ où $W \ni (x, g) \mapsto \widetilde{\Gamma}(x, g)$, est un tenseur à valeurs dans $T^*_W \otimes T^*_W \otimes T_W$ et où d_G est invariant à gauche. D'après i), $\widetilde{\Gamma}(x, g) = \Gamma(x)$ ne dépend en fait que de x. On écrit alors $\sigma(x) = (x, h(x))$ où $h : U \to G$ est une application holomorphe, d'où

$$\sigma_* v = v + dh(v), \qquad \widetilde{\nabla}_{\sigma_* w}(\sigma_* v) = d_w v + d^2h(w, v) + \Gamma(x)(w + dh(w), v + dh(v)).$$

La condition ii) garantit que les champs $\Gamma(x)(dh(w), v) - \alpha(dh(w))v$, $\Gamma(x)(w, dh(v)) - \beta(dh(v))w$, et $\Gamma(x)(dh(w), dh(v))$ sont dans le noyau de π_*. On en déduit

$${}_\sigma\nabla_w v = d_w v + \Gamma(x)(w, v) + \alpha(dh(w))v + \beta(dh(v))w,$$

ce qui signifie que les connexions $\nabla_{|U_j}$ définies par des sections $\sigma_j : U_j \to W$ quelconques peuvent se recoller en une connexion projective partielle globale ∇ sur X. □

Corollaire 2.3. (Cas de $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}/\mathbb{C}^*$). *Soient* $\widetilde{\nabla} = d + \widetilde{\Gamma}$ *une connexion méromorphe sur* $\mathbb{C}^{n+1}$*,* $\varepsilon = \sum z_j \partial/\partial z_j$ *le champ de vecteurs d'Euler et* $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ *la projection canonique. Alors* $\widetilde{\nabla}$ *induit une connexion projective partielle sur* $\mathbb{P}^n$ *dès que*

i) *les symboles de Christoffel* Γ^k_{ij} *sont des fonctions rationnelles homogènes de degré* -1*.*

ii) *il existe des fonctions méromorphes* α*,* β *et des* 1*-formes méromorphes* γ*,* η *telles que pour tous champs de vecteurs* v*,* w *on ait* $\widetilde{\Gamma} \cdot (\varepsilon, v) = dv + \gamma(v)\varepsilon$ *et* $\widetilde{\Gamma}(w, \varepsilon) = \beta w + \eta(w) \cdot \varepsilon$*.*

3. Cas de certaines classes d'hypersurfaces algébriques dans $\mathbb{P}^n$

Soit X une variété complexe de dimension n munie d'une connexion projective partielle ∇, et soit Y une hypersurface de X non contenue dans le diviseur des pôles de ∇. L'hypersurface Y est dite *totalement géodésique* par rapport à la connexion ∇ si $\nabla_w v$ est un champ de vecteurs tangent à Y chaque fois que v, w sont tangents à Y, autrement dit si la restriction $\nabla_{|Y}$ définit une connexion sur T_Y. Un calcul classique donne la caractérisation suivante.

Lemme 3.1. $Y = \{s = 0\}$ *est totalement géodésique par rapport à* ∇ *si et seulement s'il existe localement au voisinage de* Y *des fonctions méromorphes* a_i*,* b_j *et* c_{ij} *telles que*

$$(++) \qquad \sum_{1 \le k \le n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial s}{\partial z_k} + a_i \frac{\partial s}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial s}{\partial z_i} + s\, c_{ij} = \frac{\partial^2 s}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

L'idée originale de [6] est de profiter de la haute indétermination de ce système linéaire (en les inconnues Γ_{ij}^k, a_i, b_j et c_{ij}) pour trouver une connexion méromorphe de $\mathbb{P}^n$ par rapport à laquelle toute hypersurface membre d'un système linéaire (Y_α) assez grand soit totalement géodésique. La définition suivante introduite dans [3] sera commode.

DÉFINITION 3.2. *Soient* $k_0, \ldots, k_n$ *et* p *des entiers tel que* $0 \le k_j < p/2$ *; on note* $\mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ *l'espace des polynômes homogènes* s *de degré* p *dans* $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ *tel que chaque monôme de* s *est multiple de* $z_j^{p-k_j}$ *pour un certain* j.

Remarquons que, dans ces conditions, tout élément $s \in \mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ s'écrit de façon unique comme $s = s_0 + \cdots + s_n$ avec s_j multiple de $z_j^{p-k_j}$. Considérons une telle hypersurface $Y = \{s = 0\} \subset \mathbb{P}^n$, et le système linéaire associé $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On va construire une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par rapport à laquelle le cône algébrique $\widetilde{Y}_\alpha \subset \mathbb{C}^{n+1}$ au dessus de Y_α soit totalement géodésique pour tout α. Il suffit pour cela de résoudre (++) en fixant par exemple $a_i = b_j = c_{ij} = 0$, ce qui conduit à résoudre le système linéaire

$$(+\!+\!+) \qquad \sum_{0\le k\le n} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad 0 \le i, j, \ell \le n.$$

Ce système admet une solution unique si on suppose $\delta := \det(\partial s_\ell/\partial z_k)_{0\le k,\ell\le n} \not\equiv 0$.

LEMME 3.3. *La connexion* $\widetilde{\nabla}$ *définie par les symboles* $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ *solutions de* (+++) *induit sur* $\mathbb{P}^n$ *une connexion projective partielle* ∇ *pour laquelle toute hypersurface* Y_α *est totalement géodésique.*

Démonstration. En effet, la solution $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ sont des fonctions rationnelles de degré -1 donc 2.3 i) est vérifié. Observons de plus que la connexion est symétrique (i.e. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \widetilde{\Gamma}_{ji}^k$). Finalement, grâce à l'identité d'Euler, on a :

$$\sum_{0\le i,k\le n} z_i \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \sum_{0\le i\le n} z_n \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i \partial z_j} = (p-1)\frac{\partial s_\ell}{\partial z_j}, \quad 0 \le \ell, j \le n.$$

Par suite, la condition $\delta \not\equiv 0$ entraîne $(\sum_i z_i \widetilde{\Gamma}_{ij}^k)_{j,k} = (p-1)\,\mathrm{Id}$, d'où puisque $\widetilde{\nabla}$ est symétrique, $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, v) = \widetilde{\Gamma}(v, \varepsilon) = (p-1)v$. La propriété 2.3 ii) est donc également vérifiée. □

Un vérification aisée montre que les déterminants de Cramer intervenant dans la résolution de (+++) sont tous divisibles par $\prod z_j^{p-k_j-2}$, et il en résulte par simplification de ce facteur dans δ que le degré du diviseur B des pôles de ∇ est au plus égal à $n+1+\sum_{j=0}^n k_j$. Si p est assez grand, une application directe du théorème 1.1 montre que toute courbe entière f tracée sur Y satisfait ou bien $f(\mathbb{C}) \subset |B|$ ou bien $W_\nabla(f) \equiv 0$. La condition $W_\nabla(f) \equiv 0$ permet de voir que $f(\mathbb{C})$ est contenu dans toute hypersurface Y_α qui contient les $(n-1)$ premières dérivées covariantes de f en un point générique. Or, par un comptage de dimension, il y a au moins une autre hypersurface $Y_\alpha \neq Y$ pour laquelle cette condition soit réalisée. On en déduit

THÉORÈME 3.4. *Soit* $s = s_0 + \cdots + s_n \in \mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ *un polynôme tel que* $\delta = \det\big(\partial s_\ell/\partial z_k\big)_{k,\ell} \not\equiv 0$, *et tel que* $Y := \{s = 0\}$ *soit une hypersurface lisse de* $\mathbb{P}^n$. *Soient enfin* $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$ *et* B *le diviseur des pôles de la connexion projective partielle* ∇ *donnée par* (+++). *Supposons* $p > n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(n+1+\sum_{i=0}^n k_i)$. *Alors, toute courbe entière non constante tracée sur* Y *est algébriquement dégénérée et vérifie ou bien* $f(\mathbb{C}) \subset Y \cap |B|$, *ou bien* $f(\mathbb{C}) \subset Y \cap Y_\alpha$ *pour une certaine hypersurface* Y_α *distincte de* Y.

4. Exemples

i) *Hypersurfaces de Fermat* $Y = \{z_0^p + z_1^p + \cdots + z_n^p = 0\}$.

On fait un calcul à la main pour voir que le Wronskien a pour dénominateur $(z_0 \cdots z_n)^{n-2}$ (le théorème 3.4 tel quel ne donne pas l'estimation optimale). Les courbes entières sont donc toutes algébriquement dégénérées dès que $p \geq n^2$. C'est un résultat démontré originellement par M. Green [4] en utilisant la théorie de Nevanlinna.

ii) Comme dans [3], considérons une hypersurface $Y \subset \mathbb{P}^3$ de la forme

$$Y = \{z_0^p + z_1^p + z_2^p + z_3^{p-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\}, \tag{†}$$

définie par un élément s de $\mathcal{S}_{p,0,0,0,2}$. On peut vérifier que Y est lisse si et seulement si

$$\sum_{j \in J} \varepsilon_j^{p/p-2} \neq \frac{2}{p-2}\Big(-\frac{p}{2}\Big)^{p/p-2} \qquad \forall J \subset \{0,1,2\} \tag{††}$$

pour chaque choix des racines complexes d'ordre $p-2$, et que la condition de non dégénérescence $\delta \not\equiv 0$ est toujours satisfaite. Par suite, pour $p > 10$, le théorème 3.1 montre que toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y$ est contenue dans une intersection complète $Y \cap |B|$ ou $Y \cap Y_\alpha$. Grâce à un calcul du genre des intersections (détaillé dans [3], §4), ces courbes ont toute un genre géométrique ≥ 2, du moins si on exclut les cas triviaux où Y contient des droites projectives, à savoir si

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq (0,0), \quad \forall i \neq j \quad \text{et} \quad \varepsilon_i/\varepsilon_j \neq -\theta^2, \quad \forall \theta \text{ racine de } \theta^p = -1. \tag{†††}$$

On obtient donc finalement le résultat suivant*.

THÉORÈME. *Sous les conditions* (††) *et* (†††)*, la surface algébrique lisse* $Y \subset \mathbb{P}^3$ *définie par* (†) *est hyperbolique au sens de Kobayashi, en tout degré* $p \geq 11$.

Note remise le 15 janvier 1997, acceptée le 5 février 1997.

Références bibliographiques

[1] **Brody R.,** *Compact manifolds and hyperbolicity,* Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978) 213–219

[2] **Demailly J.-P.,** *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials,* Proceedings of the AMS Summer Institute on Alg. Geom. held at Santa Cruz, ed. J. Kollar, July 1995, to appear

[3] **El Goul J.,** *Algebraic families of smooth hyperbolic surfaces of low degree in* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, Manuscripta Math. **90** (1996) 521–532

[4] **Green M.,** *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties,* Amer. J. Math. **97** (1975), 43–75

[5] **Green M., Griffiths P.:** *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings.* The Chern Symposium 1979, Proc. Internal. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New York (1980), 41–74

[6] **Nadel A.M.,** *Hyperbolic surfaces in* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, Duke Math. J. **58** (1989) 749–771

[7] **Siu Y.T.,** *Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions,* Duke Math. J. **55** (1987) 213–251

[8] **Siu Y.T., Yeung S.K.,** *Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma and hyperbolic hypersurfaces of low degrees,* Preprint 1996

* Après avoir rédigé cette Note, nous avons appris que Siu et Yeung [8] avaient obtenu indépendamment le même résultat par une méthode quelque peu différente.