GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré vectoriel positif.*
Note de **Jean-Pierre Demailly**, présentée par Pierre Lelong.

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au dessus d'une variété $\mathbb{C}$–analytique compacte X de dimension n . Si E est positif au sens de Griffiths, nous montrons que les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l)$ s'annulent pour $p + q \geq n + 1$ et $l \geq r + C(n, p, q)$. La démonstration repose sur le fait classique que toute puissance tensorielle $E^{\otimes k}$ se décompose en représentations irréductibles de $\mathrm{Gl}(E)$, chaque composante étant isomorphe à l'espace des sections d'un fibré linéaire homogène positif sur une variété de drapeaux de E . La propriété d'annulation s'obtient alors en combinant l'isomorphisme de Le Potier avec une nouvelle estimation de courbure pour le fibré des formes différentielles X–relatives sur la variété de drapeaux de E .

ANALYTIC GEOMETRY. — Vanishing theorems for cohomology groups of tensor powers of a positive vector bundle.

Let E be a holomorphic vector bundle of rank r over a compact complex manifold X of dimension n . If E is positive in the sense of Griffiths, it is shown that the Dolbeault cohomology groups $H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l)$ vanish for $p+q \geq n+1$ and $l \geq r+C(n, p, q)$. The proof rests on the well-known fact that any tensor power $E^{\otimes k}$ splits into irreducible representations of $\mathrm{Gl}(E)$, each component being canonically isomorphic to the space of sections of a positive homogeneous line bundle over a flag manifold of E . The vanishing property is then obtained by a combination of Le Potier's isomorphism theorem with a new curvature estimate for the bundle of X–relative differential forms on the flag manifold of E .

1. Enoncé des résultats. — Rappelons que le fibré E est dit > 0 , resp. ≥ 0 (au sens de Griffiths [3]) si la forme de courbure de Chern

$$ic(E) = i \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j \otimes e^\star_\lambda \otimes e_\mu \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \quad , \quad 1 \leq \lambda, \mu \leq r \quad ,$$

identifiée à une forme hermitienne sur $TX \otimes E$, vérifie

$$ic(E)_x(\zeta \otimes v) = \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu}(x)\, \zeta_i \overline{\zeta}_j v_\lambda \overline{v}_\mu > 0 \quad , \quad \text{resp.} \quad \geq 0$$

pour tous vecteurs $\zeta = \sum \zeta_i\, \partial/\partial z_i \in T_xX$, $v = \sum v_\lambda e_\lambda \in E_x$ non nuls.

A l'heure actuelle, on ne dispose pas de théorèmes d'annulation généraux et optimaux pour les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}$ des puissances tensorielles d'un fibré vectoriel positif. Ainsi, le célèbre théorème de Le Potier [5] : $E > 0 \implies H^{p,q}(X, E) = 0$ pour $p+q \geq n+r$ ne se généralise pas aux puissances symétriques S^kE , même pour $p = n$ et $q = n - 2$ (*cf.* [4]) . On a cependant :

Théorème. — *Soit L un fibré linéaire holomorphe sur X . On suppose que $E > 0$ et $L \geq 0$, ou $E \geq 0$ et $L > 0$. Pour tous entiers p, q tels que $p+q \geq n+1$, on pose $A(n, p, q) = \frac{1}{4}n(n + 1)(p + 1)(q + 1)/(p + q - n + 1)$ si $p < n$, et $A(n, p, q) = 0$ si $p = n$. Soit Γ^aE la représentation tensorielle irréductible de $\mathrm{Gl}(E)$ de plus haut poids $a \in \mathbb{Z}^r$, avec $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_h > 0$ et $a_{h+1} = \ldots = a_r = 0$ où $1 \leq h \leq r - 1$. Si $p + q \geq n + 1$ alors*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^aE \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \textit{pour} \quad l \geq h + A(n, p, q) \quad .$$

Corollaire. — *Pour $p + q \geq n + 1$ on a*

(0.1) $H^{p,q}(X, S^kE \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ *si* $l \geq 1 + A(n, p, q)$ *;*

(0.2) $H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ *si* $l \geq \min(k, r - 1) + A(n, p, q)$.

Pour $p = n$, le résultat (0.1) est dû à P. Griffiths [3] , et dans ce cas les résultats ci-dessus sont vrais en fait plus généralement pour des fibrés E ou L amples. Par ailleurs si $p = n$ la condition $l \geq h$ du théorème est optimale, comme le montre l'exemple suivant, inspiré de Peternell-Le Potier-Schneider [4] .

EXEMPLE. — *Soit $X = G_r(V)$ la Grassmannienne des sous-espaces de codimension r d'un espace vectoriel V de dimension d , et E le fibré tautologique quotient de rang r au-dessus de X (E est ≥ 0 and $L = \det E$ très ample) . Soit $h \in \{1, \ldots, r-1\}$ et $a \in \mathbb{Z}^r$ tel que $a_1 \geq \ldots \geq a_h \geq d - r$, $a_{h+1} = \ldots = a_r = 0$ et $b = (a_1 - d + r, \ldots, a_h - d + r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. Alors si $n = \dim X = r(d-r)$ et $q = (r-h)(d-r)$ on a*

$$H^{n,q}\big(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^h\big) \simeq \Gamma^b V \otimes (\det V)^h \neq 0 \quad . \tag{0.3}$$

Cet exemple donne une réponse négative générale à la question (4.3) de Sommese [7] . Il serait par ailleurs intéressant de savoir si le théorème est vrai avec $A(n,p,q) = 0$ pour $p < n$. La démonstration consiste à se ramener à un fibré en droites au dessus d'une variété de drapeaux de E; elle utilise les techniques de Griffiths [3] et Le Potier [5] , ainsi que les résultats de Bott [2]. Pour simplifier l'exposé, nous nous contenterons de décrire le cas des puissances symétriques $S^k E$, qui fait seulement intervenir le fibré projectivisé $P(E^\star)$.

2.PASSAGE AU FIBRÉ $O_E(1)$ SUR $P(E^\star)$. — Si V est un espace vectoriel complexe de dimension $r \geq 1$, on note $P(V^\star)$ l'espace projectif des hyperplans de V , H le sous-fibré tautologique $H_{[\xi]} = \xi^{-1}(0)$, $[\xi] \in P(V^\star)$, $O(1) = V/H$ le fibré en droites quotient et $O(k) = O(1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. On a alors les formules classiques

$$H^{r-1,0}(P(V^\star), O(k)) \simeq S^{k-r} V \otimes \det V \quad ; \tag{2.1}$$

$$H^{r-1,q}(P(V^\star), O(k)) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 1 \ , \ k \geq 1 \ . \tag{2.2}$$

Appliquons maintenant la construction de $O(1)$ à chaque fibre $V = E_x$, $x \in X$. On obtient ainsi un fibré en droites $O_E(1)$ au dessus de $P(E^\star)$, et il est bien connu que la positivité de E entraîne celle de $O_E(1)$. Posons d'autre part $\Omega^p_X = \Lambda^p T^\star X$, $\Omega^p_Y = \Lambda^p T^\star Y$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^\star \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_{Y/X} \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

où $\Omega^1_{Y/X}$ est par définition le fibré des 1–formes différentielles relatives le long des fibres de la projection $\pi : Y = P(E^\star) \to X$. On peut alors définir une filtration décroissante naturelle de Ω^s_Y en posant

$$F^{p,s} = F^p(\Omega^s_Y) = \pi^\star(\Omega^p_X) \wedge \Omega^{s-p}_Y \quad . \tag{2.4}$$

Le gradué associé à cette filtration est

$$G^{p,s} = F^{p,s}/F^{p+1,s} = \pi^\star(\Omega^p_X) \otimes \Omega^{s-p}_{Y/X} \quad . \tag{2.5}$$

Au dessus de tout ouvert $U \subset X$ où $E^\star$ est un fibré trivial $U \times V$ avec $\dim_{\mathbb{C}} V = r$, la suite exacte (2.3) se scinde ainsi que la filtration (2.4). En utilisant (2.1) et (2.2), on calcule aussitôt les images directes de faisceaux

$$\pi_\star(G^{p,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L) = \Omega^p_X \otimes S^{k-r} E \otimes \det E \otimes L \quad ,$$

$$R^q \pi_\star(G^{p,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L) = 0 \quad \text{si} \quad q \geq 1 \ , \ k \geq 1 \ .$$

La suite spectrale de Borel-Leray implique l'isomorphisme

(2.6) $$H^q(Y, G^{p,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L) \simeq H^{p,q}(X, S^{k-r}E \otimes \det E \otimes L) \quad .$$

Le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [1] appliqué au fibré $O_E(k) \otimes \pi^\star L$ sur $P(E^\star)$, $k \geq 1$, donne par ailleurs

(2.7) $$H^q(Y, \Omega_Y^{p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L) = 0 \quad \text{pour} \quad p+q \geq n+1 \ .$$

Grâce à la suite exacte courte $0 \to F^{p+1,p+r-1} \to \Omega_Y^{p+r-1} \to G^{p,p+r-1} \to 0$, le groupe $H^q(Y, G^{p,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L)$ s'annulera pourvu que

(2.8) $$H^{q+1}(Y, F^{p+1,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L) = 0 \quad .$$

Cette annulation est évidente si $p = n$ car $F^{n+1,n+r-1} = 0$. Dans le cas général, on va l'obtenir à l'aide d'une estimation de courbure précise pour le fibré $F^{p+1,p+r-1}$.

3. Estimation de la courbure du sous-fibré $F^{p+1,p+r-1}$. — Posons pour simplifier $\Omega = \Omega_Y^{p+r-1}$, $F = F^{p+1,p+r-1}$, $G = \Omega^{p+r-1}/F^{p+1,p+r-1}$ et considérons les suites exactes

(3.1) $$0 \longrightarrow F \longrightarrow \Omega \longrightarrow G \longrightarrow 0 \ ,$$

(3.2) $$0 \longrightarrow F(k) \longrightarrow \Omega(k) \longrightarrow G(k) \longrightarrow 0 \ ,$$

où (3.2) se déduit de (3.1) par tensorisation par $O_E(k) \otimes \pi^\star L$. Munissons $P(E^\star)$ de la métrique kählérienne $\omega = \frac{1}{k} ic(O_E(k) \otimes \pi^\star L)$, et appliquons à toute forme u de type $(p+r-1, q+1)$ sur $P(E^\star)$ à valeurs dans $O_E(k) \otimes \pi^\star L$ l'inégalité de Akizuki-Nakano [1]. Il vient

(3.3) $$||D''_{\Omega(k)} u||^2 + ||D''^\star_{\Omega(k)} u||^2 \geq k(p+q-n+1)) \ ||u||^2 \quad .$$

Relativement au scindage orthogonal $\Omega \simeq F \oplus G$, les connexions de Chern de Ω , F , G sont d'autre part reliées par la formule classique (*cf.* [3]) :

$$D_\Omega = \begin{pmatrix} D_F & -\beta^\star \wedge \bullet \\ \beta \wedge \bullet & D_G \end{pmatrix} \quad , \quad \beta \in C^\infty(\Lambda^{1,0} T^\star P(E^\star) \otimes \mathrm{Hom}(F, G)) \ .$$

On en déduit par conséquent

$$D''_{\Omega(k)} = \begin{pmatrix} D''_{F(k)} & -\beta^\star \wedge \bullet \\ 0 & D''_{G(k)} \end{pmatrix} \quad , \quad D''^\star_{\Omega(k)} = \begin{pmatrix} D''^\star_{F(k)} & 0 \\ -\beta \,\lrcorner\, \bullet & D''^\star_{G(k)} \end{pmatrix} \quad .$$

Pour toute $(0, q+1)$–forme f à valeurs dans $F(k)$ il vient

(3.4) $$D''_{F(k)} f = D''_{\Omega(k)} f \quad , \quad ||D''^\star_{F(k)} f||^2 = ||D''^\star_{\Omega(k)} f||^2 - ||\beta \,\lrcorner\, f||^2 \quad .$$

L'annulation (2.8) aura donc lieu si en tout point de X on peut s'assurer que $|\beta \,\lrcorner\, f|^2 < k(p+q-n+1) \, |f|^2$. Choisissons des coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ sur X et des coordonnées non homogènes $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, 1)$ sur les fibres $P(E_z^\star)$ en sorte que la base $(dz_1, \ldots, dz_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_{r-1})$ soit ω–orthonormée au point $[e_r^\star] \in P(E^\star)$. Grâce à un calcul explicite de β au point $[e_r^\star]$ en termes des coefficients de courbure $c_{ij\lambda\mu}$ de E , on vérifie que

$$\beta \,\lrcorner\, f = - \sum_{i,j,\lambda<r} c_{ijr\lambda} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \,\lrcorner\, \big(d\xi_\lambda \wedge \big(\frac{\partial}{\partial z_j} \,\lrcorner\, f \big) \big) \mod F(k) \quad ,$$

(3.5) $$|\beta \,\lrcorner\, f|^2 \leq (p+1)(q+1) \Big(\sum_{i,j,\lambda<r} |c_{ijr\lambda}|^2 \Big) \, |f|^2 \quad .$$

La métrique kählérienne ω est donnée par ailleurs par

$$\omega = i\Big(\sum_{1\le\lambda\le r-1} d\xi_\lambda \wedge d\overline{\xi}_\lambda + \sum_{i,j} c_{ijrr}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j + \frac{1}{k}\pi^\star c(L)\Big) \quad .$$

Ceci ne suffit pas a priori pour contrôler les coefficients $c_{ijr\lambda}$, c'est pourquoi on remplace L par le fibré en droites $L' = (\det E)^l \otimes L$, la courbure de $\det E$ étant $\sum_{i,j}(\sum_{1\le\lambda\le r} c_{ij\lambda\lambda}) dz_i \wedge d\overline{z}_j$. On obtient ainsi

$$\omega_{ij} = c_{ijrr} + \frac{l}{k} \sum_{1\le\lambda\le r} c_{ij\lambda\lambda} + \frac{1}{k} c(L)_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \le i,j \le n \quad .$$

Des majorations élémentaires utilisant la positivité de $ic(E)$ donnent alors

$$\sum_{i,j,\lambda<r} |c_{ijr\lambda}|^2 < \frac{k}{4l} n(n+1) \quad . \tag{3.6}$$

Compte tenu de (3.3–3.6), on obtient $H^{q+1}(Y, F^{p+1,p+r-1} \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star L') = 0$ pour $p+q \ge n$ et $\frac{k}{4l} n(n+1)(p+1)(q+1) \le k(p+q-n+1)$, *i.e.* $l \ge A(n,p,q)$. L'annulation (0.1) résulte alors de (2.6), (2.7), (2.8) où L' est substitué à L .

Bibliographie

[1] Y. Akizuki and S. Nakano. — *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 266–272.

[2] R. Bott. — *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math., **66** (1957), 203–248.

[3] P.A. Griffiths. — *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton (1969), 185–251.

[4] Th. Peternell, J. le Potier and M. Schneider. — *Vanishing theorems, linear and quadratic normality*, Invent. Math., **87** (1987), 573–586.

[5] J. Le Potier. — *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe de rang quelconque*, Math. Ann., **218** (1975), 35–53.

[6] M. Schneider. — *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel*, Manuscripta Math., **11** (1974), 95–101.

[7] A.J. Sommese. — *Submanifolds of abelian varieties*, Math. Ann., **233** (1978), 229–256.

Institut Fourier, Université de Grenoble I,
Laboratoire n° 188 associé au C.N.R.S. , BP 74, F–38402 Saint-Martin d'Hères
et *Les Alloves, 17, rue Saint-Exupéry, F–38400 Saint-Martin d'Hères*