COURANTS POSITIFS ET THÉORIE DE L'INTERSECTION

Jean-Pierre DEMAILLY (Institut Fourier, Grenoble 1)

1. Introduction

La notion de multiplicité locale d'intersection des cycles algébriques ou analytiques est maintenant bien comprise d'un point de vue algébrique depuis plusieurs décennies (travaux de Samuel [Sa51], Serre [Se57]), voire depuis le XIXème siècle. Nous allons dans la suite adopter un point de vue assez différent, mais il est sans doute utile de rappeler quelques notions fondamentales pour situer le contexte.

Rappelons qu'un cycle algébrique de codimension p dans une variété algébrique X est une combinaison linéaire formelle $A = \sum \lambda_j A_j$ dans le groupe abélien libre engendré par les ensembles algébriques irréductibles de codimension p: les A_j sont donc de tels ensembles et $\lambda_j \in \mathbb{Z}$; le cycle est dit effectif si $\lambda_j \geq 0$. On s'intéressera en fait aussi aux cycles réels ($\lambda_j \in \mathbb{R}$). Le support de A est l'ensemble $|A| = \bigcup_{\lambda_j \neq 0} A_j$.

Si X est une variété algébrique non singulière (toujours sur le corps de base $\mathbb{C}$ dans ce qui suit), et si A, B sont des cycles algébriques de codimensions respectives p, q tels que $\operatorname{codim} |A| \cap |B| = p + q$, on a une bonne notion de cycle intersection $C = A \cdot B$: les composantes C_j de C sont les composantes irréductibles de l'intersection géométrique $|A| \cap |B|$, affectées de multiplicités λ_j convenables. Supposons par exemple A et B irréductibles. Lorsque $p + q = n = \dim X$, les C_j sont par hypothèse des points isolés x_j ; la multiplicité d'intersection en un tel point x_j peut alors être vue de manière géométrique comme le nombre de points d'intersection de A avec un translaté $\tau_a(B)$ dans un petit voisinage de x_j ; ce nombre de points d'intersection est bien indépendant génériquement du choix de a pour une translation τ_a de vecteur a assez petit (on travaille ici dans une carte affine contenant x_j).

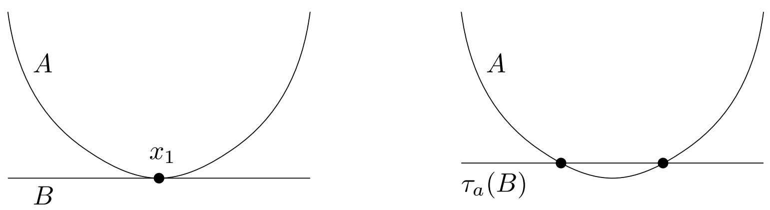

Fig. 1. $A \cdot B = 2\,x_1$ où $A \cap B = \{x_1\}$.

Si $p+q<n$, on peut calculer la multiplicité d'intersection λ_j le long d'une composante C_j de $|A|\cap|B|$ comme suit: on choisit un point non singulier générique x sur C_j, un sous-espace linéaire L générique passant par j de dimension égale à $\operatorname{codim} C_j = p+q$, et on prend λ_j égal à la multiplicité d'intersection de $A\cap L$ et $B\cap L$ en x. Ce nombre est ici encore indépendant des choix faits (pourvu que ces choix soient génériques), et on pose $C = A\cdot B = \sum \lambda_j C_j$.

Tout ce qui précède vaut d'ailleurs sans changement pour des cycles analytiques dans une variété analytique complexe X. Dans ce cadre, on peut attacher à tout cycle analytique A de codimension p une classe fondamentale de cohomologie $\{A\}\in H^{2p}(X,\mathbb{Z})$. Ceci peut se faire de plusieurs façons, soit en utilisant la dualité de Poincaré et l'existence de triangulations simpliciales de $|A|$, soit en construisant la classe $\{A\}$ cherchée d'abord en dehors des singularités de A, c'est-à-dire dans $H^{2p}(X\smallsetminus A_{\mathrm{sing}},\mathbb{Z})$, auquel cas le problème se réduit à savoir calculer la classe fondamentale d'une sous-variété lisse, puis en observant qu'on a un isomorphisme $H^{2p}(X,\mathbb{Z})\simeq H^{2p}(X\smallsetminus A_{\mathrm{sing}},\mathbb{Z})$, compte tenu du fait que $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} A_{\mathrm{sing}} > p$. Nous expliquerons plus loin une autre définition utilisant les courants et la cohomologie de De Rham. Par exemple, si A est un ensemble algébrique de codimension p dans $X=\mathbb{P}^n$, alors $H^{2p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ et la classe $\{A\}$ est donnée par un entier qui s'interprète comme le degré de l'ensemble algébrique A (= nombre de points d'intersection de A avec un sous-espace linéaire générique de dimension p dans $\mathbb{P}^n$). La formule de Bezout dit maintenant que $\{A\cdot B\}=\{A\}\smile\{B\}$, c'est-à-dire que la classe fondamentale de l'intersection est le cup produit des classes fondamentales; dans $\mathbb{P}^n$, le degré de l'intersection des cycles est donc le produit des degrés.

Il se trouve qu'une grande partie de ces résultats peut se formuler dans le langage des courants positifs fermés, au moins dans le cas de l'intersection des diviseurs (ce sont par définition les cycles algébriques ou analytiques de codimension 1). Cette théorie, inaugurée par P. Lelong en 1957, permet d'attacher à un cycle analytique une forme différentielle fermée explicite dont les coefficients sont des mesures complexes. On dispose maintenant de résultats assez généraux permettant de multiplier de telles formes sous des hypothèses convenables portant sur la dimension des intersections. L'intérêt de cette approche est qu'on dispose simultanément des commodités du calcul différentiel et intégral sur les variétés, des outils de l'analyse complexe et de la théorie du potentiel. Il est alors très facile d'obtenir des résultats globaux du type théorème de Bezout. En même temps, on dispose d'un certain nombre d'opérations naturelles telles que passages à la limite, déplacements "infinitésimaux" de cycles, etc., même dans des situations où ces opérations n'ont pas de sens d'un point de vue algébrique. Cette approche se révèle très efficace pour étudier certains problèmes issus de l'arithmétique (théorie des nombres transcendants, voir [Bo70], [Wa78], [De82a]) ou même certains problèmes de nature algébrique pour lesquels les outils purement algébriques sont à l'heure actuelle insuffisants (conjecture de grande amplitude de Fujita, voir [De90]).

Notre but ici n'est pas de donner un exposé exhaustif des principaux résultats connus, mais plutôt de proposer une introduction aussi élémentaire que possible aux notions mises en jeu. Le problème suivant sera l'occasion de montrer comment les choses fonctionnent. On se donne un diviseur $D \geq 0$ dans une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, et pour entier $c \geq 0$ on note $E_c(D)$ l'ensemble des points où D est de multiplicité $\geq c$; autrement dit, D est localement dans une carte affine U de X le diviseur d'une fonction polynomiale f et on regarde

$$E_c(D) = \big\{x\,;\; D^\alpha f(x) = 0 \ \text{ pour } |\alpha| < c\big\}.$$

Les ensembles $E_c(D)$ forment donc une suite décroissante d'ensembles algébriques dans X. Le problème est de majorer le degré des différentes composantes des $E_c(D)$ en fonction du degré de D. Par exemple si D est une courbe de degré d dans $\mathbb{P}^2$, il est bien connu que le nombre de points multiples de D est au plus $d(d-1)/2$, le maximum étant atteint lorsque D est une réunion de d droites en position générale. La théorie des courants permet de donner une réponse générale assez précise à ce problème, incluant une estimation utile du terme d'erreur (à savoir de "l'excès de self-intersection").

2. Courants au sens de De Rham

Nous commençons par rappeler très brièvement le formalisme des courants introduit par G. de Rham [DR55] (voir aussi le livre de H. Federer [Fe69]). Soit M une variété différentiable orientée de dimension réelle n. Un courant de degré p sur M est par définition une forme différentielle $T = \sum_{|I|=p} T_I dx_I$ dont les coefficients T_I sont des distributions; ici $I = (i_1, \ldots, i_p)$ désigne un multi-indice croissant dans $\{1, \ldots, n\}^p$, et on pose $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ dans le système de coordonnées locales considéré. Le résultat suivant est immédiat:

(2.1) Proposition. — *On désigne par $D_q(M)$ l'espace des formes différentielles de degré q à support compact dans M et par ${}'D_p(M)$ l'espace des courants de degré p. Alors ${}'D_p(M)$ s'identifie au dual topologique $D_{n-p}(M)'$ via l'accouplement naturel*

$$\begin{aligned} {}'D_p(M) \times D_{n-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (T, u) &\longmapsto \langle T, u\rangle = \int_M T \wedge u. \end{aligned}$$

Ici l'intégrale est conçue comme provenant de l'accouplement usuel entre distributions et fonctions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par définition, on a une inclusion $D_p(M) \subset {}'D_p(M)$, et les règles habituelles du calcul différentiel extérieur s'appliquent aux courants (différentiation extérieure, lemme de Poincaré, formule de différentiation du produit d'un courant par une forme différentielle à coefficients C^∞ …). Bien entendu, on ne peut pas en général multiplier extérieurement deux courants puisque le produit de deux distributions (ou même de deux mesures) ne définit pas une distribution.

(2.2) Exemple fondamental. — Soit S une sous-variété orientée de classe C^1 et de dimension q dans M, avec ou sans bord. On définit par dualité un courant noté $[S] \in {}'D_{n-q}(M)$, appelé courant d'intégration sur S, tel que

$$\langle [S], u \rangle = \int_S u_{\restriction S}, \qquad \forall u \in D_q(M).$$

Si on choisit localement des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur M dans lesquelles S a pour équation $x_{q+1} = \ldots = x_n = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_q)$ définissent des coordonnées sur S et on voit facilement que $[S]$ s'identifie à la forme différentielle

$$\lambda_S(x)\, dx_{q+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \text{où} \quad \lambda_S(x) = 1(x_1, \ldots, x_q) \otimes \delta_0(x_{q+1}, \ldots, x_n)$$

est la mesure d'intégration de Lebesgue sur S dans les coordonnées x_i et δ_0 la mesure de Dirac à l'origine. On voit donc que $[S]$ est à coefficients mesures, i.e. que c'est un courant d'ordre 0 (comme pour une distribution, on dit qu'un courant est d'ordre k s'il s'étend en une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles de classe C^k à support compact). Pour $u \in D_{q-1}(M)$, le théorème de Stokes appliqué d'abord à $d([S] \wedge u)$ sur M puis à du sur S donne

$$\begin{aligned}\int_M d[S] \wedge u &= (-1)^{n-q+1} \int_M [S] \wedge du := (-1)^{n-q+1} \int_S du \\ &= (-1)^{n-q+1} \int_{\partial S} u = (-1)^{n-q+1} \int_M [\partial S] \wedge u,\end{aligned}$$

de sorte que la différentielle extérieure $d[S] = (-1)^{n-p+1}[\partial S]$ s'identifie au signe près au courant d'intégration sur le bord orienté ∂S. Cet exemple conduit à la définition suivante:

(2.3) Définition. — *On appelle dimension d'un courant quelconque $T \in {}'D_p(M)$ l'entier $n - p$.*

Les groupes de cohomologie du complexe de De Rham $(C_p^\infty(M), d)$ sont par définition les groupes de cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$ de la variété. Le morphisme d'inclusion de complexes $C^\infty_\bullet(M) \to {}'D_\bullet(M)$ donne lieu à un isomorphisme en cohomologie : c'est un conséquence facile du fait que le lemme de Poincaré est vrai pour les deux complexes, de sorte que $C^\infty_\bullet$ et ${}'D_\bullet$ sont deux résolutions du faisceau localement constant $\mathbb{R}$ par des faisceaux acycliques (voir par exemple Godement [Go57]). Cet isomorphisme a entre autres pour corollaire qu'un courant d-fermé $T \in {}'D_p(M)$ définit une classe de cohomologie $\{T\} \in H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$. On peut alors poser la définition suivante:

(2.4) Définition. — *Si S est une sous-variété orientée sans bord de codimension p de M, la classe fondamentale de S dans M est la classe de cohomologie $\{S\} \in H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$ de son courant d'intégration $[S] \in {}'D_p(M)$.*

De manière générale, si T_1 et T_2 sont deux courants fermés, le cup produit $\{T_1\} \smile \{T_2\}$ des classes de cohomologie est toujours bien défini, même lorsque le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ n'a pas de sens: on écrit simplement $T_i = \alpha_i + dU_i$ avec des formes α_i de classe C^∞ représentant la même classe de cohomologie que T_i ; la forme $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ représente alors la classe $\{T_1\} \wedge \{T_2\}$.

L'isomorphisme $H^p(C^\infty_\bullet(M)) \simeq H^p({}'D_\bullet(M))$ évoqué plus haut est un isomorphisme topologique si l'on munit $C^\infty_p(M)$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet et ${}'D_p(M)$ de la topologie de la convergence faible des courants: par l'argument faisceautique précédent, ceci résulte du fait que les deux groupes sont topologiquement isomorphes au groupe de cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathbb{R}$. On voit ainsi du même coup que $H^p_{DR}(M,\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet (le point essentiel est que cet espace est séparé). En particulier, il suffit qu'une suite T_ν converge faiblement vers T pour en déduire que la classe $\{T_\nu\}$ converge vers $\{T\}$ dans la topologie d'espace de Fréchet de $H^p_{DR}(M,\mathbb{R})$.

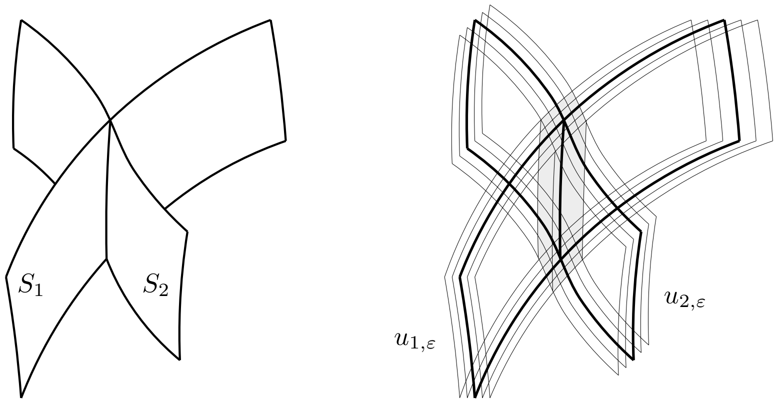

Fig. 2.

Supposons maintenant comme sur la Fig. 2. ci-dessus que S_1, S_2 soient deux sous-variétés lisses orientées de M se coupant transversalement. On peut alors voir par un raisonnement de continuité faible que $\{S_1\} \smile \{S_2\} = \{S_1 \cap S_2\}$: on approxime $[S_1]$ et $[S_2]$ par des formes différentielles fermées $u_{1,\varepsilon}$, $u_{2,\varepsilon}$ de classe C^∞ à support dans des voisinages tubulaires de S_1, S_2 de rayon ε; si l'on s'y prend bien, on constate que $u_{1,\varepsilon} \wedge u_{2,\varepsilon}$ converge faiblement vers $[S_1 \cap S_2]$.

3. Courants positifs et équation de Lelong-Poincaré

Sur une variété analytique complexe X de dimension n, on a de façon analogue des espaces $D_{p,q}(X)$ de formes $u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_q$ de bidegré (p,q) à coefficients complexes, et des opérateurs de différentiation extérieure ∂, $\overline{\partial}$ de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement, tels que $d = \partial + \overline{\partial}$. Il en résulte qu'on obtient des espaces de courants ${}'D_{p,q}(X)$ de bidegré (p,q) et de bidimension $(n-p, n-q)$, avec une identification canonique

$$(3.1) \qquad {}'D_{p,q}(X) \simeq D_{n-p,n-q}(X)'.$$

Dans cette identification, on utilise le fait qu'une variété complexe possède toujours une orientation naturelle : les formes volumes positives sont par définition les multiples positifs de

$$i\,dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\,dz_n \wedge d\overline{z}_n = i^{n^2} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n$$

(noter que $i\,dz \wedge d\overline{z} = 2\,dx \wedge dy$ si $z = x + iy$). De manière générale, on a une notion de positivité naturelle pour les formes de type (p,p), introduite initialement par P. Lelong [Le57]. Nous en donnons ici une variante légèrement plus restrictive en vue de simplifier l'exposé.

(3.2) Définition. — *Un courant $T = i^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} T_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$ est dit positif si la (n,n)-forme $T \wedge i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ est une mesure ≥ 0 pour toute forme α de type $(n-p, 0)$.*

En écrivant $\alpha = \sum_{|I|=p} \alpha_I dz_{\complement I}$,on voit facilement que $T \geq 0$ si et seulement si $\sum T_{I,J} \alpha_I \overline{\alpha}_J$ est une mesure ≥ 0 pour toute $(n-p,0)$-forme α. C'est une propriété purement ponctuelle du courant, au moins dans le cas où les coefficients sont des fonctions $L^1_{\rm loc}$, exprimant que la matrice de coefficients $(T_{I,J})$ est hermitienne semi-positive. La positivité de T entraîne que T est un courant réel à coefficients mesures, i.e. les $T_{I,J}$ sont des mesures complexes et on a $\overline{T} = T$, $\overline{T}_{I,J} = T_{J,I}$.

(3.3) Exemple. — Soit φ une fonction réelle localement intégrable sur X. Le hessien complexe de φ est le courant de bidegré $(1,1)$

$$i\partial\overline{\partial}\varphi = i \sum \partial^2\varphi/\partial z_j \partial\overline{z}_k \, dz_j \wedge d\overline{z}_k.$$

On a donc $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$ si et seulement si la matrice hermitienne $(\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$ est ≥ 0: on dit alors que la fonction φ est plurisousharmonique (psh en abrégé); c'est la généralisation naturelle sur $\mathbb{C}$ de la notion de fonction convexe. Dans le cas de la dimension complexe 1, la condition se réduit à $\Delta\varphi \geq 0$, ce qui traduit la sousharmonicité de φ. On montre qu'on peut toujours modifier une fonction psh sur un ensemble négligeable, et ce de façcon unique, de sorte que la fonction φ obtenue soit semi-continue supérieurement de X dans $[-\infty, +\infty[$, et satisfasse l'inégalité de la moyenne

$$\varphi(h(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(h(e^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout disque holomorphe $h : \overline{D}(0,1) \to X$; inversement une fonction φ satisfaisant ces deux propriétés vérifie bien $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$. Des calculs assez simples de Hessien (exercice pour le lecteur !) montrent que la classe des fonctions psh est stable par les opérations suivantes:

a) Combinaison linéaire à coefficients positifs, limite décroissante, enveloppe supérieure finie ou infinie d'une suite de fonctions psh;

b) Composition avec un changement de variables holomorphe :

$$F : X \to Y \quad \text{holomorphe}, \quad \varphi \in \mathrm{Psh}(Y) \Longrightarrow \varphi \circ F \in \mathrm{Psh}(X).$$

c) Composition avec une fonction $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ convexe, croissante en chaque variable :

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathrm{Psh}(X) \Longrightarrow \chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathrm{Psh}(X).$$

Comme la fonction $z \mapsto \log|z|$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et comme $(x, y) \mapsto \log(e^x + e^y)$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$, on déduit aussitôt de ces règles que les fonctions de la forme

$$\varphi = \log \max_j \sum_k |f_{jk}|^{\gamma_{jk}}, \qquad f_{jk} \text{ holomorphe}, \quad \gamma_{jk} > 0$$

sont psh sur X. Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux fonctions psh de cette forme. De telles fonctions ont en général des pôles logarithmiques; si φ est une fonction psh, on définit le nombre de Lelong de φ en un point z_0 par

$$\nu(\varphi, z_0) = \liminf_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\log|z - z_0|} < +\infty.$$

On dira que z_0 est un pôle de φ si $\varphi(z_0) = -\infty$, et que c'est un pôle logarithmique si $\nu(\varphi, z_0) > 0$. D'une certaine façon, comme on le verra plus loin, l'étude des pôles logarithmiques des fonctions psh est un outil pour analyser la structure des singularités d'un ensemble analytique.

(3.4) Exemple. — Soit S une sous-variété analytique complexe (sans bord) de codimension p dans X. Alors le courant d'intégration $[A]$ est positif fermé de bidegré (p, p). En effet, parmi les formes de degré total $\dim_{\mathbb{R}} S = 2(n-p)$, seules celles de bidegré $(n-p, n-p)$ ont une restriction non nulle à A. Par ailleurs, si $f \in D(X)$ est une fonction positive et si α est une $(n-p, 0)$-forme, la forme $f\, i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ définit une forme volume ≥ 0 sur S, de sorte que

$$\langle [S] \wedge i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}\,,\, f \rangle = \int_S f\, i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha} \geq 0.$$

Plus généralement, soit A un ensemble analytique de dimension pure p dans X (c'est-à-dire un ensemble fermé défini localement par un nombre fini d'équations analytiques). On sait que A est une sous-variété lisse en dehors d'un ensemble analytique $A_{\mathrm{sing}} \subset A$ qui est le lieu des points singuliers de A. Si A_{reg} désigne l'ouvert des points réguliers, on a d'après ce qui précède un courant d'intégration bien défini $[A_{\text{reg}}]$ sur $X \smallsetminus A_{\text{sing}}$. P. Lelong a démontré en 1957 le fait important suivant:

(3.5) THÉORÈME ([Le57]). — *Si A est un ensemble analytique de codimension pure p dans X, le courant d'intégration $[A]$ de bidegré (p,p)*

$$\langle [A], u\rangle = \int_{A_{\text{reg}}} u, \qquad \forall u \in D_{n-p,n-p}(X)$$

est défini sur X tout entier. De plus $[A]$ est positif et fermé.

Pour montrer l'existence de A sur X, il faut s'assurer de la convergence de l'intégrale de u sur A_{reg} lorsque le support de u rencontre A_{sing}. Ceci résulte du fait qu'un ensemble analytique est toujours d'aire localement finie au voisinage de ses points singuliers.

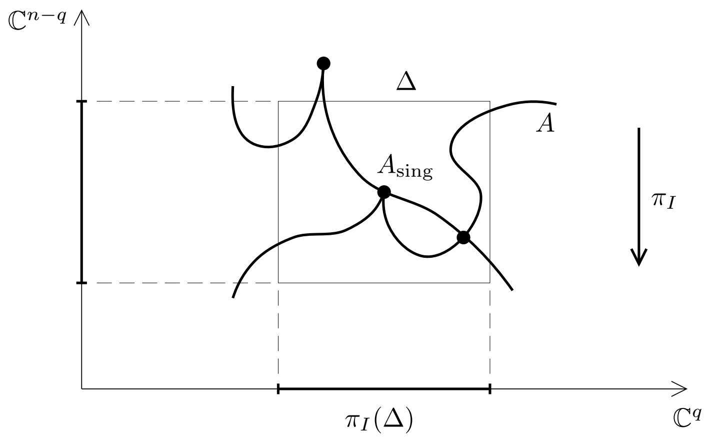

Fig. 3. Projections de A sur les q-plans de coordonnées.

Pour le voir on observe que l'aire est toujours majorée par la somme des aires des projections de A sur les différents plans de coordonnées de même dimension q que A, et pour un choix convenable des coordonnées ces projections sont toutes des revêtements ramifiés à un nombre fini de feuillets (voir Fig. 3): si ν_I est le degré de la projection $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$, $z \mapsto (z_j)_{j\in I}$ au voisinage d'un point $x \in A_{\text{sing}}$, et si $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ est un polydisque de centre x assez petit, on a $\text{aire}(A_{\text{reg}} \cap \Delta) \le \sum \nu_I \,\text{aire}(\pi_I(\Delta))$.

La positivité de $[A]$ résulte du fait que $[A_{\text{reg}}] \ge 0$ et que $[A]$ est l'extension triviale de $[A_{\text{reg}}]$ à X (on étend par 0 sur A_{sing}). La propriété de fermeture $d[A] = 0$ est plus subtile. Pour la vérifier, on peut écrire par exemple $[A] = \lim_{\varepsilon\to 0}[A \smallsetminus V_\varepsilon]$ où V_ε est un système fondamental de voisinages de A_{sing}

dans X. Si V_ε est bien choisi (par exemple si $V_\varepsilon = \{\sum |g_j(z)|^2 < \varepsilon\}$ où les g_j sont des équations analytiques de A_{sing}), on vérifie alors grâce à la continuité faible de la différentiation au sens des distributions que

$$d[A] = \lim_{\varepsilon\to 0} \pm[A \cap \partial V_\varepsilon] = 0.$$

Ceci résulte du fait que si $q = \dim_{\mathbb{C}} A$, l'aire $(2q-1)$-dimensionnelle de $A \cap \partial V_\varepsilon$ tend vers 0, A_{sing} étant de dimension complexe $\le q-1$. □

Bien entendu, le théorème (3.5) permet de définir plus généralement le courant d'intégration associé à un cycle analytique $A = \sum \lambda_j A_j$: on pose $[A] = \sum \lambda_j [A_j]$.

(3.6) Equation de Lelong-Poincaré. — *Soit f une fonction holomorphe sur X et D_f le diviseur des zéros de f, c'est-à-dire le diviseur $D_f = \sum \lambda_j D_j$ dont les composantes sont les composantes irréductibles de $f^{-1}(0)$, affectées de multiplicités $\lambda_j \in \mathbb{N}^\star$ égales à l'ordre d'annulation générique de f le long de D_j. Alors on a l'égalité de courants*

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [D_f].$$

Preuve (voir aussi P. Lelong [Le68]). — En un point régulier x de $|D_f|$, on peut choisir un voisinage V de x et des coordonnées locales sur V telles que $f(z) = z_1^m$. Comme $(D_f)_{\restriction V}$ se réduit à l'hypersurface $z_1 = 0$ affecté de la multiplicité m, on est ramené à montrer que pour toute $(n-1, n-1)$-forme u à support compact sur $\mathbb{C}^n$ on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z_1| \wedge u = \int_{\{0\}\times\mathbb{C}^{n-1}} u.$$

Ceci équivaut par définition à montrer que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1}\log|z_1|\, f(z_1,\ldots,z_n)\, d\lambda = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} f(0,z_2,\ldots,z_n)\, d\lambda',$$

pour toute fonction test f, où $d\lambda$ et $d\lambda'$ désignent les mesures de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n-1}$. Or ceci résulte du fait que la fonction $\log|z|$ est la solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{C}$. Nous avons donc montré que l'égalité a lieu en dehors de l'ensemble analytique $A = |D_f|_{\mathrm{sing}}$, c'est-à-dire que le courant $T = i/\pi\,\partial\overline{\partial}\log|f| - [D_f]$ est à support dans A. Or T est un courant fermé de bidegré $(1,1)$ à coefficients mesures (comme différence de deux courants positifs), et A est de dimension complexe $\le n-2$. On peut invoquer le lemme élémentaire (3.7 a) ci-dessous pour conclure que $T = 0$:

(3.7) Lemme. — *Soit dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un courant T de degré p, tel que T et dT soient d'ordre 0, à support dans une sous-variété S de codimension réelle m.*

a) *Si $m > p$, alors $T = 0$.*
b) *Si $m = p$, alors T est de la forme $T = a[S]$ où a est une fonction L^1_{loc} sur S. Si de plus $dT = 0$, alors a est localement constante sur S.*

En effet, on peut supposer après changement de coordonnées locales que $A = \Omega \cap \{x_1 = \ldots = x_m = 0\}$. La condition de support et le fait que les coefficients de T et dT soient des mesures impliquent $x_j T = x_j dT = 0$ pour $j \leq m$. On obtient donc aussi $dx_j \wedge T = d(x_j T) - x_j dT = 0$.
a) Supposons $m > p$. Si T possédait un monôme $T_I dx_I$ non nul, $|I| = p$, on aurait $dx_j \wedge T \neq 0$ pour $j \notin \{1, \ldots, m\} \setminus I$, contradiction.
b) Supposons $m = p$. ALors T ne peut avoir qu'un seul terme non nul, à savoir $\mu\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$ où μ est une mesure portée par S. La condition que dT est d'ordre 0 montre que les dérivées partielles $\partial\mu/\partial x_j$, $j > p$, sont encore des mesures. Ceci impose que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur S. Si de plus $dT = 0$, alors $\partial\mu/\partial x_j = 0$ pour $j > p$, donc le coefficient de proportionnalité est localement constant. □

4. Cas des sections méromorphes d'un fibré en droites

Nous aurons besoin en fait d'une légère généralisation de l'équation de Lelong-Poincaré, valable pour des sections méromorphes de fibrés en droites. Observons tout d'abord que si $f = g/h$ est une fonction méromorphe, on a évidemment

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [D_f] \tag{4.1}$$

où $D_f = D_g - D_h$ est le diviseur des zéros et des pôles de f. Pour éviter de traîner constamment le facteur i/π, il est commode d'introduire l'opérateur

$$d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{2\pi i}. \tag{4.2}$$

C'est un opérateur réel ($\overline{d}^c = d^c$), et on a $dd^c = i/\pi\, \partial\overline{\partial}$.

Soit maintenant L un fibré holomorphe en droites au dessus de X. Il existe un recouvrement ouvert (U_j) de X et des trivialisations $\tau_j : L_{\restriction U_j} \to U_j \times \mathbb{C}$, telles qu'un point (x, ξ) de la carte $U_k \times \mathbb{C}$ se recolle avec le point

$$\tau_j \circ \tau_k^{-1}(x, \xi) = (x, g_{jk}(x)\xi)$$

de la carte $U_j \times \mathbb{C}$, où les g_{jk} sont des fonctions holomorphes inversibles sur $U_j \cap U_k$. On a la relation $g_{jk} g_{k\ell} = g_{j\ell}$ sur $U_j \cap U_k \cap U_\ell$. Une section holomorphe (resp. méromorphe) f de L est une application $f : X \to L$ telle que $f(x) \in L_x$ pour tout x et telle que la coordonnée $\xi_j(x)$ de $f(x)$ dans chaque carte dépend holomorphiquement (resp. méromorphiquement) de x. On suppose L muni d'une métrique hermitienne h de classe C^∞. Dans chaque carte U_j la norme est donnée par un poids positif de classe C^∞ qu'on convient d'écrire sous la forme

$$||v||_h = |\xi| e^{-\varphi_j(x)}, \quad \forall v \in L_x, \quad \text{avec} \;\; \tau_j(v) = (x, \xi).$$

(4.3) DÉFINITION. — *On appelle forme de courbure de Chern de L la forme réelle fermée de type $(1,1)$ donnée par*

$$\Theta_h(L) = dd^c\varphi_j,$$

qui est indépendante du choix des trivialisations. De plus, la classe de cohomologie de cette forme est indépendante du choix de la métrique h. C'est la première classe de Chern de L, notée $c_1(L) \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$.

Le fait que $dd^c\varphi_j = dd^c\varphi_k$ résulte aussitôt de ce que les poids sont liés par la relation $e^{-\varphi_k} = e^{-\varphi_j}|g_{jk}|$, i.e. $\varphi_j = \varphi_k + \log|g_{jk}|$, le terme $\log|g_{jk}|$ ayant un Hessien nul sur $U_j \cap U_k$. Si l'on change la métrique h, en la remplaçant disons par $h' = h\, e^{-2\psi}$, les poids φ_j se trouvent être remplacés par $\varphi_j + \psi$. On a donc

$$\Theta_{h'}(L) = \Theta_h(L) + dd^c\psi$$

et la classe de cohomologie globale est inchangée. □

(4.4) EQUATION DE LELONG-POINCARÉ GÉNÉRALISÉE. — *Soit f une section méromorphe d'un fibré holomorphe en droites muni d'une métrique hermitienne h. On a au sens des courants*

$$dd^c \log||f||_h = [D_f] - \Theta_h(L).$$

En particulier, la classe de cohomologie $\{D_f\} \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$ est égale à $c_1(L)$; elle ne dépend donc pas de f.

Preuve. — Si $\xi_j(x)$ est l'expression de $f(x)$ dans la carte U_j, on a $||f(x)||_h = |\xi(x)|e^{-\varphi_j(x)}$, d'où

$$dd^c \log||f||_h = dd^c(\log|\xi_j| - \varphi_j) = [D_{\xi_j}] - \Theta_h(L)$$

d'après (4.1) et la définition de $\Theta_h(L)$. On définit bien entendu le diviseur de f par $D_f = D_{\xi_j}$ dans U_j. La dernière affirmation résulte du fait que $dd^c(\log||f||_h)$ a une classe de cohomologie nulle. □

Si X est une surface de Riemann compacte ($\dim_{\mathbb{C}} X = 1$), le diviseur D_f consiste simplement en une suite finie de points (x_j) affectés de multiplicités λ_j, d'où $[D_f] = \sum \lambda_j \delta_{x_j}$. Par intégration de l'égalité $\{D_f\} = c_1(L)$ sur X, on voit que le diviseur de toute section méromorphe satisfait l'égalité

$$\sum \lambda_j = \int_X c_1(L).$$

L'entier $\mathrm{d}^\circ(L) = \int_X c_1(L)$ est appelé degré de L.

Plus généralement si X est une variété compacte possèdant une métrique kälérienne ω, c'est à dire une $(1,1)$-forme définie positive $\omega = i\sum \omega_{jk}(z) dz_j \wedge d\overline{z}_k$ telle que $d\omega = 0$, l'aire algébrique du diviseur D_f relativement à la métrique riemannienne induite par ω est indépendante de f :

$$\int_X [D_f] \wedge \omega^{n-1} = \int_X c_1(L) \wedge \omega^{n-1}, \tag{4.5}$$

le second membre ne dépendant pas du représentant choisi de $c_1(L)$ en vertu du théorème de Stokes. Ce nombre est encore appelé le degré de D_f (ou de L) par rapport à ω ; ce n'est plus en général un entier, sauf si la classe de cohomologie de ω appartient à $H^2(X, \mathbb{Z})$.

(4.6) Exemple. — Sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}/\mathbb{C}^\star$, on considère le fibré tautologique noté $O(-1)$, dont les fibres sont données par

$$O_{[z]}(-1) = \mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad \forall [z] \in \mathbb{P}^n, \quad z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}.$$

C'est un sous-fibré de rang 1 du fibré trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. On note $O(1)$ son fibré dual, et pour tout entier $k > 0$, on note $O(k)$ (resp. $O(-k)$) la puissance tensorielle k-ième de $O(1)$ (resp. $O(-1)$). Chaque forme linéaire $u \in (\mathbb{C}^{n+1})^\star$ induit par restriction une forme linéaire sur les fibres $\mathbb{C}z$ de $O(-1)$, c'est-à-dire une section de $O(1)$. Par suite, un polynôme homogène $P \in S^k(\mathbb{C}^{n+1})^\star$ de degré k en les variables $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ induit une section de $O(k)$; il est bien connu que ce sont précisément les sections holomorphes de $O(k)$ sur $\mathbb{P}^n$.

Munissons $O(-1)$ de la métrique hermitienne induite par la métrique canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ et les $O(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, des métriques correspondantes $|\ \ |_{FS}$, dites de Fubini-Study. Alors la section P du fibré $O(k) = O(-k)^\star$ associe à l'élément $z^{(k)} \in S^k(\mathbb{C}z) = O(-k)_{[z]}$ la valeur $P(z)$, sa norme est donc $||P||_{FS}([z]) = |P(z)|/|z|^k$. L'équation de Lelong-Poincaré donne alors

$$dd^c \log ||P||_{FS} = [D_P] - k\omega$$

où $[D_P]$ est le diviseur $P(z) = 0$ dans $\mathbb{P}^n$ et où $\omega = \Theta_{FS}(O(1))$. Dans la carte $z_i \neq 0$, cette forme est définie en coordonnées non homogènes $\zeta_j = z_j/z_i$ par

$$\omega([z]) = dd^c \log |z| = \frac{1}{2} dd^c \log\big(1 + |\zeta_0|^2 + \ldots + |\widehat{\zeta_i}|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2\big).$$

La forme ω est invariante par l'action du groupe unitaire $U(n+1)$; elle est clairement définie positive àl'origine $\zeta = 0$ de chaque carte, donc définie positive partout par transitivité. La formule (4.5) appliquée à $L = O(k)$ donne

$$\mathrm{aire}_\omega(D_P) = \int_{\mathbb{P}^n} [D_P] \wedge \omega^{n-1} = k \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n.$$

En prenant $P(z) = z_n$ de degré 1, on a $D_P = \mathbb{P}^{n-1} = P(\mathbb{C}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{P}^n$ et il vient $\int_{\mathbb{P}^{n-1}} \omega^{n-1} = \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n$, d'où par récurrence $\int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = \int_{\mathbb{P}^1} \omega = \int_{\mathbb{P}^1} \delta_{\mathbb{P}^0} = 1$. On a donc

$$\mathrm{aire}_\omega(D_P) = k = \mathrm{d}^\circ(P).$$

(4.7) DÉFINITION. — *Soit X une variété complexe compacte. On dit qu'un fibré en droites L est positif, et on note $L > 0$, si L possède une métrique hermitienne h telle que la $(1,1)$-forme $\Theta_h(L)$ soit définie positive.*

La notion de fibré positif est importante en vertu du célèbre théorème de plongement de Kodaira [Ko54] : une variété complexe compacte X est projective (i.e. isomorphe à une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^N$ pour N assez grand) si et seulement si X possède un fibré en droites $L > 0$; voir par exemple [G-H78] ou [Ws73].

Soient maintenant $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ un système de sections holomorphes linéairement indépendantes d'un fibré en droites hermitien (L, h) sur une variété complexe X. A tout point $w \in \mathbb{C}^{N+1} \smallsetminus \{0\}$ est associée naturellement une section $\sigma_w = w_0\sigma_0 + \ldots + w_N\sigma_N$; son diviseur D_w ne dépend bien sûr que de l'image $[w] \in \mathbb{P}^N$. On a alors la formule de moyenne suivante:

(4.8) PROPOSITION. — *La valeur moyenne des courants $[D_w]$ relativement au volume de Fubini-Study est donnée par*

$$\int_{\mathbb{P}^N} [D_w]\, \omega^N([w]) = dd^c \frac{1}{2} \log\big(||\sigma_0||_h^2 + \ldots + ||\sigma_N||_h^2\big) + \Theta_h(L)$$

en tant qu'intégrale vectorielle sur $\mathbb{P}^N$ à valeurs dans $'D_{1,1}(X)$. En particulier, le membre de droite est un courant positif fermé, indépendant de la métrique h. Son support singulier consiste en l'ensemble analytique des zéros communs aux sections σ_j.

Preuve. — La preuve s'obtient grâce à l'identité

$$\int_{\mathbb{P}^N} \log \frac{|w \cdot a|}{||w||}\, \omega^N([w]) = \log ||a|| - \mathrm{Cte}$$

pour tout vecteur $a \in \mathbb{C}^{N+1}$, qui résulte aussitôt de l'homogénéïté en a et de l'invariance par rotation. En substituant $(\sigma_0(z), \ldots, \sigma_N(z))$ à a, il vient

$$\int_{\mathbb{P}^N} \log \frac{||w_0\sigma_0(z) + \ldots + w_N\sigma_n(z)||_h}{||w||}\, \omega^N([w])$$
$$= \frac{1}{2} \log\big(||\sigma_0(z)||_h^2 + \ldots + ||\sigma_N(z)||_h^2\big) - \mathrm{Cte}.$$

Le résultat voulu se déduit alors de la formule de Lelong-Poincaré en calculant dd^c par rapport à $z \in X$. $\square$

Cette dernière formule met bien en évidence la souplesse de calcul autorisée par l'usage des courants positifs: on peut manipuler dans un même formalisme des diviseurs (objets algébriques), mais aussi des moyennes intégrales de diviseurs, des formes différentielles fermées de classe $C^\infty \ldots$. A noter aussi le résultat de compacité faible suivant, qui assure l'existence de courants limites.

(4.9) Proposition. — *Soit (T_ν) une suite de courants positifs fermés sur une variété kählérienne compacte X, appartenant à une même classe de cohomologie. Alors on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un courant limite T.*

Preuve. — Soit (p,p) la bidimension des courants T_ν et soit ω une métrique kählérienne sur X. L'intégrale $\int_X T_\nu \wedge \omega^p$ est indépendante de ν. Or $T_\nu \wedge \omega^p = \sum T_{\nu,I,I}$ relativement à une base ω-orthonormée de $\Lambda^\bullet T^\star X$. Comme la trace d'une matrice hermitienne semi-positive majore toujours les coefficients non diagonaux, on voit que les mesures $|T_{\nu,I,J}|$ sont de masse uniformément bornée dans tout compact des ouverts de carte considérés. Par suite on peut en extraire des sous-suites faiblement convergentes. □

(4.10) Exercice. — Vérifier que si Γ_d est la courbe de Fermat $z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$ dans $\mathbb{P}^2$, alors la suite de $\mathbb{Q}$-diviseurs $\frac{1}{d}[\Gamma_d]$ converge vers le courant limite T sur $\mathbb{P}^2$ défini en coordonnées homogènes par

$$T = dd^c \log \max(|z_0|, |z_1|, |z_2|).$$

Indication: $\frac{1}{d}\log|z_0^d + z_1^d + z_2^d|$ converge vers $\log\max(|z_0|, |z_1|, |z_2|)$ dans l'espace $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^3)$.
Question complémentaire: montrer que le support de T est

$$\bigcup_{i\neq j\neq k} \big\{[z] \in \mathbb{P}^2\,;\, |z_i| \le |z_j| = |z_k|\big\}$$

et que ce support est de dimension réelle 3. De plus T est indécomposable dans le cône des courants positifs ! (voir [De82b]).

5. Produits de courants

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, u une fonction psh sur X et T un courant positif fermé de bidimension (p,p), c'est-à-dire de bidegré $(n-p, n-p)$. Notre souhait est de définir le produit $dd^c u \wedge T$ même lorsque ni u ni T ne sont réguliers. A priori, le produit n'a pas de sens bien clair puisque $dd^c u$ and T sont des courants à coefficients mesures et que les mesures ne peuvent être en général multipliées.

Supposons d'abord que u soit une fonction psh localement bornée sur X. Alors le courant uT est bien défini puisque u est une fonction borélienne bornée partout définie et que T est à coefficients mesures. Suivant une idée de Bedford-Taylor [B-T82] (voir aussi [CLN69]), on définit

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT)$$

où $dd^c(\ )$ est calculé au sens des distributions.

(5.1) PROPOSITION. — *Le produit extérieur $dd^c u \wedge T$ est encore un courant positif fermé.*

Preuve. — On sait que sur tout ouvert de carte u est limite décroissante de fonctions psh u_ν de classe C^∞, obtenues par exemple par convolution avec un noyau régularisant de support $B(0, 1/\nu)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $u_\nu T$ converge faiblement vers uT, donc $dd^c(u_\nu T)$ converge faiblement vers $dd^c(uT)$ par continuité faible des différentiations. Cependant u_ν est C^∞, donc $dd^c(u_\nu T)$ coïncide avec le produit usuel $dd^c u_\nu \wedge T$, qui est un courant positif. La limite faible $dd^c u \wedge T$ est donc positive (et évidemment fermée). □

Etant donné des fonctions psh localement bornées $u_1, \ldots, u_q$, on peut donc définir par récurrence sur q des courants positifs fermés

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T = dd^c(u_1 dd^c u_2 \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T).$$

Notons qu'il est parfois possible de calculer le produit $dd^c u \wedge T$ par ce procédé même lorsque la fonction u n'est pas localement bornée: c'est le cas si le courant uT est de masse localement finie sur X.

(5.2) EXEMPLE. — Soit à calculer le produit $[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2]$ des courants d'intégration sur les courbes $\Gamma_1 : z^2 = w^3$ et $\Gamma_2 : z^3 = w^5$ dans $\mathbb{C}^2$. L'équation de Lelong-Poincaré donne $[\Gamma_1] = dd^c \log|z^2 - w^3|$. On peut donc essayer de calculer

$$[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2] = dd^c\big(\log|z^2 - w^3|\ [\Gamma_2]\big).$$

Or Γ_2 admet la paramétrisation bijective (non birégulière!) $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^5, t^3)$. Le courant $\log|z^2 - w^3|\,[\Gamma_2]$ est donc l'image directe par γ du courant

$$\log|(t^5)^2 - (t^3)^3|\ [\mathbb{C}] = 9\log|t| + \log|t - 1|$$

(noter que $[\mathbb{C}]$ s'identifie à la fonction 1). Le dd^c de ce courant est $9\delta_0 + \delta_1$ et on trouve donc

$$[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2] = 9\delta_0 + \delta_p, \qquad p = (1, 1).$$

Les courbes Γ_1 et Γ_2 se rencontrent donc avec mutiplicité 9 en $(0, 0)$, 1 en $(1, 1)$ (sur $\mathbb{P}^2$, il y a aussi un point d'intersection à l'infini, de multiplicité 5).

(5.3) REMARQUE. — En général, il n'est pas possible de définir les self-intersections T^p d'un courant positif fermé si l'on ne fait pas d'hypothèses adéquates sur les pôles. Prenons par exemple pour X la surface complexe compacte fibrée au dessus de $\mathbb{P}^1$ obtenue en compactifiant l'espace total du fibré $O(k) \to \mathbb{P}^1$ par adjonction d'un point à l'infini à chaque fibre (surface F_k de Hirzebruch). On a donc une projection $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ à fibres $\mathbb{P}^1$, et deux sections remarquables de π, à savoir d'une part la section nulle Z de $O(k)$ et d'autre part la section à l'infini H. Par ailleurs le fibré image réciproque $\pi^\star O(k)$ admet une section méromorphe tautologique, égale à l'application identique sur $X \smallsetminus H = O(k)$, de diviseur $Z - H$. Ceci entraîne en cohomologie $\{Z\} - \{H\} = \pi^\star c_1(O(k))$, et comme Z, H ne se coupent pas on trouve

$$\int_X \{Z\}^2 = \int_X [Z] \wedge \pi^\star c_1(O(k)) = \int_Z \pi^\star c_1(O(k)) = \int_{\mathbb{P}^1} c_1(O(k)) = k.$$

La self-intersection de $\{Z\}$ est donc négative si $k < 0$, ce qui interdit de pouvoir définir de manière cohérente le carré du courant $[Z]$ sur X.

Le théorème suivant donne une condition générale à peu près optimale assurant l'existence des produits de courants de type $(1,1)$. Le problème analogue pour les courants de bidegré quelconque est encore largement ouvert (avis aux amateurs !)

(5.4) THÉORÈME. — *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) et soient $u_1, \ldots, u_q$ des fonctions psh. On note* Supp$T$ *le support de T et $L(u_j)$ l'ensemble des points au voisinage desquels u_j n'est pas bornée inférieurement. On suppose que pour tout choix d'indices $j_1 < \ldots < j_m$ dans $\{1, \ldots, q\}$ l'intersection $L(u_{j_1}) \cap \ldots \cap L(u_{j_m}) \cap \operatorname{Supp} T$ est contenue dans un ensemble analytique de dimension $\leq p - m$ (ou plus généralement dans un ensemble de $(2p - 2m + 1)$-mesure de Hausdorff nulle). Alors les courants $u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ et $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ sont bien définis et de masse localement finie sur X.*

Preuve. — La démonstration générale est trop longue pour que nous puissions la détailler ici (voir [De91a]). Pour donner un aperçu des idées utilisées, nous allons raisonner dans le cas particulier des produits uT, $dd^c u \wedge T$, en supposant de plus que l'ensemble $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$ est discret (par récurrence, ceci résoudra au moins le cas important où les fonctions u_j ont des pôles isolés).

Soit $\Omega = B(x_0, r)$ une boule centrée en un point de $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$, telle que $\overline{\Omega}$ ne rencontre cet ensemble en aucun autre point. On pose $\psi(z) = |z - x_0|^2 - r^2$. Quitte à retrancher une constante à u, on peut supposer $u \leq -1$ sur $\overline{\Omega}$. Soit $\Omega' = B(x_0, r/2)$. Alors $\overline{\Omega} \smallsetminus \Omega'$ ne recontre pas $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$. Il existe donc un voisinage ω de $(\overline{\Omega} \smallsetminus \Omega') \cap \operatorname{Supp} T$ tel que $L(u) \cap \overline{\omega} = \emptyset$ et une constante M telle que $u \geq -M$ sur $\overline{\omega}$. Introduisons

$$u_s(z) = \begin{cases} \max\{u(z), A\psi(z)\} & \text{sur } \omega, \\ \max\{u(z), s\} & \text{sur } \Omega' = \{\psi < -\delta\}, \quad \delta = 3r^2/4. \end{cases}$$

On fixe $A \geq M/\delta$ et on prend $s \leq -M$, de sorte que la définition de u_s soit bien cohérente:

$$\max\{u(z), A\psi(z)\} = \max\{u(z), s\} = u(z) \quad \text{sur } \omega \cap \Omega'.$$

Observons que u_s est défini le voisinage $\omega \cup \Omega'$ de $\overline{\Omega} \cap \operatorname{Supp} T$. Maintenant, le théorème de Stokes implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega dd^c u_s \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1} &- \int_\Omega A dd^c\psi \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1} \\ &= \int_\Omega dd^c\big[(u_s - A\psi) T \wedge (dd^c\psi)^{p-1}\big] = 0, \end{aligned}$$

le courant $[\ldots]$ étant à support compact dans Ω puisque $u_s = A\psi$ sur un voisinage de $\partial\Omega \cap \operatorname{Supp} T$. Comme u_s et ψ s'annulent toutes deux sur $\partial\Omega$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_s T \wedge (dd^c\psi)^p &= \int_\Omega \psi dd^c u_s \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1}\\ &\geq -||\psi||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega T \wedge dd^c u_s \wedge (dd^c\psi)^{p-1}\\ &= -||\psi||_{L^\infty(\Omega)} A \int_\Omega T \wedge (dd^c\psi)^p.\end{aligned}$$

Finalement, prenons $A = M/\delta$ et faisons tendre s vers $-\infty$, en tenant compte de ce que $u \geq -M$ sur ω. Il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\, T \wedge (dd^c\psi)^p &\geq -M \int_\omega T \wedge (dd^c\psi)^p + \lim_{s\to-\infty} \int_{\Omega'} u_s T \wedge (dd^c\psi)^p\\ &\geq -\big(M + ||\psi||_{L^\infty(\Omega)} M/\delta\big) \int_\Omega T \wedge (dd^c\psi)^p.\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie, donc uT est bien de masse localement finie près de x_0. □

Dans le cas particulier où $u_j = \log|f_j|$ avec f_j holomorphe non nulle sur X, on voit que le produit d'intersection des diviseurs associés $[D_j] = dd^c u_j$ est bien défini dès que les supports $|D_j|$ satisfont la condition $\operatorname{codim} |D_{j_1}| \cap \ldots \cap |D_{j_m}| = m$ for every m. De même, si $T = [A]$ est un cycle analytique de dimension p, le Th. (5.4) montre que $[D] \wedge [A]$ est bien défini pour tout diviseur D tel que $\dim |D| \cap |A| = p - 1$. Ces observations conduisent aisément au résultat suivant.

(5.5) Corollaire. — *Supposons que $D_1, \ldots, D_q$ vérifient la condition de dimension d'intersection ci-dessus et soient $(C_k)_{k\geq 1}$ les composantes irréductibles de l'intersection ensembliste $|D_1| \cap \ldots \cap |D_q|$. Alors il existe des entiers $m_k > 0$ tels que*

$$[D_1] \wedge \ldots \wedge [D_q] = \sum m_k [C_k].$$

Le nombre m_k est appelé multiplicité d'intersection de $D_1, \ldots, D_q$ le long de C_k.

Preuve. — Le produit est de bidegré (q, q), à support dans $C = \bigcup C_k$ et on a $\operatorname{codim} C = q$. Il résulte du Lemme (3.7) que le produit est une combinaison linéaire $\sum m_k [C_k]$ avec des coefficients $m_k \in \mathbb{R}$. La positivité entraîne $m_k \in \mathbb{R}_+$. Pour voir que $m_k \in \mathbb{Z}$, il suffit de perturber légèrement les diviseurs de sorte qu'il se coupent transversalement (le problème est local). Le cycle intersection est alors une sous-variété lisse; la multiplicité m_k est simplement le nombre de feuilles qui viennent s'empiler sur la composante C_k lorsqu'on passe à la limite (on utilise ici la continuité faible séparément par rapport à chaque facteur). □

6. Nombres de Lelong et multiplicités

On suppose que la variété complexe X est munie d'une fonction φ de X dans $[-\infty,+\infty[$ psh et continue, possédant éventuellement des pôles $-\infty$. Les ensembles

$$S(r)=\{x\in X\,;\,\varphi(x)=r\}, \tag{6.1}$$

$$B(r)=\{x\in X\,;\,\varphi(x)<r\}, \tag{6.1$'$}$$

$$\overline{B}(r)=\{x\in X\,;\,\varphi(x)\leq r\} \tag{6.1$''$}$$

seront appelés pseudo-sphères et pseudo-boules associées à φ. L'exemple le plus simple que nous ayons à l'esprit est le cas de la fonction $\varphi(z)=\log|z-a|$ sur un ouvert $X\subset\mathbb{C}^n$; dans ce cas $B(r)$ est la boule euclidienne de centre a et de rayon e^r ; de plus les formes

$$\frac{1}{2}dd^ce^{2\varphi}=\frac{i}{2\pi}d'd''|z|^2,\qquad dd^c\varphi=\frac{i}{\pi}d'd''\log|z-a|$$

représentent respectivement la métrique hermitienne plate de $\mathbb{C}^n$ et l'image inverse sur $\mathbb{C}^n$ de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^{n-1}$.

(6.2) Définition. — *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X tel que $S(-\infty)\cap\operatorname{Supp}T$ soit fini. Soit V un voisinage compact de $S(-\infty)\cap\operatorname{Supp}T$ et $R_V=\inf_{\partial V\cap\operatorname{Supp}T}\varphi$; on suppose dans la suite que $B(r)$ et $S(r)$ sont les boules et sphères associées à φ dans l'ouvert $\Omega=V^\circ$. Pour tout réel $r\in\,]-\infty,R_V[$ on pose*

$$\nu(T,\varphi,r)=\int_{B(r)}T\wedge(dd^c\varphi)^p,$$

$$\nu(T,\varphi)=\int_{S(-\infty)}T\wedge(dd^c\varphi)^p=\lim_{r\to-\infty}\nu(T,\varphi,r),$$

Le nombre $\nu(T,\varphi)$ sera appelé nombre de Lelong généralisé de T par rapport au poids φ.

Observons que le Th. (5.4) assure l'existence du produit $T\wedge(dd^c\varphi)^p$ sous les hypothèses ci-dessus. La formule suivante permet d'exprimer les quantités $\nu(T,\varphi,r)$ sans faire apparaître de pôles dans le poids.

(6.3) Lemme. — *Pour toute fonction convexe croissante $\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on a la formule*

$$\int_{B(r)}T\wedge(dd^c\chi\circ\varphi)^p=\chi'(r-0)^p\,\nu(T,\varphi,r)$$

où $\chi'(r-0)$ désigne la dérivée à gauche de χ en r.

Preuve. — On se ramène par régularisation au cas où T, χ, (resp. φ) sont de classe C^∞ (resp. de classe C^∞ sur $X\smallsetminus S(-\infty)$). Le théorème de Stokes donne alors

$$\int_{B(r)}T\wedge(dd^c\chi\circ\varphi)^p=\int_{S(r)}T\wedge(dd^c\chi\circ\varphi)^{p-1}\wedge d^c(\chi\circ\varphi).$$

Or $(dd^c\chi\circ\varphi)^{p-1}\wedge d^c(\chi\circ\varphi)=\chi'(\varphi)^p(dd^c\varphi)^{p-1}\wedge d^c\varphi$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} T\wedge(dd^c\chi\circ\varphi)^p &= \chi'(r)^p\int_{S(r)} T\wedge(dd^c\varphi)^{p-1}\wedge d^c\varphi\\ &= \chi'(r)^p\int_{B(r)} T\wedge(dd^c\varphi)^p.\end{aligned}\qquad\square$$

On obtient en particulier $\int_{B(r)} T\wedge(dd^c e^{2\varphi})^p=(2e^{2r})^p\nu(T,\varphi,r)$, d'où la formule

$$\nu(T,\varphi,r)=e^{-2pr}\int_{B(r)} T\wedge\Big(\frac{1}{2}dd^c e^{2\varphi}\Big)^p. \tag{6.4}$$

Soit maintenant X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi(z)=\log|z-a|$, $a\in X$. La formule précédente donne

$$\nu(T,\varphi,\log r)=r^{-2p}\int_{|z-a|<r} T\wedge\Big(\frac{i}{2\pi}d'd''|z|^2\Big)^p.$$

La mesure positive $\sigma_T=\frac{1}{p!}T\wedge(\frac{i}{2}d'd''|z|^2)^p=2^{-p}\sum T_{I,I}\,.\,i^n dz_1\wedge\ldots\wedge d\overline{z}_n$ est appelée la mesure trace de T. On obtient

$$\nu(T,\varphi,\log r)=\frac{\sigma_T\big(B(a,r)\big)}{\pi^p r^{2p}/p!} \tag{6.5}$$

et $\nu(T,\varphi)$ est la limite de ce quotient lorsque $r\to 0$. Cette limite est appelée nombre de Lelong (ordinaire) de T au point a et notée $\nu(T,a)$: cette définition est précisément celle donnée initialement par P. Lelong (voir [Le68]). Mentionnons une conséquence simple mais importante.

(6.6) CONSÉQUENCE. — *Le quotient $\sigma_T\big(B(a,r)\big)/r^{2p}$ est fonction croissante de r. De plus, pour tout ensemble compact $K\subset X$ et tout $r_0<d(K,\partial X)$ on a*

$$\sigma_T\big(B(a,r)\big)\le Cr^{2p}\qquad\text{pour}\quad a\in K \text{ et } r\le r_0,$$

où $C=\sigma_T\big(K+\overline{B}(0,r_0)\big)/r_0^{2p}$.

Tous ces résultats sont particulièrement intéressants lorsque $T=[A]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique $A\subset X$ de dimension pure p. Alors $\sigma_T\big(B(a,r)\big)$ est l'aire euclidienne de $A\cap B(a,r)$, tandis que $\pi^p r^{2p}/p!$ est l'aire de la boule de rayon r dans $\mathbb{C}^p$. Par suite $\nu([A],\varphi,\log r)$ est le rapport de ces aires et le nombre de Lelong $\nu([A],a)$ est la limite du rapport. Il est clair que $\nu([A],a)=0$ si $a\notin A$ et que $\nu([A],a)=1$ si a est un point régulier de A. On verra plus loin que $\nu([A],a)$ est toujours un entier. Nous démontrons tout d'abord un théorème de comparaison pour les nombres de Lelong à poids.

(6.7) THÉORÈME DE COMPARAISON. — *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X et $\varphi,\psi : X\to[-\infty,+\infty[$ des fonctions psh continues* *ayant même ensemble de pôles* $\varphi^{-1}(-\infty) = \psi^{-1}(-\infty)$. *On suppose que* $\varphi^{-1}(-\infty) \cap \operatorname{Supp} T$ *est fini et que*

$$\ell := \limsup \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +\infty \quad \textit{quand} \ \ x \in \operatorname{Supp} T \ \ \textit{et} \ \ \varphi(x) \to -\infty.$$

Alors $\nu(T, \psi) \leq \ell^p \nu(T, \varphi)$, *et l'égalité a lieu si* $\ell = \lim \psi/\varphi$.

Preuve. — D'après la définition (6.2) on a

$$\nu(T, \lambda\varphi) = \lambda^p \nu(T, \varphi)$$

pour tout scalaire $\lambda > 0$. Il suffit donc de vérifier l'inégalité $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$ sous l'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$. Pour tout $c > 0$, on considère la fonction psh $u_c = \max(\psi - c, \varphi)$. Soit V un voisinage compact de $\varphi^{-1}(-\infty) \cap \operatorname{Supp} T$ et $R_V = \inf_{\partial V \cap \operatorname{Supp} T} \varphi$. On fixe $r < R_V$. Pour $c > 0$ assez grand, on a $u_c = \varphi$ sur $\varphi^{-1}([r-1, r])$, donc le théorème de Stokes entraîne

$$\nu(T, \varphi, r) = \nu(T, u_c, r) \geq \nu(T, u_c).$$

L'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$ implique d'autre part qu'il existe $R' < 0$ tel que $u_c = \psi - c$ sur $\{u_c < R'\}$. On en déduit aussitôt

$$\nu(T, u_c) = \nu(T, \psi - c) = \nu(T, \psi),$$

par conséquent $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$. □

Supposons en particulier que $z^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k)$, $k = 1, 2$, soient des systèmes de coordonnées locales centrées au point x et soit

$$\varphi_k(z) = \log |z^k| = \log \big(|z_1^k|^2 + \ldots + |z_n^k|^2 \big)^{1/2}, \qquad k = 1, 2.$$

On a $\lim_{z \to x} \varphi_2(z)/\varphi_1(z) = 1$, donc $\nu(T, \varphi_1) = \nu(T, \varphi_2)$ d'après le Théorème (6.7).

(6.8) Corollaire. — *Les nombres de Lelong* $\nu(T, x)$ *sont invariants par changement de coordonnées locales.*

Supposons maintenant que T soit le courant d'intégration sur un ensemble analytique $A \subset X$ de dimension pure p. Pour tout point $x \in A$, il existe des coordonnées locales

$$z = (z', z''), \qquad z' = (z_1, \ldots, z_p), \quad z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$$

et des boules $B' \subset \mathbb{C}^p$, $B'' \subset \mathbb{C}^{n-p}$, relatives à ces coordonnées, de rayons respectifs r', r'', telles que $A \cap (B' \times B'')$ soit contenu dans un cône d'équation $|z''| \leq C|z'|$. Dans ces conditions, si l'on prend $r' \leq Cr''$, la projection

$$\pi : A \cap (B' \times B'') \longrightarrow B'$$

définit un revêtement ramifié ayant un nombre fini q de feuillets. On notera $S \subset B'$ l'ensemble de ramification.

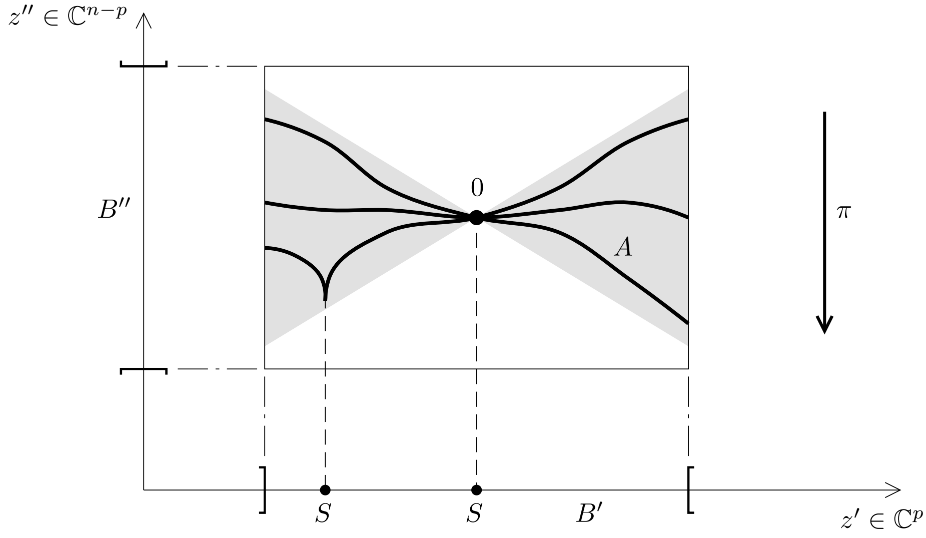

Fig. 4. Revêtement ramifié de A sur B'.

En fait, les propriétés énoncées ci-dessus sont vérifiées dès que les coordonnées (z', z'') sont choisies de manière générique. Pour le voir, on choisit une équation analytique locale $f(z) = 0$ de A et on utilise le théorème de préparation de Weierstrass pour mettre cette équation sous la forme

$$f(z) = z_n^s + \sum_{k=1}^{s} a_k(\hat{z}) z_n^{s-k} = 0,$$

où $\hat{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ et où s est l'ordre d'annulation de f en 0. Il en résulte que a_k doit s'annuler à l'ordre k au moins en 0, donc $|a_k(\hat{z})| = O(|\hat{z}|^k)$ et les racines z_n sont telles que $|z_n| \le C|\hat{z}|$. La projection $z \mapsto \hat{z}$ est alors un morphisme fini de degré $\le d$ de A sur un ensemble analytique A' de dimension p dans $\mathbb{C}^{n-1}$. On conclut par récurrence sur n.

(6.9) Théorème (P. Thie [Th69]). — *On a $\nu([A], x) = q$, en particulier le nombre q de feuillets du revêtement ramifié π en indépendant du choix des coordonnées (z', z'') comme ci-dessus. Ce nombre est appelé multiplicité de A au point x.*

Preuve. — Quand z tend vers x , les fonctions

$$\varphi(z) = \log|z| = \log(|z'|^2 + |z''|^2)^{1/2}, \qquad \psi(z) = \log|z'|$$

sont équivalentes sur le germe (A, x) quand z tend vers 0. D'après le théorème de comparaison (6.7) ceci entraîne

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

La formule (6.4) appliquée à ψ donne maintenant

$$\begin{aligned}\nu([A], \psi, \log t) &= (2t^2)^{-p} \int_{A\cap\{\psi<\log t\}} (dd^c e^{2\psi})^p \\ &= (2t^2)^{-p} \int_{A\cap\{|z'|<t\}} (\pi^\star dd^c |z'|^2)^p \\ &= (2t^2)^{-p}\, q \int_{\mathbb{C}^p\cap\{|z'|<t\}} (dd^c|z'|^2)^p = q,\end{aligned}$$

d'où le théorème. On a utilisé ici le fait que π est un revêtement étale à q feuillets en dehors de $\pi^{-1}(S)$ et que S et $\pi^{-1}(S)$ sont de mesure nulle. □

Soit maintenant T un courant positif quelconque de bidimension (p, p). Pour $c > 0$, on introduit les ensembles

$$E_c(T) = \big\{x \in X\,;\, \nu(T, x) \geq c\big\}.$$

Les nombres de Lelong satisfont alors l'importante propriété de semi-continuité suivante, démontrée par [Siu74] à la suite des travaux de Bombieri [Bo70] et Skoda [Sk72].

(6.10) Théorème ([Siu74]). — *Si T est un courant positif fermé de bidimension (p, p), les ensembles de niveau $E_c(T)$, $c > 0$, sont des ensembles analytiques de dimension $\leq p$.*

La démonstration est malheureusement trop difficile pour que nous puissions l'expliquer ici. Elle repose essentiellement sur la théorie des estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et sur la construction de fonctions potentiels adéquates, d'après des idées de Skoda [Sk72]. Nous renvoyons à [Ki79], [De87] et [De91a] pour les détails. Le théorème (6.10) entraîne à son tour la formule de décomposition suivante.

(6.11) Formule de décomposition de Siu. — *Si T est un courant positif fermé de bidimension (p, p), il y a une unique décomposition de T comme somme d'une série convergente (peut-être finie)*

$$T = \sum_{j\geq 1} \lambda_j [A_j] + R, \qquad \lambda_j > 0,$$

où $[A_j]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique irréductible $A_j \subset X$ de dimension p, λ_j le nombre de Lelong générique de T sur A_j, et où R est un courant positif fermé résiduel ayant la propriété que $\dim E_c(R) < p$ pour tout $c > 0$.

Nous aurons finalement besoin d'un deuxième théorème de comparaison pour les nombres de Lelong, relatif aux produits d'intersection des courants.

(6.12) THÉORÈME. — *Soient* $u_1, \ldots, u_q$ *et* $v_1, \ldots, v_q$ *des fonctions plurisousharmoniques telles que chaque q-uplet satisfait les conditions d'intersection du théorème* (5.4). *Supposons de plus que* $u_j = -\infty$ *sur* $\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}(-\infty)$ *et que*

$$\ell_j := \limsup \frac{v_j(z)}{u_j(z)} < +\infty \quad \textit{quand} \quad z \in \operatorname{Supp} T \smallsetminus u_j^{-1}(-\infty),\ \varphi(z) \to -\infty.$$

Alors

$$\nu(dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q \wedge T, \varphi) \le \ell_1 \ldots \ell_q \, \nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, \varphi).$$

Preuve. — D'après l'homogénéïté en chaque facteur v_j, il est suffisant de démontrer l'inégalité avec constantes $\ell_j = 1$ sous l'hypothèse $\limsup v_j/u_j < 1$. On introduit

$$w_{j,c} = \max\{v_j - c, u_j\}.$$

Notre hypothèse entraîne que $w_{j,c}$ coïncide avec $v_j - c$ sur un voisinage $\operatorname{Supp} T \cap \{\varphi < r_0\}$ de $\operatorname{Supp} T \cap \{\varphi < -\infty\}$, donc

$$\nu(dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q \wedge T, \varphi) = \nu(dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T, \varphi)$$

pout tout c. Maintenant, fixons un voisinage V et $r < R_V$. Comme $w_{j,c}$ converge en décoissant vers u_j quand c tend vers $+\infty$, le courant $dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T$ converge faiblement vers $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ quand c tend vers $+\infty$. Un argument facile montre alors que

$$\limsup_{c \to +\infty} \nu(dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T, \varphi) \le \nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, \varphi). \quad \square$$

(6.13) COROLLAIRE. — *Si* $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ *est bien défini, alors on a en tout point* $x \in X$

$$\nu\big(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, x\big) \ge \nu(dd^c u_1, x) \ldots \nu(dd^c u_q, x)\, \nu(T, x).$$

Preuve. — On applique (6.12) avec $\varphi(z) = v_1(z) = \ldots = v_q(z) = \log|z - x|$ et on observe que $\ell_j := \limsup v_j/u_j = 1/\nu(dd^c u_j, x)$ (il n'y a rien à prouver si $\nu(dd^c u_j, x) = 0$). $\square$

7. Inégalité de self-intersection

Etant donné un diviseur $D \ge 0$ sur une variété projective X, on a une stratification du support $|D|$ par les strates d'équimultiplicité. On cherche à majorer le degré de ces strates en fonction du degré de D. Ce problème peut se reformuler de manière beaucoup plus générale en termes de courants:

(7.1) PROBLÈME. — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété kählérienne compacte (X,ω). Peut-on obtenir une borne pour le degré des composantes irréductibles de codimension p des ensembles de niveau $E_c(T)$ en termes de la classe de cohomologie $\{T\} \in H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$?*

De manière précise, on introduit la suite $0 = b_1 \le \ldots \le b_n \le b_{n+1}$ des "valeurs de saut" b_p pour lesquelles la dimension de $E_c(T)$ tombe d'une unité lorsque c excède la valeur b_p, c'est-à-dire que $\operatorname{codim} E_c(T) = p$ quand $c \in\,]b_p, b_{p+1}]$. Soient $(Z_{p,k})_{k\ge 1}$ les composantes de codimension p de $\bigcup_{c\in]b_p,b_{p+1}]} E_c(T)$ et soit

$$\nu_{p,k} = \min_{x\in Z_{p,k}} \nu(T,x) \in\,]b_p, b_{p+1}]$$

le nombre de Lelong générique de T le long de $Z_{p,k}$. Alors on a l'inégalité de self-intersection suivante.

(7.2) THÉORÈME. — *Supposons que le fibré en droites canonique $O_{TX}(1)$ sur le fibré en espaces projectifs $P(T^\star X)$ possède une métrique hermitienne h telle que $\Theta_h\big(O_{TX}(1)\big) + \pi^\star u \ge 0$, où $\pi : P(T^\star X) \to X$ est la projection et où u est une forme fermée semi-positive de type $(1,1)$ sur X. Pour chaque $p = 1,\ldots,n$, la classe de cohomologie de De Rham $(\{T\}+b_1\{u\})\cdots(\{T\}+b_p\{u\})$ peut être représentée par un courant positif fermé Θ_p de bidegré (p,p) tel que*

$$\Theta_p \ge \sum_{k\ge 1} (\nu_{p,k}-b_1)\ldots(\nu_{p,k}-b_p)\,[Z_{p,k}] + (T_{\rm abc}+b_1u)\wedge\ldots\wedge(T_{\rm abc}+b_pu)$$

où $T_{\rm abc} \ge 0$ est la partie absolument continue de la décomposition de Lebesgue de T.

Le deuxième terme $(T_{\rm abc}+b_1u)\wedge\ldots\wedge(T_{\rm abc}+b_pu)$ peut être considéré comme une évaluation de "l'excès d'intersection" du membre de gauche par rapport au cycle défini par les $Z_{p,k}$. Cet excès d'intersection est en général difficile à exprimer par des méthodes algébriques (il n'y a pas de traduction algébrique simple de ce que représente $T_{\rm abc}$, $T_{\rm abc}$ mesure intuitivement le degré de liberté des déformations équisingulières de T). En négligeant l'excès d'intersection et en prenant le produit extérieur avec ω^{n-p}, on obtient une majoration explicite du degré des composantes $Z_{p,k}$ par un polynôme de degré p en la classe de cohomologie de T :

(7.3) COROLLAIRE. — *Si ω est une métrique kählérienne sur X et si $\{u\}$ est une classe de cohomologie semi-positive de type $(1,1)$ telle que $c_1\big(O_{TX}(1)\big) + \pi^\star\{u\}$ soit semi-positive, le degré des composantes $Z_{p,k}$ par rapport à ω satisfait l'estimation*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\nu_{p,k}-b_1)\ldots(\nu_{p,k}-b_p)\int_X [Z_{p,k}]\wedge\omega^{n-p} \le \big(\{T\}+b_1\{u\}\big)\cdots\big(\{T\}+b_p\{u\}\big)\cdot\{\omega\}^{n-p}.$$

La forme u doit être vue intuitivement comme un minorant de la courbure du fibré tangent. Dans le cas de l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n$, un calcul classique montre que la courbure est positive et on peut donc prendre $u = 0$. Si $\mathrm{d}^\circ(T) = \int_X T \wedge \omega^{n-1}$ est le degré par rapport à la métrique de Fubini-Study, on obtient l'inégalité simple:

(7.4) COROLLAIRE. — *Sur $\mathbb{P}^n$, on a l'inégalité*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)\, \mathrm{d}^\circ(Z_{p,k}) \leq \big(\mathrm{d}^\circ(T)\big)^p.$$

Pour la démonstration du Théorème (7.2), on utilise un théorème de régularisation de courants qui est en quelque sorte un théorème de déplacement infinitésimal de cycles: en général, on ne peut déplacer un cycle positif, mais le déplacement devient possible si on accepte des composantes de multiplicité négative.

(7.5) LEMME ([De91b]). — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et soit α une forme réelle de classe C^∞ ayant même classe de cohomologie que T, en sorte que $T = \alpha + dd^c\psi$. Soit $\gamma \geq 0$ une forme réelle de type $(1,1)$ à coefficients continus telle que $T \geq \gamma$. Supposons que la courbure de TX soit minorée par $-u$ comme dans (7.2). Alors pour tout $c > 0$ il existe une suite de courants réels $T_{c,k} = \alpha + dd^c\psi_{c,k}$ tels que $\psi_{c,k}$ soit C^∞ sur $X \smallsetminus E_c(T)$ et décroisse vers ψ quand k tend vers $+\infty$ (en particulier, $T_{c,k}$ est C^∞ sur $X \smallsetminus E_c(T)$ et converge faiblement vers T sur X), et on a*

$$T_{c,k} \geq \gamma - \lambda_{c,k} u - \varepsilon_k \omega \quad \textit{où}$$

(i) *$\lambda_{c,k}(x)$ est une suite décroissante de fonctions continues sur X telles que $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{c,k}(x) = \min\big(\nu(T,x), c\big)$ en chaque point;*
(ii) *$\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$,*
(iii) *$\nu(T_{c,k}, x) = \big(\nu(T,x) - c\big)_+$ en chaque point $x \in X$.*

Preuve du théorème (7.2). — L'idée principale de la démonstration est de tuer les nombres de Lelong de T jusqu'à la valeur b_j, en utilisant le Lemme (7.5). Les singularités du courant T_j ainsi obtenu apparaissent alors seulement en codimension j, de sorte qu'il devient possible de définir le produit extérieur $T_1 \wedge \ldots \wedge T_p$ au moyen du Théorème (5.4).

On raisonne par récurrence sur p. Pour $p = 1$, la formule de décomposition de Siu montre que

$$T = \sum \nu_{1,k}[Z_{1,k}] + R,$$

et on a $R \geq T_{\mathrm{abc}}$ puisque la partie cycle correspond à des mesures singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Le résultat est donc vrai avec $\Theta_1 = T$. Maintenant, supposons que Θ_{p-1} a déjà été construit. Pour $c > b_p$, le courant $T_{c,k} = \alpha + dd^c\psi_{c,k}$ produit par le Lemme (7.5) a un ensemble de pôles de codimension $\operatorname{codim} L(\psi_{c,k}) = \operatorname{codim} E_c(T) \geq p$. Le Théorème (5.4) montre que

$$\Theta_{p,c,k} = \Theta_{p-1} \wedge (T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k \omega)$$

est bien défini. Si ε_k tend vers zéro assez lentement, $T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k\omega$ est positif par (7.5 i), donc $\Theta_{p,c,k} \geq 0$. De plus, la classe de cohomologie de $\Theta_{p,c,k}$ est égale à $\{\Theta_{p-1}\} \cdot (\{T\} + c\{u\} + \varepsilon_k\{\omega\})$ et converge à la limite vers $\{\Theta_{p-1}\} \cdot (\{T\} + c\{u\})$. Puisque la masse $\int_X \Theta_{p,c,k} \wedge \omega^{n-p}$ reste uniformément bornée, la famille $(\Theta_{p,c,k})_{c\in]b_p,b_p+1],k\geq 1}$ est relativement compacte pour la topologie faible. On définit

$$\Theta_p = \lim_{c\to b_p+0}\lim_{k\to+\infty} \Theta_{p,c,k},$$

peut-être après extraction d'une sous-suite faiblement convergente. Alors $\{\Theta_p\} = \{\Theta_{p-1}\} \cdot (\{T\} + b_p\{u\})$, donc

$$\{\Theta_p\} = (\{T\} + b_1\{u\}) \cdots (\{T\} + b_p\{u\}).$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}\nu(\Theta_p, x) &\geq \limsup_{c\to b_p+0}\limsup_{k\to+\infty}\ \nu\big(\Theta_{p-1} \wedge (T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k\omega), x\big)\\ &\geq \nu(\Theta_{p-1}, x) \times \limsup_{c\to b_p+0}\limsup_{k\to+\infty}\ \nu(T_{c,k}, x)\\ &\geq \nu(\Theta_{p-1}, x)\big(\nu(T, x) - b_p\big)_+\end{aligned}$$

grâce à (6.13) et (7.5 iii). Par récurrence il vient

$$\nu(\Theta_p, x) \geq \big(\nu(T, x) - b_1\big)_+ \ldots \big(\nu(T, x) - b_p\big)_+,$$

en particulier, le nombre de Lelong générique de Θ_p le long de $Z_{p,k}$ est au moins égal à $(\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)$. Ceci implique déjà

$$\Theta_p \geq \sum_{k\geq 1} (\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)\,[Z_{p,k}].$$

Puisque le second membre est singulier par rapport à la mesure de Lebesgue, l'inégalité voulue sera démontrée si on prouve de plus que

$$\Theta_{p,\mathrm{abc}} \geq (T_{\mathrm{abc}} + b_1 u) \wedge \ldots \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u),$$

ou encore, par récurrence, que $\Theta_{p,\mathrm{abc}} \geq \Theta_{p-1,\mathrm{abc}} \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u)$. Pour ceci, il faut simplement s'assurer que $\lim_{k\to+\infty} T_{c,k,\mathrm{abc}} = T_{\mathrm{abc}}$ presque partout, et utiliser de nouveau la récurrence. Or, nos arguments de multiplicités d'intersection ne sont pas affectés si l'on remplace $\psi_{c,k}$ par $\psi'_{c,k} = \max\{\psi, \psi_{c,k} - A_k\}$ avec une suite A_k quelconque. Si A_k converge suffisamment vite vers $+\infty$, il est facile de voir qu'on aura bien $\lim(dd^c\psi'_{c,k})_{\mathrm{abc}} = (dd^c\psi)_{\mathrm{abc}}$ presque partout. $\square$

Références

[B-T82] E. Bedford and B.A. Taylor. — *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1-41.

[Bo70] E. Bombieri. — *Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math., **10** (1970), 267-287 and *Addendum*, Invent. Math. **11** (1970), 163-166.

[CLN69] S.S. Chern, H.I. Levine, L. Nirenberg. — *Intrinsic norms on a complex manifold*, Global Analysis (papers in honor of K.Kodaira), Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1969), 119-139.

[De82a] J.P. Demailly. — *Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 75-102.

[De82b] J.P. Demailly. — *Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge*, Invent. Math., **69** (1982), 347–374.

[De87] J.P. Demailly. — *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Math., **159** (1987), 153-169.

[De90] J.P. Demailly. — *A numerical criterion for very ample line bundles,* Prépub. Inst. Fourier n° 153, Décembre 1990, 45p, à paraître au J. Differential Geom.

[De91a] J.P. Demailly. — *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory,* Prépub. Inst. Fourier n° 173, Mai 1991, 70p, à paraître dans les Proceedings "Complex Analysis and Geometry" édités par V. Ancona et A. Silva, CIRM, Univ. de Trento.

[De91b] J.P. Demailly. — *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory,* Prépub. Inst. Fourier n° 176, Juillet 1991, 42p, à paraître au J. of Algebraic Geom.

[DR55] G. De Rham. — *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Dr69] R.N. Draper. — *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann., **180** (1969), 175-204.

[Fe69] H. Federer. — *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Grundlehren der math Wissenschaften, Band **153**, Berlin, 1969.

[G-H78] P.A. Griffiths, J. Harris. — *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New-York, 1978.

[Kg70] J.R. King. — *A residue formula for complex subvarieties,* Proc. Carolina Conf. on Holomorphic mappings and minimal surfaces, University of North Carolina, Chapel Hill (1970), 43-56.

[Ki79] C.O. Kiselman. — *Densité des fonctions plurisousharmoniques*, Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 295-304.

[Ki83] C.O. Kiselman. — *Sur la définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe,* Analyse Complexe, Proceedings of Journées Fermat (SMF), Toulouse, May 1983, Lecture Notes in Math., vol. 1094, Springer-Verlag, Berlin (1984), 139–150.

[Ko54] K. Kodaira. — *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math., **60** (1954), 28-48.

[Le57] P. Lelong. — *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 239-262.

[Le68] P. Lelong. — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New-York, 1968.

[Sa51] P. Samuel. — *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique*, J. de Math. Pures Appl., **30** (1951), 159-274.

[Se57] J.P. Serre. — *Algèbre locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math. n°11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Sib85] N. Sibony. — *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J., **52** (1985), 157-197.

[Siu74] Y.T. Siu. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math., **27** (1974), 53-156.

[Sk72] H. Skoda. — *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 353-408.

[St66] W. Stoll. — *The multiplicity of a holomorphic map*, Invent. Math., **2** (1966), 15-58.

[Th67] P. Thie. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Ann., **172** (1967), 269-312.

[Wa78] M. Waldschmidt. — *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque n° 69-70, 1979.

[Ws73] R.O. Wells. — *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice Hall, , 1973.

■