Variétés projectives hyperboliques et équations différentielles algébriques

Jean-Pierre Demailly

Université de Grenoble I, Institut Fourier

Ces notes sont une version étendue d'un exposé présenté le 14 juin 1997 à l'occasion de la journée annuelle de la SMF en l'honneur de Henri Cartan, dont une pemière version est parue dans le n° 73 de la Gazette des mathématiciens en juillet 1997, cf. [Dem97].

0. Introduction

Le but de ce texte est d'offrir une introduction aussi élémentaire que possible à un résultat important concernant la géométrie des courbes holomorphes tracées dans les variétés algébriques complexes. Ce résultat trouve son origine dans les travaux fondamentaux d'André Bloch [Blo26a, 26b], et dans la Thèse de Henri Cartan [Car28]. La démonstration que nous allons présenter est une contribution très récente de Y.T. Siu et S.K. Yeung ([SiYe96b], [Siu97]). Elle s'obtient de manière relativement simple à l'aide d'estimations classiques en théorie de Nevanlinna, comme le lemme de la dérivée logarithmique, et par l'utilisation d'opérateurs différentiels tels que les Wronskiens, toutes idées déjà présentes en germe dans la Thèse de Henri Cartan.

Avant de passer à des énoncés détaillés, rappelons un peu de terminologie. On s'intéressera particulièrement aux variétés algébriques dites de *type général.* Rappelons qu'une forme de type (p,q) sur une variété complexe est une forme différentielle u de degré $(p+q)$ admettant dans tout système de coordonnées holomorphes $(z_1,\ldots,z_n)$ une écriture du type

$$u=\sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z_1,\ldots,z_n)\,dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

La somme ci-dessus est étendue à tous les multi-indices croissants $I=(i_1,\ldots,i_p)$, $J=(j_1,\ldots,j_q)$ d'entiers de $\{1,2,\ldots,n\}$. On appelle *p-forme holomorphe* une forme de type $(p,0)$ ayant tous ses coefficients holomorphes. Le fibré (ou faisceau …) des p-formes holomorphes sur X est noté habituellement Ω^p_X. On appelle *section canonique*, resp. *section pluricanonique* de X toute section holomorphe globale du fibré en droites canonique $K_X=\Omega^n_X$, resp. du fibré en droites $K_X^{\otimes k}$ pour un certain entier $k>0$. Une section pluricanonique d'ordre k peut donc s'écrire localement $h(z_1,\ldots,z_n)(dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n)^{\otimes k}$ avec des coefficients holomorphes h. On dit qu'une variété X de dimension n est de *type général* si le nombre de sections pluricanoniques d'ordre k est de l'ordre de grandeur de k^n quand k tend vers $+\infty$.

Par exemple si X est une hypersurface lisse dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ de dimension $n+1$, définie par une équation polynomiale

$$\sigma(z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0$$

homogène de degré p, alors toute expression de la forme

$$u = q(z) \frac{\sum_{0 \leqslant j \leqslant n+1} (-1)^j z_j \, dz_0 \wedge dz_1 \wedge \ldots \widehat{dz_j} \ldots \wedge dz_{n+1}}{d\sigma}$$

définit une n-forme holomorphe sur X dès lors que q est un polynôme homogène de degré $p - (n+2)$ (en sorte que u est homogène de degré 0, i.e. invariante par homothétie). Il en résulte facilement que X est de type général si $p \geqslant n+3$. La théorie des surfaces de Riemann montre de même qu'une courbe (compacte lisse) est de type général si et seulement si elle est de genre au moins 2, c'est-à-dire n'est ni $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ni une courbe elliptique. De façon équivalente, une courbe est de type général si et seulement si elle peut être munie d'une métrique hermitienne à courbure constante négative; il suffit en effet de prendre la métrique induite par la métrique de Poincaré sur le revêtement universel de la courbe, à savoir le disque unité. Cela étant, on s'intéresse à la conjecture fondamentale suivante, proposée par Green-Griffiths [GrGr80] et Lang [Lang86, 87].

0.1. Conjecture. *Soit X une variété algébrique lisse de type général. Alors il existe une sous-variété algébrique propre $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans Y.*

Les variétés algébriques considérées ici seront toujours des variétés *projectives*, à savoir des variétés définies par un nombre fini d'équations polynomiales homogènes dans un espace projectif complexe. La locution "courbe entière" désignera une courbe holomorphe définie sur $\mathbb{C}$ tout entier. Insistons sur le fait que l'énoncé de la conjecture inclut le cas des courbes entières transcendantes. Si elle était vraie, il en résulterait que les courbes elliptiques ou rationnelles C tracées dans X sont toutes contenues dans un sous-variété algébrique $Y \subsetneq X$ (Rappelons qu'une courbe algébrique $C \subset X$ est dite rationnelle, resp. elliptique, si sa désingularisée est la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, resp. une courbe elliptique, i.e. un tore $\mathbb{C}/\Lambda$. Dans les deux cas, en effet, on a des applications holomorphes $f : \mathbb{C} \to C$ qui couvrent C toute entière). En particulier, si X est une surface de type général, alors Y serait de dimension $\leqslant 1$, et par conséquent X ne devrait avoir qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques. Cette "toute petite" conséquence est encore largement conjecturale, en dépit d'avancées notables dues à Bogomolov [Bog77], Lu-Yau [LuYa90], Lu-Miyaoka [LuMi95, 96], [Lu96], dans le cas où on pose certaines conditions numériques sur les classes de Chern de X.

On dit qu'une variété complexe X est *hyperbolique au sens de Brody* si elle n'admet aucune courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ (lorsque X est compacte, Brody [Bro78] a montré que cela équivaut à l'hyperbolicité au sens de Kobayashi [Kob70], i.e. à la non dégénérescence de la pseudo-métrique de Kobayashi). Là encore, la situation est relativement claire en dimension 1, une courbe complexe est hyperbolique si et seulement si son revêtement universel est le disque, en particulier une courbe algébrique complexe est hyperbolique si et seulement si elle est de type général (i.e. de genre au moins 2). La situation se complique dès la dimension 2. Ainsi, les *surfaces de Fermat* $z_0^p + z_1^p + z_2^p + z_3^p = 0$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, qui sont de type général pour $p \geqslant 5$, contiennent toujours des droites projectives, par exemple les droites définies par $z_1 = \zeta z_0$, $z_3 = \eta z_2$ avec ζ, η racines p-ièmes de -1, et ne sont donc pas hyperboliques. S. Kobayashi a néanmoins conjecturé l'énoncé suivant [Kob70, KobO75].

0.2. Conjecture. *Pour tout n, il existe un entier $d_0(n)$ tel qu'une hypersurfaces X générique de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ est hyperbolique pour $d \geqslant d_0(n)$.*

La borne optimale attendue est $d_0(n) = 2n + 1$ (pour le degré $2n$, on n'a pas génériquement hyperbolicité d'après Zaidenberg [Zai87]). Le mot "générique" signifie ici qu'on doit omettre un ensemble algébrique dans l'espace projectif des coefficients des polynômes paramétrisant les hypersurfaces algébriques de degré d. La conjecture 0.2 est démontrée à l'heure actuelle seulement pour $n = 2$ et pour la propriété plus faible "d'hyperbolicité algébrique", à savoir la non existence de courbes rationnelles et elliptiques; ceci se fait au moyen d'un calcul précis du genre des courbes (voir Clemens [Cle86]). Des résultats d'hyperbolicité au sens analytique du terme ont été obtenus récemment pour les complémentaires de courbes algébriques dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, cas un peu plus facile à traiter que celui des surfaces dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Les premiers résultats obtenus concernent les complémentaires de courbes ayant au moins 3 composantes irréductibles génériques ([DSW92, 94]). Il y a deux ans, Siu-Yeung [SiYe96a] ont annoncé l'hyperbolicité au sens de Kobayashi du complémentaire d'une courbe générique de très grand degré dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, leur borne étant de l'ordre de 10^{13}.

L'intérêt à l'égard les variétés hyperboliques tient principalement au fait qu'on attend de celles-ci des propriétés arithmétiques de finitude généralisant le théorème de Mordell-Faltings pour les courbes. Ainsi, Lang a conjecturé qu'une sous-variété algébrique hyperbolique de l'espace projectif définie sur un corps de nombres (c'est-à-dire par des polynômes ayant leurs coefficients dans ce corps) n'admet qu'un nombre fini de points rationnels. P. Vojta [Voj87] a formulé des conjectures quantitatives explicites qui devraient permettre de faire le lien entre la géométrie des variétés et leurs propriétés arithmétiques. Le lecteur pourra aussi consulter [Nog81, 91], [NoOc90] à ce sujet.

Notre ambition (beaucoup plus modeste ici) est d'abord de faire le lien entre l'existence des courbes entières et celle des opérateurs différentiels algébriques globaux sur la variété. Nous suivons en cela des idées remontant aux travaux originaux de Bloch, à la lumière des éclaircissements apportés cinquante ans plus tard par Ochiai [Och77], Noguchi [Nog77] et Green-Griffiths [GrGr80].

Si $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ est un germe de courbe holomorphe tel que $f(0) = x$, représenté dans des coordonnées locales au voisinage de X par des composantes $(f_1, \ldots, f_n)$, on considère les opérateurs différentiels algébriques d'ordre k agissant sur f, à savoir les opérateurs de la forme

$$P(f', f'', \ldots, f^{(k)}) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_k}(f)(f')^{\alpha_1}(f'')^{\alpha_2} \ldots (f^{(k)})^{\alpha_k},$$

où les coefficients $a_{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_k}(z_1, \ldots, z_n)$ sont holomorphes, et où

$$(f^{(i)})^{\alpha_i} = (f_1^{(i)})^{\alpha_{i,1}} \ldots (f_n^{(i)})^{\alpha_{i,n}}, \qquad \alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}).$$

Le degré total d'un tel opérateur est le maximum des degrés de ses monômes non nuls, défini comme

$$|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \cdots + k|\alpha_k|, \qquad \text{où} \quad |\alpha_i| = \sum_j \alpha_{i,j}$$

(on peut voir le degré comme le nombre total de $'$ figurant dans le monôme). On considérera uniquement des opérateurs différentiels *homogènes* en ce sens, et on notera m le degré commun des monômes. En fait, on a une $\mathbb{C}^\star$-action sur les germes de courbes, définie par reparamétrisation linéaire des germes,

$$(\lambda \cdot f)(t) = f(\lambda t), \qquad t \in \mathbb{C}\,,\ \lambda \in \mathbb{C}^\star,$$

en sorte que $(\lambda \cdot f)^{(i)} = \lambda^i f^{(i)}(\lambda t)$, et P est homogène de degré m si on a la relation

$$P((\lambda \cdot f)', (\lambda \cdot f)'', \ldots, (\lambda \cdot f)^{(k)}) = \lambda^m P(f', f'', \ldots, f^{(k)})$$

pour tout germe f et tout $\lambda \in \mathbb{C}^\star$. On notera $E_{k,m}$ le fibré vectoriel holomorphe dont les sections sont les opérateurs différentiels algébriques d'ordre k et de degré m, à valeurs scalaires. De même, si V est un fibré vectoriel sur X, on peut considérer les opérateurs différentiels $P(f', \ldots, f^{(k)})$ de degré m à valeurs dans V comme étant les sections de $E_{k,m} \otimes V$.

Nous aurons encore besoin de la notion de *courbure* d'un fibré en droites holomorphe hermitien (L, h). Si (L, h) est un tel fibré sur X et $L_{|U} \xrightarrow{\simeq} U \times \mathbb{C}\,$, $L_x \ni \xi \mapsto (x, \xi/\eta)$ une trivialisation donnée par une section holomorphe locale non nulle η du fibré, la norme hermitienne sur L_x est donnée par une expression de la forme

$$\|\xi\|_h^2 = |\xi/\eta(x)|^2 \|\eta(x)\|_h^2 = |\xi/\eta(x)|^2 e^{-\varphi(x)}$$

avec $\varphi(x) = -\log \|\eta(x)\|_h^2$. La fonction φ est une fonction réelle de classe C^∞ sur U qu'on appelle *poids* de la métrique h relativement à η. La courbure de la métrique h est par définition la forme réelle de type $(1,1)$

$$\Theta_h(L) = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial}\varphi = \frac{i}{2\pi} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k,$$

qui est indépendante du choix de la section η. On dit que cette courbure est positive si la matrice hermitienne $(\partial^2\varphi/\partial z_j \partial\overline{z}_k)$ est définie positive en tout point. Dans ce contexte, on a le théorème d'annulation fondamental suivant, énoncé par Green et Griffiths [GrGr80].

0.3. Théorème. *Soit X une variété algébrique projective et $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière non constante. Alors on a $P(f', \ldots, f^{(k)}) \equiv 0$ pour tout opérateur différentiel algébrique P à valeurs dans le dual $L^\star$ d'un fibré holomorphe en droite à courbure positive sur X (c'est-à-dire pour toute section globale $P \in H^0(X, E_{k,m} \otimes L^\star)$).*

Le point essentiel (que nous ne vérifierons ici que sur quelques exemples, voir § 5) est qu'une surface X de type général possède toujours beaucoup de tels opérateurs P, la dimension de l'espace des opérateurs P globaux pouvant être évaluée à partir de la formule de Riemann-Roch ; on a en fait la formule générale suivante, dûe à Green-Griffiths [GrGr80]: pour tout fibré en droites L sur X, la caractérisque d'Euler-Poincaré $\chi(X, E_{k,m} \otimes L^{-1}) = \sum(-1)^q \dim H^q(X, E_{k,m} \otimes L^{-1})$ admet une estimation

$$\chi(X, E_{k,m}\otimes L^{-1}) = \frac{m^{n+kn-1}}{(k!)^n(n+kn-1)!}\big((-1)^n c_1^n(\log k)^n - O\big((\log k)^{n-1}\big)\big) + O(m^{n+kn-2}),$$

lorsque $m \gg k \gg 1$, où $c_i = c_i(X)$ désignent les classes de Chern de X, $n = \dim X$, et les $O(...)$ sont des expressions polynomiales en les classes de Chern. Par ailleurs, un théorème d'annulation dû à Bogomolov [Bog79] montre que

$$H^2(X, E_{k,m} \otimes L^{-1}) = 0 \qquad \text{pour } m \gg k \gg 1,$$

lorsque X est une surface, de sorte que l'estimation précédente pour la caractéristique d'Euler donne aussi une minoration pour le H^0.

Il en résulte qu'une courbe entière f tracée sur une surface X de type général est nécessairement une courbe intégrale d'une certaine équation différentielle algébrique sur X. Pour achever la preuve de la conjecture 0.1 dans le cas des surfaces, il reste encore un point a priori très délicat à prouver, qui serait de montrer la finitude du nombre de trajectoires ayant un revêtement universel de type conforme $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. On y parvient effectivement dans quelques cas très particuliers, mais le problème général est complètement ouvert.

Le schéma de preuve suggéré dans [GrGr80] pour le théorème 0.3 est malheureusement incomplet. Il a fallu attendre ces 2 dernières années pour voir apparaître des preuves convaincantes. L'un de nos principaux objectifs sera de présenter une telle preuve, due à Y.T. Siu et S.K. Yeung (voir [SiYe96a], [Siu97]); une preuve entièrement différente d'un résultat un peu moins fort mais suffisant pour les applications a aussi été obtenue dans [Dem95].

Comme application, nous obtenons des exemples explicites de surfaces algébriques hyperboliques de très bas degré, améliorant ainsi des résultats obtenus successivement par Brody-Green [BrGr77] et Nadel [Nad89]. L'idée est d'appliquer le théorème d'annulation 0.3 dans le cas des *opérateurs wronskiens*. L'énoncé qui suit est dû indépendamment à [SiYe96b] et [DeEG97] (voir aussi [EG96]).

0.4. Théorème. *La surface algébrique lisse $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ définie par*

$$X = \{z_0^p + z_1^p + z_2^p + z_3^{p-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\}$$

est hyperbolique pour des valeurs génériques des constantes ε_j et pour tout degré $p \geqslant 11$.

Le plan de cet article est le suivant: après quelques rappels de notions de base sur la théorie de Nevanlinna au § 1, 2, 3, nous démontrons le théorème fondamental 0.3 au § 4. La section § 4 décrit un peu de géométrie des connexions méromorphes, en vue de la construction de “bons” opérateurs wronskiens. Les deux dernières sections illustrent l'utilisation du théorème fondamental et détaillent la construction de surfaces hyperboliques explicites possédant de tels opérateurs wronskiens.

L'auteur remercie vivement la SMF de lui avoir donné l'occasion de rendre hommage à Monsieur Henri Cartan par cet exposé, présenté devant un large auditoire.

1. Notions de base de la théorie de Nevanlinna

Soit $\omega = i\sum_{j,k}\omega_{jk}(z)\,dz_j\wedge d\overline{z}_k$ une $(1,1)$-forme de classe C^∞ sur une variété complexe compacte X. On supposera que ω est *définie positive*, c'est-à-dire que la matrice hermitienne $(\omega_{jk}(z))$ est définie positive en chaque point. Suivant les besoins, on considèrera un tel objet ou bien comme une 2-forme sur X ou bien comme une métrique hermitienne sur le fibré tangent T_X. Rappelons que la métrique ω est dite *kählérienne* si $d\omega = 0$.

Étant donné une courbe entière $f:\mathbb{C}\to X$, *l'indicatrice de croissance* de f est la fonction $T_{f,\omega}$ telle que

$$T_{f,\omega}(r) = \int_{r_0}^{r} t_f(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \qquad t_{f,\omega}(\rho) = \int_{D(0,\rho)} f^\star\omega, \tag{1.1}$$

où $t_{f,\omega}(\rho)$ n'est autre que l'aire par rapport à ω de l'image $f(D(0,\rho))$ du disque de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{C}$. Si on s'intéresse seulement à l'ordre de grandeur $O\big(T_{f,\omega}(r)\big)$ quand r tend vers $+\infty$ (à des constantes multiplicatives près), il est clair que cet ordre de grandeur est indépendant du choix de la métrique ω. Notons dès à présent que la limite $\lim_{r+\infty} T_{f,\omega}(r)/\log r$ est égale à l'aire totale $A=\int_{\mathbb{C}} f^\star\omega$, de sorte que $T_{f,\omega}(r)\sim A\log r$ si $A<+\infty$. On verra plus loin que la finitude de l'aire caractérise les courbes f qui sont *algébriques*.

Notons que si $f:\mathbb{C}\to X$ est une *courbe de Brody*, c'est-à-dire une courbe ayant une dérivée $\|f\|_\omega\leqslant C$ bornée, alors $t_{f,\omega}(r)\leqslant \pi Cr^2$ et $T_{f,\omega}(r)\leqslant \frac{\pi}{2}Cr^2$. De manière générale, on dit que la courbe f a une *croissance d'ordre* α si pour tout $\varepsilon>0$ on a une majoration $t_{f,\omega}(r)\leqslant C_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ (ou, ce qui revient au même, $T_{f,\omega}(r)\leqslant C'_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$). Il est facile de voir qu'une courbe non constante $f:\mathbb{C}\to X=\mathbb{C}^n/\Lambda$ tracée dans un tore complexe a une croissance d'ordre au moins 2 ; en effet la simple connexité de $\mathbb{C}$ implique l'existence d'un relèvement $\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ et l'aire euclidienne de $\widetilde{f}$ est donnée par l'intégrale

$$t_{f,\omega}(r) = \int_{D(0,r)} |\widetilde{f}'(z)|^2 d\lambda(z) \geqslant \pi r^2|\widetilde{f}'(0)|^2$$

(λ = mesure de Lebesgue). Une estimation au plus quadratique de cette intégrale implique facilement par l'inégalité de moyenne que la dérivée $\widetilde{f}'$ est bornée, donc $\widetilde{f}(t) = at+b$ décrit une droite affine complexe. Inversement, le théorème de reparamétrisation de Brody [Bro78] garantit l'existence d'une courbe entière non constante à dérivée bornée dès lors qu'il existe une courbe entière non constante, et on peut donc ainsi se ramener à des courbes d'ordre au plus 2.

On s'intéresse particulièrement au cas où $\omega = \Theta_h(L)$ est la forme de courbure d'un fibré en droites hermitien (L,h) à courbure positive sur X. Dans ce cas, on peut voir que, à des *constantes additives près*, la taille de $T_{f,\omega}(r)$ quand $r\to+\infty$ ne dépend pas du choix de la métrique h. Il suffit pour cela d'utiliser la *formule de Jensen* d'une variable complexe, sous la forme

$$\int_{r_0}^{r}\frac{d\rho}{\rho}\int_{D(0,\rho)}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r_0e^{i\theta})d\theta, \tag{1.2}$$

vraie pour toute fonction v dont le laplacien $i\partial\overline{\partial}v$ est une mesure réelle (i.e. une fonction qui est la différence de deux fonctions sous-harmoniques) : la démonstration de (1.2) est une conséquence directe de la formule de Stokes. Si $h_1 = he^{-\psi}$ est une autre métrique hermitienne sur L, alors son poids φ_1 est tel que $\varphi_1 = \varphi + \psi$, par suite

$$\omega_1 = \Theta_{h_1}(L) = \Theta_h(L) + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\psi.$$

Comme la fonction ψ est bornée sur X par compacité, on voit que le terme $f^\star\partial\overline{\partial}\psi = \partial\overline{\partial}\psi \circ f$ dans T_{f,ω_1} s'exprime à l'aide de moyennes de $v = \psi \circ f$ sur des cercles, quantités qui restent bornées indépendamment de r, de sorte que $T_{f,\omega_1}(r) = T_{f,\omega}(r) + O(1)$.

1.3. Exemple. L'exemple fondamental est celui de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ avec son fibré en droites canonique $\mathcal{O}(1)$ (par définition $\mathcal{O}(-1)$ est le fibré dont la fibre au dessus d'un point de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est la droite correspondante de $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathcal{O}(1)$ est son dual, et $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est le fibré en droites obtenu en prenant la puissance tensorielle k-ième). Si $[z] = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, alors la fibre $\mathcal{O}(-1)_{[z]}$ est $\mathbb{C}\,z$. On munit ce fibré de la métrique hermitienne induite par la métrique hermitienne canonique $|z|^2 = \sum |z_j|^2$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si $\xi \in \mathcal{O}(1)_{[z]} = (\mathbb{C}\,z)^\star$, la métrique duale est donnée par

$$\|\xi\|^2_{\mathrm{can}} = \frac{|\xi \cdot z|^2}{|z|^2}. \tag{1.4}$$

Sur la carte affine $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, on a des coordonnées locales holomorphes $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0)$, et une section trivialisante $\eta : [z] \mapsto (1, z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0)$ de $\mathcal{O}(-1)$. Il en résulte que le poids (resp. la courbure) de la métrique canonique de $\mathcal{O}(1)$ dans cette carte est

$$\begin{aligned}
\varphi([z]) &= -\log\|\eta^\star([z])\|^2 = \log\|\eta([z])\|^2 = \log(1 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2),\\
\omega &= \Theta_{\mathrm{can}}(\mathcal{O}(1)) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(1 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|^2.
\end{aligned}$$

Un calcul facile montre que ω est bien une forme hermitienne positive sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (c'est à constante multiplicative près l'unique métrique invariante sous l'action du groupe unitaire $U(n+1)$, dite "métrique de Fubini-Study"). Toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ peut être relevée en une courbe holomorphe $\widetilde{f} = (f_0, \ldots, f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, et on a alors la formule

$$t_{f,\omega}(\rho) = \int_{D(0,\rho)} \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(|f_0|^2 + |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2). \tag{1.5}$$

En particulier, toute courbe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ peut être vue comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, donnée par $t \mapsto [1 : f(t)]$ en coordonnées homogènes, et

$$t_{f,\omega}(\rho) = \int_{D(0,\rho)} \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(1 + |f|^2) = \int_{D(0,\rho)} \frac{|f'(t)|^2}{(1 + |f(t)|^2)^2}\frac{i\,dt \wedge d\overline{t}}{2\pi}. \qquad \square$$

Il nous sera utile de savoir comparer l'indicatrice de croissance d'une courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ avec celle de son image $u \circ f$ par une application méromorphe (rationnelle) $u : X \dashrightarrow Y$ dans une autre variété projective.

1.6. Lemme. *Soit $u : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle entre variétés projectives, et soient ω, ω' des métriques hermitiennes sur X et Y respectivement. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ non contenue dans le lieu d'indétermination de u on ait*

$$T_{u\circ f,\omega'}(r) \leqslant C\, T_{f,\omega}(r) + O(1)$$

(la constante $O(1)$ pouvant dépendre de f).

Démonstration. On peut supposer que X, Y sont plongées dans des espaces projectifs $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^{N'}_{\mathbb{C}}$ et que ω, ω' sont les restrictions des métriques de Fubini-Study respectives. Alors, si $(u_0, u_1, \ldots, u_{N'})$ sont des fonctions rationnelles de degré 0 sur $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ qui définissent u en restriction à X, et si $u_j = p_j/q$ est une réduction des u_j au même dénominateur, on obtient

$$u^\star\omega' = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_{N'}|^2) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(|p_0|^2 + |p_1|^2 + \cdots + |p_{N'}|^2)$$

(l'égalité étant valable seulement en dehors du lieu d'indétermination de u). Soit m le degré commun des polynômes p_j. On peut écrire

$$u^\star\omega' = m\,\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\psi$$

où $\psi(z) = \log\sum(|p_j(z)|^2/|z|^{2m})$ est une fonction majorée supérieurement sur $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ (par une certaine constante K ne dépendant que des coefficients des p_j). On a donc $(u\circ f)^\star\omega' = m\, f^\star\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}(\psi\circ f)$, et une application de la formule de Jensen à $v = \psi\circ f$ montre que

$$\begin{aligned} T_{u\circ f,\omega'}(r) &= m\,T_{f,\omega}(r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r_0e^{i\theta})d\theta \\ &\leqslant m\,T_{f,\omega}(r) + K - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r_0e^{i\theta})d\theta. \qquad \square \end{aligned}$$

1.7. Corollaire. *L'aire $A = \int_{\mathbb{C}} f^\star\omega = \limsup T_{f,\omega}(r)/\log r$ est finie si et seulement si f admet une factorisation sous la forme $f = g\circ R$ où $R \in \mathbb{C}(z)$ est une fonction rationnelle (vue comme fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) et $g : \mathbb{P}^1 \to C \subset X$ une courbe rationnelle de X.*

Démonstration. La condition est suffisante, car si ω_1 est la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on a $\int_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}\omega_1 = 1$ et $\int_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} R^\star\omega_1 = d$ où d est le degré de R (sup des degrés du numérateur et dénominateur de R). On peut alors d'appliquer le lemme 1.6 pour voir que

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{T_{f,\omega}(r)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty}\frac{T_{g\circ R,\omega}(r)}{\log r} \leqslant C\limsup_{r\to+\infty}\frac{T_{R,\omega_1}(r)}{\log r} < +\infty.$$

Inversement, supposons $A < +\infty$. Si $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la conclusion est immédiate. En effet, f peut être vue comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$; si f n'est pas une fraction rationnelle, le théorème de Picard montre que f revêt une infinité de fois $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ à l'exception d'au plus 2 points, d'où $\int_{\mathbb{C}} f^\star\omega_1 = +\infty$. En général, soit X une variété de dimension n quelconque plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ avec sa métrique de Fubini-Study ω. Quitte à bien choisir les coordonnées, on peut supposer que la courbe entière f n'est contenue dans aucun des hyperplans $z_j = 0$. Soit $\widetilde{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ un relèvement de f à $\mathbb{C}^{N+1}$. Alors $f_j/f_0 = u_j \circ f$ où $u_j : \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est l'application rationnelle $[z] \mapsto z_j/z_0$. L'hypothèse que l'aire décrite par f soit finie entraîne que l'aire décrite par les $u_j \circ f$ est finie, de sorte que $F_j = f_j/f$ est une fonction rationnelle. Il suffit alors de factoriser $F_j = g_j \circ R$ en sorte que $g = (1, g_1, \ldots, g_N) : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X$ définisse une application génériquement injective. □

2. Le premier théorème fondamental de Nevanlinna

On cherche ici à dénombrer les incidences de la courbe $f : \mathbb{C} \to X$ avec une hypersurface $H = \{\sigma(x) = 0\} \subset X$ définie par une section globale σ de L. On regarde pour cela la fonction holomorphe $\sigma \circ f : \mathbb{C} \to L$ et on introduit la *fonction de dénombrement des zéros*

$$(2.1)\quad N_{f,\sigma}(r) = \int_{r_0}^{r} n_{f,\sigma}(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \qquad n_{f,\sigma}(\rho) = \text{nombre de zéros de } \sigma \circ f \text{ dans } D(0,\rho),$$

où les zéros sont comptés avec multiplicités. Enfin, on introduit la fonction $m_{f,\sigma}$, dite *fonction de proximité*, telle que

$$(2.2)\qquad m_{f,\sigma}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{\|\sigma \circ f(re^{i\theta})\|_h}d\theta.$$

Cette fonction est positive ou nulle, si on normalise σ par une constante en sorte que $\|\sigma\|_h \leqslant 1$ (ce que nous supposerons désormais). Intuitivement, $m_{f,\sigma}(r)$ est d'autant plus grand que f s'approche souvent de $H = \{\sigma = 0\}$ sur le cercle de rayon r. Nous pouvons maintenant énoncer le

2.3. Premier théorème fondamental de Nevanlinna. *Soit (L, h) un fibré en droites hermitien de forme de courbure $\omega = \Theta_h(L) > 0$. Pour toute section σ de L et toute courbe $f : \mathbb{C} \to X$ dont l'image n'est pas contenue identiquement dans l'hypersurface $H = \{\sigma = 0\}$, on a*

$$m_{f,\sigma}(r) + N_{f,\sigma}(r) = T_{f,\omega}(r) + O(1).$$

En particulier, à constante additive près, l'ordre de grandeur du membre de gauche quand $r \to +\infty$ ne dépend pas du choix de σ, mais seulement de l'indicatrice de croissance de f.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de Jensen (1.2), appliquée à la fonction $v(t) = \log\|\sigma \circ f(t)\|_h$. On constate que, au sens des distributions

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}v = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\sigma \circ f(t)\|_h = \sum m_j\delta_{a_j} - f^\star\omega$$

où δ_{a_j} est la mesure de Dirac en les zéros (a_j) de $\sigma \circ f$ et m_j la multiplicité de ce zéro (c'est le cas particulier à une variable de la formule dite de “Lelong-Poincaré”; le terme $f^\star\omega$ provient de la différentiation de la fonction $\varphi \circ f$, issue du poids de la métrique h). En substituant dans la formule de Jensen, on trouve alors

$$N_{f,\sigma}(r) - T_{f,\omega}(r) = -m_{f,\sigma}(r) + m_{f,\sigma}(r_0). \qquad \square$$

On introduit classiquement le *défaut* de f par rapport à l'hypersurface $H = \{\sigma = 0\}$ comme étant

$$\delta_\sigma(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m_{f,\sigma}(r)}{T_{f,\omega}(r)} \in [0,1]. \tag{2.4}$$

En particulier, le défaut est égal à 1 si $\sigma \circ f$ ne s'annule pas, et il est égal à 0 si la fonction de dénombrement des zéros $N_{f,\sigma}(r)$ croît aussi vite que possible.

Pour une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, un résultat essentiel de la théorie de Nevanlinna est que la somme des défauts $\sum_{a\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \delta_a(f)$ est au plus égal à 2 (ce qui redonne sous forme quantitative le théorème de Picard). L'un des principaux ingrédients de la preuve est une estimation de la fonction de proximité des dérivées logarithmiques de f. En l'occurrence, la fonction de proximité au point ∞ est donnée par

$$m_{f,\infty}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log_+ |f(re^{i\theta})|\,d\theta + O(1) \tag*{$(2.5)_\infty$}$$

En effet, si $\sigma(z) = (1,z)^{-1} \in \mathcal{O}(1)$ est la section de $\mathcal{O}(1)$ s'annulant à l'infini, on a $\|\sigma(z)\| = (1+|z|^2)^{-1/2}$, de sorte que $\log 1/\|\sigma\circ f)\| = \log(1+|f|^2)^{1/2} = \log_+|f| + O(1)$ (en fait, l'erreur est majorée par $\log 2$). De même, la fonction de proximité à un point $a \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $a \neq \infty$, est donnée par

$$\begin{aligned} m_{f,a}(r) = m_{1/(f-a),\,\infty}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log_+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\,d\theta + O(1) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log_- |f(re^{i\theta}) - a|\,d\theta + O(1). \end{aligned} \tag*{$(2.5)_a$}$$

Pour un produit de fonctions méromorphes, l'inégalité $1 + |fg|^2 \leqslant (1+|f|^2)(1+|g|^2)$ implique aussitôt

$$m_{fg,\infty} \leqslant m_{f,\infty} + m_{g,\infty} \tag{2.6}$$

et de même $m_{fg,0} \leqslant m_{f,0} + m_{g,0}$ en passant aux inverses. Étant donné $a \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, nous noterons $N_{f,a}(r)$ la fonction de comptage des pré-images $t \in \mathbb{C}$ telles que $f(t) = a$, ce qui revient à compter les zéros de $\sigma \circ f$ où σ est la section de $\mathcal{O}(1)$ qui s'annule au point a. Dans ce contexte, le premier théorème fondamental s'écrit

$$m_{f,a}(r) + N_{f,a}(r) = T_{f,\omega}(r) + O(1) \tag{2.7}$$

pour tout point $a \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, où ω est la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Il est clair que

$$N_{fg,0} \leqslant N_{f,0} + N_{g,0}, \qquad N_{fg,\infty} \leqslant N_{f,\infty} + N_{g,\infty} \tag{2.8}$$

(avec égalité si aucun zéro de f n'est pôle de g et si aucun pôle de f n'est zéro de g). La combinaison de (2.6), (2.7), (2.8) donne en particulier

$$T_{fg,\omega} \leqslant T_{f,\omega} + T_{g,\omega} + O(1). \tag{2.9}$$

En combinant $(2.5)_0$ et $(2,5)_\infty$ on obtient par ailleurs la majoration utile

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|\log|f(re^{i\theta})|\big|\,d\theta = m_{f,\infty}(r) + m_{f,0}(r) \leqslant 2\,T_{f,\omega}(r) + O(1). \tag{2.10}$$

2.11. Cas «local». Il est intéressant de considérer aussi le cas de fonctions qui ne sont pas définies sur toute la droite complexe, mais seulement sur un voisinage de l'infini $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R)$ (par changement de variable $t \mapsto 1/t$, il reviendrait au même de prendre un voisinage pointé $D(0,\varepsilon) \smallsetminus \{0\}$). Etant donné une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R) \to X$, on peut étendre les notions d'indicatrice de croissance $T_{f,\omega}(r)$, de fonction de proximité $m_{f,\sigma}(r)$ et de fonction de dénombrement $N_{f,\sigma}(r)$ pour des valeurs assez grandes $r \geqslant r_0 > R$ du rayon. Dans ce cas, on pose simplement

$$\begin{aligned}
T_{f,\omega}(r) &= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho}\int_{D(0,\rho)\smallsetminus D(0,r_0)} f^*\omega,\\
m_{f,\sigma}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{\|\sigma\circ f(re^{i\theta})\|_h}\,d\theta,\\
N_{f,\sigma}(r) &= \int_{r_0}^{r} n_{f,\sigma}(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho},
\end{aligned}$$

où $n_{f,\sigma} = \#\big\{t \in D(0,r)\smallsetminus D(0,r_0)\,;\ \sigma\circ f(t) = 0\big\}$. Il est facile de voir qu'un changement du choix de r_0 modifie $T_{f,\omega}(r)$ et $N_{f,\sigma}(r)$ par des quantités $C\,\log r$ où $C =$ Constante. On peut encore appliquer la formule de Jensen à une fonction v sur $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R)$ quitte à la tronquer au moyen d'une fonction plateau nulle sur un voisinage de $\overline{D}(0,R)$. Ceci n'influe sur la croissance que par des termes en $C\log r$. Le premier théorème fondamental est donc encore valable si l'on accepte des erreurs en $O(\log r)$ plutôt que $O(1)$. La croissance minimale $T_{f,\omega}(r) = O(\log r)$ est réalisée si et seulement si f admet un prolongement holomorphe à l'infini. Pour le voir, il suffit de traiter le cas $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, et dans ce cas le résultat provient du grand théorème de Picard (il est à noter que la théorie de Nevanlinna va d'ailleurs redonner une démonstration directe très naturelle du grand théorème de Picard, cf. § 3). Compte tenu du fait que les erreurs sont en $O(\log r)$, les estimations de la théorie de Nevanlinna ne sont intéressantes que pour des courbes f admettant une singularité essentielle à l'infini.

3. Le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Le point de départ est le "lemme de la dérivée logarithmique", qui est véritablement l'une des contributions essentielles de Nevanlinna. L'idée est qu'une dérivée logarithmique f'/f d'une fonction méromorphe a une croissance qui est seulement logarithmique par rapport à f, précisément parce que c'est la dérivée du logarithme de f.

3.1. Lemme de la dérivée logarithmique. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe et $D^p \log f$ la dérivée logarithmique p-ième de f. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble E de mesure de Lebesgue finie dans $\mathbb{R}_+$ tel que*

$$m_{D^p \log f,\infty}(r) \leqslant (p+1+\varepsilon)\big(\log r + \log_+ T_{f,\omega}(r)\big) + O(1), \qquad \forall r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus E.$$

Démonstration. Fixons $R > r$. On utilise la version suivante de la formule de Jensen :

$$\log|f(t)| = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{R^2-|t|^2}{|z-t|^2}\,\log|f(z)|\,d\theta(z) + \sum_{a_j \in D(0,R)} \nu_j \,\log\Big|\frac{R(t-a_j)}{R^2 - t\overline{a}_j}\Big|,$$

où $\sum \nu_j[a_j]$ est le diviseur des zéros et des pôles de f, et où $d\theta$, $d\lambda$ désignent respectivement la mesure angulaire sur le cercle et la mesure de Lebesgue sur le disque de rayon R. (Preuve: si $t = 0$, la formule se réduit à la formule habituelle des manuels de second cycle; en général, il suffit d'appliquer cette formule après avoir composé f avec l'automorphisme $z \mapsto \frac{R^2(t-z)}{R^2 - z\overline{t}}$ qui envoie 0 sur t). Compte tenu de ce que $\frac{R^2-|t|^2}{|t-z|^2} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{z+t}{z-t}$, une dérivation sous le signe somme au moyen de l'opérateur $2\partial/\partial t$ donne

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{2z}{(z-t)^2}\,\log|f(z)|\,d\theta(z) + \sum_j \nu_j\Big(\frac{\overline{a}_j}{R^2 - t\overline{a}_j} - \frac{1}{a_j - t}\Big).$$

On dérive une nouvelle fois avec l'opérateur $\frac{1}{(p-1)!}(\frac{\partial}{\partial t})^{p-1}$ pour obtenir

$$\frac{D^p \log f(t)}{(p-1)!} = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{2z}{(z-t)^{p+1}}\,\log|f(z)|\,d\theta(z) + \sum_j \nu_j\Big(\frac{\overline{a}_j^{\,p}}{(R^2 - t\overline{a}_j)^p} - \frac{1}{(a_j - t)^p}\Big).$$

Une majoration brutale de cette expression sur le cercle $|t| = r$ fournit

$$\begin{aligned}\Big|\frac{D^p \log f(t)}{(p-1)!}\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{2r}{(R-r)^{p+1}} &\int_{|z|=R} \big|\log|f(z)|\big|\,d\theta(z)\\ &+ \Big(\sum_j |\nu_j|\Big)\Big(\frac{1}{(R-r)^p} + \max_j \frac{1}{|a_j - t|^p}\Big)\end{aligned}$$

L'intégrale de $\big|\log|f|\big|$ se majore aisément à l'aide de (2.10) par un terme de la forme $2T_{f,\omega}(R) + O(1)$. Par ailleurs, si $b \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est un point quelconque, la définition de la fonction de comptage $N_{f,b}(R)$ donne

$$n_{f,b}(R)\log\frac{R'}{R} \leqslant N_{f,b}(R') \leqslant T_{f,\omega}(R') + O(1),$$

pour tout $R' > R$, d'où

$$\sum_{a_j \in D(0,R)} |\nu_j| = n_{f,0}(R) + n_{f,\infty}(R) \leqslant \frac{2}{\log R'/R}\big(T_{f,\omega}(R') + O(1)\big).$$

Nous choisissons $R = r + \delta/2$, $R' = r + \delta$ avec $\delta \ll r$, de sorte que $\frac{1}{\log R'/R} \leqslant C\frac{r}{\delta}$ et donc

$$|D^p \log f(t)| \leqslant C\Big(\frac{r}{\delta^{p+1}} + \frac{r}{\delta}\Big(\frac{1}{\delta^p} + \max_j \frac{1}{|a_j - t|^p}\Big)\Big)\big(T_{f,\omega}(r+\delta) + O(1)\big),$$

$$\log_+ |D^p \log f(t)| \leqslant \log_+ \Big(\frac{r}{\delta^{p+1}} + \frac{r}{\delta}\max_j \frac{1}{|a_j - t|^p}\Big) + \log_+ T_{f,\omega}(r+\delta) + O(1). \tag{3.2}$$

La fonction $m_{D^p \log f,\infty}(r)$ que nous cherchons à majorer est l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log_+ |D^p \log f(re^{i\theta})| d\theta$$

et l'inégalité (3.2) en donne une majoration, mais il y a deux difficultés qui se présentent. L'une réside dans le fait que le second membre contient le terme $\log_+ T_{f,\omega}(r+\delta)$ là où nous voudrions $\log_+ T_{f,\omega}(r)$, l'autre est dans la présence de termes a priori non bornés $1/|a_j - t|^p$. Les deux difficultés vont se régler de la même manière, en évitant les valeurs de r trop «mauvaises». On s'appuie sur le lemme élémentaire suivant, dû à Emile Borel.

3.3. Lemme (E. Borel)**.** *Soit $T : \mathbb{R}_+ \to \,]0, +\infty[$ une fonction continue croissante. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $E = E_\varepsilon$ des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$T\Big(r + T(r)^{-\varepsilon}\Big) \geqslant 2\,T(r)$$

est de mesure de Lebesgue finie. Par conséquent, sur l'ensemble $\mathbb{R}_+ \smallsetminus E$ qui est asymptotiquement de densité 1 à l'infini, nous avons

$$T\Big(r + T(r)^{-\varepsilon}\Big) < 2\,T(r).$$

Démonstration. Comme T est continue, E est fermé. Soit $r_1 = \min E$. On définit r_k par récurrence sur k en posant

$$r_{k+1} = \min\big(E \cap \big[r_k + T(r_k)^{-\varepsilon}, +\infty\big[\big).$$

Si E ou si l'intersection ci-dessus est vide pour un certain k, alors E est borné et donc de mesure de Lebesgue finie. Sinon, on obtient une suite infinie (r_k) de points de E tels que

$$T(r_{k+1}) \geqslant T\big(r_k + T(r_k)^{-\varepsilon}\big) \geqslant 2\,T(r_k),$$

pour tout k, par conséquent $T(r_k) \geqslant 2^{k-1}T(r_1)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T(r_k)^{-\varepsilon} < +\infty.$$

Comme $E \subset \bigcup_{k\geqslant 1}[r_k, r_k + T(r_k)^{-\varepsilon}]$ par définition des r_k, le lemme est démontré. □

Nous utilisons maintenant l'inégalité (3.2) en posant $T(r) = T_{f,\omega}(r)$ et $\delta = T(r)^{-\varepsilon}$. Le lemme de Borel montre que nous pouvons remplacer $T_{f,\omega}(r+\delta)$ par $T_{f,\omega}(r)$ quitte à prendre $r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus E$ où E de mesure finie dans $\mathbb{R}_+$. L'autre difficulté vient des rayons trop proches des valeurs $r_j = |a_j|$. Dans un intervalle $[r/2, r]$, il y a d'après ce que nous avons déjà vu au plus

$$N(r) = \sum_{a_j \in D(0,r)} |\nu_j| \leqslant C(r/\delta) T_{f,\omega}(r+\delta) \leqslant C' r\, T(r)^{\varepsilon} T(r+\delta)$$

telles valeurs gênantes, soit $N(r) \leqslant 2C' r\, T(r)^{1+\varepsilon}$ si de plus $r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus E$. Nous éliminons autour de chacune de ces valeurs r_j un intervalle $[r_j - \eta, r_j + \eta]$ avec $\eta = 1/(2^{k\varepsilon} N(r))$ et $k = E(\log_2 r)$. La réunion de tous ces intervalles est un ensemble E' de mesure finie comme on le voit facilement en considérant les intervalles $[r/2, r]$ tels que $r = 2^k$. Quitte à remplacer E par $E \cup E'$, nous avons maintenant $|a_j - t| \geqslant 1/(2^{k\varepsilon} N(r)) \geqslant 1/(r^{\varepsilon} N(r))$, donc

$$\frac{1}{|a_j - t|^p} \leqslant (r^{\varepsilon}\, N(r))^p \leqslant C'' \big(r\, T(r)\big)^{(1+\varepsilon)p}.$$

Dans ces conditions, pour $|t| = r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus (E \cup E')$, l'inégalité (3.2) devient

$$\begin{aligned} \log_+ |D^p \log f(t)| &\leqslant \log_+ \Big(r\, T(r)^{\varepsilon(p+1)} + r\, T(r)^{\varepsilon} \big(r\, T(r)\big)^{(1+\varepsilon)p}\Big) + \log_+ T(r) + O(1) \\ &\leqslant (p+1)(1+\varepsilon)\big(\log r + \log_+ T(r)\big) + O(1). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer ε par $\varepsilon/(p+1)$, le lemme de la dérivée logarithmique résulte maintenant du calcul de la valeur moyenne de cette expression sur le cercle $|t| = r$. □

3.4. Cas local. Le lemme de la dérivée logarithmique s'étend très facilement à une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ définie seulement dans un voisinage de l'infini. En effet, nous allons montrer qu'il existe un rayon $R_1 > R$ et une fonction holomorphe bornée $u : \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R_1) \to \mathbb{C}^*$, vérifiant $u(\infty) = 1$, telle que $\widetilde{f} = uf$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme de la dérivée logarithmique à $D^p \log \widetilde{f} = D^p \log u + D^p \log f$, en observant que $D^p \log u$ est une fonction bornée au voisinage de l'infini. Pour construire u, on choisit des rayons $R_2 > R_1 > R$ tels que la couronne $R_1 < |t| < R_2$ ne contienne ni zéros ni pôles de f, ce qui est possible puisque ces points forment des ensembles localement finis. Soit $n \in \mathbb{Z}$ l'indice de f sur un cercle $|t| = r$, $r \in \,]R_1, R_2[$, c'est-à-dire l'intégrale de $\frac{1}{2\pi i} df/f$ sur ce cercle. Il existe alors une fonction holomorphe g sur la couronne $R_1 < |t| < R_2$ telle que $\exp(g(t)) = f(t)/t^n$. Puisque $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$, le premier problème de Cousin a toujours une solution, autrement dit il existe une fonction holomorphe g_1 sur le disque $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \smallsetminus D(0,R_1)$ et une fonction holomorphe g_2 sur le disque $D(0,R_2)$ telles que $g = g_2 - g_1$ sur la couronne intersection $R_1 < |t| < R_2$. Il n'est pas restrictif de supposer $g_1(\infty) = 0$. En posant $u(t) = \exp(g_1(t))$, on voit que $u(t)f(t) = \exp(g_1(t)) t^n \exp(g(t)) = t^n \exp(g_2(t))$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $D(0,R_2)$ (ayant d'ailleurs au plus un pôle en 0).

Une conséquence importante du lemme de la dérivée logarithmique est ce que l'on appelle le *“Deuxième théorème fondamental”* de Nevanlinna. Le lecteur pourra consulter S. Lang [Lang87] pour davantage de détails.

3.5. Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. *Soit $f : \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe. On définit le diviseur de ramification R_f de f comme étant égal à $\sum e_j[w_j]$ où w_j sont les points où df s'annule et $e_j \geqslant 1$ la multiplicité d'annulation de df (c'est-à-dire la multiplicité de f' en un point w_j où $f(w_j) \neq \infty$, et celle de $(1/f)'$ en un point w_j où $f(w_j) = \infty$). Alors, pour tout ensemble fini $\{a_j\}_{1\leqslant j\leqslant p} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, il existe une partie $E \subset \mathbb{R}_+$ de mesure de Lebesgue finie telle que*

$$N_{R_f}(r) + \sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j}(r) \leqslant 2\,T_{f,\omega}(r) + O\big(\log r + \log_+ T_{f,\omega}(r)\big), \qquad \textit{pour } r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus E,$$

où $N_{R_f}(r) = \int_{r_0}^{r} n_{R_f}(\rho)\,d\rho/\rho$ est la fonction de dénombrement du diviseur de ramification.

Démonstration. On suppose dans un premier temps $a_j \neq \infty$ pour tout j. Dans ce cas nous posons

$$F(t) = \prod_{1\leqslant j\leqslant p} (f(t) - a_j), \qquad G = \frac{F'}{Ff'} = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \frac{1}{f(t) - a_j}.$$

Le lemme 1.6 (ou l'inégalité (2.9)) fournissent $T_{F,\omega} \leqslant p\,T_{f,\omega} + O(1)$, d'où

$$m_{F'/F,\infty}(r) = O(\log r + \log_+(T_{f,\omega}(r)))$$

grâce au lemme de la dérivée logarithmique. Nous affirmons par ailleurs que

$$\sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j}(r) \leqslant m_{G,\infty}(r) + O(1). \tag{3.6}$$

En effet, soit $d = \min_{j\neq k} |a_j - a_k|$ et $E_j = \{t \in \mathbb{C}\ ;\ |f(t) - a_j| < d/(2p)\}$. Il vient

$$\sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j}(r) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta\in[0,2\pi],\, r\,e^{i\theta}\in E_j} \log_+ \frac{1}{|f(t) - a_j|}\,dt + p \log \frac{2p}{d}$$

puisque $|1/(f(t) - a_j)| \leqslant 2p/d$ en dehors de E_j. Cependant les E_j sont disjoints et si $t \in E_j$ nous avons $|f(t) - a_k| \geqslant d/2$ pour $k \neq j$ et $1/|f(t) - a_j| \geqslant 2p/d$, donc

$$|G(t)| \geqslant \frac{1}{|f(t) - a_j|} - \frac{2(p-1)}{d} \geqslant \frac{1}{p}\,\frac{1}{|f(t) - a_j|}$$

et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j}(r) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log_+ |G(r\,e^{i\theta})|\,d\theta + p \log \frac{2p}{d} + \log p,$$

ce qui implique (3.6). Par définition de $G = F'/(Ff')$ on a

$$m_{G,\infty} = m_{F'/Ff',\infty} \leqslant m_{F'/F,\infty} + m_{f',0} \leqslant m_{F'/F,\infty} + m_{f,0} + m_{f'/f,0}.$$

Comme le lemme de la dérivée logarithmique nous donne une estimation de $m_{f'/f,\infty}$ plutôt que de $m_{f'/f,0}$, nous effectuons les transformations

$$\begin{aligned} m_{f,0} &= T_{f,\omega} - N_{f,0} + O(1), \\ m_{f'/f,0} &= T_{f'/f,\omega} - N_{f'/f,0} + O(1) = m_{f'/f,\infty} + N_{f'/f,\infty} - N_{f'/f,0} + O(1) \end{aligned}$$

à l'aide du premier théorème fondamental. En combinant ces trois (in)égalités avec (3.6) il vient

$$\sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j} \leqslant m_{F'/F,\infty} + (T_{f,\omega} - N_{f,0}) + (m_{f'/f,\infty} + N_{f'/f,\infty} - N_{f'/f,0}) + O(1).$$

Si l'un des points a_j est le point ∞, disons $a_p = \infty$, cette estimation vaut pour la somme jusqu'à $p-1$ et il faut ajouter de plus $m_{f,\infty} = T_{f,\omega} - N_{f,\infty}$. Dans tous les cas on obtient

$$\sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j} \leqslant 2\,T_{f,\omega} - \big(N_{f,0} + N_{f'/f,0} + N_{f,\infty} - N_{f'/f,\infty}\big) + m_{f'/f,\infty} + m_{F'/F,\infty} + O(1).$$

La somme $(N_{*,*} + \ldots)$ des fonctions de comptage ne fait intervenir que les zéros et les pôles p_j de f, ainsi que les zéros de f' qui ne sont pas des zéros de f. Il est facile de voir que la multiplicité totale en chacun de ces points est précisément égale à l'indice de ramification e_j, la somme $(N_{*,*} + \ldots)$ est donc égale à N_{R_f}. On obtient en définitive

$$N_{R_f} + \sum_{j=1}^{p} m_{f,a_j} \leqslant 2\,T_{f,\omega} + m_{f'/f,\infty} + m_{F'/F,\infty} + O(1). \tag{3.7}$$

Le lemme de la dérivée logarithmique montre qu'il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}_+$ de mesure de Lebesgue finie tel que

$$m_{f'/f,\infty} + m_{F'/F,\infty} = O\big(\log r + \log_+ T_{f,\omega}(r)\big)$$

pour $r \in \mathbb{R}_+ \smallsetminus E$. Le deuxième théorème fondamental est démontré. □

En divisant l'inégalité du deuxième théorème fondamental par $T_{f,\omega}(r)$, on déduit immédiatement pour les défauts la relation $\sum_j \delta_{a_j}(f) \leqslant 2$, ceci à condition que $T_{f,\omega}(r) \gg \log r$ pour que les termes d'erreurs tendent vers 0 :

3.8. Corollaire (version forte du grand théorème de Picard due à Nevanlinna). *Soit $f : \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D}(0,R) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe ayant un point singulier essentiel à l'infini. Alors $\sum_{a\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \delta_a(f) \leqslant 2$. En particulier, f omet au plus 2 valeurs et prend toutes les autres une infinité de fois.*

4. Preuve du théorème d'annulation fondamental

Nous démontrons maintenant le théorème 0.3 en suivant les arguments de Y.T. Siu [Siu87]. Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière et P un opérateur différentiel algébrique à valeurs dans $L^\star$ où $\omega = \Theta_h(L) > 0$. On suppose que $P(f', \ldots, f^{(k)})$ ne s'annule pas identiquement. Le point de départ est l'inégalité

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|P(f',\ldots,f^{(k)})\|_h^2 \geqslant f^\star\omega$$

(en fait le membre de gauche est égal au membre de droite plus une certaine combinaison linéaire de mesures de Dirac aux points où $P(f', \ldots, f^{(k)})$ s'annule). On en déduit alors

$$\begin{aligned} T_{f,\omega}(r) &\leqslant \int_{r_0}^{r}\frac{d\rho}{\rho}\int_{D(0,\rho)}\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|P(f',\ldots,f^{(k)})\|_h^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|P(f',\ldots,f^{(k)})(re^{i\theta})\|_h\,d\theta + \mathrm{Const} \end{aligned}$$

grâce à la formule de Jensen. Considérons maintenant une famille finie de fonctions méromorphes (u_j) sur X telles qu'on puisse extraire des coordonnées locales holomorphes au voisinage de tout point à partir de déterminations locales des logarithmes $\log u_j$ (X étant plongée dans un espace projectif, il suffit de prendre les fonctions induites par les fonctions rationnelles z_j/z_k sur l'espace projectif dans suffisamment de systèmes de coordonnées). On peut alors exprimer localement $P(f', \ldots, f^{(k)})$ comme un polynôme Q dans les dérivées logarithmiques $D^p(\log u_j \circ f)$, ayant des coefficients holomorphes en la variable f, i.e.,

$$P(f',\ldots,f^{(k)}) = Q\big(f, D^p(\log u_j\circ f)_{p,j}\big), \qquad Q(z, v_{p,j}) = \sum a_\alpha(z)v^\alpha.$$

Par compacité de X, il en résulte

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|P(f',\ldots,f^{(k)})(re^{i\theta})\|_h\,d\theta \leqslant C_1\sum_{j,\,1\leqslant p\leqslant N} m_{D^p(\log u_j\circ f),\infty}(r) + C_2$$

pour des constantes C_1, C_2 adéquates. D'après le lemme 1.6 et le lemme de la dérivée logarithmique, on aura

$$m_{D^p(\log u_j\circ f),\infty}(r) \leqslant C_3\big(\log r + \sum\log_+ T_{u_j\circ f,\omega}(r)\big) \leqslant C_4\big(\log r + \log_+ T_{f,\omega}(r)\big)$$

en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue finie dans $[0, +\infty[$. Mettant bout à bout ces inégalités, il vient

$$T_{f,\omega}(r) \leqslant C\big(\log r + \log_+ T_{f,\omega}(r)\big)$$

en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue finie. On en déduit que $T_{f,\omega}(r){=}O(\log r)$, par conséquent $f(\mathbb{C})$ est d'aire totale finie et $C = \overline{f(\mathbb{C})}$ est une courbe rationnelle. On peut alors factoriser $f = g\circ R$ avec une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ et $g : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to C \subset X$

le morphisme de désingularisation. L'opérateur $g^\star P$ induit sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est nécessairement nul d'après le lemme ci-dessous. Par suite $g^\star P = 0$ et

$$P(f', \ldots, f^{(k)}) = g^\star P(R', \ldots, R^{(k)}) \equiv 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4.1. Lemme. *Soit X une variété projective dont le fibré canonique K_X est à courbure semi-négative (par exemple un espace projectif ou une hypersurface lisse de degré $\leqslant n+2$ dans $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$). Alors, pour tout fibré en droites L à courbure positive sur X et tous entiers $k, m > 0$, on a $H^0(X, E_{k,m} \otimes L^{-1}) = 0$.*

Démonstration. Soit $P(f', \ldots, f^{(k)}) \in E_{k,m}$. En regardant les degrés partiels par rapport à la variable $f^{(k)}$ des monômes intervenant dans P, on obtient une filtration de $E_{k,m}$ dont le gradué est

$$\bigoplus_{0 \leqslant p \leqslant m/k} E_{k-1,m-kp} \otimes S^p T^\star_X.$$

En effet $f^{(k)}$ peut être vu comme un élément de T_X, et un monôme $(f^{(k)})^{\alpha_k}$ de degré $|\alpha_k| = p$, comme un élément de $S^p T^\star_X$. En filtrant de nouveau par rapport aux degrés en les dérivées $f^{(j)}$, $j < k$, on obtient une filtration telle que

$$G^\bullet E_{k,m} = \bigoplus_{p_1 + 2p_2 + \ldots + kp_l = m} S^{p_1} T^\star_X \otimes \cdots \otimes S^{p_k} T^\star_X.$$

Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que $H^0(X, (T^\star_X)^{\otimes m} \otimes L^{-1}) = 0$ n'a pas de section non triviale. C'est clair si $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, puisqu'alors $T^\star_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(-2)$ et $L = \mathcal{O}(-\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$. Dans le cas général (que nous ne détaillerons pas ici), on peut s'appuyer sur la formule de Bochner et le fait que X admet une métrique kählérienne à courbure de Ricci semi-positive (voir par exemple [Dem95], lemme 14.2). □

5. Opérateurs wronskiens et connexions projectives partielles

Soit X une variété complexe de dimension n. En reprenant des idées de Y.T. Siu [Siu87] et de A. Nadel [Nad89], nous considérerons des *connexions méromorphes* ∇ opérant sur le fibré tangent T_X, c'est-à-dire des opérateurs de la forme

$$\nabla_w v = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} \Big(w_i \frac{\partial v_k}{\partial z_i} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \Gamma^k_{ij} w_i v_j \Big) \frac{\partial}{\partial z_k} = d_w v + \Gamma \cdot (w, v),$$

dont les *symboles de Christoffel* $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n}$, calculés relativement à des systèmes de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ quelconques, sont méromorphes. Soit B le diviseur des pôles de ∇ (i.e. de ses coefficients Γ^k_{ij}) et $b \in H^0(X, \mathcal{O}(B))$ la section canonique associée. Alors $b\nabla$ est un opérateur à coefficients holomorphes.

Étant donné une courbe holomorphe $f : D(0, r) \to X$ non contenue dans le support $|B|$ de B, on définit inductivement les dérivées covariantes f', $f''_\nabla, \ldots, f^{(n)}_\nabla$ par

$f_\nabla^{(k+1)} = \nabla_{f'}(f_\nabla^{(k)})$. Le *Wronskien* de f relativement à ∇ est la section méromorphe de $f^*(\Lambda^n T_X) = f^*(K_X^\star)$ telle que $W_\nabla(f) = f' \wedge f''_\nabla \wedge \cdots \wedge f_\nabla^{(n)}$. En compensant les pôles du Wronskien à l'aide d'une puissance de b, on obtient une section holomorphe $b(f)^{n(n-1)/2} W_\nabla(f)$, à valeurs dans le fibré en droite $f^*\big(K_X^\star \otimes \mathcal{O}_X(\frac{1}{2}n(n-1)B)\big)$. Le point de départ est la conséquence suivante du théorème 0.3, appliqué à l'opérateur $P = b^{n(n-1)/2} W_\nabla$ à valeurs dans le dual L^{-1} du fibré $A = K_X \otimes \mathcal{O}_X(-\frac{1}{2}n(n-1)B)$, opérateur qui est d'ordre n et de degré $m = n(n+1)/2$.

5.1. Théorème. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n munie d'une connexion méromorphe ∇ de diviseur de pôles B. Si $K_X \otimes \mathcal{O}_X(-\frac{1}{2}n(n-1)B)$ est ample, alors pour toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$, on a ou bien $f(\mathbb{C}) \subset |B|$ ou bien $W_\nabla(f) \equiv 0$.*

Une observation importante est de voir que pour définir le Wronskien W_∇ on n'a pas besoin de connaître entièrement le tenseur Γ_{ij}^k, mais seulement modulo des tenseurs de la forme $\alpha_i\delta_{jk} + \beta_j\delta_{ik}$. En effet, soit $\widetilde{\nabla}$ une autre connexion telle qu'il existe des 1-formes méromorphes α et β avec $\widetilde{\nabla}_w v = \nabla_w v + \alpha(w)\cdot v + \beta(v)\cdot w$ pour tous champs de vecteurs v, w. On vérifie alors facilement par récurrence sur k que $f_{\widetilde{\nabla}}^{(k)}$ est somme de $f_\nabla^{(k)}$ et d'une combinaison linéaire des dérivées covariantes d'ordre inférieur, par suite $W_\nabla = W_{\widetilde{\nabla}}$. Ceci permet d'étendre le théorème d'annulation du Wronskien au cas des “connexions projectives partielles”, définies comme suit.

5.2. Définition. *Une connexion projective partielle ∇ sur X est une section du faisceau quotient du faisceau des connexions méromorphes modulo l'addition de tenseurs méromorphes de la forme $(w,v) \mapsto \alpha(w)\cdot v + \beta(v)\cdot w$. En d'autres termes, ∇ est définie par la donnée de connexions méromorphes ${}_j\nabla$ sur les ouverts U_j d'un recouvrement de X, en sorte qu'on ait des relations de compatibilité ${}_k\nabla_w v - {}_j\nabla_w v = \alpha_{jk}(w)\cdot v + \beta_{jk}(v)\cdot w$ sur $U_j \cap U_k$.*

Un des intérêts la notion de connexion projective partielle est sa bonne compatibilité avec les passages au quotient. On vérifie aisément la propriété suivante.

5.3. Proposition. *Soit W une variété complexe sur laquelle un groupe de Lie G agit librement et proprement. Soit $X = W/G$ la variété quotient et $\pi : W \to X$ la projection canonique. Étant donné une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur W et une section locale $\sigma : W/G \supset U \to W$ de π, on peut définir une connexion ${}_\sigma\nabla = \pi_*(\sigma^*(\widetilde{\nabla}))$ sur U telle que*

o) ${}_\sigma\nabla_w v = \pi_*\big(\widetilde{\nabla}_{\sigma_* w}(\sigma_* v)\big)$

pour tout couple de champs (w,v) sur U. Les différentes connexions ${}_\sigma\nabla$ se recollent en une connexion projective partielle sur W/G tout entier sous les conditions suivantes :

i) *$\widetilde{\nabla}$ est G-invariante.*

ii) *Pour tout couple de champs G-invariants v et τ sur W tel que τ soit dans le fibré tangent relatif $T_{W/X} \subset T_W$, il existe des 1-formes méromorphes α et β le long de $T_{W/X}$ telles que $\widetilde{\nabla}_\tau v - \alpha(\tau)v$ et $\widetilde{\nabla}_v \tau - \beta(\tau)v$ soient tangents à $T_{W/X}$.*

5.4. Corollaire. (Cas de $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}/\mathbb{C}^*$). *Soient* $\widetilde{\nabla} = d + \widetilde{\Gamma}$ *une connexion méromorphe sur* $\mathbb{C}^{n+1}$, $\varepsilon = \sum z_j \partial/\partial z_j$ *le champ de vecteurs d'Euler et* $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ *la projection canonique. Alors* $\widetilde{\nabla}$ *induit une connexion projective partielle sur* $\mathbb{P}^n$ *dès que*

i) *les symboles de Christoffel* Γ_{ij}^k *sont des fonctions rationnelles homogènes de degré* -1.

ii) *il existe des fonctions méromorphes* α, β *et des* 1*-formes méromorphes* γ, η *telles que pour tous champs de vecteurs* v, w *on ait*

$$\widetilde{\Gamma} \cdot (\varepsilon, v) = dv + \gamma(v)\varepsilon, \qquad \widetilde{\Gamma}(w, \varepsilon) = \beta w + \eta(w) \cdot \varepsilon.$$

6. Cas de certaines classes d'hypersurfaces algébriques dans $\mathbb{P}^n$

Soit X une variété complexe de dimension n munie d'une connexion projective partielle ∇, et soit Y une hypersurface de X non contenue dans le diviseur des pôles de ∇. L'hypersurface Y est dite *totalement géodésique* par rapport à la connexion ∇ si $\nabla_w v$ est un champ de vecteurs tangent à Y chaque fois que v, w sont tangents à Y, autrement dit si la restriction $\nabla_{|Y}$ définit une connexion sur T_Y. Un calcul classique donne la caractérisation suivante.

6.1. Lemme. $Y = \{s = 0\}$ *est totalement géodésique par rapport à* ∇ *si et seulement s'il existe localement au voisinage de* Y *des fonctions méromorphes* a_i, b_j *et* c_{ij} *telles que*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial s}{\partial z_k} + a_i \frac{\partial s}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial s}{\partial z_i} + s\, c_{ij} = \frac{\partial^2 s}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

L'idée originale de [Nad89] est de profiter de la haute indétermination de ce système linéaire (en les inconnues Γ_{ij}^k, a_i, b_j et c_{ij}) pour trouver une connexion méromorphe de $\mathbb{P}^n$ par rapport à laquelle toute hypersurface membre d'un système linéaire (Y_α) assez grand soit totalement géodésique. La définition suivante introduite dans [EG96] sera commode.

6.2. Définition. *Soient* $k_0, \ldots, k_n$ *et* p *des entiers tel que* $0 \leqslant k_j < p/2$ *; on note* $\mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ *l'espace des polynômes homogènes* s *de degré* p *dans* $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ *tel que chaque monôme de* s *est multiple de* $z_j^{p-k_j}$ *pour un certain* j.

Remarquons que, dans ces conditions, tout élément $s \in \mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ s'écrit de façon unique comme $s = s_0 + \cdots + s_n$ avec s_j multiple de $z_j^{p-k_j}$. Considérons une telle hypersurface $Y = \{s = 0\} \subset \mathbb{P}^n$, et le système linéaire associé $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On va construire une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par rapport à laquelle le cône algébrique $\widetilde{Y}_\alpha \subset \mathbb{C}^{n+1}$ au dessus de Y_α soit totalement géodésique pour tout α. Il suffit pour cela de résoudre le système d'équations du lemme 6.1 en fixant par exemple $a_i = b_j = c_{ij} = 0$, ce qui conduit à résoudre le système linéaire

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad 0 \leqslant i, j, \ell \leqslant n. \tag{6.3}$$

Ce système admet une solution unique si on suppose $\delta := \det(\partial s_\ell/\partial z_k)_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} \not\equiv 0$.

6.4. Lemme. *La connexion $\widetilde{\nabla}$ définie par les symboles $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ solutions de* (6.3) *induit sur $\mathbb{P}^n$ une connexion projective partielle ∇ pour laquelle toute hypersurface Y_α est totalement géodésique.*

Démonstration. En effet, la solution $(\widetilde{\Gamma}_{ij}^k)$ est constituée de fonctions rationnelles de degré -1, donc 5.4 i) est vérifié. Observons de plus que la connexion est symétrique (i.e. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \widetilde{\Gamma}_{ji}^k$). Finalement, grâce à l'identité d'Euler, on a :

$$\sum_{0\leqslant i,k\leqslant n} z_i\widetilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} z_n \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i \partial z_j} = (p-1)\frac{\partial s_\ell}{\partial z_j}, \quad 0\leqslant \ell, j\leqslant n.$$

Par suite, la condition $\delta\not\equiv 0$ entraîne $(\sum_i z_i\widetilde{\Gamma}_{ij}^k)_{j,k} = (p-1)\,\mathrm{Id}$, d'où puisque $\widetilde{\nabla}$ est symétrique, $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, v) = \widetilde{\Gamma}(v,\varepsilon) = (p-1)v$. La propriété 5.4 ii) est donc également vérifiée. □

Un vérification aisée montre que les déterminants de Cramer intervenant dans la résolution de (6.3) sont tous divisibles par $\prod z_j^{p-k_j-2}$, et il en résulte par simplification de ce facteur dans δ que le degré du diviseur B des pôles de ∇ est au plus égal à $n+1+\sum_{j=0}^n k_j$. Si p est assez grand, une application directe du théorème 0.1 montre que toute courbe entière f tracée sur Y satisfait ou bien $f(\mathbb{C})\subset |B|$ ou bien $W_\nabla(f)\equiv 0$. La condition $W_\nabla(f)\equiv 0$ permet de voir que $f(\mathbb{C})$ est contenu dans toute hypersurface Y_α qui contient les $(n-1)$ premières dérivées covariantes de f en un point générique. Or, par un comptage de dimension, il y a au moins une autre hypersurface $Y_\alpha \neq Y$ pour laquelle cette condition soit réalisée. On en déduit

6.5. Théorème. *Soit $s = s_0+\cdots+s_n \in \mathcal{S}_{p,k_0,\ldots,k_n}$ un polynôme tel que $\delta = \det\big(\partial s_\ell/\partial z_k\big)_{k,\ell}\not\equiv 0$, et tel que $Y := \{s=0\}$ soit une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n$. Soient enfin $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0+\cdots+\alpha_n s_n = 0\}$ et B le diviseur des pôles de la connexion projective partielle ∇ donnée par* (6.3). *Supposons $p > n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(n+1+\sum_{i=0}^n k_i)$. Alors, toute courbe entière non constante tracée sur Y est algébriquement dégénérée et vérifie ou bien $f(\mathbb{C})\subset Y\cap|B|$, ou bien $f(\mathbb{C})\subset Y\cap Y_\alpha$ pour une certaine hypersurface Y_α distincte de Y.*

7. Exemples

7.1. *Hypersurfaces de Fermat $Y = \{z_0^p + z_1^p+\cdots+z_n^p = 0\}$.*

On fait un calcul à la main pour voir que le Wronskien a pour dénominateur $(z_0\cdots z_n)^{n-2}$ (le théorème 6.5 tel quel ne donne pas l'estimation optimale). Les courbes entières sont donc toutes algébriquement dégénérées dès que $p\geqslant n^2$. C'est un résultat démontré originellement par M. Green [Green75] en utilisant la théorie de Nevanlinna.

7.2. Comme dans [EG96], considérons une hypersurface $Y\subset\mathbb{P}^3$ de la forme

$$Y = \{z_0^p + z_1^p + z_2^p + z_3^{p-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\}, \tag{7.3}$$

définie par un élément s de $\mathcal{S}_{p,0,0,0,2}$. On peut vérifier que Y est lisse si et seulement si

$$\sum_{j\in J} \varepsilon_j^{p/p-2} \neq \frac{2}{p-2}\Big(-\frac{p}{2}\Big)^{p/p-2} \qquad \forall J \subset \{0,1,2\} \tag{7.4}$$

pour chaque choix des racines complexes d'ordre $p-2$, et que la condition de non dégénérescence $\delta \not\equiv 0$ est toujours satisfaite. Par suite, pour $p > 10$, le théorème 0.3 montre que toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y$ est contenue dans une intersection complète $Y \cap |B|$ ou $Y \cap Y_\alpha$. Grâce à un calcul du genre des intersections (détaillé dans [EG96], §4), ces courbes ont toute un genre géométrique $\geqslant 2$, du moins si on exclut les cas triviaux où Y contient des droites projectives, à savoir si

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq (0,0), \quad \forall i \neq j \quad \text{et} \quad \varepsilon_i/\varepsilon_j \neq -\theta^2, \quad \forall \theta \text{ racine de } \theta^p = -1. \tag{7.5}$$

On obtient donc finalement le résultat suivant, démontré indépendamment par [DeEG97] et [SiYe96b].

7.6. Théorème. *Sous les conditions* (7.4) *et* (7.5), *la surface algébrique lisse* $Y \subset \mathbb{P}^3$ *définie par* (7.3) *est hyperbolique au sens de Kobayashi, en tout degré* $p \geqslant 11$.

Bibliographie

[Blo26a] Bloch, A.: *Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension.* J. de Math., **5** (1926), 19–66.

[Blo26b] Bloch, A.: *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires.* Ann. Ecole Normale, **43** (1926), 309–362.

[Bog77] Bogomolov, F.A.: *Families of curves on a surface of general type.* Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 1294–1297.

[Bog79] Bogomolov, F.A.: *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties.* Math. USSR Izvestija **13**/3 (1979), 499–555.

[Bro78] Brody, R.: *Compact manifolds and hyperbolicity.* Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219.

[BrGr77] Brody, R., Green, M.: *A family of smooth hyperbolic surfaces in* $\mathbb{P}^3$. Duke Math. J. **44** (1977), 873–874.

[Car28] Cartan, H.: *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications, Thèse, Paris.* Ann. Ecole Normale, **45** (1928), 255–346.

[CoGr76] Cowen, M., Griffiths, P.: *Holomorphic curves and metrics of negative curvature.* J. Analyse Math. **29** (1976), 93–153.

[Dem95] Demailly, J.-P.: *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials.* AMS Summer School on Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995, Proc. Symposia in Pure Math., ed. by J. Kollár and R. Lazarsfeld, 76p.

[DeEG97] Demailly, J.-P., El Goul, J.: *Connexions méromorphes projectives et variétés algébriques hyperboliques.* C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math. (janvier 1997).

[Dem97] Demailly, J.-P.: *Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques.* Gaz. Math. **73** (juillet 1997), 3–23.

[DSW92] Dethloff, G., Schumacher, G., Wong, P.M.: *Hyperbolicity of the complement of plane algebraic curves.* Amer. J. Math **117** (1995), 573–599.

[DSW94] Dethloff, G., Schumacher, G., Wong, P.M.: *On the hyperbolicity of the complements of curves in Algebraic surfaces: the three component case.* Duke Math. Math. **78** (1995), 193–212.

[EG96] El Goul, J.: *Algebraic families of smooth hyperbolic surfaces of low degree in* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Manuscripta Math. **90** (1996), 521–532.

[EG97] El Goul, J.: *Propriétés de négativité de courbure des variétés algébriques hyperboliques.* Thèse de Doctorat, Univ. de Grenoble I (1997).

[Gra89] Grauert, H.: *Jetmetriken und hyperbolische Geometrie.* Math. Zeitschrift **200** (1989), 149–168.

[Green75] Green M.: *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties.* Amer. J. Math. **97** (1975), 43–75.

[GrGr80] Green, M., Griffiths, P.: *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings.* The Chern Symposium 1979, Proc. Internal. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New York (1980), 41–74.

[Kob70] Kobayashi, S.: *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* Marcel Dekker, New York (1970).

[Kob76] Kobayashi, S.: *Intrinsic distances, measures and geometric function theory.* Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357–416.

[KobO75] Kobayashi, S., Ochiai, T.: *Meromorphic mappings into compact complex spaces of general type.* Invent. Math. **31** (1975), 7–16.

[Lang86] Lang, S.: *Hyperbolic and Diophantine analysis.* Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986) 159–205.

[Lang87] Lang, S.: *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer-Verlag, New York (1987).

[Lu96] Lu, S.S.Y.: *On hyperbolicity and the Green-Griffiths conjecture for surfaces.* Geometric Complex Analysis, ed. by J. Noguchi et al., World Scientific Publishing Co. (1996) 401–408.

[LuMi95] Lu, S.S.Y., Miyaoka, Y.: *Bounding curves in algebraic surfaces by genus and Chern numbers.* Math. Research Letters **2** (1995), 663-676.

[LuMi96] Lu, S.S.Y., Miyaoka, Y.: *Bounding codimension one subvarieties and a general inequality between Chern numbers.* submitted to the Amer. J. of Math.

[LuYa90] Lu, S.S.Y., Yau, S.T.: *Holomorphic curves in surfaces of general type.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **87** (January 1990), 80–82.

[MaNo93] Masuda, K., Noguchi, J.: *A construction of hyperbolic hypersurface of* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Preprint Tokyo Inst. Technology, Ohokayama, Tokyo, (1993), 27 p.

[McQu96] McQuillan, M.: *A new proof of the Bloch conjecture.* J. Alg. Geom. **5** (1996), 107–117.

[Nad89] Nadel, A.: *Hyperbolic surfaces in* $\mathbb{P}^3$. Duke Math. J. **58** (1989), 749–771.

[Nog77] Noguchi, J.: *Holomorphic curves in algebraic varieties.* Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833–853.

[Nog81] Noguchi, J.: *A higher-dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields.* Math. Ann. **258** (1981), 207-212.

[Nog83] Noguchi, J.: *Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties.* Nagoya Math. J. **83** (1981), 213–233.

[Nog91] Noguchi, J.: *Hyperbolic manifolds and diophantine geometry.* Sugaku Expositiones **4**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1991), 63–81.

[NoOc90] Noguchi, J.; Ochiai, T.: *Geometric function theory in several complex variables.* Japanese edition, Iwanami, Tokyo, 1984 ; English translation, xi + 282 p., Transl. Math. Monographs **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[**Och77**] Ochiai, T.: *On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity.* Invent. Math. **43** (1977), 83-96.

[**Siu87**] Siu, Y.T.: *Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions.* Duke Math. J. **55** (1987), 213–251.

[**SiYe96a**] Siu, Y.T., Yeung, S.K.: *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane.* Invent. Math. **124** (1996), 573–618.

[**SiYe96b**] Siu, Y.T., Yeung, S.K.: *Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma and hyperbolic surfaces of low degree.* Preprint (prépublication, automne 1996).

[**Siu97**] Siu, Y.T.: *A proof of the general schwarz lemma using the logarithmic derivative lemma.* Communication personnelle, avril 1997.

[**Voj87**] Vojta, P.: *Diophantine approximations and value distribution theory.* Lecture Notes in Math. **1239**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[**Won89**] Wong, P.M.: *On the second main theorem of Nevanlinna theory.* Am. J. Math. **111** (1989), 549–583.

[**Zai87**] Zaidenberg, M.: *The complement of a generic hypersurface of degree $2n$ in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ is not hyperbolic.* Siberian Math. J. **28** (1987), 425–432.

[**Zai89**] Zaidenberg, M.: *Stability of hyperbolic embeddedness and construction of examples.* Math. USSR Sbornik **63** (1989), 351–361.

[**Zai93**] Zaidenberg, M.: *Hyperbolicity in projective spaces.* International Symposium on Holomorphic mappings, Diophantine Geometry and Related topics, R.I.M.S. Lecture Notes ser. **819**, R.I.M.S. Kyoto University (1993), 136–156.