Méthodes L^2 et résultats effectifs en géométrie algébrique

L'exposé fait le point sur les résultats obtenus depuis 1990 environ, concernant l'existence de sections globales des systèmes linéaires adjoints. L'un des buts de la théorie est l'étude approfondie de la structure des variétés projectives. Une des principales motivations en est la conjecture énoncée en 1987 par T. Fujita : si $L \to X$ est un fibré en droites ample, $|K_X + mL|$ est globalement engendré pour $m \geq \dim X + 1$ et très ample pour $m \geq \dim X + 2$. L'exposé présente un aperçu du versant analytique de la théorie: estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$, métriques singulières, idéaux multiplicateurs de Nadel. Comme application, on donne le schéma de la preuve de la conjecture de l'invariance des plurigenres, récemment démontrée par Y.T. Siu dans le cas des variétés de type général.

Mots-clés: Variété projective, fibré en droites, tenseur de courbure, fibré positif, fibré ample, fibré nef, estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$, faisceau d'idéaux multiplicateurs de Nadel, théorèmes d'annulation, système linéaire adjoint, conjecture de Fujita, variété de type général, invariance des plurigenres.

Classification AMS: 14C30, 14F17, 14J60

L^2 methods and effective results in algebraic geometry

The article gives an exposition of several important results obtained since the beginning of the 90's, concerning the existence of global sections of adjoint linear systems. The main goal is a deepened investigation of the structure of projective varieties. A strong motivation of this study has been the conjecture asserted by T. Fujita in 1987: if $L \to X$ is an ample line bundle, $|K_X + mL|$ is base point free for $m \geq \dim X + 1$ and very ample for $m \geq \dim X + 2$. The presentation is centered around the analytic aspects of the theory: L^2 estimates for $\overline{\partial}$ operators, singular hermitian metrics, Nadel multiplier ideal sheaves. As an application, we give an overview of the proof of the conjecture of invariance of plurigenera in the case of varieties of general type, as it has been recently announced by Y.T. Siu.

Key-words : Projective variety, line bundle, curvature tensor, positive vector bundle, ample line bundle, nef line bundle, L^2 estimates for the $\overline{\partial}$ operator, Nadel multiplier ideal sheaf, vanishing theorems, adjoint linear system, Fujita conjecture, variety of general type, invariance of plurigenera.

Classification AMS: 14C30, 14F17, 14J60

Séminaire BOURBAKI Novembre 1998
51ème année, 1998-99, n° 852

MÉTHODES L^2 ET RÉSULTATS EFFECTIFS EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par **Jean–Pierre DEMAILLY**

1. INTRODUCTION

La théorie des systèmes linéaires adjoints a pour but d'étudier les espaces de sections $H^0(X, K_X + mL)$ associés à un fibré en droites L ample – ou du moins suffisamment positif – sur une variété algébrique projective X de dimension n. La motivation principale est la construction de plongements d'une "variété algébrique polarisée" (X, L) donnée dans un espace projectif complexe $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, avec des bornes effectives explicites pour les degrés. A leur tour, de tels plongements peuvent être utilisés pour démontrer des théorèmes de finitude ou pour essayer de classifier les structures algébriques sur une variété de type topologique donné.

On supposera tout au long de cet exposé que X est lisse, définie sur $\mathbb{C}$, et on notera $K_X = \Lambda^n T^\star_X$, $n = \dim X$, le *fibré en droites canonique* de X. On utilisera la notation additive usuelle pour le groupe de Picard: $K_X + mL$ est donc synonyme de $K_X \otimes L^{\otimes m}$. L'une des questions les plus motivantes pour la théorie des systèmes linéaires adjoints a sans doute été la conjecture suivante, due à T. Fujita [Fuj87, 88].

Conjecture (Fujita). *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective X de dimension n, alors*

(i) *$K_X + mL$ est engendré par ses sections pour $m \geq n + 1$.*

(ii) *$K_X + mL$ est très ample pour $m \geq n + 2$.*

À ce jour, la partie (ii) de la conjecture de Fujita semble encore hors de portée hormis le cas bien compris des dimensions 1 et 2 (cf. I. Reider [Rei87]), mais la partie (i) a fait l'objet de nombreux travaux qui ont conduit à une réponse positive jusqu'en dimension 5 (Ein-Lazarsfeld [EL93] en dimension 3, Y. Kawamata [Kaw97a] en dimension 4, S. Helmke [Hel98] en dimension 5).

Il faut observer que ce type de résultat, fournissant une borne universelle ne dépendant que de la dimension n pour l'entier m, se saurait être vrai pour les systèmes linéaires $H^0(X, mL)$. En effet, si X est une courbe de genre g, il est bien connu que $H^0(X, mL)$ n'a pas de sections si $m < g$, pour L générique de degré 1. Par ailleurs, les bornes de la conjecture de Fujita sont déjà optimales dans le cas où $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $L = \mathcal{O}(1)$, puisqu'on a alors $K_X = \mathcal{O}(-n-1)$.

Le caractère inévitable du fibré canonique s'explique par son intervention dans les théorèmes d'annulation fondamentaux tels que le théorème de Kodaira-Nakano, le théorème de Kawamata-Viehweg ou le théorème de Nadel (voir § 2). L'approche présentée ici s'appuira sur une étude approfondie des métriques singulières et des idéaux multiplicateurs de Nadel, qui mesurent de façon précise l'influence des ensembles-base des sytèmes linéaires considérés. Le cadre de travail est la théorie de Hodge L^2, et les outils analytiques sous-jacents sont les théorèmes d'existence L^2 pour les solutions de l'opérateur $\overline{\partial}$. Une des applications marquantes de ces techniques est la démonstration du théorème de l'invariance des plurigenres par déformation, récemment obtenu par Y.T. Siu [Siu97] dans le cas des variétés de type général. Le lecteur pourra consulter Y. Kawamata [Kaw97b, Kaw98] pour diverses généralisations dans un contexte plus algébrique, incluant notamment le cas des déformations de variétés ayant des singularités canoniques.

Théorème (Siu). *Soit $\mathcal{X} \to S$ une famille projective lisse de variétés de type général au-dessus d'une base S irréductible. Alors les plurigenres $p_m(X_t) = h^0(X_t, mK_{X_t})$ des fibres sont indépendants de t pour tout $m \geq 0$.*

L'assertion plus générale où les fibres X_t seraient de dimension de Kodaira quelconque est encore conjecturale (et nécessite vraisemblablement des techniques de théorie de Hodge beaucoup plus élaborées). Nous allons maintenant donner un aperçu des méthodes utilisées et de la preuve des principaux résultats – en essayant de nous adresser au lecteur non nécessairement spécialiste de la géométrie algébrique.

2. MÉTRIQUES SINGULIÈRES ET THÉORÈMES D'ANNULATION

2.1. Métriques hermitiennes singulières

Soit (L, h) un fibré holomorphe en droites hermitien sur une variété complexe X. On ne suppose pas a priori que la métrique h soit de classe C^∞, mais on pose toutefois une condition restrictive de manière à pouvoir calculer la courbure au sens des courants (cf. [Dem90, DPS94]).

2.1.1. Définition. *Une métrique (hermitienne) singulière sur un fibré en droites* L *est une métrique donnée dans toute trivialisation* $\tau : L_{|U} \xrightarrow{\simeq} U \times \mathbb{C}$ *par*

$$\|\xi\| = |\tau(\xi)|\, e^{-\varphi(x)}, \qquad x \in U,\ \xi \in L_x$$

où $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ *est une fonction arbitraire localement intégrable (pour la mesure de Lebesgue dans des coordonnées locales), appelée poids de la métrique par rapport à la trivialisation* τ*.*

Si $\tau' : L_{|U'} \to U' \times \mathbb{C}$ est une autre trivialisation, φ' le poids associé sur U' et $g \in \mathcal{O}^\star(U \cap U')$ la fonction de transition, alors $\tau'(\xi) = g(x)\,\tau(\xi)$ pour tout $\xi \in L_x$, donc $\varphi' = \varphi + \log|g|$ sur $U \cap U'$. Une définition possible de la *forme de courbure* de L consiste à poser

$$\Theta_h(L) = \frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}\varphi \tag{2.1.2}$$

sur U. C'est une 2-forme réelle d-fermée de type $(1,1)$. La formule $\varphi' = \varphi + \log|g|$ montre précisément que $i\partial\overline{\partial}\varphi$ est invariant par changement de trivialisation, et par conséquent $\Theta_h(L)$ est un *courant* de type $(1,1)$ globalement défini sur X (rappelons que, d'après G. De Rham [Rh55], un courant est simplement une forme différentielle à coefficients distributions); l'hypothèse $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ garantit en effet que $\Theta(L)$ existe au sens des distributions. Un changement de métrique $h \mapsto h'$ s'obtient par $h' = h\,e^{-\psi}$ avec $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, de sorte que

$$\Theta_{h'}(L) = \Theta_h(L) + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\psi \tag{2.1.3}$$

appartient à la même classe de cohomologie de De Rham que $\Theta_h(L)$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$. De plus, on sait (cf. par exemple [GH78]) que la première classe de Chern $c_1(L)$ est définie en cohomologie de De Rham précisément par le courant $\Theta_h(L)$. Rappelons qu'un courant réel $T = i\sum_{1\le j,k\le n} T_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ de type $(1,1)$ est dit *(semi-)positif* si $\sum_{1\le j,k\le n} \lambda_j\overline{\lambda}_k T_{jk}$ est une mesure positive pour tout système de coefficients complexes $\lambda = (\lambda_j) \in \mathbb{C}^n$. Une fonction $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ est dite *plurisousharmonique* si $i\partial\overline{\partial}\varphi = i\sum \partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \ge 0$. On introduit la définition suivante.

2.1.4. Définition. *Le fibré hermitien singulier* (L,h) *est dit à courbure semi-positive (resp. définie positive) si le* $(1,1)$*-courant de courbure* $\Theta_h(L)$ *est semi-positif, resp. si* $\Theta_h(L)$ *est défini positif, i.e. il existe une* $(1,1)$*-forme* $\omega = i\sum_{1\le j,k\le n}\omega_{jk}(z)dz_j \wedge d\overline{z}_k$ *de classe* C^∞*, définie positive, et* $\varepsilon > 0$ *tels que* $\Theta_h(L) \ge \varepsilon\omega$*.*

Avant d'aller plus loin, nous discutons deux exemples fondamentaux.

2.1.5. Exemple. Soit $D = \sum \alpha_j D_j$ un diviseur à coefficients $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ et soit $L = \mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé, défini comme le faisceau des fonctions méromorphes u telles que $\mathrm{div}(u) + D \geq 0$; le fibré en droites correspondant peut alors être muni de la métrique singulière définie par $\|u\| = |u|$ (module de la fonction méromorphe u). Si g_j est un générateur de l'idéal de D_j sur un ouvert $U \subset X$, alors $\tau(u) = u \prod g_j^{\alpha_j}$ définit une trivialisation de $\mathcal{O}(D)$ sur U, donc notre métrique singulière est associée au poids $\varphi = \sum \alpha_j \log |g_j|$. L'équation de Lelong-Poincaré ([Lel57, 69]) implique

$$\Theta\big(\mathcal{O}(D)\big) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi = [D],$$

où $[D] = \sum \alpha_j [D_j]$ désigne le courant d'intégration sur D. La courbure est semi-positive au sens des courants si et seulement si le diviseur D est effectif (i.e. à coefficients $\alpha_j \geq 0$).

2.1.6. Exemple. Supposons que $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ soient des sections holomorphes non nulles de L. On peut alors définir une métrique hermitienne naturelle h (éventuellement singulière) sur $L^\star$, en posant

$$\|\xi^\star\|^2 = \sum_{1\leq j\leq n} \big|\xi^\star.\sigma_j(x)\big|^2 \quad \text{pour} \;\; \xi^\star \in E_x^\star.$$

La métrique duale de L est donnée par

$$\|\xi\|^2 = \frac{|\tau(\xi)|^2}{|\tau(\sigma_1(x))|^2 + \cdots + |\tau(\sigma_N(x))|^2}$$

par rapport à toute trivialisation locale τ. La fonction poids associée est donc donnée par $\varphi(x) = \log\big(\sum_{1\leq j\leq N} |\tau(\sigma_j(x))|^2\big)^{1/2}$. Notons

$$\Sigma = |\sigma_1, \ldots, \sigma_N| := \mathrm{Vect}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$$

le système linéaire défini par $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ et $B_\Sigma = \bigcap \sigma_j^{-1}(0)$ son ensemble base. On a une application méromorphe

$$\Phi_\Sigma : X \smallsetminus B_\Sigma \to P(\Sigma^\star) \simeq \mathbb{P}^{N-1}, \qquad x \mapsto \Phi_\Sigma(x) \simeq [\sigma_1(x) : \sigma_2(x) : \cdots : \sigma_N(x)],$$

qui à x associe l'hyperplan

$$\Phi_\Sigma(x) = \Big\{\sigma = \sum \xi_j\sigma_j \,;\; \sigma(x) = \sum \xi_j\sigma_j(x) = 0\Big\} \subset \Sigma.$$

Avec ces notations, la courbure $\Theta_h(L)$ restreinte à $X \smallsetminus B_\Sigma$ s'identifie à l'image-inverse par Φ_Σ de la métrique de Fubini-Study $\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)$ sur $\mathbb{P}^{N-1}$. Le courant $\Theta_h(L)$, qui est de bidimension $(n-1, n-1)$, ne peut porter de masse sur B_Σ lorsque B_Σ est de codimension ≥ 2, mais il peut se produire que B_Σ ait une composante divisorielle égale au pgcd D des diviseurs $\sigma_j = 0$. Dans ce cas, on vérifie aisément que $\Theta_h(L)$ est égal au courant d'intégration $[D]$ en restriction à B_Σ. Dans tous les cas, $\Theta_h(L)$ est un courant positif fermé.

2.2. Identité de Bochner-Kodaira-Nakano

Dans cette section, on désigne par (L, h) un fibré holomorphe hermitien au-dessus d'une variété complexe X, tel que la métrique h soit de classe C^∞. Rappelons tout d'abord le lemme classique suivant (voir par exemple [GH78]).

2.2.1. Lemme. *Il existe une unique connexion $D = \nabla + \overline{\nabla}$ sur L, dite connexion de Chern, ayant les propriétés suivantes:*

(i) *D opère sur les sections C^∞ des fibrés $\Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X \otimes L$, la composante ∇ (resp. $\overline{\nabla}$) envoyant les formes de type (p, q) dans les formes de type $(p+1, q)$, (respectivement $(p, q+1)$).*

(ii) *D satisfait la règle de Leibnitz, à savoir $D(f \wedge u) = df \wedge \nabla u + (-1)^{\deg f} f \wedge \nabla u$, si f est une forme à valeurs scalaires et u une forme à valeurs dans L.*

(iii) *D est "holomorphe", i.e. $\overline{\nabla} = \overline{\partial}$.*

(iv) *D est hermitienne, i.e. la métrique h est une section parallèle du fibré des matrices hermitiennes* $\mathrm{Herm}(E) \subset E^\star \otimes \overline{E}^\star$.

Si $L_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}$ est localement trivialisé et si la métrique h donnée par un poids $e^{-\varphi}$, on vérifie facilement que

$$\nabla u = \partial u - 2\partial\varphi \wedge u, \qquad \overline{\nabla} u = \overline{\partial} u, \qquad D^2 u = (\nabla\overline{\nabla} + \overline{\nabla}\nabla)u = 2\partial\overline{\partial}\varphi \wedge u, \tag{2.2.2}$$

en sorte que $\frac{i}{2\pi}D^2 u = \Theta_h(L) \wedge u$. On suppose maintenant que X est munie d'une métrique hermitienne $\omega = i\sum_{1\leq j,k\leq n}\omega_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$ définie positive. Une telle métrique permet de définir des normes L^2 et des espaces de sections L^2 globales $L^2(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes L)$ en posant

$$\|u\|^2 = \|u\|^2_{\omega,h} = \int_X |u|^2_\omega e^{-2\varphi} dV_\omega,$$

où $dV_\omega = \frac{1}{n!}w^n$ est l'élément de volume kählérien, $|u|_\omega$ la norme ponctuelle induite par ω sur $\Lambda^{p,q}T^\star_X$ et $e^{-\varphi}$ le poids de la métrique h sur L (il y a quelque abus dans cette notation, car le poids φ n'est pas global, mais on utilisera tout de même cette notation par souci de simplicité). La norme L^2 permet de définir des adjoints formels $\nabla^\star$ et $\overline{\nabla}^\star$, de types respectifs $(-1,0)$ et $(0,-1)$, et on considère les opérateurs de Laplace-Beltrami associés

$$\Delta = DD^\star + D^\star D, \qquad \square = \nabla\,\nabla^\star + \nabla^\star\nabla, \qquad \overline{\square} = \overline{\nabla}\,\overline{\nabla}^\star + \overline{\nabla}^\star\overline{\nabla}.$$

On a alors l'identité fondamentale suivante.

2.2.3. Identité de Bochner-Kodaira-Nakano. *Si ω est kählérienne, les laplaciens Δ, $\square$, $\overline{\square}$ vérifient $\Delta = \square + \overline{\square}$ et*

$$\overline{\square} = \square + [\Theta_h(L), \Lambda]$$

où Λ est l'adjoint de l'opérateur $s \mapsto \omega \wedge s$, $\Theta_h(L)$ l'opérateur de multiplication par le tenseur de courbure de (L,h) et $[\bullet,\bullet]$ le crochet de commutation.

En chaque point $x \in X$, on peut choisir un système de coordonnées $(z_1\,,\,\ldots\,,\,z_n)$ qui diagonalise simultanément les formes hermitiennes $\omega(x)$ et $\Theta_h(L)(x)$, de telle manière que

$$\omega(x) = i\sum_{1\le j\le n} dz_j\wedge d\overline{z}_j, \qquad \Theta_h(L)(x) = i\sum_{1\le j\le n}\gamma_j dz_j\wedge d\overline{z}_j$$

avec $\gamma_1 \le \cdots \le \gamma_n$. Les valeurs propres de courbure $\gamma_j = \gamma_j(x)$ sont alors définies de manière unique et continues en x. Pour toute (p,q)-forme $u = \sum u_{JK} dz_J \wedge d\overline{z}_K \otimes s$ (avec s section holomorphe trivialisante de L, $|s|_h = e^{-\varphi}$), un calcul explicite donne

$$\begin{aligned}\langle [i\,\Theta_h(L),\Lambda]u,u\rangle &= \sum_{|J|=p,\,|K|=q}\Big(\sum_{j\in J}\gamma_j + \sum_{j\in K}\gamma_j - \sum_{1\le j\le n}\gamma_j\Big)|u_{JK}|^2 e^{-2\varphi}\\ &\ge (\gamma_1+\cdots+\gamma_q-\gamma_{n-p+1}-\cdots-\gamma_n)|u|^2 e^{-2\varphi}.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

Comme $\langle\!\langle \overline{\square}u, u\rangle\!\rangle = \|\overline{\nabla}u\|^2 + \|\overline{\nabla}^\star u\|^2$, on déduit de (2.2.3) et (2.2.4) l'inégalité fondamentale

$$\|\overline{\nabla}u\|^2 + \|\overline{\nabla}^\star u\|^2 \ge \int_X (\gamma_1+\cdots+\gamma_q-\gamma_{n-p+1}-\cdots-\gamma_n)|u|^2 e^{-\varphi} dV_\omega. \tag{2.2.5}$$

Supposons que $\Theta_h(L)$ soit positive. Dans ce cas, il est naturel de munir X de la métrique kählérienne particulière $\omega = \Theta_h(L)$. Alors $\gamma_j = 1$ pour $j = 1, 2\,,\,\ldots\,,\,n$ et on obtient l'égalité $\|\overline{\nabla}u\|^2 + \|\overline{\nabla}^\star u\|^2 = (p+q-n)\|u\|^2$. Ceci implique en particulier que les formes $\overline{\square}$-harmoniques sont nulles en tout bidegré (p,q) tel que $p+q>n$, d'où le

2.2.6. Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano. *Si (L,h) est un fibré en droites à courbure positive sur une variété complexe compacte X, alors*

$$H^{p,q}(X,L) = H^q(X,\Omega_X^p \otimes L) = 0 \qquad \textit{pour} \;\; p+q>n=\dim X.$$

Observons cependant que le théorème de Kodaira-Akizuki-Nakano n'est pas valable dans le cas de fibrés munis de métriques h singulières (et en particulier, dans le cas de systèmes linéaires ayant un ensemble-base non trivial), car ω doit être lisse et le choix $\omega = \Theta_h(L)$ n'est pas permis dans ce cas.

2.3. Estimations L^2 de Hörmander-Andreotti-Vesentini

Dans cette section, on s'affranchit complètement de toute hypothèse de régularité sur la métrique h de L. On suppose simplement que $\Theta_h(L)$ est un courant positif. Les coefficients de ce courant sont alors des mesures, ses valeurs propres par rapport à la métrique de référence ω sont évaluées en considérant la partie absolument continue de $\Theta_h(L)$ par rapport à la mesure de Lebesgue (et en négligeant la partie singulière).

2.3.1. Théorème. *Soit (X,ω) une variété kählérienne, $\dim X = n$. On suppose que X est ou bien compacte ou bien faiblement pseudoconvexe, au sens où X possède une fonction d'exhaustion C^∞ faiblement plurisousharmonique. Soit (L,h) un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière à courbure $\Theta_h(L)\geq 0$, et soient*

$$\gamma_1(x) \leq \cdots \leq \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de courbure de $\Theta_h(L)$ par rapport à la métrique ω en tout point. Alors pour toute forme $g\in L^2(X,\Lambda^{n,q}T_X^\star\otimes E)$ telle que

$$\overline{\partial} g = 0 \quad \textit{et} \qquad \int_X (\gamma_1+\cdots+\gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega < +\infty,$$

(on suppose donc $g(x)=0$ presque partout aux points où $\gamma_1(x)+\cdots+\gamma_q(x)=0$), il existe $f\in L^2(X,\Lambda^{n,q-1}T_X^\star\otimes E)$ telle que

$$\overline{\partial} f = g \quad \textit{et} \qquad \int_X |f|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega \leq \int_X (\gamma_1+\cdots+\gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega.$$

Preuve abrégée. Supposons d'abord que X soit compacte et que h soit de classe C^∞, en sorte que les valeurs propres γ_j sont des fonctions continues bornées. L'inégalité

(2.2.5) montre que pour $p = n$ on a

$$\|\overline{\nabla} u\|^2 + \|\overline{\nabla}^\star u\|^2 \geq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)|u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

Les opérateurs $\overline{\nabla}$ et $\overline{\nabla}^\star$ peuvent être étendus en des opérateurs fermés à domaine dense sur les espaces de sections L^2, et l'inégalité ci-dessus s'étend à toute forme $u \in L^2$ dans l'intersection $\mathrm{Dom}(\overline{\nabla}) \cap \mathrm{Dom}(\overline{\nabla}^\star)$ de leurs domaines. Considérons la somme directe orthogonale

$$L^2(X, \Lambda^{n,q} T_X^\star \otimes L) = \mathrm{Ker}\,\overline{\nabla} \oplus (\mathrm{Ker}\,\overline{\nabla})^\perp, \qquad (\mathrm{Ker}\,\overline{\nabla})^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,\overline{\nabla}^\star} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{\nabla}^\star,$$

et écrivons un élément $u \in \mathrm{Dom}(\overline{\nabla}^\star)$ sous la forme $u = u_1 + u_2$ dans cette décomposition. Comme $g \in \mathrm{Ker}\,\overline{\nabla}$, on a $\langle\!\langle\, u, g \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, u_1, g \,\rangle\!\rangle$, d'où par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \big|\,\langle\!\langle\, u, g \,\rangle\!\rangle\,\big|^2 &\leq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)|u_1|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega \\ &\leq \Big(\int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega\Big)\big(\|\overline{\nabla} u_1\|^2 + \|\overline{\nabla}^\star u_1\|^2\big). \end{aligned}$$

Or $\overline{\nabla} u_1 = 0$ et $\overline{\nabla}^\star u_2 = 0$, de sorte que $\overline{\nabla}^\star u_1 = \overline{\nabla}^\star u$ et on a donc

$$\big|\,\langle\!\langle\, u, g \,\rangle\!\rangle\,\big|^2 \leq C\|\overline{\nabla}^\star u\|^2, \qquad C = \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega.$$

La forme linéaire $v = \overline{\nabla}^\star u \mapsto \langle\!\langle\, u, g \,\rangle\!\rangle$ définie sur $\mathrm{Im}\,\nabla^\star$ se prolonge donc en une forme linéaire continue $v \mapsto \langle\!\langle\, v, f \,\rangle\!\rangle$ sur tout L^2, avec $\|f\|^2 \leq C$, et la relation $\langle\!\langle\, u, g \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \overline{\nabla}^\star u, f \,\rangle\!\rangle$ implique par adjonction $\overline{\nabla} f = g$. Le théorème est donc démontré dans le cas d'une métrique h de classe C^∞. Dans le cas général, on utilise des arguments de régularisation. Comme la méthode est assez technique, nous renvoyons à [Dem82] pour les détails. L'idée est d'écrire $h = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon$, avec des poids φ_ε convergeant vers φ et formant une famille croissante par rapport à φ, en sorte que $e^{-\varphi_\varepsilon} \leq e^{-\varphi}$. On a donc $\|u\|_\varepsilon \leq \|u\|$ pour les normes L^2 associées. On trouve des solutions f_ε de l'équation $\overline{\nabla} f_\varepsilon = g$ satisfaisant l'estimation L^2

$$\begin{aligned} \int_X |f_\varepsilon|^2 e^{-2\varphi_\varepsilon} dV_\omega &\leq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi_\varepsilon}\, dV_\omega \\ &\leq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-2\varphi}\, dV_\omega < +\infty. \end{aligned}$$

Le caractère uniforme de cette estimation vis-à-vis de ε entraîne qu'on peut extraire des f_ε une sous-suite convergeant en norme L^2 vers une solution f ayant les propriétés requises. Le point essentiel est de vérifier que le processus d'approximation est possible sans que les valeurs propres $\gamma_{j,\varepsilon}$ de $\Theta_{h_\varepsilon}(L) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon$ s'écartent trop de celles de $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$. C'est effectivement possible d'après [Dem82, 92, 98]. Dans le cas où X est pseudoconvexe non compacte, le raisonnement est essentiellement identique, mais il faut se ramener d'abord au cas d'une métrique kählérienne complète pour éviter les difficultés éventuelles liées au domaine des opérateurs, qui pourraient introduire des "conditions au bord" non triviales. On s'appuie sur le fait qu'une variété kählérienne (X,ω) possédant une exhaustion plurisousharmonique $\psi \geq 0$ admet toujours une métrique kählérienne complète, par exemple $\widehat{\omega} = \omega + i\partial\overline{\partial}(\psi^2)$ (cf. [Dem82]).

2.4. Faisceaux d'idéaux multiplicateurs et théorème de Nadel

Nous introduisons maintenant le concept de *faisceau d'idéaux multiplicateurs*, suivant une définition donnée par A. Nadel [Nad89]. Nadel en a le premier donné une application marquante au problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano. L'idée de base remonte aux travaux fondamentaux de E. Bombieri [Bom70] et H. Skoda [Sko72a].

2.4.1. Définition. *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset X$; on associe à φ le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_\Omega$, formé des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$ telles que $|f|^2 e^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans des coordonnées locales quelconques près de x. Ce faisceau sera appelé faisceau d'idéaux multiplicateurs associé au poids φ.*

La variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ est donc l'ensemble des points au voisinage desquels $e^{-2\varphi}$ est non intégrable. Bien entendu, de tel points ne peuvent apparaître que là où φ a des pôles logarithmiques. La formulation précise est la suivante.

2.4.2. Définition. *On dira qu'une fonction psh φ a un pôle logarithmique de coefficient $\gamma > 0$ en un point $x \in X$ si le nombre de Lelong*

$$\nu(\varphi, x) := \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z - x|}$$

est égal à γ.

2.4.3. Lemme (Skoda [Sko72a])**.** *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $x \in \Omega$.*

(i) *Si* $\nu(\varphi, x) < 1$, *alors* $e^{-2\varphi}$ *est intégrable au voisinage de* x, *en particulier on a* $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_{\Omega,x}$.

(ii) *Si* $\nu(\varphi, x) \geq n + s$ *pour un certain entier* $s \geq 0$, *alors* $e^{-2\varphi} \geq C|z - x|^{-2n-2s}$ *au voisinage de* x *et* $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$, *où* $\mathfrak{m}_{\Omega,x}$ *désigne l'idéal maximal de* $\mathcal{O}_{\Omega,x}$.

Preuve. La démonstration repose sur des estimations classiques de théorie du potentiel complexe, voir H. Skoda [Sko72a].

2.4.4. Proposition ([Nad89]). *Pour toute fonction psh* φ *sur* $\Omega \subset X$, *le faisceau* $\mathcal{I}(\varphi)$ *est un faisceau cohérent d'idéaux sur* Ω.

Preuve. Puisque le résultat est local, nous pouvons supposer que Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} dV < +\infty$. D'après la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents, l'ensemble $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Il est clair que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$; pour démontrer l'égalité, il suffit de vérifier que $\mathcal{J}_x + \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathcal{I}(\varphi)_x$ pour tout entier s, en vertu du lemme de Krull. Soit $f \in \mathcal{I}(\varphi)_x$ un germe défini sur un voisinage V de x et soit θ une fonction tronquante à support dans V, telle que $\theta = 1$ au voisinage de x. On résout l'équation $\overline{\partial} u = g := \overline{\partial}(\theta f)$ au moyen des estimations L^2 de Hörmander (14.3), où L est le fibré en droites trivial $\Omega \times \mathbb{C}$ muni du poids strictement psh

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + (n + s) \log |z - x| + |z|^2.$$

Nous obtenons une solution u telle que $\int_\Omega |u|^2 e^{-2\varphi} |z - x|^{-2(n+s)} dV < \infty$, donc $F = \theta f - u$ est holomorphe, $F \in \mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ et $f_x - F_x = u_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$. Ceci démontre notre affirmation.

2.4.5. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93]). *Soit* (X, ω) *une variété kählérienne compacte (ou faiblement pseudoconvexe), et soit* L *un fibré en droites holomorphe sur* X *muni d'une métrique hermitienne* h *singulière de poids* φ *telle que* $\Theta_h(L) \geq \varepsilon\omega$, $\varepsilon > 0$. *On note* $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$. *Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad \text{pour tout } q \geq 1.$$

Preuve. Soit $\mathcal{L}^q$ le faisceau des germes de (n, q)-formes u à valeurs dans L et à coefficients mesurables, telles que à la fois $|u|^2 e^{-2\varphi}$ et $|\overline{\partial} u|^2 e^{-2\varphi}$ soient localement intégrables. L'opérateur $\overline{\partial}$ définit un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, \overline{\partial})$ qui est une résolution du faisceau $\mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$: en effet, le noyau de $\overline{\partial}$ en degré 0 consiste en les germes de n-formes holomorphes à valeurs dans L qui satisfont la condition d'intégrabilité; donc la fonction coefficient appartient à $\mathcal{I}(\varphi)$; l'exactitude en degré $q \geq 1$ découle du Théorème 2.3.1 appliqué à des boules arbitrairement petites. Comme chaque faisceau $\mathcal{L}^q$ est un $\mathcal{C}^\infty$-module, $\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution par des faisceaux acycliques. En appliquant maintenant le théorème 2.3.1 globalement sur X, on déduit de l'isomorphisme de De Rham-Weil que $H^q\big(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)\big) = 0$ pour $q \geq 1$ [si X est non compacte, on choisit une fonction d'exhaustion plurisousharmonique ψ de classe C^∞ sur X, et on multiplie la métrique initiale de L par le facteur $e^{-\chi\circ\psi}$, où χ est une fonction convexe croissante de croissance arbitrairement rapide à l'infini ; ceci permet d'assurer la convergence des intégrales à l'infini]. Le théorème est démontré.

2.4.6. Corollaire. *Soient* (X, ω), L *et* φ *comme dans le théorème* 2.4.5 *et soient* $x_1, \ldots, x_N$ *des points isolés de la variété des zéros* $V(\mathcal{I}(\varphi))$. *Alors il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X + L)) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq N} \mathcal{O}(K_X + L)_{x_j} \otimes \big(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi)\big)_{x_j}.$$

Preuve. Considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \mathcal{I}(\varphi) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi) \to 0$, tordue par $\mathcal{O}(K_X + L)$, et appliquons le théorème 2.4.5 pour obtenir l'annulation du premier groupe H^1. La propriété de surjectivité annoncée s'ensuit.

2.4.7. Corollaire. *Soient* (X, ω), L *et* φ *comme dans le théorème* 2.4.5. *Supposons que la fonction poids* φ *soit telle que* $\nu(\varphi, x) \geq n + s$ *en un certain point* $x \in X$, *et* $\nu(\varphi, y) < 1$ *pour* $y \neq x$ *assez voisin de* x. *Alors* $H^0(X, K_X + L)$ *engendre tous les* s*-jets de sections au point* x.

Preuve. Le lemme de Skoda 2.4.3 (ii) montre que $e^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de tout point $y \neq x$ suffisamment proche de x, donc $\mathcal{I}(\varphi)_y = \mathcal{O}_{X,y}$, alors que $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$ d'après 2.4.3 (ii). Le corollaire 2.4.7 est donc un cas particulier de 2.4.6.

2.4.8. Commentaire. La philosophie générale de ces résultats (qui peuvent être considérés comme des généralisations du théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda [Bom70], [Sko72a, 75]) est la suivante: le problème de construire des sections holomorphes de $K_X + L$ peut se résoudre en construisant des métriques singulières convenables sur L, telles que le poids φ ait des pôles logarithmiques en des points donnés x_j, ces pôles étant isolés ou entourés de basses multiplicités avoisinantes.

2.4.9. Cas particulier. Si X est compacte et si (L, h_0) est un fibré en droites hermitien C^∞ à courbure positive sur X, on va pouvoir construire une métrique singulière h ayant des pôles logarithmiques isolés en un nombre fini de points $\{x_1, \ldots, x_N\}$ quelconques. Il suffit de poser $h = h_0 e^{-\psi}$ avec $\psi(z) = \varepsilon \sum \theta_j(z^{(j)}) \log|z^{(j)}|$, où les $z^{(j)}$

sont des coordonnées locales centrées en x_j et les θ_j des fonctions plateau adéquates. La courbure de h restera positive si ε est assez petit. On voit alors qu'il existe des constantes $a, b \geq 0$ (dépendant seulement de L et N) telles que pour tout $s \in \mathbb{N}$ le groupe $H^0(X, \mathcal{O}(mL))$ engendre les jets d'ordre s en tout point x_j pour $m \geq as + b$. Ceci permet de démontrer le théorème de plongement de Kodaira (cf. § 2.5). On peut aussi de la même manière résoudre le problème de Levi (à savoir, montrer qu'une variété fortement pseudoconvexe est de Stein): il suffit de travailler sur le fibré trivial $L = \mathcal{O}_X$, muni de poids $e^{-\psi}$ où ψ est exhaustive, fortement plurisousharmonique et suffisamment grande.

2.4.10. Remarque. Le théorème de Nadel contient en fait un théorème d'annulation fondamental de la géométrie algébrique, démontré indépendamment par Kawamata [Kaw82] et Viehweg [Vie82]. Le théorème de Kawamata-Viehweg, au changement de vocabulaire près, correspond au cas particulier où X est algébrique projective, la métrique singulière h présentant des pôles logarithmiques le long d'un diviseur à croisement normaux (on peut ensuite se ramener au cas d'un diviseur quelconque par le théorème de désingularisation de Hironaka).

2.5. Diverses notions de fibrés (semi-)positifs, amples, nefs, gros, etc...

Nous rappelons ici quelques notions liées à la positivité, et qui sont particulièrement utiles en géométrie algébrique. Si $Y \subset X$ est une sous-variété de dimension d, on notera comme d'habitude

$$L^d \cdot Y = \int_Y c_1(L)^d.$$

2.5.1. Définition. *Un fibré en droites L sur une variété projective X est dit*

(i) *engendré par ses sections si le morphisme de restriction $H^0(X, L) \to L_x$ est surjectif en tout point $x \in X$, ce qui revient à dire que l'ensemble base $B_{|L|}$ du système linéaire complet $|L| = P(H^0(X, L))$ est vide*;

(ii) *très ample si $B_{|L|} = \emptyset$ et si l'application $\Phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)^\star)$ est un plongement*;

(iii) *semi-ample s'il existe un multiple mL, $m > 0$, qui soit engendré par ses sections*;

(iv) *ample s'il existe un multiple mL, $m > 0$, qui soit très ample*;

(v) *nef, si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe algébrique C*;

(vi) *effectif, si mL possède une section pour au moins un $m > 0$*;

(vii) *pseudo-effectif, si la classe de Chern* $c_1(L)$ *appartient au cône fermé de* $H^{1,1}(X)$ *engendré par les classes de diviseurs effectifs*;

(viii) *gros, si la "dimension de Kodaira-Iitaka"*

$$\kappa(L) = \limsup_{m\to+\infty} \frac{\log \dim H^0(X, mL)}{\log m} \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n\},$$

est égale à $n = \dim X$.

Certaines de ces notions ne dépendent que de la classe de Chern de L (on dit que ce sont des notions "numériques"): ce sont les notions de fibré ample, nef, pseudo-effectif et gros. Pour ces quatre notions, il y a en fait un dictionnaire algébro-analytique qui donne des traductions en termes de propriétés de la courbure (cf. par exemple [Dem90]).

2.5.2. Proposition. *Soit* X *une variété projective munie d'une métrique hermitienne* ω. *Un fibré* L *sur* X *est*

(i) *ample, si et seulement si* L *possède une métrique hermitienne* C^∞ *à courbure positive* (*on dit alors aussi que* L *est positif*);

(ii) *nef, si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une métrique hermitienne* h_ε *de classe* C^∞ *telle que* $\Theta_{h_\varepsilon}(L) \geq -\varepsilon\omega$;

(iii) *pseudo-effectif, si et seulement si* L *possède une métrique singulière* h *telle que* $\Theta_h(L) \geq 0$;

(iv) *gros, si et seulement si* L *possède une métrique singulière* h *telle que* $\Theta_h(L) \geq \varepsilon\omega$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$.

2.5.3. Commentaires. L'assertion (i) n'est autre que le célèbre théorème de plongement de Kodaira. En effet, si mL est engendré par ses sections, l'exemple 2.1.6 montre que $\Phi = \Phi_{|mL|}$ induit une métrique à courbure semi-positive sur $mL = \Phi^\star\mathcal{O}(1)$ (et donc aussi sur L en prenant une racine m-ième de la métrique); la courbure est bien définie positive si $\Phi_{|mL|}$ est un plongement. Dans la direction inverse, si (L, h) est C^∞ à courbure positive, 2.4.9 entraîne que mL est très ample pour m assez grand. Si h est une métrique singulière à courbure définie positive $\Theta_h(L) \geq \varepsilon\omega$, le Corollaire 2.4.7 montre que l'on peut construire des sections de mL ayant des jets prescrits, mais seulement aux points de x où le poids φ n'a pas trop de singularités (par exemple, là où $\nu(\varphi, x) = 0$); ceci implique alors que L est gros, et la réciproque résulte assez facilement de 2.1.6.

Toutes ces notions sont sans doute mieux appréhendées si on introduit le cône nef K_{nef}, i.e. le cône fermé de $H^{1,1}(X)$ engendré par les classes de diviseurs nef, et de manière analogue, le cône pseudo-effectif $K_{\mathrm{psef}} \subset H^{1,1}(X)$. Alors le cône "ample" est précisément l'intérieur de K_{nef}, et le cône "gros" l'intérieur de K_{psef}. On appelle par définition *dimension de Kodaira* de la variété X l'entier

$$\kappa(X) := \kappa(K_X) \in \{-\infty, 0, 1\,,\, \ldots\,,\, n\},$$

et on dit que X est de *type général* si K_X est gros, i.e. si $\kappa(X) = n$.

3. APPLICATION À LA CONJECTURE DE FUJITA

3.1. Méthode de l'équation de Monge-Ampère

En dehors du cas des dimensions 1 et 2, le premier résultat général sur la conjecture de Fujita est celui de [Dem93] (le manuscrit date de 1991). La méthode développée dans ce travail consistait à produire des métriques singulières sur L en résolvant une équation de Monge-Ampère de la forme

$$\Big(\Theta_h(L) + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon\Big)^n = f_\varepsilon,$$

et en laissant le second membre converger vers une combinaison linéaire de mesures de Dirac $\sum \rho_j \delta_{x_j}$ – la masse totale étant ajustée à la valeur requise $c_1(L)^n$ par ajout d'une forme volume à densité C^∞. De cette façon, il est possible d'obtenir à la limite des métriques singulières $he^{-2\psi}$, $\psi = \lim \psi_\varepsilon$, présentant des singularités logarithmiques aux points x_j. Le contrôle des nombres de Lelong aux points $y \neq x_j$ se fait en ajustant précisément le choix des constantes ρ_j et utilisant la théorie de l'intersection des courants. Nous ne développerons pas ici cette méthode, car les résultats effectifs obtenus sont assez nettement moins bons que ceux obtenus par les méthodes ultérieures.

3.2. Utilisation de la formule de Riemann-Roch

À la suite des premiers résultats de [Dem93], de nombreux travaux se sont attachés à améliorer les bornes effectives obtenues et à développer des approches plus algébriques. Kollár [Kol92] obtient ainsi une preuve purement algébrique dans l'esprit du "théorème de non-annulation" de Shokurov. Ein-Lazarsfeld [EL93] et Fujita [Fuj93] ont établi la partie (i) de la conjecture de Fujita en dimension 3, et un raffinement très poussé de leur technique a permis à Kawamata [Kaw95] d'atteindre le cas de la dimension 4 (Helmke [Hel96] a ensuite simplifié cette approche, et vient d'annoncer le cas de la dimension 5). Dans cette section, nous présentons une approche algébrique relativement élémentaire due à Y.T. Siu [Siu96]. L'idée est d'utiliser la formule de Riemann-Roch :

3.2.1. Cas particulier de la formule de Riemann-Roch. *Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X tel que la variété des zéros $V(\mathcal{J})$ soit de dimension d (avec éventuellement des composantes de dimension plus basse). Soit $Y = \sum \lambda_j Y_j$ le cycle algébrique effectif de dimension d associé aux composantes de dimension d de $V(\mathcal{J})$ (les multiplicités λ_j prennent en compte les multiplicités de l'idéal $\mathcal{J}$ le long de chaque composante). Alors, pour tout fibré en droites L, la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathcal{O}(E + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{O}(\mathcal{J}))$ est un polynôme $P(m)$ de degré d et de coefficient directeur $L^d \cdot Y/d!$*

À l'aide de ce lemme, on démontre simultanément les deux théorèmes suivants.

3.2.2. Théorème (Fujita)**.** *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective X de dimension n, alors $K_X + (n+1)L$ est nef.*

3.2.3. Théorème (Siu)**.** *Soit L comme ci-dessus et soit G un fibré en droites nef. On a les propriétés suivantes.*

(i) *$2K_X + mL + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p \in \mathbb{N}$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$, i.e., il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(2K_X + mL + G)) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{1 \le j \le p} \mathcal{O}(2K_X + mL + G) \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1},$$

dès que $m \ge 2 + \sum_{1 \le j \le p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}$.

En particulier $2K_X + mL + G$ est très ample pour $m \ge 2 + \binom{3n+1}{n}$.

(ii) *$2K_X + (n+1)L + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$ dès que les nombres d'intersection $L^d \cdot Y$ de L sur tous les sous-ensembles algébriques Y de X de dimension d sont tels que*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{1 \le j \le p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Schéma de la preuve. Les démonstrations de 3.2.2 et 3.2.3 (i, ii) sont tout à fait parallèles, nous renvoyons à [Siu96] et [Dem96] pour les détails. L'idée est de trouver un entier (ou un rationnel) m_0 et une métrique hermitienne singulière h_0 sur K_X+m_0L dont le courant de courbure est strictement positif, $\Theta_{h_0}\geq\varepsilon\omega$, telle que $V(\mathcal{I}(h_0))$ soit de dimension 0 et telle que le poids φ_0 de h_0 satisfasse $\nu(\varphi_0,x_j)\geq n+s_j$ pour tout j [dans le cas de 3.2.2, on convient simplement que $\{x_1\,,\,\ldots\,,\,x_p\}=\emptyset$, et on cherche à obtenir m_0 arbitrairement proche de $n+1$]. Comme L et G sont nefs, 2.5.2 (ii) implique que $(m-m_0)L+G$ possède pour tout $m\geq m_0$ une métrique h' dont la courbure $\Theta_{h'}$ a une partie négative arbitrairement petite, disons $\Theta_{h'}\geq-\frac{\varepsilon}{2}\omega$. Alors $\Theta_{h_0}+\Theta_{h'}\geq\frac{\varepsilon}{2}\omega$ est positive définie. Une application du Cor. 2.4.7 au fibré $F=K_X+mL+G=(K_X+m_0L)+((m-m_0)L+G)$ muni de la métrique $h_0\otimes h'$ garantit l'existence des sections de $K_X+F=2K_X+mL+G$ réalisant les jets désirés pour $m\geq m_0$.

Fixons un plongement $\Phi_{|\mu L|}:X\to\mathbb{P}^N$, $\mu\gg 0$, donné par des sections $\lambda_0,\ldots,\lambda_N$ de $H^0(X,\mu L)$, et soit h_L la métrique associée sur L, de forme de courbure définie positive $\omega=\Theta(L)$. Pour obtenir la métrique désirée h_0 sur K_X+m_0L, on fixe un entier $a\in\mathbb{N}^\star$ et on utilise un procédé de récurrence double pour construire des métriques singulières $(h_{k,\nu})_{\nu\geq 1}$ sur aK_X+b_kL, pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers positifs $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_k\geq\cdots$. Une telle suite est nécessairement stationnaire et m_0 sera précisément la limite stationnaire $m_0=\lim b_k/a$. L'idée principale qui fait fonctionner la récurrence réside dans le fait qu'une "bonne" métrique sur $L'=aK_X+b_kL$ permet de construire des sections de $K_X+L'=(a+1)K_X+b_kL$, qui à leur tour fournissent des métriques sur $\frac{a}{a+1}(K_X+L')=aK_X+\frac{a}{a+1}b_kL$. En fait, il se produit une petite perte sur le multiple de L due au fait qu'on va appliquer la formule de Riemann-Roch et qu'il faut éviter les zéros et les petites valeurs du polynôme de Hilbert. On trouve ainsi une estimation $b_{k+1}\leq\frac{a}{a+1}b_k+N$ où N est un entier explicite. De cette façon, on réduit petit à petit la taille de l'entier b_k, en partant de n'importe quel entier b_1 suffisamment grand pour initialiser la récurrence (et qu'on ne cherche pas à contrôler). Les métriques $h_{k,\nu}$ sont choisies en sorte qu'elles satisfassent les propriétés suivantes :

(α) $h_{k,\nu}$ est une métrique "algébrique" de la forme

$$\|\xi\|^2_{h_{k,\nu}}=\frac{|\tau_k(\xi)|^2}{\big(\sum_{1\leq i\leq\nu,\,0\leq j\leq N}\big|\tau_k^{(a+1)\mu}(\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i})\big|^2\big)^{1/(a+1)\mu}},$$

définie par des sections $\sigma_i\in H^0\big(X,\mathcal{O}((a+1)K_X+m_iL)\big)$, $m_i<\frac{a+1}{a}b_k$, $1\leq i\leq\nu$, où $\xi\mapsto\tau_k(\xi)$ est une trivialisation locale arbitraire de aK_X+b_kL ;
notons que $\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i}$ est une section de

$$a\mu((a+1)K_X+m_iL)+((a+1)b_k-am_i)\mu L=(a+1)\mu(aK_X+b_kL).$$

(β) $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_i) \geq (a+1)(n+s_j)$ pour tout i, j ;

(γ) $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1}) \supset \mathcal{I}(h_{k,\nu})$ et $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1}) \neq \mathcal{I}(h_{k,\nu})$ tant que la variété des zéros $V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$ est de dimension positive.

La métrique $h_{k,\nu+1}$ est produite à partir de $h_{k,\nu}$ en appliquant la formule de Riemann-Roch 3.2.1 sur $Y = Y_{k,\nu} = V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$. On obtient beaucoup de sections sur Y, et on peut donc leur imposer la multiplicité de zéros voulue en comparant le nombre de sections au nombre de conditions linéaires requises. Par ailleurs, ces sections s'étendent à X car le théorème de Nadel donne précisément l'annulation du H^1 à valeurs dans l'idéal $\mathcal{I}_{h_{k,\nu}}$. On déduit alors $h_{k,\nu+1}$ de $h_{k,\nu}$ par rajout d'une section non triviale sur Y. Le procédé s'arrête nécessairement à $\dim Y_{k,\nu} = 0$ d'après (γ), parce qu'une suite décroissante d'ensembles algébriques est toujours stationnaire par le théorème de Noether. Il resterait à estimer précisément les entiers b_k successifs produits par la formule de Riemann-Roch. Nous renvoyons à [Dem96] pour le détail des calculs. □

3.3. Méthode de Angehrn-Siu

Il existe une autre méthode que celle décrite à la section 3.2, permettant d'obtenir des métriques singulières h sur L ayant la propriété que la variété $V(\mathcal{I}(h))$ soit constituée de point isolés, et produisant des bornes effectives substantiellement meilleures. Cette méthode est due à Angehrn-Siu [AS95] (cf. aussi H. Tsuji [Tsu96] pour une approche voisine). L'idée consiste à partir d'une métrique h_∞ de classe C^∞ à courbure positive, et de prendre une métrique h_1 singulière ayant des singularités assez fortes en un point $a \in X$ prescrit. Si l'on veut que $V(\mathcal{I}(h_1))$ contienne a, il suffit que le poids φ_1 de h_1 satisfasse $\nu(\varphi_1, a) \geq \alpha n$, $\alpha \geq 1$, et pour cela il suffit de poser $\varphi_1 = \frac{1}{m}\log|\sigma_1|$ avec une section $\sigma_1 \in H^0(X, mL)$ ayant en a une multiplicité $> \alpha m n$. D'après Riemann-Roch, c'est possible pour m assez grand dès lors que $L^n > \alpha^n n^n$. Il se peut malheureusement que a ne soit pas isolé dans $V(\mathcal{I}(h_1))$. Ce que l'on fait alors est de remplacer h_1 par une interpolation linéaire $h_t = h_1^t \cdot h_\infty^{1-t}$ [de poids $\psi_t = t\varphi_1 + t\varphi_\infty$] avec $t = \tau_1 - \delta_1$ très légèrement inférieur à l'inf τ_1 des valeurs t pour lesquelles $Y_{\tau_1} = Y_t = V(\mathcal{I}(h_t))$ a une composante de dimension positive passant par a ; par construction $\tau_1 \leq \frac{1}{\alpha}$. Alors $V(\mathcal{I}(h_{\tau_1-\delta_1}))$ ne contient peut être plus a, mais il suffira de remplacer le poids lisse φ_∞ par un poids ayant une certaine singularité au poids a pour que a figure de nouveau dans la variété $V(\mathcal{I}(\psi_t))$ ainsi obtenue. De façon précise, on remplace $\psi_t^{(1)} := \psi_t$ par

$$\psi_t^{(2)} = (\tau_1 - \delta_1))\varphi_1 + t\varphi_2 + (1 - \tau_1 - t + \delta_1)\varphi_\infty$$

où $\varphi_{2|Y_{\tau_1}}$ n'est pas identiquement $-\infty$, a une forte singularité en a (tout en étant peut-être très peu singulière au point générique de Y_{τ_1}). Ce poids s'obtient en construisant une section $\sigma_2 \in H^0(Y_{\tau_1}, pL)$ s'annulant fortement en a (on utilise de nouveau Riemann-Roch), et en étendant une certaine puissance σ_2^q (non contrôlée a priori) en une section $\widetilde{\sigma}_2$ de X ; on pose alors $\varphi_2 = \frac{1}{pq} \log |\widetilde{\sigma}_2|$. Par construction, pour δ_1 assez petit et $t = 1$, le poids $\psi_t^{(2)}$ est tel que $\dim V(\mathcal{I}(\psi_t^{(2)})) < \dim Y_{\tau_1}$. On prend pour τ_2 l'inf des t pour lesquels $a \in V(\mathcal{I}(\psi_t^{(2)}))$ et on fixe $t = \tau_2 - \delta_2$ très légèrement inférieur à τ_2. On procède ainsi par récurrence de façon à obtenir une suite emboîtée d'ensembles algébriques

$$Y_{\tau_p}^{(p)} \subset \cdots \subset Y_{\tau_1}^{(1)}$$

contenant a, dont les dimensions au voisinage de a sont strictement décroissantes. On a "gagné" lorsque $\dim Y_{\tau_p}^{(p)} = 0$. En réalité, il se présente de multiples difficultés dues au fait que les ensembles $Y_{\tau_p}^{(p)}$ ne sont ni lisses ni irréductibles. On surmonte ces difficultés en effectuant des résolutions de singularités et en perturbant un peu les multiplicités de façon à faire apparaître une seule composante utile à chaque étape (méthode de Shokurov [Sho85]). On utilise aussi des arguments de semi-continuité pour les idéaux multiplicateurs, à partir de calculs faits aux points génériques (voir [Kol95], [DK99] pour des versions élaborées des théorèmes de semi-continuité). En effectuant un comptage précis des multiplicités, on aboutit aux résultats effectifs suivants dûs à Angehrn-Siu [AS95] (voir aussi [Tsu96]).

3.3.1. Théorème. *Si* $m \geq \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$, *alors* $K_X + mL$ *est engendré par ses sections globales.*

3.3.2. Théorème. *Si* $(L^d \cdot Y)^{\frac{1}{d}} > \frac{1}{2}n(n + 2r - 1)$ *pour toute sous-variété irréductible* $Y \subset X$ *de dimension* $d > 0$, *alors les sections holomorphes globales de* $K_X + L$ *séparent* r *points distincts quelconques* $x_1, \ldots, x_r$ *de* X.

Il est à noter toutefois qu'on ne peut pas atteindre les jets d'ordre 1 et plus par cette méthode, car on s'astreint à réaliser les plus petites singularités possibles qui fassent apparaître des idéaux de Nadel non triviaux.

3.4. Version effective du grand théorème de Matsusaka

Il s'agit du résultat suivant, essentiellement dû à Y.T. Siu [Siu93], donnant une version effective des théorèmes de Matsusaka [Mat72] et Kollár-Matsusaka [KoM83].

3.4.1. Théorème. *Soient* L *et* B *des fibrés en droites nefs sur une variété* X *projective de dimension* n. *Supposons que* L *soit ample et soit* $H = n^3(K_X + (n+2)L)$.

Alors $mL - B$ est très ample pour

$$m \geq (2n)^{(3^{n-1}-1)/2} \frac{(L^{n-1} \cdot (B+H))^{(3^{n-1}+1)/2} (L^{n-1} \cdot H)^{3^{n-2}(n/2-3/4)-1/4}}{(L^n)^{3^{n-2}(n/2-1/4)+1/4}}.$$

En particulier mL est très ample pour

$$m \geq C_n \; (L^n)^{3^{n-2}} \left(n + 2 + \frac{L^{n-1} \cdot K_X}{L^n} \right)^{3^{n-2}(n/2+3/4)+1/4}$$

avec $C_n = 2^{(3^{n-1}-1)/2} n^{3^{n-1}(n/2+5/4)-1/4}$.

Pour les surfaces ($n = 2$), la méthode fournit la borne

$$m \geq 4 \, \frac{(L \cdot (K_X + 4L))^2}{L^2}. \tag{3.4.2}$$

Ceci est pratiquement optimal d'après les travaux de Fernández del Busto [FdB95, 96]. Nous ne dirons pas grand chose de la preuve, sauf que l'on utilise de manière cruciale le théorème d'annulation de Nadel, les résultats d'amplitude effective des sections 3.2 et 3.3, et un cas particulier des inégalités de Morse [Dem85].

4. INVARIANCE DES PLURIGENRES PAR DÉFORMATION

Étant donné une déformation $\gamma : X \to S$ de variétés projectives, le problème de l'invariance des plurigenres des fibres $X_t = \gamma^{-1}(t)$ se ramène au cas où la base est le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$ (en général, on peut toujours relier deux points quelconques de S par une chaîne de petits disques analytiques, et il suffit de restreindre la base à chacun de ces disques). On suppose donc $\gamma : X \to \Delta$. Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique $K_{X_t} \simeq K_{X|X_t}$ sur chaque fibre, donné par $u \mapsto dt \wedge u$ [de sorte qu'on se permettra d'identifier K_{X_t} et $K_{X|X_t}$ dans la suite]. On sait d'après le théorème des images directes de Grauert [Gra60] que les faisceaux images directes $\gamma_\star \mathcal{O}(mK_X)$ sont cohérents, et de plus, les plurigenres $p_m(X_t) = h^0(X_t, (mK_X)_{|X_t})$ sont des fonctions semi-continues supérieurement de t. Les sauts se produisent précisément si une section sur une certaine fibre X_{t_0} ne se prolonge pas aux fibres voisines. Démontrer l'invariance des plurigenres revient donc à montrer qu'une section de $mK_{X|X_{t_0}}$ sur une fibre X_{t_0} se prolonge sur un voisinage de X_{t_0} dans X. On pourra supposer sans perte de généralité que $t_0 = 0$. La stratégie consiste grosso modo à construire des métriques singulières sur K_X et K_{X_0} de la façon “la plus canonique possible”, puis à utiliser des théorèmes d'extensions L^2 par rapport à ces métriques.

4.1. Métriques à singularités minimales

L'une des idées essentielles de la démonstration du théorème d'invariance des plurigenres – bien qu'elle ne soit pas tout à fait explicite dans [Siu97] – réside dans le fait que les singularités des métriques hermitiennes sur un fibré L reflètent de manière très intime les ensemble-base des systèmes linéaires $|mL|$, pourvu qu'on choisisse précisément les métriques à singularités minimales. Nous suivons ici l'approche de [DPS98].

4.1.1. Définition. *Soit L un fibré en droites pseudo-effectif sur une variété complexe compacte X. Considérons des métriques hermitiennes h_1, h_2 sur L à courbure $\Theta_{h_j}(L) \geq 0$ au sens des courants.*

(i) *On écrira $h_1 \preccurlyeq h_2$, et on dira que h_1 est moins singulière que h_2, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $h_1 \leq Ch_2$.*

(ii) *On écrira $h_1 \sim h_2$, et on dira que h_1, h_2 sont équivalentes du point de vue des singularités, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}h_2 \leq h_1 \leq Ch_2$.*

Bien entendu $h_1 \preccurlyeq h_2$ si et seulement si les poids associés dans des trivialisations vérifient localement $\varphi_2 \leq \varphi_1 + C$, ce qui implique en particulier $\nu(\varphi_1, x) \leq \nu(\varphi_2, x)$ en tout point. La définition ci-dessus est motivée par l'observation suivante.

4.1.2. Théorème. *Pour tout fibré en droites L pseudo-effectif au-dessus d'une variété X complexe compacte, il existe à équivalence près de singularités une unique classe de métriques hermitiennes h à singularités minimales telles que $\Theta_h(L) \geq 0$.*

Preuve. C'est quasiment trivial. On fixe une fois pour toutes une métrique h_∞ de classe C^∞ (dont la courbure est de signature arbitraire variable), et on écrit les métriques singulières de L sous la forme $h = h_\infty e^{-2\psi}$. La condition $\Theta_h(L) \geq 0$ équivaut à supposer $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\psi \geq -u$ où $u = \Theta_{h_\infty}(L)$. Cette condition entraîne que ψ est plurisousharmonique à l'ajout près du poids φ_∞ de h_∞, et donc localement majorée. Comme on s'intéresse aux métriques uniquement à équivalence de singularités près, on peut toujours ajuster ψ par une constante en sorte que $\sup_X \psi = 0$. On pose maintenant

$$h_{\min} = h_\infty e^{-2\psi_{\min}}, \qquad \psi_{\min}(x) = \sup_{\psi} \psi(x)$$

où le sup est étendu à toutes les fonctions ψ telles que $\sup_X \psi = 0$ et $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\psi \geq -u$. D'après les résultats standards sur les fonctions plurisousharmoniques (cf. Lelong

[Lel69]), $\psi_{\min}$ vérifie encore $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\psi_{\min} \geq -u$ (i.e. le poids $\varphi_\infty + \psi_{\min}$ de $h_{\min}$ est plurisousharmonique), et $h_{\min}$ est évidemment la métrique à singularité minimale cherchée. $\square$

Étant donné une section $\sigma \in H^0(X, mL)$ alors $h(\xi) = |\xi^m/\sigma(x)|^{1/m}$ définit évidemment une métrique singulière sur L, qui a nécessairement au moins autant de singularités que $h_{\min}$, i.e. $\frac{1}{m}\log|\sigma| \leq \varphi_{\min}+C$ localement. En particulier $|\sigma|^2 e^{-2m\varphi_{\min}}$ est localement bornée, en sorte que $\sigma \in H^0(X, mL\otimes\mathcal{I}(h^m_{\min}))$, et on a donc pour tout $m > 0$ un isomorphisme

$$H^0(X, mL \otimes \mathcal{I}(h^m_{\min})) \xrightarrow{\simeq} H^0(X, mL).$$

En vertu de cet isomorphisme, on dira que l'ensemble

$$E_+(h_{\min}) = \big\{x \in X\,;\ \nu(\varphi_{\min}, x) > 0\big\} \tag{4.1.3}$$

est *l'ensemble-base virtuel* de L. On a toujours $E_+(h_{\min}) \subset \bigcap_{m>0} B_{|mL|}$ et il peut y avoir inclusion stricte, notamment si les mL n'ont aucune section non nulle (c'est le cas si L est un fibré plat générique, bien qu'on ait alors $E_+(h_{\min}) = \emptyset$). Si h est une métrique hermitienne singulière telle que $\Theta_h(L) \geq 0$ et

$$H^0(X, mL \otimes \mathcal{I}(h^m)) \simeq H^0(X, mL) \qquad \text{pour tout } m \geq 0, \tag{4.1.4}$$

on dira que h est une *décomposition de Zariski analytique* de L. On vient de voir qu'une telle décomposition existe toujours et que $h = h_{\min}$ répond à la question. Cette définition est motivée par l'analogue algébrique (qui ne conduit pas toujours à une réponse affirmative, loin s'en faut) : on dit que L admet une *décomposition de Zariski algébrique* s'il existe un entier m_0 tel que $m_0L \simeq \mathcal{O}(E + D)$ où E est un diviseur effectif et D un diviseur nef, en sorte que $H^0(X, kD) \simeq H^0(X, km_0L)$ pour tout $k \geq 0$. Si $\mathcal{O}(D)$ est semi-ample, il y a alors une métrique lisse à courbure semi-positive sur $\mathcal{O}(D)$, et on en déduit une métrique singulière h sur L de courbure $\frac{1}{m_0}(\Theta(\mathcal{O}(D)) + [E])$, dont les pôles sont constitués du $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $\frac{1}{m_0}E$. Pour cette métrique, on a évidemment $\mathcal{I}(h^{km_0}) = \mathcal{O}(-kE)$, de sorte que 4.1.4 est réalisé au moins si m est multiple de m_0.

4.2. Une propriété uniforme de génération globale

Il s'agit d'un résultat qui, d'une certaine manière, donne une "borne inférieure uniforme" pour le produit tensoriel $L \otimes \mathcal{I}(h)$, lorsque h est une métrique singulière quelconque à courbure ≥ 0 sur L.

4.2.1. Proposition. *Soit E un fibré en droites ample au-dessus d'une variété complexe compacte X de dimension n, tel que pour tout point x_0 de X il existe un nombre fini d'éléments de $H^0(X,E)$ qui s'annulent chacun à l'ordre $n+1$ au moins en x_0, et sans zéros communs sur $X \smallsetminus \{x_0\}$. Alors pour tout fibré en droites L sur X ayant une métrique hermitienne singulière localement de la forme $e^{-\xi}$ avec ξ plurisousharmonique d'idéal multiplicateur associé $\mathcal{I}(\xi)$, l'espace des sections globales $H^0(X, \mathcal{O}(K_X+E+L)\otimes\mathcal{I}(\xi))$ engendre le faisceau $\mathcal{O}(K_X+E+L)\otimes\mathcal{I}(\xi)$ en tout point de X.*

Preuve. Nous ne donnerons pas beaucoup de détails. Il y a deux ingrédients clés. D'une part, pour tout germe f de $\mathcal{O}(K_X+E+L)\otimes\mathcal{I}(\xi)$, le théorème de Hörmander-Bombieri permet de trouver une section globale σ pour laquelle

$$\int_{V(x_0)} |f(x)-\sigma(x)|^2 e^{-2\xi}|x-x_0|^{-2(n+1-\varepsilon)}dV < \infty \tag{4.2.2}$$

au voisinage du point donné x_0. Le second ingrédient-clé est le théorème de division L^2 de Skoda [Sko72b, Th. 1, p. 555-556]. Celui-ci permet en effet de déduire de (4.2.2) que $f-\sigma \in \mathcal{O}(K_X+E+L)\otimes\mathcal{I}(\xi)\otimes\mathfrak{m}_{X,x_0}$. On conclut alors par le lemme de Nakayama.

4.3. Le théorème d'extension L^2 de Ohsawa-Takegoshi-Manivel.

Il s'agit d'un théorème de prolongement de sections L^2 de fibrés holomorphes à partir d'une sous-variété de la variété ambiante. Ce théorème fondamental à été d'abord démontré par Ohsawa-Takegoshi [OT87, Ohs88], puis raffiné par L. Manivel [Man93] (au total, la preuve du théorème d'invariance des plurigenres utilise donc 3 types essentiellement différents de théorèmes d'existence L^2 !). Nous énoncerons ici seulement le cas très particulier qui nous intéresse.

4.3.1. Théorème. *Soit $\gamma : X \to \Delta$ une famille projective de variétés complexes compactes paramétrées par le disque ouvert unité $\Delta \subset \mathbb{C}$. Soit $X_0 = \gamma^{-1}(0)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X_0$, et soit L un fibré holomorphe en droites muni d'une métrique hermitienne localement représentée par $e^{-\chi}$, telle que $i\partial\bar\partial\chi \geq \omega$ dans le sens de courants, pour une certaine $(1,1)$-forme positive ω sur X. Soit $0<r<1$ et $\Delta_r = \{\, t\in\Delta;\ |t|<r\,\}$. Alors il existe une constante positive A_r ayant la propriété suivante. Pour tout n-forme holomorphe f sur X_0 à valeurs dans L telle que*

$$\int_{X_0} |f|^2 e^{-\chi}dV < \infty,$$

il existe une $(n+1)$-forme holomorphe $\tilde{f}$ sur $\gamma^{-1}(\Delta_r)$ à valeurs dans L, telle que $\tilde{f}|_{X_0} = f \wedge \gamma^*(dt)$ en tout point de X_0 et

$$\int_X |\tilde{f}|^2 e^{-\chi} dV \leq A_r \int_{X_0} |f|^2 e^{-\chi} dV.$$

4.3.2. Remarque. On notera qu'aucune métrique sur le fibré tangent de X_0 ou de X n'est nécessaire pour définir l'intégrale du carré de la norme des formes holomorphes f et $\tilde{f}$ sur X_0 et X ; il suffit en effet d'intégrer les formes volume $i^{n^2} f \wedge \overline{f}$ et $i^{(n+1)^2} \tilde{f} \wedge \overline{\tilde{f}}$.

4.4. Construction de métriques hermitiennes à courbure positive sur K_{X_0}.

On suppose désormais que $X \to \Delta$ est une famille de variétés projectives de type général (i.e. toutes les fibres X_t sont de type général). Un point technique est que la métrique hermitienne sur K_X doit être choisie en sorte que son courant de courbure domine une $(1,1)$-forme définie positive de classe C^∞, de façon à pouvoir appliquer les théorèmes de division et d'extension L^2 de Skoda et Ohsawa-Takegoshi-Manivel. Pour cela, on utilise une variation de la technique de Kodaira qui consiste à écrire un multiple suffisamment grand d'un fibré en droites gros comme somme d'un diviseur effectif et d'un fibré en droites ample.

4.4.1. Lemme. *Il existe un entier positif a tel que $aK_X = D + F$, où D est un diviseur effectif sur X ne contenant pas X_0, et où F est un fibré en droites positif sur X.*

Preuve. Soit F un fibré en droites positif sur X, et soit r_a le rang générique de $H^0(X_t, aK_{X_t} - F)$, qui est atteint pour $t \in \Delta \smallsetminus S_a$ dans le complémentaire d'un ensemble convenable localement fini $S_a \subset \Delta$. Fixons $t_1 \in \Delta \smallsetminus \bigcup S_a$. Puisque X_{t_1} est de type général, nous savons que $h^0(X_{t_1}, aK_{X_{t_1}}) \geq c\, a^n$, donc $h^0(X_{t_1}, aK_{X_{t_1}} - F) \geq c' a^n$ pour $c, c' > 0$ convenables et a assez grand. D'après le choix de t_1, toute section non nulle de $H^0(X_{t_1}, aK_{X_{t_1}} - F)$ s'étend en une section s de $H^0(X, aK_X - F)$, donc $aK_X = D + F$ où D est le diviseur de s. Si nécessaire, on peut éliminer la composante X_0 dans la décomposition de D en divisant s par une puissance convenable de t. □

L'étape suivante est de construire des métriques hermitiennes sur K_{X_0} et K_X, respectivement, et de comparer leurs faisceaux d'idéaux multiplicateurs. D'après la section 4.1, il existe une métrique à singularités minimales sur X_0 (unique à équivalence de singularité près). On notera φ_0 le poids de cette métrique. De même, il existe une métrique à singularités minimales sur tout voisinage relativement compact de X_0

dans X, et quitte à rétrécir la base Δ on peut supposer que cette métrique existe sur l'espace total X tout entier. On notera φ *la restriction à* X_0 du poids de cette métrique. Par définition, φ est au moins aussi singulier que φ_0 sur X_0, et après ajout éventuel d'une constante on peut supposer que $\varphi \leq \varphi_0$.

Par ailleurs, d'après le lemme 4.4.1, on peut choisir un entier $a \geq 2$ tel que $aK_X = D + F$, où D est un diviseur effectif sur X ne contenant pas X_0, et F un fibré en droites positif sur X. Quitte à remplacer a par un multiple assez grand, on peut faire les hypothèses supplémentaires suivantes:

(4.4.2) *pour tout $x_0 \in X_0$, il existe un nombre fini d'éléments de $H^0(X, F - 2K_X)_{|X_0}$ dont le lieu des zéros communs est réduit au singleton $\{x_0\}$, et s'annulant à un ordre au moins égal à $n + 1$ en x_0.*

(4.4.3) *une base des sections de $H^0(X, F)_{|X_0}$ fournit un plongement de X_0 sur une sous-variété d'un espace projectif complexe.*

Soit s_D la section canonique du fibré en droites $\mathcal{O}(D)$, de sorte que le diviseur de s_D est D. Soient $u_1, \ldots, u_N \in H^0(X, F)$ des sections telles que

$$u_{1|X_0}, \ldots, u_{N|X_0}$$

forment une base de $H^0(X, F)_{|X_0}$. Puisque $s_D u_j \in H^0(X, aK_X)$ $(1 \leq j \leq N)$, on obtient une métrique hermitienne

$$e^{-\psi} = \left(\frac{1}{|s_D|^2 \sum |u_j|^2} \right)^{\frac{1}{a}}$$

sur le fibré en droites K_X. De plus

$$\psi = \frac{1}{a} \left(\log |s_D|^2 + \chi \right)$$

où $\chi = \log(\sum |u_j|^2)$ définit une métrique hermitienne de classe C^∞ à courbure positive sur F. Par conséquent, $i\partial\overline{\partial}\psi$ est un courant défini positif. En outre, les singularités de ψ sur X sont au moins aussi grandes que celles du poids φ qui a les singularités minimales sur X. En ajustant de nouveau les constantes si nécessaire, on peut énoncer le

4.4.4. Lemme. *La métrique hermitienne $e^{-\psi}$ est à courbure définie positive et $\psi \leq \varphi \leq \varphi_0$ sur X_0.*

L'argument crucial est un résultat de comparaison des faisceaux d'idéaux multiplicateurs sur X_0 définis par $\ell\varphi_0$ et $\ell\varphi$, respectivement, lorsque ℓ est grand. Dans tout le reste de cet exposé, la notation $\mathcal{I}((\ell+a-\varepsilon)\varphi+\varepsilon\psi)$ désignera un faisceau d'idéaux sur X_0 (et non pas un faisceau d'idéaux sur X, même si le poids est éventuellement défini sur X tout entier).

4.4.5. Proposition. *Choisissons $0<\varepsilon<1$ assez petit pour que $e^{-\varepsilon\psi}$ soit localement intégrable sur X (peut-être après avoir un peu rétréci le disque Δ) et pour que $e^{-\varepsilon\psi}_{|X_0}$ soit localement intégrable sur X_0. Alors*

$$\mathcal{I}((\ell-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi)\subset\mathcal{I}((\ell-1+a-\varepsilon)\varphi+\varepsilon\psi)$$

pour tout entier $\ell\geq 1$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur ℓ. Pour $\ell=1$, le Lemme 4.4.4 implique

$$(1-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi\leq(1-\varepsilon)\varphi_0+a\varphi+\varepsilon\psi\leq C+(a-\varepsilon)\varphi+\varepsilon\psi$$

puisque φ_0 est localement majorée par une certaine constante C. Nous obtenons donc

$$\mathcal{I}((1-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi)\subset\mathcal{I}((a-\varepsilon)\varphi+\varepsilon\psi),$$

comme désiré.

Maintenant, supposons que l'inclusion ait été démontrée pour l'entier ℓ. Prenons un germe de fonction f quelconque dans le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi)$, défini sur un petit voisinage U d'un point $P\in X_0$. Fixons un repère holomorphe local e de $(\ell+a)K_{X_0}$ sur U. Alors $s=fe$ est une section de

$$\mathcal{O}((\ell+a)K_{X_0})\otimes\mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi)$$

sur U. Observons qu'étant donné une fonction plurisousharmonique arbitraire ξ, on a

$$\mathcal{I}(\xi+\log|s_D|^2)=\mathcal{I}(\xi)\otimes\mathcal{O}(-D).$$

En écrivant $aK_{X_0}=(D+F)_{|X_0}$ grâce au Lemme 4.4.1 et $a\psi=\log|s_D|^2+\chi$ par définition de ψ, on peut réinterpréter s comme étant une section de

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\ell K_{X_0}+(D+F)_{|X_0})&\otimes\mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon\psi+\log|s_D|^2+\chi)\\&=\mathcal{O}((\ell+2)K_{X_0}+E_{|X_0})\otimes\mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon\psi)\end{aligned}$$

où $E=F-2K_X$ (comme χ est C^∞, χ ne change pas le faisceau multiplicateur). Observons que $(\ell+1-\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon\psi$ définit une métrique hermitienne à courbure positive sur $(\ell+1)K_{X_0}$. D'après l'hypothèse (4.4.2) ci-dessus et la Proposition 4.2.1 appliquée avec $Y = X_0$ et $L = (\ell+1)K_{X_0}$, on conclut que

$$\mathcal{O}((\ell+2)K_{X_0} + E_{|X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0 + \varepsilon\psi)$$

est engendré par ses sections globales sur X_0. On peut donc sans perte de généralité se restreindre au cas des germes f tels que fe coïncide sur U avec une section globale

$$s \in H^0\left(X_0, \mathcal{O}((\ell+2)K_{X_0} + E_{|X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0 + \varepsilon\psi)\right).$$

En renversant le sens des calculs ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} H^0 (X_0, \mathcal{O}((\ell+2)K_{X_0} &+ E_{|X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0 + \varepsilon\psi)) \\ &= H^0 (X_0, \mathcal{O}((\ell+a)K_{X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+1-\varepsilon)\varphi_0 + (a+\varepsilon)\psi)) \\ &\subset H^0 (X_0, \mathcal{O}((\ell+a)K_{X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell-\varepsilon)\varphi_0 + (a+\varepsilon)\psi)) \\ &\subset H^0 (X_0, \mathcal{O}((\ell+a)K_{X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+a-1-\varepsilon)\varphi + \varepsilon\psi)), \end{aligned}$$

[la première inclusion est obtenue en oubliant le terme φ_0 dans le poids, et la seconde est une conséquence de l'hypothèse de récurrence pour ℓ]. Maintenant, le poids

$$(\ell+a-1-\varepsilon)\varphi + \varepsilon\psi$$

définit une métrique hermitienne à courbure définie positive sur $L = (\ell+a-1)K_X$, et la Proposition 4.3.1 implique que s s'étend en une section globale $\tilde{s} \in H^0(X, (\ell+a)K_X)$ (peut-être après avoir rétréci un peu Δ). La définition de φ implique $|\tilde{s}|^2 \le C\, e^{(\ell+a)\varphi}$, donc

$$|\tilde{s}|^2 e^{-(\ell+a)\varphi - \varepsilon\psi} \le C\, e^{-\varepsilon\psi}$$

est intégrable sur X. De là, on conclut que

$$fe = s = \tilde{s}_{|X_0} \in \mathcal{O}((\ell+a)K_{X_0}) \otimes \mathcal{I}((\ell+a)\varphi + \varepsilon\psi),$$

donc $f \in \mathcal{I}((\ell+a)\varphi + \varepsilon\psi)$. L'étape $\ell+1$ de la récurrence est démontrée.

4.5. Preuve du théorème d'invariance des plurigenres.

Fixons un entier $m > 0$ et une section $s \in H^0(X_0, mK_{X_0})$ quelconque. Par définition de φ_0, on a $|s|^2 \le Ce^{m\varphi_0}$ sur X_0. Si s_D est la section canonique de $\mathcal{O}(-D)$ de diviseur D, on en déduit que $s^\ell s_D$ est localement L^2 par rapport au poids $e^{-\ell m\varphi_0 - (a+\varepsilon)\psi}$, car $a\psi$ possède la même singularité que $\log |s_D|^2$ et $e^{-\varepsilon\psi}$ est supposée localement intégrable sur X_0. Les fonctions trivialisant $s^\ell s_D$ sont localement dans le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}((\ell m-\varepsilon)\varphi_0+(a+\varepsilon)\psi)$. D'après la Proposition 4.4.5, elles appartiennent à $\mathcal{I}((\ell m-1-\varepsilon)\varphi+\varepsilon\psi)$, i.e.

$$\int_U |s^\ell s_D|^2 e^{-(\ell m-1-\varepsilon)\varphi-\varepsilon\psi} < +\infty$$

sur tout ouvert U suffisamment petit tel que $K_{X_0}|U$ et $\mathcal{O}(-D)|U$ soient triviaux. D'une manière équivalente, on peut écrire

$$\int_U |s|^{2\ell} e^{-(\ell m-1-\varepsilon)\varphi+(a-\varepsilon)\psi} < +\infty.$$

Prenons ℓ assez grand pour que $a/(\ell-1)\le\varepsilon$, de sorte que $e^{\varphi-\frac{a}{\ell-1}\psi}\le Ce^{-\varepsilon\psi}$ soit intégrable sur U. D'après l'inégalité de Hölder d'exposants conjugués ℓ, $\ell'=\ell/(\ell-1)$, on trouve

$$\begin{aligned}+\infty &> \left(\int_U |s|^{2\ell}e^{-(\ell m-1-\varepsilon)\varphi+(a-\varepsilon)\psi}\right)^{1/\ell}\left(\int_U e^{\varphi-\frac{a}{\ell-1}\psi}\right)^{(\ell-1)/\ell}\\ &\ge \int_U |s|^2 e^{-(m-\frac{1}{\ell}-\frac{\varepsilon}{\ell})\varphi+(\frac{a}{\ell}-\frac{\varepsilon}{\ell})\psi}e^{(1-\frac{1}{\ell})\varphi-\frac{a}{\ell}\psi}=\int_U |s|^2e^{-(m-1-\delta)\varphi-\delta\psi}\end{aligned}$$

avec $\delta=\varepsilon/\ell$. On peut considérer s comme une section de $K_{X_0}+L_{|X_0}$ avec $L=(m-1)K_X$. Le poids $(m-1-\delta)\varphi-\delta\psi$ définit une métrique hermitienne sur L à courbure définie positive, et s est globalement L^2 par rapport à cette métrique. D'après le théorème d'extension de Ohsawa-Takegoshi-Manivel, on peut par conséquent étendre s en une section $\tilde{s}\in H^0(X,K_X+L)=H^0(X,mK_X)$, éventuellement après avoir tronqué Δ. Ceci termine la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[AN54] Y. Akizuki and S. Nakano - *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. Jap. Acad. **30** (1954), 266–272.

[AS95] U. Angehrn and Y.T. Siu - *Effective freeness and point separation for adjoint bundles*, Invent. Math. **122** (1995), 291–308.

[AV65] A. Andreotti and E. Vesentini - *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation in complex manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965) 81–130.

[BeS93] M. Beltrametti and A.J. Sommese - *On k-jet ampleness*, Complex Analysis and Geometry, Univ. Series in Math., edited by V. Ancona and A. Silva, Plenum Press, New-York, (1993), 355–376.

[BFS89] M. Beltrametti, P. Francia and A.J. Sommese - *On Reider's method and higher order embeddings*, Duke Math. J. **58** (1989), 425–439.

[Boc48] S. Bochner - *Curvature and Betti numbers (I) and (II)*, Ann. of Math. **49** (1948), 379–390 ; **50** (1949), 77–93.

[Bom70] E. Bombieri - *Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math. **10** (1970), 267–287 and *Addendum*, Invent. Math. **11** (1970), 163–166.

[Bon93] L. Bonavero - *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 317, n° 12, 1163-1166 (1993)

[Dem82] J.-P. Demailly - *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **15** (1982), 457–511.

[Dem85] J.-P. Demailly - *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 189–229.

[Dem89] J.-P. Demailly - *Transcendental proof of a generalized Kawamata-Viehweg vanishing theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989), 123–126 and:
Proceedings of the Conference "Geometrical and algebraical aspects in several complex variables" held at Cetraro, Univ. della Calabria, June (1989).

[Dem90] J.-P. Demailly - *Singular hermitian metrics on positive line bundles*, Proc. Conf. Complex algebraic varieties (Bayreuth, April 2–6, 1990), edited by K. Hulek, T. Peternell, M. Schneider, F. Schreyer, Lecture Notes in Math., Vol. 1507, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[Dem93] J.-P. Demailly - *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Differential Geom. **37** (1993), 323–374.

[Dem96] J.-P. Demailly - *Effective bounds for very ample line bundles*, Invent. Math. **124** (1996), 243–261.

[Dem98] J.-P. Demailly - *Pseudoconvex-concave duality and regularization of currents*, Prépublication Institut Fourier, Septembre 1998, 40 p.

[DK99] J.-P. Demailly, J. Kollár - *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds*, prépublication Institut Fourier 1999.

[DPS94] J.-P. Demailly, Th. Peternell, M. Schneider - *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geometry **3** (1994)

295–345.

[DPS98] J.-P. Demailly, Th. Peternell, M. Schneider - *Pseudo-effective line bundles on projective varieties*, manuscript in preparation (1998).

[Ein94] L. Ein - *Note on higher dimensional adjoint linear systems*, preprint 1994, personal communication to the author.

[EKL95] L. Ein, O. Küchle and R. Lazarsfeld - *Local positivity of ample line bundles*, J. Differ. Geom. 42, (1995), 193-219.

[EL92] L. Ein and R. Lazarsfeld - *Seshadri constants on smooth surfaces*, Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay, Juillet 1992, Astérisque **282** (1993), 177–186.

[EL93] L. Ein and R. Lazarsfeld - *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds*, Jour. of Am. Math. Soc. **6** (1993), 875–903.

[EL95] L. Ein and R. Lazarsfeld - *Global generation of linear series on terminal threefolds*, Intern. J. Math. **6** (1995) 1–18.

[EV86] H. Esnault and E. Viehweg - *Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems*, Invent. Math. **86** (1986) 161–194.

[EV92] H. Esnault and E. Viehweg - *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, Band **20**, Birkhäuser Verlag (1992).

[FdB95] G. Fernández del Busto - *Bogomolov instability and Kawamata-Viehweg vanishing*, J. Algebr. Geom. **4** (1995) 693–700.

[FdB96] G. Fernández del Busto - *A Matsusaka-type theorem on surfaces*, J. Algebr. Geom. **5** (1996), 513–520.

[Fuj83] T. Fujita - *Semipositive line bundles*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo **30** (1983), 353–378.

[Fuj87] T. Fujita - *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, North Holland, T. Oda (ed.) (1987), 167–178.

[Fuj88] T. Fujita - *Problem list*, Conference held at the Taniguchi Foundation, Katata, Japan, August 1988.

[Fuj93] T. Fujita - *Remarks on Ein-Lazarsfeld criterion of spannedness of adjoint bundles of polarized threefolds*, preprint 1993.

[Gra60] H. Grauert - *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. I.H.E.S. **5** (1960), 233–292.

[Gri69] P.A. Griffiths - *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Princeton

Univ. Press, Princeton, 1969, 181–251.

[GH78] P.A. Griffiths, J. Harris - *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York (1978).

[Hel97] S. Helmke - *On Fujita's conjecture*, Duke Math. J. **88** (1997), 201–231.

[Hel98] S. Helmke - *Global generation of adjoint linear systems*, Communication au Congrès d'Oberwolfach "Komplexe Analysis", Septembre 1998.

[Hir64] H. Hironaka - *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. **79** (1964) 109–326.

[Hör65] L. Hörmander - *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[Hör66] L. Hörmander - *An introduction to Complex Analysis in several variables*, 1966, 3rd edition, North-Holland Math. Libr., vol.7, Amsterdam, London (1990).

[Kaw82] Y. Kawamata - *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, Math. Ann. **261** (1982), 43–46.

[Kaw84] Y. Kawamata - *The cone of curves of algebraic varieties*, Ann. of Math. **119** (1984) 603–633.

[Kaw97a] Y. Kawamata - *On Fujita's freeness conjecture for* 3*-folds and* 4*-folds*, Math. Ann. **308** (1997), 491–505.

[Kaw97b] Y. Kawamata - *Deformation of canonical singularities*, alg-geom/9712018 (1997), to appear in J. Amer. Math. Soc.

[Kaw98] Y. Kawamata - *On the extension problem of pluricanonical forms*, preprint Univ. of Tokyo at Komaba, September 1998.

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki - *Introduction to the minimal problem* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, T. Oda (ed.), North Holland, Amsterdam (1987), 283–360.

[Kod53] K. Kodaira - *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), 1268–1273

[Kod54] K. Kodaira - *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math. **60** (1954), 28–48.

[Kol92] J. Kollár - *Effective basepoint freeness*, Math. Ann. **296** (1993), 595–605.

[Kol95] J. Kollár - *Singularity of pairs*, Preprint University of Utah, November 1995.

[KoM83] J. Kollár and T. Matsusaka - *Riemann-Roch type inequalities*, Amer. J. of Math. **105** (1983), 229–252.

[KoMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori - *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), 765–779.

[Laz93] R. Lazarsfeld, - *Lectures on linear series, with the assistance of G. Fernández del Busto*, Lectures of a summer program on Complex Algebraic Geometry, Park City, 1993, Amer. Math. Soc., IAS/Park City Math. Ser. **3** (1997), 163–219.

[Lel57] P. Lelong - *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 239–262.

[Lel69] P. Lelong - *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris (1969).

[Man93] L. Manivel - *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré vectoriel*, Math. Zeitschrift **212** (1993) 107–122.

[Mat72] T. Matsusaka - *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial*, Amer. J. of Math. **94** (1972), 1027–1077.

[Mor82] S. Mori - *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133–176.

[Nad89] A.M. Nadel - *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), 7299–7300 and Annals of Math., **132** (1990), 549–596.

[Nak55] S. Nakano - *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 1–12.

[Ohs88] T. Ohsawa - *On the extension of L^2 holomorphic functions, II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 265–275.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi - *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Zeitschrift **195** (1987), 197–204.

[Rei88] I. Reider - *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. **127** (1988), 309–33.1

[Rh55] G. De Rham - *Variétés différentiables*, Hermann, Paris (1955).

[Sak88] F. Sakai - *Reider-Serrano's method on normal surfaces*, Proc. Intern. Conf. on Algebraic Geometry (L'Aquila, June 1988), Lecture Notes in Math., Vol. 1417, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 301–319.

[Sch74] M. Schneider - *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel*, Manuscripta Math. **11** (1974), 95–101.

[ShSo85] B. Shiffman, A.J. Sommese - *Vanishing theorems on complex manifolds*, Progress in Math. no **56**, Birkhäuser (1985).

[Sho85] V. Shukorov - *The non-vanishing theorem*, Math. U.S.S.R. Izv. **19** (1985), 591–607.

[Siu74] Y.T. Siu - *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension* *of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53–156.

[Siu93] Y.T. Siu - *An effective Matsusaka big theorem*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1387–1405.

[Siu95] Y.T. Siu - *Very ampleness criterion of double adjoint of ample line bundles*, Princeton Conf. in honor of Robert C. Gunning and Joseph J. Kohn, Princeton University, NJ, USA, Mar. 16-20, 1992; Ann. Math. Stud. **137** (1995), 291–318.

[Siu96] Y.T. Siu - *Effective Very Ampleness*, Invent. Math. **124** (1996), 563–571.

[Siu97] Y.T. Siu - *Invariance of Plurigenera*, manuscript October 1997, to appear in Inventiones Math.

[Sko72a] H. Skoda - *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353–408.

[Sko72b] H. Skoda - *Applications des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e Série **5** (1972), 545–579.

[Sko75] H. Skoda - *Estimations* L^2 *pour l'opérateur* $\overline{\partial}$ *et applications arithmétiques*, Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math., Vol. 538, Springer-Verlag, Berlin (1977), 314–323.

[Tsu96] H. Tsuji - *Global generation of adjoint bundles*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 5–16.

[Vie82] E. Viehweg - *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 1–8.

Jean–Pierre Demailly

Université de Grenoble I
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS
B.P. 74, route des Maths
F–38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

E–mail : Jean-Pierre.Demailly@ujf-grenoble.fr