THÉORÈMES D'ANNULATION POUR LA COHOMOLOGIE DES PUISSANCES SYMÉTRIQUES ET EXTÉRIEURES D'UN FIBRÉ VECTORIEL POSITIF

par Jean-Pierre DEMAILLY

Université de Grenoble I,
Institut Fourier, BP 74,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 188,
F-38402 Saint-Martin d'Hères

Résumé. — Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au dessus d'une variété $\mathbb{C}$–analytique compacte X de dimension n . Si E est positif au sens de Griffiths, nous montrons que les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,\Lambda^s E\otimes S^k E\otimes(\det E)^l)$ s'annulent pour $p+q\ge n+r-(s-1)_+$ et $l\ge C_{n,p,q,r}$. La démonstration repose d'une part sur la technique de passage au fibré en espaces projectifs $P(E^\star)$ utilisée par Griffiths et Le Potier, et d'autre part sur une estimation a priori nouvelle pour le Laplacien Δ'' , faisant intervenir la courbure de certains sous-fibrés universels de $\Lambda\, T^\star P(E^\star)$.

Abstract. — Let E be a holomorphic vector bundle of rank r over a compact complex manifold X of dimension n . If E is positive in the sense of Griffiths, it is shown that Dolbeault cohomology groups $H^{p,q}(X,\Lambda^s E\otimes S^k E\otimes(\det E)^l)$ vanish for $p+q\ge n+r-(s-1)_+$ and $l\ge C_{n,p,q,r}$. The proof rests on the one hand on the $P(E^\star)$ projectivization technique used by Griffiths and Le Potier, and on the other hand on a new a priori estimate for the Laplace-Beltrami operator Δ'' , involving the curvature of some universal subbundles of $\Lambda\, T^\star P(E^\star)$.

1. Enoncé des résultats.

Soit X une variété $\mathbb{C}$–analytique compacte de dimension n et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r au dessus de X . Etant donné un repère orthonormé local $(e_1,\ \ldots\ ,e_n)$ de E , la forme de courbure de Chern $ic(E)\in C^\infty(X,\Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}T^\star X\otimes\mathrm{Herm}(E,E))$ s'écrit

$$ic(E)=i\sum_{i,j,\lambda,\mu}c_{ij\lambda\mu}\,dz_i\wedge d\overline{z}_j\otimes e_\lambda^\star\otimes e_\mu$$

avec $1\le i,j\le n,\ 1\le\lambda,\mu\le r,\ c_{ij\lambda\mu}=\overline{c}_{ji\mu\lambda}$. On peut donc identifier $ic(E)$ à une forme hermitienne sur $TX\otimes E$. Rappelons que le fibré E est dit *positif*, resp. *semi-positif* (au sens de Griffiths [3]) si E possède une métrique telle qu'en tout point $x\in X$ on ait

$$ic(E)_x(\zeta\otimes v)=\sum_{i,j,\lambda,\mu}c_{ij\lambda\mu}(x)\,\zeta_i\overline{\zeta}_j v_\lambda\overline{v}_\mu>0\quad,\quad\text{resp.}\quad\ge 0$$

pour tous vecteurs $\zeta=\sum\zeta_i\,\partial/\partial z_i\in T_xX$, $v=\sum v_\lambda e_\lambda\in E_x$ non nuls. Il est classique que la stricte positivité entraîne l'amplitude de E , mais la réciproque n'est pas connue.

A l'heure actuelle, il ne semble pas qu'on dispose de théorèmes d'annulation généraux et optimaux pour les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}$ des puissances tensorielles d'un fibré vectoriel positif E . Ainsi, le célèbre théorème de Le Potier [6]

$$E \text{ ample } \Longrightarrow H^{p,q}(X,E) = 0 \text{ pour } p+q \geq n+r$$

ne se généralise pas aux puissances symétriques S^kE , bien que l'annulation ait lieu lorsque $q \geq n-1$ (*cf.* [4]) . Le résultat suivant permet néanmoins d'annuler les groupes de cohomologie de certaines puissances tensorielles de E .

Théorème. — *Soit M un fibré holomorphe en droites au dessus de X . On suppose que $E > 0$ et $M \geq 0$, ou $E \geq 0$ et $M > 0$. Alors pour tous entiers $p, q, s, k, l \geq 0$ tels que $k+s \geq 1$ on a*

$$H^{p,q}(X, \Lambda^s E \otimes S^k E \otimes (\det E)^l \otimes M) = 0$$

sous les deux hypothèses suivantes :

(1.1) $\quad p+q \geq n+r-(s-1)_+$,

(1.2) $\quad l\Big(1+\dfrac{l}{k+s}\Big) \geq A_{n,p,q,r,s}$ *avec*

(1.3) $\quad A_{n,p,q,r,s} = \dfrac{1}{4}n(n+1)\max(N_{p,q,s}\, , N_{p,q,s-1}\, , N_{p+1,q+1,s-1}\, , N_{p+1,q+1,s-2})$,

(1.4) $\quad N_{p,q,s} = \min\left(\dfrac{pq(r-s-1)}{p+q+s-n-r+1}\, , \dfrac{(n-p+1)(n-q+1)(s+1)}{p+q+s-n-r}\right)$

si $0 \leq s \leq r-2$, $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$ *et* $N_{p,q,s} = 0$ *sinon.*

Il est facile de voir que l'on a toujours $A_{n,p,q,r,s} \leq \frac{1}{4}n(n+1)pq(r-1)$. Explicitons quelques conséquences du théorème dans le cas particulièrement intéressant $s = r$.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses du théorème on a*

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^{l+1} \otimes M) = 0$$

pour $p+q \geq n+1$ *et* $l\Big(1+\dfrac{l}{k+r}\Big) \geq \dfrac{1}{4}n(n+1)N_{p+1,q+1,r-2}$ *, où*

$$N_{p+1,q+1,r-2} = \min\left(\frac{(p+1)(q+1)}{p+q-n+1}\, , \frac{(n-p)(n-q)(r-1)}{p+q-n}\right) .$$

Corollaire 2. — $H^{p,q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes M) = 0$ *pour tout* $k \geq 0$ *et* $p = n$, $q \geq 1$ *ou* $p \geq 1$, $q = n$.

Le cas $p = n$ du corollaire 2 est un résultat classique de P. Griffiths [3]. Dans ces résultats, il serait souhaitable de remplacer l'hypothèse de positivité de E par l'hypothèse plus conceptuelle d'amplitude. Compte tenu des contre-exemples donnés dans [4] , la question suivante paraît naturelle.

Question. — *Si E est ample et $M \geq 0$ ou si $E \geq 0$ et M ample, a-t-on $H^{p,q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes M) = 0$ pour $p+q \geq n+1$ et $k \geq 0$ quelconque ?*

Dans le cas des puissances extérieures $\Lambda^s E$, A.J. Sommese [8] conjecture que E ample $\Longrightarrow H^{p,q}(X, \Lambda^s E) = 0$ pour $p+q \geq n+r-s+1$. A notre connaissance, ce résultat n'est établi que pour $p = n$ (*cf.* [6]) .

La démonstration du théorème repose pour une part sur la technique de passage au fibré $O_E(1)$ au dessus de $P(E^\star)$, utilisée par P.Griffiths [3] et J. Le Potier [6] (avec les simplifications apportées par M. Schneider [7]) . L'autre ingrédient est une estimation de courbure pour le fibré des vecteurs tangents verticaux à $P(E^\star)$. Cette estimation permet d'obtenir des résultats d'annulation même dans le cas où la filtration naturelle de l'image directe sur X du faisceau des formes différentielles sur $P(E^\star)$ à valeurs dans $O_E(k)$ est non scindée.

Il paraît clair que nos résultats pourraient s'étendre aux puissances tensorielles quelconques de E en travaillant sur la variété des drapeaux de E plutôt que sur $P(E^\star)$. Ceci fera l'objet d'un prochain travail.

2. Utilisation du fibré $O_E(1)$.

Si V est un espace vectoriel complexe de dimension $r \geq 1$, on note $O(-1)$ le fibré en droites canonique au dessus de $P(V) = V \setminus \{0\}/\mathbb{C}^\star$, tel que $O(-1)_{[\xi]} = \mathbb{C}.\xi \subset V$ quel que soit $[\xi] \in P(V)$. On pose plus généralement $O(k) = O(-1)^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit un complexe $(\Gamma^{\bullet,k}(V^\star), \delta)$ par :

$$\Gamma^{p,k}(V^\star) = \Lambda^p V^\star \otimes S^{k-p} V^\star \quad , \quad 0 \leq p \leq k \quad ,$$

identifié à l'espace des formes $\alpha = \sum \alpha_I(\xi)\, d\xi_I$, $|I| = p$, où $(\xi_1, \ \ldots \ , \xi_r)$ sont des coordonnées sur V et les α_I des polynômes homogènes de degré $k-p$; la différentielle

$$\delta = \tau \lrcorner \bullet \quad : \quad \Gamma^{p,k}(V^\star) \longrightarrow \Gamma^{p-1,k}(V^\star)$$

est définie comme le produit intérieur par le champ d'Euler $\tau = \mathrm{Id}_V = \sum \xi_j\, \partial/\partial\xi_j$. La différentielle extérieure d vérifie alors trivialement $d\delta + \delta d = k.\mathrm{Id}$. On en déduit que $(\Gamma^{\bullet,k}(V^\star), \delta)$ est exact pour $k \neq 0$ et que

$$\text{(2.1)} \qquad \Gamma^{p,k}(V^\star) = \Lambda^p V^\star \otimes S^{k-p} V^\star \simeq Z^{p,k}(V^\star) \oplus Z^{p-1,k}(V^\star) \quad ,$$

où $Z^{\bullet,k}(V^\star)$ désigne l'espace des cycles de $\Gamma^{\bullet,k}(V^\star)$; l'isomorphisme est donné par la flèche $u \mapsto (\frac{1}{k}\delta du\, , \, \frac{1}{k}\delta u)$ et son inverse par $(v, w) \mapsto v + dw$. Cela étant, on a les formules classiques de R. Bott [2] :

$$\text{(2.2)} \qquad H^{p,0}(P(V), O(k)) \simeq Z^{p,k}(V^\star) \quad ;$$

$$\text{(2.3)} \qquad H^{p,q}(P(V), O(k)) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 1 \ , \ k \geq 1 \ .$$

On a en effet $TP(V)_{[\xi]} \simeq V/\mathbb{C}.\xi \otimes O(1)_{[\xi]}$ pour tout point $\xi \in V \setminus \{0\}$. L'isomorphisme (2.2) provient alors du fait que tout élément $u \in \Lambda^p V^\star \otimes S^{k-p} V^\star$ tel que $\tau \lrcorner u = 0$ induit en chaque point $[\xi]$ une p–forme dans la fibre

$$\Lambda^p (V/\mathbb{C}.\xi)^\star \otimes O(k-p)_{[\xi]} \simeq \Lambda^p T^\star P(V) \otimes O(k)_{[\xi]} \quad .$$

Appliquons maintenant la construction de $O(1)$ à chaque fibre $V = E_x^\star$, $x \in X$. On obtient ainsi un fibré en droites $O_E(1)$ au dessus de $Y = P(E^\star)$, et il est bien connu que la positivité de E entraîne celle de $O_E(1)$ (*cf.* formule (3.9) ci-dessous). Posons d'autre part

$$\Omega_X^p = \Lambda^p T^\star X \quad , \quad \Omega_Y^p = \Lambda^p T^\star Y \quad .$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^\star \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_{Y/X} \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

où $\Omega^1_{Y/X}$ est par définition le fibré des 1–formes différentielles relatives le long des fibres de la projection $\pi : Y = P(E^\star) \to X$. On peut alors définir une filtration décroissante naturelle de Ω^s_Y en posant

$$F^{p,s}_Y = F^p(\Omega^s_Y) = \pi^\star(\Omega^p_X) \wedge \Omega^{s-p}_Y \quad . \tag{2.5}$$

Le gradué associé à cette filtration est

$$G^{p,s}_Y = F^{p,s}_Y / F^{p+1,s}_Y = \pi^\star(\Omega^p_X) \otimes \Omega^{s-p}_{Y/X} \quad ; \tag{2.6}$$

Au dessus de tout ouvert $U \subset X$ où $E^\star$ est un fibré trivial $U \times V$ avec $\dim_{\mathbb{C}} V = r$, la suite exacte (2.4) se scinde ainsi que la filtration (2.5). En utilisant (2.2) et (2.3), on calcule aussitôt les images directes de faisceaux

$$\pi_\star(G^{p,s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = \Omega^p_X \otimes Z^{s-p,k}(E) \otimes M \quad ,$$
$$R^q\pi_\star(G^{p,s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad \text{si} \quad q \geq 1 \ , \ k \geq 1 \ .$$

La suite spectrale de Borel-Leray implique l'isomorphisme

$$H^q(Y, G^{p,p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) \simeq H^{p,q}(X, Z^{s,k}(E) \otimes M) \quad . \tag{2.7}$$

Compte tenu de la suite exacte courte $0 \to F^{p+1,\bullet}_Y \to F^{p,\bullet}_Y \to G^{p,\bullet}_Y \to 0$, le groupe $H^{p,q}(X, Z^{s,k}(E) \otimes M)$ s'annulera pourvu que

$$H^q(Y, F^{p,p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad , \tag{2.8}$$

$$H^{q+1}(Y, F^{p+1,p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad . \tag{2.9}$$

Le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano [1] appliqué au fibré $O_E(k) \otimes \pi^\star M$ sur $Y = P(E^\star)$, $k \geq 1$, donne par ailleurs

$$H^q(Y, \Omega^{p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad \text{pour} \quad p+q+s \geq n+r \ .$$

Lorsque $p+q+s \geq n+r$, les égalités (2.8) et (2.9) sont donc des conséquences respectives des égalités

$$H^{q-1}(Y, \Omega^{p+s}_Y / F^{p,p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad , \tag{2.8$'$}$$

$$H^q(Y, \Omega^{p+s}_Y / F^{p+1,p+s}_Y \otimes O_E(k) \otimes \pi^\star M) = 0 \quad . \tag{2.9$'$}$$

Nous sommes finalement ramenés à étudier (2.8) et (2.8′), car les propriétés (2.9) et (2.9′) s'en déduisent par la substitution $(p,q,s) \mapsto (p+1, q+1, s-1)$.

Remarque 2.10. — Si la filtration $\pi_\star\big(F^\bullet(\Omega^{p+s}_Y) \otimes O_E(k)\big)$ est globalement scindée sur X , c'est-à-dire si

$$\pi_\star\big(\Omega^{p+s}_Y \otimes O_E(k)\big) \simeq \bigoplus_m \pi_\star\big(G^{m,p+s}_Y \otimes O_E(k)\big) = \bigoplus_m \Omega^m_X \otimes Z^{p-m+s,k}(E) \quad ,$$

alors l'annulation du groupe $H^{p,q}(X, Z^{s,k}(E) \otimes M)$ est une conséquence immédiate du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano. Le théorème de Le Potier correspond ainsi au cas $s = 0$, $k = 1$ où la somme directe comporte un seul terme non nul $Z^{0,1}(E) = E$ pour l'indice $m = p$. On sait néanmoins d'après [5] que la filtration est en général non scindée. Les techniques de géométrie différentielle que nous allons présenter permettent de s'affranchir de ces difficultés et d'obtenir des résultats même lorsque la filtration n'est pas scindée.

3. Estimation de la courbure du sous-fibré $F_Y^{p,p+s}$.

Posons pour simplifier $\Omega = \Omega_Y^{p+s}$, $F = F_Y^{p,p+s}$, $Q = \Omega_Y^{p+s}/F_Y^{p,p+s}$ et considérons les suites exactes

$$(3.1) \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow \Omega \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ ,$$

$$(3.2) \qquad 0 \longrightarrow F(k) \longrightarrow \Omega(k) \longrightarrow Q(k) \longrightarrow 0 \ ,$$

où (3.2) se déduit de (3.1) par tensorisation par $O_E(k) \otimes \pi^\star M$. Munissons $Y = P(E^\star)$ de la métrique kählérienne $\omega = \frac{1}{k} ic(O_E(k) \otimes \pi^\star M)$, et appliquons à toute forme u de type $(p+s,q)$ sur Y à valeurs dans $O_E(k) \otimes \pi^\star M$ l'identité de Kodaira-Nakano [1]. Il vient

$$(3.3) \qquad ||D''_{\Omega(k)} u||^2 + ||D''^\star_{\Omega(k)} u||^2 \geq k(p+q+s-(n+r-1)) \; ||u||^2 \ .$$

Relativement au scindage orthogonal $\Omega \simeq F \oplus Q$, les connexions de Chern de Ω , F , Q sont d'autre part reliées par la formule classique (*cf.* [3]) :

$$D_\Omega = \begin{pmatrix} D_F & -\beta^\star \wedge \bullet \\ \beta \wedge \bullet & D_Q \end{pmatrix} \ , \quad \beta \in C^\infty(\Lambda^{1,0} T^\star P(E^\star) \otimes \mathrm{Hom}(F,Q)) \ .$$

On en déduit par conséquent

$$D''_{\Omega(k)} = \begin{pmatrix} D''_{F(k)} & -\beta^\star \wedge \bullet \\ 0 & D''_{Q(k)} \end{pmatrix} \ , \quad D''^\star_{\Omega(k)} = \begin{pmatrix} D''^\star_{F(k)} & 0 \\ -\beta \,\lrcorner\, \bullet & D''^\star_{Q(k)} \end{pmatrix} \ .$$

Pour toute $(0,q)$–forme u à valeurs dans $F(k)$ [resp. $Q(k)$] on a donc

$$(3.4) \qquad D''_{F(k)} u = D''_{\Omega(k)} u \ , \quad ||D''^\star_{F(k)} u||^2 = ||D''^\star_{\Omega(k)} u||^2 - ||\beta \,\lrcorner\, u||^2 \ ,$$

$$(3.4') \qquad D''^\star_{Q(k)} u = D''^\star_{\Omega(k)} u \ , \quad ||D''_{Q(k)} u||^2 = ||D''_{\Omega(k)} u||^2 - ||\beta^\star \wedge u||^2 \ .$$

Pour annuler $H^q(Y, F(k))$ [resp. $H^q(Y, Q(k))$] il suffit, compte tenu de l'estimation a priori (3.3) , de réaliser en chaque point l'inégalité

$$(3.5) \qquad |\beta \,\lrcorner\, u|^2 \quad (\text{resp. } |\beta^\star \wedge u|^2) \ < k(p+q+s-(n+r-1)) \, |u|^2 \ .$$

Nous allons calculer la forme β en nous plaçant dans un système de coordonnées convenable. Soit α_0 un point quelconque de $P(E^\star)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées locales sur X centrées au point $a_0 = \pi(\alpha_0)$. On peut trouver un repère holomorphe local $(e_1^\star, \ldots, e_r^\star)$ de $E^\star$ au voisinage de a_0 tel que $\alpha_0 = [e_r^\star(a_0)]$ et

$$(3.6) \qquad \langle e_\lambda^\star , e_\mu^\star \rangle = \delta_{\lambda\mu} + \sum_{i,j} \gamma_{ij\lambda\mu} \, z_i \overline{z}_j + \mathrm{O}(|z|^3) \ .$$

On en déduit aussitôt

$$De_\lambda^\star = \sum_{i,j,\mu} \gamma_{ij\lambda\mu} \, \overline{z}_j dz_i \otimes e_\mu^\star + \mathrm{O}(|z|^2) \ ,$$

$$D^2 e_\lambda^\star = -\sum_{i,j,\mu} \gamma_{ij\lambda\mu} \, dz_i \wedge d\overline{z}_j \otimes e_\mu^\star + \mathrm{O}(|z|) \ ,$$

donc $(\gamma_{ij\lambda\mu})$ s'identifie à la matrice de la forme de courbure $-c(E^\star) = {}^t c(E)$. Par suite $\gamma_{ij\lambda\mu} = c_{ij\mu\lambda}$. Soient $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ les coordonnées sur les fibres de $E^\star$ associées au repère $(e_1^\star, \ldots, e_r^\star)$. Les fibres de $P(E^\star)$ sont alors représentées par les coordonnées affines $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, 1)$ au voisinage de $\alpha_0 = [e_r^\star(a_0)]$. De plus, l'application

$$(z, \xi) \longmapsto \xi_1 e_1^\star + \ldots + \xi_{r-1} e_{r-1}^\star + e_r^\star$$

est une section locale du fibré $O_E(-1)$. On en déduit

(3.7) $$c(O_E(1)) = d'd'' \log |\xi_1 e_1^\star + \ldots + \xi_{r-1} e_{r-1}^\star + e_r^\star|^2 \quad .$$

D'après (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}|\xi_1 e_1^\star + \ldots + \xi_{r-1} e_{r-1}^\star + e_r^\star|^2 = 1 + & \sum_{i,j} c_{ijrr}\, z_i \overline{z}_j + \sum_{\lambda<r} |\xi_r|^2 \\ & + \sum_{i,j,\lambda<r} c_{ijr\lambda}\, z_i \overline{z}_j \xi_\lambda + \sum_{i,j,\mu<r} c_{ij\mu r}\, z_i \overline{z}_j \overline{\xi}_\mu \\ & + \mathrm{O}(|z|^3 + |z|^2 |\xi|^2) \quad .\end{aligned}$$

Après différentiation du logarithme dans (3.7), il vient

(3.8) $$\begin{aligned} c(O_E(1)) = & \sum_{i,j} \big(c_{ijrr} + \mathrm{O}(|z|)\big)\, dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{\lambda<r} d\xi_\lambda \wedge d\overline{\xi}_\lambda \\ & + \sum_{i,j,\lambda<r} c_{ijr\lambda}\, \xi_\lambda dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{i,j,\lambda<r} c_{ijr\lambda}\, z_i d\xi_\lambda \wedge d\overline{z}_j \\ & + \sum_{i,j,\mu<r} c_{ij\mu r}\, \overline{\xi}_\mu dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{i,j,\mu<r} c_{ij\mu r}\, \overline{z}_j dz_i \wedge d\overline{\xi}_\mu \\ & + \mathrm{O}(|z|^2 + |\xi|^2) \quad .\end{aligned}$$

Comme $\omega = i\big(c(O_E(1)) + \frac{1}{k}\pi^\star c(M)\big)$, on en déduit en particulier

(3.9) $$c(O_E(1))_{\alpha_0} = \sum_{i,j} c_{ijrr}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{\lambda<r} d\xi_\lambda \wedge d\overline{\xi}_\lambda \quad ,$$

(3.10) $$\omega_{\alpha_0} = i\Big(\sum_{i,j} \big(c_{ijrr} + \frac{1}{k} c(M)_{ij}(\alpha_0)\big) dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{\lambda<r} d\xi_\lambda \wedge d\overline{\xi}_\lambda\Big) \quad .$$

En calculant dans (3.8) la différentielle extérieure de $c(O_E(1))$ au point α_0 et en posant $c_{ijrr}(z) := c_{ijrr} + \mathrm{O}(|z|)$, on obtient les relations de Kähler

$$\frac{\partial}{\partial z_m} c_{ijrr}(\alpha_0) = \frac{\partial}{\partial z_i} c_{mjrr}(\alpha_0) \quad , \quad 1 \le i, m \le n \quad .$$

Comme $c(M)$ est également kählérienne, il en résulte que les coordonnées locales $(z_1, \ \ldots \ , z_n)$ sur X peuvent être choisies en sorte que

(3.11) $$c_{ijrr}(z) + \frac{1}{k} c(M)_{ij}(z) = \delta_{ij} + \mathrm{O}(|z|^2) \quad .$$

D'après (3.8), la norme des vecteurs de base de $TP(E^\star)$ relativement à la métrique ω est donnée modulo $\mathrm{O}(|z|^2 + |\xi|^2)$ par

$$\langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle \sim \delta_{ij} + \sum_{\lambda<r} c_{ijr\lambda}\, \xi_\lambda + \sum_{\mu<r} c_{ij\mu r}\, \overline{\xi}_\mu \quad , \quad \langle \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda}, \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \rangle \sim \delta_{\lambda\mu} \quad ,$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda}, \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle \sim \sum_i c_{ijr\lambda}\, z_i \quad , \quad \langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \rangle \sim \sum_j c_{ij\mu r}\, \overline{z}_j \quad .$$

Par dualité, on obtient

$$\langle dz_i \, , \, dz_j \rangle \sim \delta_{ij} - \sum_{\lambda<r} \overline{c}_{ijr\lambda}\, \overline{\xi}_\lambda - \sum_{\mu<r} \overline{c}_{ij\mu r}\, \xi_\mu \quad , \quad \langle d\xi_\lambda \, , \, d\xi_\mu \rangle \sim \delta_{\lambda\mu} \quad ,$$

$$\langle d\xi_\lambda \, , \, dz_j \rangle \sim -\sum_i \overline{c}_{ijr\lambda}\, \overline{z}_i \quad , \quad \langle dz_i \, , \, d\xi_\mu \rangle \sim -\sum_j \overline{c}_{ij\mu r}\, z_j \quad .$$

De ces développements limités, on déduit l'expression sur la base $(dz_i\,,\,d\xi_\lambda)$ de la connexion de Chern de $T^\star P(E^\star)$ au point α_0 :

$$D(dz_j)=-\sum_{i,\lambda<r}c_{ijr\lambda}(d\xi_\lambda\otimes dz_i+dz_i\otimes d\xi_\lambda)\quad,\quad D(d\xi_\mu)=0\quad.$$

Le sous-fibré F (resp. le fibré quotient Q) admet au point α_0 la base orthonormée

$$dz_I\wedge d\xi_J\ \text{ avec }\ |I|+|J|=p+s\quad,\quad|I|\geq p\ \ (\text{resp. }|I|\leq p-1)\quad.$$

Soit $f=\sum f_{I,J}\,dz_I\wedge d\xi_J$ une section C^∞ de F . La $(1,0)$–forme $\beta\wedge f$ n'est autre que la projection de Df sur $Q=\Omega/F$. On en déduit

$$\beta\wedge f=-\sum_{i,j,\lambda<r}c_{ijr\lambda}\,dz_i\otimes\big(d\xi_\lambda\wedge\big(\frac{\partial}{\partial z_j}\ \lrcorner\ f\big)\big)\ \ \mathrm{mod}\,F\quad.\tag{3.12}$$

En effet, la dérivation d'un facteur dz_j dans un terme $D(f_{I,J}\,dz_I\wedge d\xi_J)$ abaisse d'une unité le degré partiel $|I|$ lorsque dz_j est dérivé en $c_{ijr\lambda}\,dz_i\otimes d\xi_\lambda$. La partie correspondante de la dérivée est donc dans Q si $|I|=p$. Pour toute $(0,q)$–forme $u=\sum u_{I,J,K,L}\,dz_I\wedge d\xi_J\wedge d\overline{z}_K\wedge d\overline{\xi}_L$, $|I|+|J|=p+s$, $|I|\geq p$, $|K|+|L|=q$ à valeurs dans $F(k)$, on obtient par conséquent

$$\beta\ \lrcorner\ u=-\sum_{i,j,\lambda<r}c_{ijr\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}_i}\ \lrcorner\ \big(d\xi_\lambda\wedge\big(\frac{\partial}{\partial z_j}\ \lrcorner\ u\big)\big)\ \ \mathrm{mod}\,F(k)\quad.\tag{3.13}$$

Dans le calcul de $\beta\ \lrcorner\ u$, seuls interviennent les termes de u dans lesquels $|I|=p$ et $|J|=s$. Ecrivons $v=\beta\ \lrcorner\ u$ sous la forme

$$v=\sum v_{I',J',K',L'}\,dz_{I'}\wedge d\xi_{J'}\wedge d\overline{z}_{K'}\wedge d\overline{\xi}_{L'}\quad,$$

où $|I'|=p-1$, $|J'|=s+1$, $|K'|+|L'|=q-1$. La formule (3.13) implique

$$v_{I',J',K',L'}=\sum_{i,j,\lambda<r}\pm c_{ijr\lambda}\,u_{jI',J'\setminus\{\lambda\},iK',L'}\quad,$$

$$|v_{I',J',K',L'}|^2\leq\Big(\sum_{i,j,\lambda<r}|c_{ijr\lambda}|^2\Big)\Big(\sum_{i,j,\lambda<r}|u_{jI',J'\setminus\{\lambda\},iK',L'}|^2\Big)\quad,$$

$$\sum_{I',J',K',L'}|v_{I',J',K',L'}|^2\leq\Big(\sum_{i,j,\lambda<r}|c_{ijr\lambda}|^2\Big)pq(r-1-s)\sum_{I,J,K,L}|u_{I,J,K,L}|^2\quad.$$

On en déduit donc la majoration

$$|\beta\ \lrcorner\ u|^2\leq pq(r-1-s)\Big(\sum_{i,j,\lambda<r}|c_{ijr\lambda}|^2\Big)\,|u|^2\quad.\tag{3.14}$$

De même, pour toute $(0,q)$–forme $u=\sum u_{I,J,K,L}\,dz_I\wedge d\xi_J\wedge d\overline{z}_K\wedge d\overline{\xi}_L$, $|I|+|J|=p+s$, $|I|\leq p-1$, $|K|+|L|=q$ à valeurs dans $Q(k)$, on obtient

$$\beta^\star\wedge u=-\sum_{i,j,\lambda<r}\overline{c}_{ijr\lambda}\,d\overline{z}_i\wedge\big(dz_j\wedge\big(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda}\ \lrcorner\ u\big)\big)\ \ \mathrm{mod}\,Q(k)\quad,\tag{3.13$'$}$$

$$|\beta^\star\wedge u|^2\leq(n-p+1)(n-q)(s+1)\Big(\sum_{i,j,\lambda<r}|c_{ijr\lambda}|^2\Big)\,|u|^2\quad.\tag{3.14$'$}$$

Il s'agit maintenant d'estimer la quantité $\sum|c_{ijr\lambda}|^2$ sous l'hypothèse (3.11). Celle-ci permet seulement a priori de contrôler les coefficients c_{ijrr} , c'est pourquoi on va remplacer M par le fibré en droites $M_l = (\det E)^l \otimes M$, la courbure de $\det E$ étant

$$c(\det E) = \mathrm{tr}_E\, c(E) = \sum_{i,j} \Big(\sum_{1\le\lambda\le r} c_{ij\lambda\lambda} \Big) dz_i \wedge d\overline{z}_j \quad .$$

L'égalité (3.11) donne alors au point α_0

$$c_{ijrr} + \frac{l}{k} \sum_{1\le\lambda\le r} c_{ij\lambda\lambda} + \frac{1}{k} c(M)_{ij}(\alpha_0) = \delta_{ij} \quad . \tag{3.15}$$

Lemme 3.16. — *Sous l'hypothèse (3.15) on a*

$$\sum_{i,j,\lambda<r} |c_{ijr\lambda}|^2 < \frac{n(n+1)}{4\frac{l}{k}(\frac{l}{k}+1)} \quad \text{si} \quad l > 0 \quad .$$

Démonstration. — Effectuons le changement de variable

$$\sum_{\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu}\, \xi_\lambda \overline{\xi}_\mu = \sum_{\lambda,\mu} c'_{ij\lambda\mu}\, \xi'_\lambda \overline{\xi}'_\mu$$

avec les notations

$$\begin{aligned}
c'_{ijrr} &= \Big(1 + \frac{l}{k}\Big) c_{ijrr} \quad , \quad \xi_r = \sqrt{1 + \frac{l}{k}}\, \xi'_r \quad , \\
c'_{ij\lambda\lambda} &= \frac{l}{k}\, c_{ij\lambda\lambda} \qquad\qquad , \quad \xi_\lambda = \sqrt{\frac{l}{k}}\, \xi'_\lambda \quad \text{si} \quad \lambda < r \quad , \\
c'_{ijr\lambda} &= \sqrt{\frac{l}{k}\Big(1 + \frac{l}{k}\Big)}\, c_{ijr\lambda} \quad \text{si} \;\; \lambda < r \quad .
\end{aligned}$$

La matrice $(c'_{ijr\lambda})$ est positive au sens de Griffiths et le lemme 3.16 est équivalent à l'assertion

$$\Big(\sum_{1\le\lambda\le r} c'_{ij\lambda\lambda} \Big) + \frac{1}{k} c(M)_{ij}(\alpha_0) = \delta_{ij} \implies \sum_{i,j,\lambda<r} |c'_{ijr\lambda}|^2 < \frac{1}{4} n(n+1) \quad . \tag{3.17}$$

Pour démontrer celle-ci, on fait d'abord l'observation suivante : pour toute matrice hermitienne positive $(a_{\lambda\mu})_{1\le\lambda,\mu\le r}$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\sum_{\lambda<r} |a_{r\lambda}|^2 \le \sum_{\lambda<r} a_{\lambda\lambda}\, a_{rr} = a_{rr}(\tau - a_{rr})$$

où $\tau = \sum_{1\le\lambda\le r} a_{\lambda\lambda}$ est la trace de $(a_{\lambda\mu})$ et où $0 \le a_{rr} \le \tau$. Par suite

$$\sum_{\lambda<r} |a_{r\lambda}|^2 \le \frac{1}{4}\tau^2 \quad , \tag{3.18}$$

avec inégalité stricte si la matrice $(a_{\lambda\mu})$ est définie positive. Or pour tout vecteur $t = (t_1, \ \ldots \ , t_n) \in \mathbb{C}^n$, la matrice $a_{\lambda\mu} = \sum_{ij} c'_{ij\lambda\mu}\, t_i \overline{t}_j$ est hermitienne ≥ 0 , et grâce à l'hypothèse de (3.17) on a

$$\tau = \sum_{\lambda} a_{\lambda\lambda} \le \sum_{i,j,\lambda} \big(c'_{ij\lambda\lambda} + \frac{1}{k} c(M)_{ij}(\alpha_0) \big) t_i \overline{t}_j = |t|^2 \quad ,$$

avec inégalité stricte si $M > 0$, $t \neq 0$. De (3.18) on déduit par conséquent

$$\sum_{\lambda<r} \Big| \sum_{i,j} c'_{ijr\lambda}\, t_i \bar t_j \Big|^2 < \frac{1}{4}|t|^4 \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad . \tag{3.19}$$

Appliquons l'inégalité (3.19) au vecteur $t = (e^{i\theta_1},\ \ldots\ , e^{i\theta_n}) \in \mathbb{T}^n$ et intégrons sur le tore $\mathbb{T}^n$. D'après l'identité de Parseval pour les séries de Fourier, on obtient

$$\sum_{\lambda<r} \Big(\sum_{i\neq j} |c'_{ijr\lambda}|^2 + \big|\sum_i c'_{iir\lambda}\big|^2 \Big) < \frac{1}{4} n^2 \quad .$$

L'inégalité (3.19) appliquée aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ donne de même $\sum_{\lambda<r} |c'_{iir\lambda}|^2 < \frac{1}{4}$ pour tout i , d'où l'assertion (3.17) et le lemme. ■

En combinant (3.14), (3.14′) avec le lemme 3.16, il vient

$$|\beta \lrcorner\ u|^2 \le pq(r-1-s) \frac{n(n+1)}{4\frac{l}{k}(\frac{l}{k}+1)} |u|^2 \quad , \tag{3.20}$$

$$|\beta^\star \wedge u|^2 \le (n-p+1)(n-q)(s+1) \frac{n(n+1)}{4\frac{l}{k}(\frac{l}{k}+1)} |u|^2 \quad . \tag{3.20′}$$

Compte tenu du critère (3.5), l'annulation du groupe $H^q(Y, F(k) \otimes \pi^\star(\det E)^l)$ [resp. $H^q(Y, Q(k) \otimes \pi^\star(\det E)^l)$] a lieu pour $p+q+s \ge n+r$ et

$$\frac{4\frac{l}{k}(\frac{l}{k}+1)}{n(n+1)} k(p+q+s-n-r+1) \ge pq(r-1-s) \tag{3.21}$$

$$\text{resp.} \quad \ge (n-p+1)(n-q)(s+1) \quad .$$

Comme (2.8′) implique (2.8) , l'annulation (2.8) a lieu pour $p+q \ge n+r-s$ et (d'après (1.4)) pour $l(1+\frac{l}{k}) \ge \frac{1}{4}n(n+1)N_{p,q,s}$. Comme (2.8) et (2.9) entraînent l'annulation des groupes (2.7) , il vient après substitution de $(\det E)^l \otimes M$ à M :

$$H^{p,q}(X, Z^{s,k}(E) \otimes (\det E)^l \otimes M) = 0 \qquad \text{pour} \tag{3.22}$$

$$p+q \ge n+r-s \quad \text{et} \quad l\Big(1+\frac{l}{k}\Big) \ge \frac{1}{4} n(n+1) \max(N_{p,q,s}\, ,\, N_{p+1,q+1,s-1}) \quad . \tag{3.23}$$

Ceci implique le théorème car $\Lambda^s E \otimes S^{k-s} E = Z^{s,k} E \oplus Z^{s-1,k} E$ d'après (2.1).

Bibliographie

[1] Y. Akizuki and S. Nakano. — *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 266–272.

[2] R. Bott. — *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math., **66** (1957), 203–248.

[3] P.A. Griffiths. — *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton (1969), 185–251.

[4] Th. Peternell, J. le Potier and M. Schneider. — *Vanishing theorems, linear and quadratic normality*, Invent. Math., **87** (1987), 573–586.

[5] Th. Peternell, J. le Potier and M. Schneider. — *Direct images of sheaves of differentials and the Atiyah class*, preprint (1986).

[6] J. Le Potier. — *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe de rang quelconque*, Math. Ann., **218** (1975), 35–53.

[7] M. Schneider. — *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel*, Manuscripta Math., **11** (1974), 95–101.

[8] A.J. Sommese. — *Submanifolds of abelian varieties*, Math. Ann., **233** (1978), 229–256.