BULLETIN DE LA S. M. F.

J.-P. DEMAILLY

Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 75-102.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__75_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 75-102

FORMULES DE JENSEN EN PLUSIEURS VARIABLES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES

PAR

J.-P. DEMAILLY (*)

RÉSUMÉ. — En utilisant une généralisation à plusieurs variables de la formule de Jensen, nous démontrons de nouveaux lemmes de Schwarz dans $\mathbb{C}^n$. La méthode repose sur une minoration des nombres de LELONG d'un courant positif fermé. Nous en déduisons le théorème de E. BOMBIERI sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes, ainsi que quelques résultats nouveaux sur les zéros de polynômes dans $\mathbb{C}^n$.

ABSTRACT. — Using a generalization in several variables of Jensen's formula, we prove new Schwarz' Lemmas in $\mathbb{C}^n$. The method rests upon a lower bound for LELONG numbers of closed positive currents. As a consequence, we find another proof of E. BOMBIERI's Theorem on algebraic values of meromorphic maps, together with some new results concerning zero sets of polynomials in $\mathbb{C}^n$.

0. Introduction

Étant donné un système de $n+1$ fonctions méromorphes d'ordre fini $f=(f_1, \ldots, f_{n+1})$ dans $\mathbb{C}^n$, algébriquement indépendantes et vérifiant des équations différentielles, les points algébriques de f sont situés sur une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^n$. Ce résultat, d'abord démontré par T. Schneider et S. Lang dans le cas $n=1$, a été étendu en plusieurs variables par E. BOMBIERI [1] au moyen des estimations L^2 de L. Hörmander pour l'opérateur $\bar{\partial}$. La méthode de E. Bombieri, qui a été reprise et améliorée ensuite par H. SKODA [8], fournit simultanément une majoration pour le degré de l'hypersurface. Le lecteur pourra consulter l'article récent de P. LELONG [5] pour quelques compléments sur le sujet.

(*) Texte reçu le 9 février 1981, révisé le 23 mai 1981.

J.-P. DEMAILLY, Université de Paris-VI, Laboratoire d'Analyse complexe et Géométrie, Département de Mathématiques, Tour 46-0, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/ 75 /$ 5.00

Le présent travail a pour but de démontrer le théorème de Bombieri sans utiliser les estimations L^2, grâce à une extension convenable de la formule de Jensen en plusieurs variables. Cette extension (*cf.* §1) fait intervenir une généralisation des notions de mesure trace, mesure projective, et nombre de Lelong d'un courant positif fermé (*cf.* P. LELONG [4]). Lorsque la fonction d'exhaustion φ de référence est approximée par une fonction *homogène* ψ, l'utilisation de l'égalité $(i\partial\bar\partial \operatorname{Log} \psi)^n \equiv 0$ fait disparaître le terme correctif de convexité, et conduit à un lemme de Schwarz assez général dans $\mathbb{C}^n$. Le lemme ainsi obtenu nous permet de retrouver le théorème de Bombieri avec une majoration différente, optimale pour $n=2$, du degré des hypersurfaces.

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude des polynômes s'annulant sur un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$ (*cf.* M. WALDSCHMIDT [9] et [10]). Nous avons pu prouver sous certaines hypothèses une conjecture de G. V. CHUDNOVSKY, dont une démonstration partielle (pour le cas $n=2$) a été annoncée dans [2]. A notre connaissance, aucune preuve écrite ne semble toutefois avoir été publiée à ce jour.

L'utilité des formules générales de type Poisson-Jensen m'a été suggérée par un cours de M. H. SKODA, professé à l'Université de Pierre-et-Marie-Curie en 1979. Je remercie vivement MM. Henri SKODA et Michel WALDSCHMIDT pour d'utiles remarques qui ont contribué à améliorer la rédaction du présent travail.

1. Formules générales de type Poisson-Jensen

Les résultats qui suivent sont classiques dans leur principe, et constituent une généralisation naturelle de la méthode employée par P. LELONG [4] pour prouver l'existence des nombres de LELONG d'un courant positif fermé. Nous avons préféré cependant redémontrer toutes les formules, pour en donner une version adaptée aux applications envisagées.

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n \geqslant 1$, φ une fonction de classe C^2, à valeurs dans l'intervalle $]-\infty, R[$, et exhaustive sur X. Pour tous réels $r < R$ et $r_1 < r_2 < R$, on pose :

$$B(r)=\{z\in X;\ \varphi(z)<r\},\qquad S(r)=\{z\in X;\ \varphi(z)=r\},$$
$$\hat B(r)=\{z\in X;\ \varphi(z)\leqslant r\},$$
$$B(r_1, r_2)=\{z\in X;\ r_1\leqslant \varphi(z)<r_2\}=B(r_2)\setminus B(r_1),$$
$$\hat B(r_1, r_2)=\{z\in X;\ r_1<\varphi(z)\leqslant r_2\}=\hat B(r_2)\setminus \hat B(r_1).$$

Par hypothèse, tous ces ensembles sont relativement compacts dans X. Lorsque r est une valeur régulière de φ, l'ensemble $S(r)$ est une hypersurface compacte de classe C^2 de X, qui sera orientée canoniquement par la normale extérieure $d\varphi$. On note enfin :

$$\alpha = i\partial\bar{\partial}(Log\,\varphi) \quad \text{sur l'ouvert } \{\varphi > 0\},$$
$$\beta = i\partial\bar{\partial}\varphi.$$

THÉORÈME 1. — *Soit T une forme de classe C^2 et de bidegré $(n-p, n-p)$ sur X, $1 \leqslant p \leqslant n$. Si r_1 et r_2, $0 < r_1 < r_2 < R$, sont deux valeurs régulières de φ, on a la formule :*

$$(1) \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^p} \int_{B(t)} i\partial\bar{\partial}T \wedge \beta^{p-1}$$
$$= \frac{1}{r_2^p} \int_{S(r_2)} T \wedge \beta^{p-1} \wedge i\bar{\partial}\varphi$$
$$- \frac{1}{r_1^p} \int_{S(r_1)} T \wedge \beta^{p-1} \wedge i\bar{\partial}\varphi - \int_{B(r_1, r_2)} T \wedge \alpha^p.$$

Démonstration. — On peut écrire :

$$\varphi = \lim_{\nu \to +\infty} \varphi_\nu \quad \text{dans } C^2(X; \mathbb{R}),$$

où φ_ν est une suite décroissante de fonctions de classe C^∞ dont les points critiques sont non dégénérés. Quitte à effectuer un passage à la limite, on peut donc supposer que φ est une fonction de *classe C^∞ sans points critiques dégénérés*, de sorte que la formule de Stokes s'applique au domaine $\hat{B}(t)$ à bord éventuellement singulier $\partial B(t) = S(t)$. Désignons par j_t l'injection $S(t) \hookrightarrow X$ (avec $t > 0$ dans toute la suite). Il est clair que :

$$j_t^* \partial\varphi + j_t^* \bar{\partial}\varphi = j_t^* d\varphi = d(\varphi \circ j_t) = 0.$$

Un calcul immédiat fournit d'autre part :

$$\alpha = \frac{i\partial\bar{\partial}\varphi}{\varphi} - \frac{i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi}{\varphi^2},$$

d'où $j_t^* \alpha = j_t^* \beta / t$; il en résulte d'après la formule de Stokes :

$$\int_{B(t)} i\partial\bar{\partial}T \wedge \beta^{p-1} = \int_{B(t)} -d(i\partial T \wedge \beta^{p-1})$$
$$= -\int_{S(t)} i\partial T \wedge \beta^{p-1} = -t^{p-1} \int_{S(t)} i\partial T \wedge \alpha^{p-1}.$$

On obtient donc :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^p} \int_{B(t)} i\partial\bar{\partial} T \wedge \beta^{p-1} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{S(t)} i\partial T \wedge \alpha^{p-1}$$

$$= -\int_{B(r_1, r_2)} \mathrm{id\,Log}\,\varphi \wedge \partial T \wedge \alpha^{p-1}.$$

Comme les formes de bidegré $(n+1, n-1)$ et $(n-1, n+1)$ sont nulles, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{id\,Log}\,\varphi \wedge \partial T \wedge \alpha^{p-1} &= i\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge \partial T \wedge \alpha^{p-1} \\ &= i\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge dT \wedge \alpha^{p-1} \\ &= -d(T \wedge \alpha^{p-1} \wedge i\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,\varphi) + T \wedge \alpha^p. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la formule de Stokes, la dernière intégrale s'écrit :

$$\int_{\partial B(r_1, r_2)} T \wedge \alpha^{p-1} \wedge i\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,\varphi - \int_{B(r_1, r_2)} T \wedge \alpha^p,$$

expression qui est égale précisément au second membre de la formule (1), compte tenu de l'égalité $j_t^* \alpha = j_t^* \beta / t$. ■

Les corollaires 1, 2, 3, 4 qui suivent sont des conséquences simples mais fondamentales du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Soit T un courant fermé d'ordre* 0 *sur X (i.e. $dT=0$ et les coefficients de T sont des mesures de Radon), de bidegré $(n-p, n-p)$. Alors pour tout r_1, r_2, $0 < r_1 < r_2 < R$, on a les égalités :*

$$(2) \qquad \frac{1}{r_2^p} \int_{B(r_2)} T \wedge \beta^p - \frac{1}{r_1^p} \int_{B(r_1)} T \wedge \beta^p = \int_{B(r_1, r_2)} T \wedge \alpha^p.$$

$$(\hat{2}) \qquad \frac{1}{r_2^p} \int_{\bar{B}(r_2)} T \wedge \beta^p - \frac{1}{r_1^p} \int_{\bar{B}(r_1)} T \wedge \beta^p = \int_{\bar{B}(r_1, r_2)} T \wedge \alpha^p,$$

Démonstration. — La deuxième ligne se déduit de la première en remplaçant r_1, r_2 par $r_1+\varepsilon$, $r_2+\varepsilon$ et en faisant tendre ε vers zéro. Comme dans le théorème 1, on peut supposer que φ est de classe C^∞ et que φ admet r_1, r_2 pour valeurs régulières (sinon écrire $\varphi = \lim\downarrow \varphi_\nu$ et appliquer le théorème de convergence dominée). Si T est une $(n-p, n-p)$ forme de classe C^2, le théorème 1 fournit, après application de la formule de Stokes :

$$(3)\quad \frac{1}{r_2^p}\int_{B(r_2)} T\wedge\beta^p - \frac{1}{r_1^p}\int_{B(r_1)} T\wedge\beta^p - \int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p$$
$$= \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^p}\int_{B(t)} i\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1} - \frac{1}{r_2^p}\int_{B(r_2)} dT\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar\partial\varphi$$
$$+\frac{1}{r_1^p}\int_{B(r_1)} dT\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar\partial\varphi.$$

La conclusion résulte donc de l'affirmation suivante.

LEMME 1. — *L'égalité* (3) *est vraie pour tout courant T de bidegré* $(n-p, n-p)$ *qui est d'ordre* 0 *ainsi que ses différentielles dT, $i\partial\bar\partial T$.*

Démonstration. — En utilisant une partition de l'unité, on se ramène aussitôt au cas où le courant T est à support dans une carte locale. Comme tous les termes de l'égalité (3) sont continus à gauche par rapport à r_1, r_2, il suffit en fait de vérifier l'égalité (3) pour un ensemble dense de valeurs de r_1, r_2. On observe que l'ensemble D des réels $t>0$ tels que $S(t)$ ne soit pas négligeable pour l'une des mesures coefficients de T, dT ou $i\partial\bar\partial T$ est au plus dénombrable. Soit alors (ρ^ε) une famille de noyaux de convolution dans la carte locale considérée. Appliquons l'égalité (3) à la forme régularisée $T\star\rho^\varepsilon$; il vient, en notant $\chi_{B(r_1)}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $B(r_1)$:

$$\int_{B(r_1)}(T\star\rho^\varepsilon)\wedge\beta^p = \int T\wedge[\rho^\varepsilon\star(\chi_{B(r_1)}\beta^p)] \to \int T\wedge\chi_{B(r_1)}\beta^p \text{ si } \quad r_1\notin D,$$

car $(\chi_{B(r_1)}\beta^p)\star\rho^\varepsilon$ converge simplement vers $\chi_{B(r_1)}\beta^p$ sur le complémentaire de l'ensemble T-négligeable $S(r_1)$.

On raisonne de même pour les autres termes (avec $r_2\notin D$, $t\notin D$). ■

On rappelle qu'un courant T de bidegré $(n-p, n-p)$ est dit (faiblement) positif si le (n, n)-courant :

$$i^p T\wedge u_1\wedge\bar u_1\wedge\ldots\wedge u_p\wedge\bar u_p,$$

est une mesure positive, pour tout système $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de $(1, 0)$-formes de classe C^∞. T est alors un courant d'ordre nul. Le corollaire 1 entraîne immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. — *On suppose que la fonction* Log φ *est plurisousharmonique sur l'ouvert* $\{\varphi>0\}$. *Alors, pour tout courant* positif fermé T *de bidegré* $(n-p, n-p)$ *sur* X, *la fonction positive :*

$$r \mapsto \frac{1}{r^p}\int_{B(r)} T\wedge\beta^p,$$

est croissante par rapport à r. *En particulier, la limite :*

$$\lim_{r>0,\, r\to 0}\frac{1}{r^p}\int_{B(r)} T\wedge\beta^p,$$

existe toujours.

Le corollaire 2 est classique lorsque $X=\mathbb{C}^n$, et $\varphi(z)=|z|^2=|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2$ (P. LELONG [4]). On désigne alors par :

$$\sigma_T=T\wedge\frac{\beta^p}{2^p p!},\quad \text{la « mesure trace » de } T,$$

$$\nu_T=\frac{1}{(2\pi)^p}\,T\wedge\alpha^p,\quad \text{la « mesure projective » de } T,$$

de sorte qu'on a la formule :

$$\frac{p!}{\pi^p r_2^{2p}}\int_{B(r_2)} d\sigma_T-\frac{p!}{\pi^p r_1^{2p}}\int_{B(r_1)} d\sigma_T=\int_{B(r_1,\, r_2)} d\nu_T,$$

avec la notation usuelle $B(r)=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<r\}$.

La limite $\nu_T(0)=\lim_{r\to 0} p!/\pi^p r^{2p}\int_{B(r)} d\sigma_T$ est appelée nombre de LELONG du courant T au point 0.

Nous allons maintenant examiner le cas important $p=n$.

COROLLAIRE 3. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique sur* X, r_1, r_2 *deux valeurs régulières de* φ. *On a :*

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^n}\int_{B(t)} i\partial\bar\partial V\wedge\beta^{n-1}=\frac{1}{r_2^n}\int_{S(r_2)} V\beta^{n-1}\wedge i\bar\partial\varphi$$
$$-\frac{1}{r_1^n}\int_{S(r_1)} V\beta^{n-1}\wedge i\bar\partial\varphi-\int_{B(r_1,\, r_2)} V\alpha^n.$$

Démonstration. — Soit (U_j) un recouvrement de X par des domaines de cartes $U_j \subset\subset X$, (ψ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_j), (ρ_j^ε) une famille de noyaux régularisants à symétrie sphérique dans l'ouvert U_j. On applique la formule (1) à la suite de fonctions C^∞ :

$$T_\nu = \sum_j \psi_j . V \star \rho_j^{1/\nu},$$

qui converge simplement vers V en décroissant. On raisonne alors comme dans le lemme 1, en utilisant le fait que V et dV sont dans L^1_{loc}, et que le courant positif $i\partial\bar\partial V$ est d'ordre 0. Les détails sont laissés au lecteur. ■

COROLLAIRE 4. — *On suppose que toutes les valeurs critiques positives de* φ *sont non dégénérées, que la fonction* Log φ *est plurisousharmonique sur l'ouvert* $\{\varphi > 0\}$, *et que la forme* α^n est identiquement nulle. *Alors on a la formule :*

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^n} \int_{B(t)} i\partial\bar\partial V \wedge \beta^{n-1} = \frac{1}{r_2^n} \int_{S(r_2)} V\beta^{n-1} \wedge i\bar\partial\varphi - \frac{1}{r_1^n} \int_{S(r_1)} V\beta^{n-1} \wedge i\bar\partial\varphi,$$

et la fonction $r \mapsto 1/r^n \int_{S(r)} V\beta^{n-1} \wedge i\bar\partial\varphi$ *est croissante convexe par rapport à* Log r.

Démonstration. — La dérivée à gauche :

$$\frac{d^-}{d\,\mathrm{Log}\,r}\left(\frac{1}{r^n}\int_{S(r)} V\beta^{n-1} \wedge i\bar\partial\varphi\right),$$

existe, et elle est donnée par l'expression :

$$\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(r)} i\partial\bar\partial V \wedge \beta^{n-1},$$

qui est fonction croissante de Log r (corollaire 2). ■

Dans $\mathbb{C}^n$, si on choisit $\varphi(z) = |z|^2$, on vérifie que :

$$\alpha^n \equiv 0,$$

$$i\partial\bar\partial V \wedge \beta^{n-1} = \frac{1}{4n}\Delta V.\beta^n = 2^{n-2}(n-1)!\,\Delta V.d\lambda,$$

$$j_r^*(\beta^{n-1} \wedge i\bar\partial\varphi) = 2^{n-1}(n-1)!\,r\,dS,$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$, et dS la mesure superficielle de la sphère $S(r) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| = r\}$. L'égalité du corollaire 4 se transcrit donc sous la forme classique :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} \Delta V . d\lambda = \frac{1}{r_2^{2n-1}} \int_{S(r_2)} V dS - \frac{1}{r_1^{2n-1}} \int_{B(r_1)} V dS.$$

2. Estimation des nombres de Lelong

Dans les applications à la théorie des nombres, nous utiliserons les formules précédentes pour des courants du type :

$$T = \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial} \operatorname{Log} |F|,$$

où F est une fonction entière. D'après l'équation de Lelong-Poincaré, T est le courant d'intégration sur le cycle analytique défini par F; T est donc un courant positif fermé de bidegré (1, 1).

Dans ce paragraphe, nous supposerons plus généralement que F est une fonction analytique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$; la fonction plurisousharmonique V sera le potentiel $V = \operatorname{Log} |F|$ du courant $T = (i/\pi) \partial\bar{\partial} \operatorname{Log} |F|$, et on choisira pour φ une fonction du type :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} |F_j|^2,$$

où les fonctions F_j sont analytiques sur Ω. Dans ces conditions, il est aisé de minorer le « nombre de Lelong généralisé », égal à la limite quand r tend vers zéro de la fonction :

$$r \mapsto \frac{1}{(2\pi r)^{n-1}} \int_{B(r)} T \wedge \beta^{n-1},$$

(fonction qui est croissante d'après le corollaire 2).

PROPOSITION 1. — *Soit z_0 un point de Ω, ω un voisinage ouvert de z_0 relativement compact dans Ω. On suppose que les fonctions $F, F_1, F_2, \ldots, F_N$ s'annulent en z_0 aux ordres $s, s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N$* et que le nombre :

$$R = \inf_{z \in \partial\omega} \varphi(z),$$

est > 0. Alors pour tout $r \in]0, R[$, on a :

$$\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}} \int_{B(r) \cap \omega} T \wedge \beta^{n-1} \geqslant s \; s_1 \; \ldots \; s_{n-1} \quad (^1).$$

(1) Ces estimations sont en fait valables dans une situation beaucoup plus générale, et nous ont permis d'encadrer les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé (*voir* [3]).

Démonstration. — Notons que d'après les hypothèses, l'ensemble analytique $\{z \in \omega;\ F_1(z) = \ldots = F_N(z) = 0\}$ est compact, donc fini, ce qui entraîne $N \geqslant n$. Le résultat est clair pour $n = 1$. Dans le cas général $n \geqslant 2$, nous procéderons d'abord à quelques réductions, et nous poserons $z_0 = 0$ pour simplifier.

Étape 1. — Soient $P_1, \ldots, P_N$ les polynômes homogènes de degré $s_1, \ldots, s_N$ égaux aux parties principales des développements de Taylor de $F_1, \ldots, F_N$ au point 0. Il n'est pas restrictif de supposer que les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ s'annulent simultanément *au seul point* 0.

En effet, les polynômes homogènes $P_1, \ldots, P_n$ de degré $s_1, \ldots, s_n$ qui ne vérifient pas cette condition, constituent un ensemble algébrique A dans l'espace $\mathbb{C}^d$ des familles de coefficients. Il suffit donc de substituer à $F_1, \ldots, F_n$ des fonctions $F_1^\varepsilon, \ldots, F_n^\varepsilon$, telles que $|F_j^\varepsilon - F_j| \leqslant \varepsilon$ sur $\bar{\omega}$, obtenues en approchant les parties principales de $F_1, \ldots, F_n$ par des polynômes $P_1^\varepsilon, \ldots, P_n^\varepsilon$ dont le point représentatif est situé dans $\mathbb{C}^d \setminus A$.

On remplace φ par la fonction de classe C^2 :

$$\varphi_\varepsilon(z) = \textstyle\sum_{j=1}^n |F_j^\varepsilon(z)|^2 + (C\,|z|)^\varepsilon \sum_{j=n+1}^N |F_j(z)|^2,$$

et on choisit les constantes :

$$C = \sup_{\omega \setminus B(r)} \frac{1}{|z|}, \qquad r_\varepsilon = (\sqrt{r} - \varepsilon\sqrt{n})^2, \qquad \varepsilon < \sqrt{\frac{r}{n}},$$

de sorte que les conditions $z \in \omega$, $\varphi_\varepsilon(z) < r_\varepsilon$ entraînent $\varphi(z) < r$. Si l'on pose $\beta_\varepsilon = i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$, et si l'on fait tendre ε vers zéro, le théorème de convergence dominée montre que :

$$\frac{1}{(2\pi r_\varepsilon)^{n-1}} \int_{\{z\in\omega;\ \varphi_\varepsilon(z) < r_\varepsilon\}} T \wedge \beta_\varepsilon^{n-1} \to \frac{1}{(2\pi r)^{n-1}} \int_{B(r)\cap\omega} T \wedge \beta^{n-1},$$

donc il suffit de démontrer l'inégalité pour le membre de gauche.

Étape 2. — Nous allons maintenant nous débarrasser des fonctions $F_{n+1}, \ldots, F_N$.

Posons $R_\varepsilon = \inf_{z\in\partial\omega} \varphi_\varepsilon(z)$, de sorte que $R_\varepsilon \geqslant (\sqrt{R} - \varepsilon\sqrt{n})^2 > r_\varepsilon$. D'après le corollaire 2, appliqué à la variété :

$$X = \{z \in \omega;\ \varphi_\varepsilon(z) < R_\varepsilon\},$$

l'expression :

$$\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\{z\in\omega;\,\varphi_\varepsilon(z)<\rho\}} T\wedge\beta_\varepsilon^{n-1},$$

est fonction croissante de ρ dans l'intervalle $]0, R_\varepsilon[$, car la fonction $\operatorname{Log}\varphi_\varepsilon$ est plurisousharmonique. Vu les hypothèses sur les parties principales des fonctions $F_1^\varepsilon, \ldots, F_n^\varepsilon, F_{n+1}, \ldots, F_N$, il est clair que :

$$\textstyle\sum_{j=1}^n |F_j^\varepsilon(z)|^2 \geqslant C_1|z|^{2s_n},$$
$$(C|z|)^\varepsilon \textstyle\sum_{j=n+1}^N |F_j(z)|^2 \leqslant C_2|z|^{2s_{n+1}+\varepsilon} \leqslant C_3|z|^{2s_n+\varepsilon},$$

avec des constantes $C_1, C_2, C_3>0$. Par suite, la fonction φ_ε est équivalente à la fonction :

$$\psi_\varepsilon(z)=\textstyle\sum_{j=1}^n |F_j^\varepsilon(z)|^2,$$

lorsque $|z|$ tend vers zéro. Comme $\beta_\varepsilon \geqslant \gamma_\varepsilon = i\partial\bar\partial\psi_\varepsilon$ et comme le courant T est positif, il en résulte :

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\{z\in\omega;\,\varphi_\varepsilon(z)<\rho\}} T\wedge\beta_\varepsilon^{n-1}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\{z\in\omega;\,\psi_\varepsilon(z)<\rho\}} T\wedge\beta_\varepsilon^{n-1}$$
$$\geqslant\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\{z\in\omega;\,\psi_\varepsilon(z)<\rho\}} T\wedge\gamma_\varepsilon^{n-1}.$$

Étape 3. — En définitive, on peut supposer que $N=n$, et que les parties principales $P_1, \ldots, P_n$ des fonctions $F_1, \ldots, F_n$ n'ont pas d'autre zéro commun que 0. Dans ces conditions, on a le lemme suivant, qui est le point crucial de la démonstration.

LEMME 2. — *Il existe un voisinage U de* 0 *dans* ω, *une boule euclidienne D de centre* 0 *et de rayon* $\sqrt{R'}<\sqrt{R}$ *dans* $\mathbb{C}^n$, *et un ensemble analytique* $Y\subset D$ *tels* *que l'application* $f=(F_1, \ldots, F_n)$ *soit un revêtement :*

$$U \setminus f^{-1}(Y) \rightarrow D \setminus Y,$$

à $s_1 s_2 \ldots s_n$ *feuillets.*

Esquisse de démonstration du lemme 2. — Les hypothèses entraînent que le point 0 est isolé dans la fibre $f^{-1}(0)$; l'existence du revêtement ramifié décrit dans l'énoncé en découle (*cf.* par exemple R. NARASIMHAN [7]).

Il reste à montrer que le nombre de feuillets ν vaut $s_1 s_2 \ldots s_n$ (on notera que ν est constant au-dessus de la base $D \setminus Y$ par connexité de celle-ci). Effectuons à cet effet un « changement d'échelle », en remplaçant les fonctions $F_1, \ldots, F_n$ et l'application f par :

$$F_{j,0}(z)=P_j(z), \qquad F_{j,\lambda}(z)=\lambda^{-s_j} F_j(\lambda z) \qquad \text{si} \quad 0<|\lambda| \leqslant 1,$$
$$f_\lambda=(F_{1,\lambda}, \ldots, F_{n,\lambda}),$$

où le nombre complexe λ tend vers zéro. Le théorème des fonctions implicites montre que $\nu=\nu(\lambda)$ est localement constant au voisinage de $\lambda=0$, donc indépendant de λ. On est donc ramené à montrer que l'application :

$$p=(P_1, \ldots, P_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow C^n,$$

est un revêtement ramifié à $s_1 s_2 \ldots s_n$ feuillets, lorsque le point $(P_1, \ldots, P_n)$ est dans le complémentaire $\mathbb{C}^d \setminus A$ de l'ensemble algébrique A (pour la définition de A, *voir* le début de l'étape 1). Il suffit d'observer comme ci-dessus que lorsque $(P_1, \ldots, P_n)$ décrit $\mathbb{C}^d \setminus A$, le nombre de feuillets ν reste localement constant; ν est donc constant par connexité de $\mathbb{C}^d \setminus A$. Comme l'égalité :

$$\nu=s_1 s_2 \ldots s_n,$$

est d'autre part évidente si l'on choisit $P_j(z)=z_j^{s_j}$, la conclusion s'ensuit. ■

Achevons maintenant la preuve de la proposition 1. On peut supposer que l'ensemble $f^{-1}(Y)$ du lemme 2 ne contient aucune composante irréductible de l'hypersurface $U \cap F^{-1}(0)$: sinon modifier les fonctions $F_1, \ldots, F_n$ en appliquant une « petite » rotation dans l'espace des variables $(z_1, \ldots, z_n)$ et raisonner comme à l'étape 1. Lorsque $r<R'$ ($\sqrt{R'}$ = rayon de la boule D du lemme 2), on peut effectuer le changement de variable :

$$w=(w_1, \ldots, w_n)=(F_1(z), \ldots, F_n(z));$$

on obtient :

$$\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{B(r)\cap\omega} T\wedge\beta^{n-1}=\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{\{z\in U\setminus f^{-1}(Y);\,\varphi(z)<r\}}\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|F|\wedge\beta^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{\{w\in D\setminus Y;\,|w|^2<r\}}\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|G|\wedge\eta^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{|w|^2<r}\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|G|\wedge\eta^{n-1},$$

avec $\eta=i\partial\bar\partial|w|^2$, $G(w)=\prod_{z\in f^{-1}(w)}F(z)$. La fonction G, qui est définie *a priori* sur $D\setminus Y$, est localement bornée au voisinage de Y, donc se prolonge en une fonction analytique dans la boule D. On va minorer l'ordre d'annulation q de G au point 0. On a vu plus haut (étape 2) qu'on avait :

$$|w|^2=\sum_{j=1}^n|F_j(z)|^2\geqslant C_4|z|^{2s_n},$$

lorsque $|z|$ est assez petit; par suite $|z|\leqslant C_5|w|^{1/s_n}$ et :

$$|G(w)|\leqslant C_6(|w|^{s/s_n})^{s_1\ldots s_n}=C_6|w|^{ss_1\ldots s_{n-1}},$$

d'où $q\geqslant ss_1\ldots s_{n-1}$. La proposition 1 résulte de l'égalité classique :

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{|w|^2<r}\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|G|\wedge\eta^{n-1}=q.\quad\blacksquare$$

Nous aurons besoin également du résultat suivant, qui se démontre de manière analogue.

PROPOSITION 2. — *Soient $P, P_1, P_2, \ldots, P_N$ des polynômes de degrés respectifs $\delta, \delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\ldots\geqslant\delta_N$ dans $\mathbb{C}^n$, tels que la fonction :*

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^N|P_j(z)|^2,$$

soit exhaustive, et doit $T=i/\pi\,\partial\bar\partial$ Log $|P|$, $\beta=i\partial\bar\partial\varphi$. Alors :

$$\lim_{r\to+\infty}\uparrow\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{B(r)}T\wedge\beta^{n-1}\leqslant\delta\delta_1\ldots\delta_{n-1}.$$

Démonstration. — Les hypothèses entraînent que $N \geq n$. Posons :

$$w=(w_1, \ldots, w_n)=(P_1(z), \ldots, P_n(z)),$$
$$\varphi_\varepsilon(z)=|w|^2+(\varepsilon+\textstyle\sum_{j=n+1}^N |P_j(z)|^2)^{1-\varepsilon},$$
$$\beta_\varepsilon=i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon, \qquad \eta=i\partial\bar{\partial}|w|^2.$$

Il vient :

$$(4) \qquad \frac{1}{(2\pi r)^{n-1}}\int_{B(r)} T\wedge\beta^{n-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi r_\varepsilon)^{n-1}}\int_{\varphi_\varepsilon(z)<r_\varepsilon} T\wedge\beta^{n-1},$$

où $r_\varepsilon=\inf_{\varphi(z)=r}\varphi_\varepsilon$ tend vers r quand ε tend vers zéro.

D'autre part, le corollaire 2 montre que :

$$(5) \quad \frac{1}{(2\pi r_\varepsilon)^{n-1}}\int_{\varphi_\varepsilon(z)<r_\varepsilon} T\wedge\beta_\varepsilon^{n-1}\leqslant\lim_{\rho\to+\infty}\uparrow\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} T\wedge\beta_\varepsilon^{n-1}.$$

Soient maintenant $u_1, u_2, \ldots, u_{n^2}$ des formes linéaires en $z_1, \ldots, z_n$ telles que le système de (1, 1) formes positives :

$$i\,du_j\wedge d\bar{u}_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant n^2,$$

constitue une base de l'espace vectoriel des (1, 1)-formes. Si l'on procède comme dans la démonstration précédente, on est amené à faire les hypothèses supplémentaires (6), (7) qui suivent :

(6) Les parties homogènes de plus haut degré de n quelconques des $1+n+n^2$ polynômes :

$$P, P_1, \ldots, P_n, u_1, \ldots, u_{n^2},$$

n'ont pas d'autre zéro commun que le point 0 (sinon modifier légèrement $P_1, \ldots, P_n, u_1, \ldots, u_{n^2}$).

(7) Il existe une petite constante $c>0$ telle que :

$$\textstyle\sum_{j=n+1}^N |P_j(z)|^2\geqslant c|z|^{2\delta_n},$$

(augmenter au besoin N, et introduire des polynômes de degré δ_n ayant de petits coefficients).

Il est clair qu'on a des égalités de la forme :

$$\beta_\varepsilon=\eta+\textstyle\sum_{j=1}^{n^2} a_j(z)\,du_j\wedge d\bar{u}_j.$$

$$(8) \qquad \beta_\varepsilon^{n-1}=\eta^{n-1}+\textstyle\sum_{|I|+|J|=n-1,|J|\geqslant 1} a_{I,J}(z)\,dw_I\wedge d\bar{w}_I\wedge du_J\wedge d\bar{u}_J,$$

où la somme est étendue aux multi-indices croissants :

$$I=\{i_1, \ldots, i_k\}\subset\{1, 2, \ldots, n\}, \qquad J=\{j_1, \ldots, j_l\}\subset\{1, 2, \ldots, n^2\},$$

et où :

$$|I|=k, \quad |J|=l, \quad dw_I=dw_{i_1}\wedge \ldots \wedge dw_{i_k},$$
$$du_J=du_{j_1}\wedge \ldots \wedge du_{j_l}.$$

L'inégalité (7) entraîne :

$$(9) \qquad \begin{cases} |a_j(z)| \leqslant C_1(1+|z|^2)^{\delta_n(1-\varepsilon)-1}, \\ |a_{I,J}(z)|^{1/|J|} \leqslant C_2(1+|z|^2)^{\delta_n(1-\varepsilon)-1}. \end{cases}$$

En vertu de la condition (6), on a de plus :

$$(10) \qquad 1+|z|^2 \leqslant C_3(1+|w|^2)^{1/\delta_n}$$

et l'inégalité $|w|^2<\rho$ implique :

$$(11) \qquad u^2=\textstyle\sum_{j=1}^{n^2}|u_j|^2 \leqslant C_4(1+\rho)^{1/\delta_n}.$$

D'après le lemme 2, l'application :

$$p: \quad z=(z_1, \ldots, z_n)\mapsto w=(P_1(z), \ldots, P_n(z)),$$

réalise un revêtement ramifié de $\mathbb{C}^n$ à $\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_n$ feuillets. De même, pour tout couple de multi-indices $I\subset\{1, 2, \ldots, n\}$, $J\subset\{1, 2, \ldots, n^2\}$ tels que $|I|+|J|=n-1$, l'application :

$$(12) \qquad (z_1, \ldots, z_n)\mapsto(P(z), (w_j)_{j\in I}, (u_j(z))_{j\in J}),$$

est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}^n$ (à, disons, $\nu_{I,J}$ feuillets). On obtient comme à l'étape 3 de la proposition 1 :

$$(13) \quad \limsup_{\rho\to+\infty}\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} T\wedge\eta^{n-1}$$
$$\leqslant \lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}}\int_{|w|^2<\rho}\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|Q|\wedge\eta^{n-1},$$

où :

$$Q(w)=\textstyle\prod_{z\in p^{-1}(w)}P(z).$$

Comme $|Q(w)| \leq [C_5(1+|w|)^{1/\delta_n}]^{\delta\delta_1 \ldots \delta_n}$, Q se prolonge en un polynôme de degré $q \leq \delta\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$, et on a donc classiquement :

$$(14) \quad \lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{(2\pi\rho)^{n-1}} \int_{|w|^2<\rho} \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial} \operatorname{Log}|Q| \wedge \eta^{n-1} = q \leq \delta\delta_1 \ldots \delta_{n-1}.$$

Il nous reste à majorer les termes correctifs issus de l'identité (8). On a, en posant $m=|I|^2+|J|^2$:

$$\left| \int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} T \wedge a_{I,J}(z)\, dw_I \wedge d\bar{w}_I \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J \right|$$
$$\leq \sup_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} |a_{I,J}(z)| \cdot \int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} \frac{i^{m+1}}{\pi} \partial\bar{\partial} \operatorname{Log}|P| \wedge dw_I \wedge d\bar{w}_I \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J,$$

car les courants $(i/\pi)\, \partial\bar{\partial}$ Log $|P|$ et $i^m\, dw_I \wedge d\bar{w}_I \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J$ sont positifs; l'utilisation du changement de variable (12), combinée à l'inégalité (11), fournit :

$$\int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} \frac{i^{m+1}}{\pi} \partial\bar{\partial} \operatorname{Log}|P| \wedge dw_I \wedge d\bar{w}_I \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J$$
$$\leq \nu_{I,J} \int_{P=0,\,|w|^2<\rho,\,|u|^2<C_4(1+\rho)^{1/\delta_n}} i^m\, dw_I \wedge d\bar{w}_I \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J$$
$$\leq \nu_{I,J}(2\pi\rho)^{|I|}(2\pi C_4(1+\rho)^{1/\delta_n})^{|J|}.$$

Les inégalités (9), (10) et (11) entraînent d'autre part :

$$\sup_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} |a_{I,J}(z)| \leq [C_2\,(C_3\,(1+\rho)^{1/\delta_n})^{\delta_n(1-\varepsilon)-1}]^{|J|},$$

on obtient donc (compte tenu de ce que $|I|+|J|=n-1$) :

$$(15) \quad \left| \int_{\varphi_\varepsilon(z)<\rho} T \wedge a_{I,J}(z)\, dw_I \wedge d\bar{w}_J \wedge du_J \wedge d\bar{u}_J \right| \leq C_6(1+\rho)^{n-1-\varepsilon|J|}.$$

La conclusion se déduit des lignes (4), (5), (8), (13), (14), (15). ■

Les propositions 1 et 2 admettent les conséquences suivantes (corollaires 5 et 6), qui nous seront utiles ultérieurement.

COROLLAIRE 5. — *Soient $F_1, \ldots, F_N$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, qui s'annulent respectivement aux ordres $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_N$ en un point $z_0 \in \Omega$.*

On pose $\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}|F_j(z)|^2$, $\beta=i\partial\bar\partial\varphi$, *et on suppose donné un voisinage ouvert* $\omega\subset\subset\Omega$ *de* z_0 *tel que le nombre :*

$$R=\inf_{z\in\partial\omega}\varphi(z),$$

soit >0. *Alors pour tout* $r\in]0, R[$ *on a :*

$$\frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{B(r)\cap\omega}\beta^n\geqslant s_1 s_2\ldots s_n.$$

On voit que la quantité $\lim_{r\to 0}\uparrow 1/(2\pi r)^n\int_{B(r)\cap\omega}\beta^n$ doit être considérée comme une « multiplicité d'intersection » au point z_0 des cycles analytiques définis par les fonctions F_j; il resterait à en trouver une interprétation géométrique précise.

Démonstration. — On identifie $\mathbb{C}^n$ à l'hyperplan $z_{n+1}=0$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. On pose :

$$F(z_1,\ldots,z_{n+1})=z_{n+1},\qquad T=\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\,\mathrm{Log}\,|F|,$$

$$F_{N+1}(z_1,\ldots,z_{n+1})=z_{n+1}^{s_{N+1}},\qquad \text{avec}\quad s_{N+1}\geqslant s_N,$$

$$\psi(z)=\sum_{j=1}^{N+1}|F_j(z)|^2,\qquad \gamma=i\partial\bar\partial\psi.$$

Comme T est le courant d'intégration sur l'hyperplan $\mathbb{C}^n$, il est clair que :

$$\frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{B(r)\cap\omega}\beta^n=\frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{\psi(z)<r,(z_1,\ldots,z_n)\in\omega}T\wedge\gamma^n,$$

et il suffit donc d'appliquer la proposition 1, avec $s=1$. ■

En plongeant de même $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$, la proposition 2 entraîne :

COROLLAIRE 6. — *Soient* $P_1,\ldots,P_N$ *des polynômes de degrés respectifs* $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\ldots\geqslant\delta_N$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *tels que la fonction :*

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}|P_j(z)|^2,$$

soit exhaustive et soit $\beta=i\,\partial\bar\partial\varphi$. *Alors :*

$$\lim_{r\to+\infty}\uparrow\frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{\varphi(z)<r}\beta^n\leqslant\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_n.$$

3. Un lemme de Schwarz dans $\mathbb{C}^n$

On considère comme précédemment une fonction entière F dans $\mathbb{C}^n$, et des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_N$ de degré δ, dont les parties homogènes de plus haut degré $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ admettent pour *unique zéro commun le point* 0. On pose :

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}|P_j(z)|^2, \qquad \beta=i\partial\bar{\partial}\varphi,$$

$$T=\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|F|, \qquad |F|_r=\sup_{|z|\leqslant r}|F(z)|.$$

Les formules de Jensen du paragraphe 1 permettent de minorer la quantité $\operatorname{Log}|F|_R/|F|_r$ par la masse moyenne du courant T relativement à la forme β.

THÉORÈME 2. — *Il existe une constante* $C\in]0, 1]$ *ne dépendant que des polynômes* $P_1, \ldots, P_N$ *telle que pour tout* $R\geqslant r\geqslant 1$ *on ait :*

$$\int_{r^{2\delta}}^{CR^{2\delta}}\frac{dt}{t^n}\int_{\varphi(z)<t}T\wedge\beta^{n-1}\leqslant(2\delta)^n\pi^{n-1}\operatorname{Log}\frac{|F|_R}{|F|_r}.$$

Démonstration. — Procédons d'abord à une première réduction. D'après le principe du maximum on a $|F|_r=|F(a)|$ avec $|a|=r$; effectuons une dilatation de l'espace de manière à nous ramener à la situation dans laquelle $r=1$, $a=0$.

Posons :

$$\varphi_a(z)=\frac{1}{r^{2\delta}}\varphi(rz+a), \qquad \psi(z)=\sum_{j=1}^{N}|Q_j(z)|^2,$$

$$\beta_a=i\partial\bar{\partial}\varphi_a, \qquad \gamma=i\partial\bar{\partial}\psi,$$

$$F_a(z)=F(rz+a), \qquad T_a=\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|F_a|.$$

Pour tout $R\geqslant r$, l'inégalité du théorème 2 résultera de l'inégalité :

$$\int_{1}^{C(R/r)^{2\delta}}\frac{dt}{t^n}\int_{\varphi_a(z)<t}T_a\wedge\beta_a^{n-1}\leqslant(2\delta)^n\pi^{n-1}\operatorname{Log}\frac{|F_a|_{(R-|a|)/r}}{|F_a(0)|},$$

soit, quitte à remplacer (F_a, T_a) par (F, T) et R par $rRC^{-1/2\delta}$:

$$\int_{1}\frac{dt}{t^n}\int_{\varphi_a(z)<t}T\wedge\beta_a^{n-1}\leqslant(2\delta)^n\pi^{n-1}\operatorname{Log}\frac{|F|_{C_1R}}{|F(0)|}, \tag{16}$$

pour tout $R\geqslant 1$; on choisira alors $C^{-1/2\delta}=1+C_1$.

Étape 2. — Pour établir (16), nous écrirons β_a^{n-1} sous la forme :

$$\beta_a^{n-1} = \gamma^{n-1} + \text{termes de degré inférieur}$$

et nous décomposerons le premier membre de (16) en la somme de la partie principale $\int_1^{R^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\psi(z)<t} T \wedge \gamma^{n-1}$, et d'un certain nombre de termes correctifs. Il est clair qu'il existe des constantes $C_2, \ldots, C_7$ telles que :

(17) $$|z| \leqslant C_2 (1 + \varphi_a(z))^{1/2\delta},$$

(18) $$C_3^{-1} |z|^{2\delta} \leqslant \psi(z) \leqslant C_3 |z|^{2\delta},$$

(19) $$\psi(z) \leqslant \varphi_a(z) + C_4 (1 + |z|)^{2\delta - 1},$$

$$\beta_a \leqslant \gamma + C_5 (1 + |z|)^{2\delta - 3} \eta, \qquad \text{où} \quad \eta = i\partial\bar{\partial} |z|^2,$$

(20) $$\beta_a^{n-1} \leqslant \gamma^{n-1} + C_6 (1 + |z|)^{2(n-1)(\delta-1)-1} \eta^{n-1},$$

(21) $$\beta_a^{n-1} \leqslant C_7 (1 + |z|)^{2(n-1)(\delta-1)} \eta^{n-1}.$$

D'après (17) et (19), on a :

$$\sup_{\varphi_a(z)<t} \psi(z) \leqslant \sup_{\varphi_a(z)=t} \psi(z)$$
$$\leqslant t + C_4 (1 + C_2 (1+t)^{1/2\delta})^{2\delta-1} < t + C_8\, t^{1-1/2\delta},$$

ce qui donne :

$$\int_1^{R^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\varphi_a(z)<t} T \wedge \beta_a^{n-1}$$
$$\leqslant \int_1^{R^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\psi(z)<t(1+C_8 t^{-1/2\delta})} T \wedge \beta_a^{n-1}$$
$$\leqslant \int_1^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^n} (1 + C_{10} u^{-1/2\delta}) \int_{\psi(z)<u} T \wedge \beta_a^{n-1},$$

avec le changement de variable $u = t\,(1 + C_8\, t^{-1/2\delta})$.

En combinant avec (20) on obtient le majorant :

(22) $$\int_0^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^n} \int_{\psi(z)<u} T \wedge \gamma^{n-1} + I_1 + I_2,$$

avec :

(23) $$I_1 = C_{10} \int_1^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^{n+1/2\delta}} \int_{\psi(z)<u} T \wedge \beta_a^{n-1},$$

$$(24) \qquad I_2 = C_6 \int_1^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^n} \int_{\psi(z)<u} (1+|z|)^{2(n-1)(\delta-1)-1}\, T \wedge \eta^{n-1}.$$

Étape 3. — La partie principale (premier terme de (22)) sera estimée à l'aide du corollaire 4 et du lemme élémentaire qui suit.

LEMME 3. — $\gamma^n = (i\partial\bar\partial \operatorname{Log} \psi)^n \equiv 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

En effet, la fonction ψ est homogène de degré 2δ; la forme $\gamma = i\partial\bar\partial \operatorname{Log} \psi$ provient donc par passage au quotient d'une (1, 1)-forme sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$.

Le lemme 3 s'ensuit par raison de dimension. ■

D'après le corollaire 4, il vient :

$$\int_0^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^n} \int_{\psi(z)<u} T \wedge \gamma^{n-1}$$
$$= \frac{1}{\pi (C_9 R^{2\delta})^n} \int_{\psi(z)=C_9 R^{2\delta}} \operatorname{Log}|F|\, \gamma^{n-1} \wedge i\bar\partial\psi$$
$$- \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi \rho^n} \int_{\psi(z)=\rho} \operatorname{Log}|F|\, \gamma^{n-1} \wedge i\bar\partial\psi.$$

L'homogénéité des polynômes Q_j et les corollaires 5 et 6 entraînent que :

$$\frac{1}{(2\pi t)^n} \int_{\psi(z)=t} \gamma^{n-1} \wedge i\bar\partial\psi = \frac{1}{(2\pi t)^n} \int_{\psi(z)<t} \gamma^n = \delta^n,$$

où, sur l'hypersurface orientée $\{\psi(z)=t\}$, la forme volume $\gamma^{n-1} \wedge i\bar\partial\psi$ est positive. En vertu de (18) on en déduit :

$$(25) \qquad \int_0^{C_9 R^{2\delta}} \frac{du}{u^n} \int_{\psi(z)<u} T \wedge \gamma^{n-1} \leqslant (2\delta)^n \pi^{n-1} \operatorname{Log} \frac{|F|_{C_{11} R}}{|F(0)|}.$$

Étape 4. — *Estimation du terme correctif* $I_1 + I_2$.

Comme pour (25), on montre que :

$$(26) \qquad \int_0^{\rho^2} \frac{dt}{t^n} \int_{|z|^2<t} T \wedge \eta^{n-1} \leqslant 2^n \pi^{n-1} \operatorname{Log} \frac{|F|_\rho}{|F(0)|}.$$

On vérifie aisément [*cf.* (18), (21), (23), (24)] qu'on a la majoration :

$$(27)\quad I_1+I_2 \leqslant C_{12}\int_1^{C_9 R^{2\delta}} \frac{u^{(n-1)(1-1/\delta)}}{u^{n+1/2\delta}}\,du \int_{|z|<C_{13}u^{1/2\delta}} T\wedge\eta^{n-1}$$
$$\leqslant C_{14}\int_1^{C_{13}R^2} \frac{dt}{t^{n+(1/2)}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1},$$

[effectuer le changement de variable $u=(t/C_{13}^2)^\delta$].

D'autre part, on peut écrire :

$$(28)\quad \int_1^{\rho^2} \frac{dt}{t^{n+(1/2)}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1} \leqslant \int_1^{\rho} \frac{dt}{t^{n+(1/2)}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1}$$
$$+\rho^{-1/2}\int_\rho^{\rho^2} \frac{dt}{t^n}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1},$$

où pour tout couple (t, u) tel que $t\leqslant\rho\leqslant u$, on a (*cf.* corollaire 2) :

$$\frac{1}{t^{n-1}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1} \leqslant \frac{1}{u^{n-1}}\int_{|z|^2<u} T\wedge\eta^{n-1}.$$

Intégrons les deux membres de l'inégalité avec le poids $1/\operatorname{Log}\rho\displaystyle\int_\rho^{\rho^2}(du/u)\times ?$:

$$\frac{1}{t^{n-1}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log}\rho}\int_\rho^{\rho^2} \frac{du}{u^n}\int_{|z|^2<u} T\wedge\eta^{n-1}.$$

Il vient donc (*cf.* (26), (28)) :

$$(29)\quad \int_1^{\rho^2} \frac{dt}{t^{n+(1/2)}}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1}$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{\operatorname{Log}\rho}+\rho^{-1/2}\right)\int_\rho^{\rho^2} \frac{dt}{t^n}\int_{|z|^2<t} T\wedge\eta^{n-1}$$
$$\leqslant \frac{C_{16}}{\operatorname{Log}\rho}\operatorname{Log}\frac{|F|_\rho}{|F(0)|},$$

d'où finalement (*cf.* (22), (25), (27), (29)) :

$$(30)\quad \int_1^{R^{2\delta}} \frac{dt}{t^n}\int_{\varphi_a(z)<t} T\wedge\beta_a^{n-1} \leqslant \left(1+\frac{C_{17}}{\operatorname{Log}R}\right)(2\delta)^n\pi^{n-1}\operatorname{Log}\frac{|F|_{C_{18}R}}{|F(0)|}.$$

Étape 5. — Il ne reste plus qu'à faire disparaître le facteur $(1+(C_{17}/\operatorname{Log} R))$ pour rendre la formule (30) plus esthétique.

Comme la fonction $t \mapsto 1/t^{n-1} \int_{\varphi_a(z)<t} T \wedge \beta_a^{n-1}$ est croissante, l'expression $\int_1^{R^{2\delta}} dt/t^n \int_{\varphi_a(z)<t} T \wedge \beta_a^{n-1}$ est fonction convexe de la variable $\operatorname{Log} R$.

On a donc :

$$\frac{\operatorname{Log}(Re^{C_{17}})}{\operatorname{Log} R} \int_1^{R^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\varphi_a(z)<t} T \wedge \beta_a^{n-1} \leqslant \int_1^{(Re^{C_{17}})^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\varphi_a(z)<t} T \wedge \beta_a^{n-1}$$

$$\leqslant \left(1+\frac{C_{17}}{C_{17}+\operatorname{Log} R}\right)(2\delta)^n \pi^{n-1} \operatorname{Log} \frac{|F|_{C_1 R}}{|F(0)|},$$

d'après (30), avec $C_1 = C_{18} e^{C_{17}}$. L'inégalité (16) en résulte. ■

Le lemme de Schwarz précédent est d'autant plus utile que les fonctions F, $P_1, \ldots, P_N$ ont de nombreux zéros communs. En combinant le théorème 2 avec la proposition 1, on obtient ainsi la :

PROPOSITION 3. — *Soient $P_1, \ldots, P_N$ des polynômes de degré δ de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, dont les parties homogènes de plus haut degré admettent pour unique zéro commun l'origine. Il existe une constante $C_1 \geqslant 1$ ayant les propriétés suivantes. Soit F une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$. Soit $R \geqslant r \geqslant 1$ et $w_1, \ldots, w_m$ des zéros deux à deux distincts de F, $P_1, \ldots, P_N$ d'ordre $\geqslant s$, $s_1, \ldots, s_N$ respectivement, avec $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N$. Alors :*

$$\operatorname{Log} |F|_r \leqslant \operatorname{Log} |F|_R - m \frac{s s_1 \ldots s_{n-1}}{\delta^{n-1}} \operatorname{Log} \frac{R}{C_1 r}.$$

Démonstration. — Les zéros communs aux polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_N$ sont isolés. Il existe par conséquent des voisinages ouverts disjoints ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_m$ des points $w_1, w_2, \ldots, w_m$ tels que $\sup_{z\in\partial\omega_j} \varphi(z) > 0$, où les notations φ, β, T conservent la même signification que dans le théorème 2. Lorsque r est assez petit, la proposition 1 montre que :

$$\frac{1}{(2\pi r)^{n-1}} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^{n-1}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^m \frac{1}{(2\pi r)^{n-1}} \int_{\{z\in\omega_j;\, \varphi(z)<r\}} T \wedge \beta^{n-1} \geqslant m s s_1 \ldots s_{n-1}.$$

La minoration est donc vraie quel que soit $r>0$, ce qui entraîne :

$$\int_{r^{2\delta}}^{CR^{2\delta}} \frac{dt}{t^n} \int_{\varphi(z)<t} T \wedge \beta^{n-1} \geqslant (2\pi)^{n-1} mss_1 \ldots s_{n-1} \operatorname{Log} \frac{CR^{2\delta}}{r^{2\delta}}.$$

La proposition 3 résulte alors du théorème 2 (avec $C_1 = C^{-1/2\delta}$). ■

Soit maintenant S une partie quelconque de $\mathbb{C}^n$. On note $\omega_1(S)$ le degré minimal des hypersurfaces algébriques qui contiennent S (s'il n'existe pas de telles hypersurfaces, on pose $\omega_1(S) = +\infty$). Nous énoncerons un lemme de Schwarz relatif aux fonctions qui s'annulent sur S.

COROLLAIRE 7. — *Soit S une partie de $\mathbb{C}^n$ et δ un entier tel que $\delta \leqslant \omega_1(S)$. Il existe une constante $C_2 \geqslant 1$ telle que si F est une fonction entière ayant en chaque point de S un zéro d'ordre $\geqslant t$, on ait pour tout $R \geqslant r \geqslant 1$:*

$$\operatorname{Log}|F|_r \leqslant \operatorname{Log}|F|_R - t\frac{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}{n!\,\delta^{n-1}} \operatorname{Log}\frac{R}{C_2 r}.$$

Démonstration. — Notons :

$$m(\delta) = \binom{\delta+n-1}{n} = \frac{(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}{n!},$$

la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[z]_\delta$ des polynômes de degré $<\delta$ dans $\mathbb{C}^n$. Un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire conduit au résultat suivant.

LEMME 4. — *On peut trouver $m = m(\delta)$ points $w_1, w_2, \ldots, w_m \in S$ qui ne sont situés sur aucune hypersurface de degré $<\delta$. Il existe alors un unique polynôme de degré $<\delta$ prenant des valeurs données aux points $w_1, w_2, \ldots, w_m$.*

En effet les différentes formes linéaires sur $\mathbb{C}[z]_\delta$ définies par $P \mapsto P(w)$, $w \in S$, s'annulent simultanément pour le seul polynôme $P=0$ (par hypothèse $\omega_1(S) \geqslant \delta$). On peut donc trouver $m = m(\delta)$ formes (correspondant à des points $w_1, \ldots, w_m \in S$) qui constituent une base de l'espace dual $\mathbb{C}[z]_\delta^*$. Les affirmations du lemme 4 ne sont qu'une autre formulation de cette propriété. ■

En particulier, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_N$ de degré δ, s'annulant aux points $w_1, \ldots, w_m$, et dont les parties homogènes de plus haut degré forment une base de l'espace des polynômes homogènes de degré δ. Le corollaire 7 est donc conséquence de la proposition 3 en prenant $m = m(\delta)$, $s = t$, $s_1 = s_2 = \ldots = s_N = 1$. ■

Nous pouvons améliorer l'inégalité du corollaire 7 moyennant des renseignements supplémentaires sur la répartition des points de S. Si S est un produit cartésien $S=S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ suivant les directions d'une base de $\mathbb{C}^n$, il est facile de montrer qu'on peut remplacer le nombre :

$$\frac{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}{n!\,\delta^{n-1}}$$

par tout entier δ tel que :

$$\delta \leqslant \omega_1(S)=\min_{1\leqslant j\leqslant n} \operatorname{card} S_i.$$

Nous supposerons ici que S contient un polytope complet à $m(\delta)=\binom{\delta+n-1}{n}$ sommets : autrement dit, il existe $\delta+n-1$ hyperplans affines $H_j \subset \mathbb{C}^n$, concourants n à n, d'intersections vides $n+1$ à $n+1$, et tels que S contienne les sommets w_J du polytope (intersections des familles de n hyperplans $(H_j)_{j\in J}$, $J\subset\{1, 2, \ldots, \delta+n-1\}$, $|J|=n$). Cette hypothèse est vérifiée notamment dans le cas $\omega_1(S)\geqslant 2$, avec $\delta=2$, $m(2)=n+1$.

Soit A_j une forme affine définissant H_j, et posons :

$$\hat{A}_I=\prod\nolimits_{j\notin I} A_j,$$

pour toute partie I de $\{1, 2, \ldots, \delta+n-1\}$. Il est clair que :

$$\hat{A}_I(w_J)=0, \qquad \text{si } |I|=n, \qquad I\neq J,$$
$$\hat{A}_J(w_J)\neq 0.$$

Les polynômes $(\hat{A}_I)_{|I|=n}$ forment donc une base de l'espace des polynômes de degré $<\delta$, de sorte que :

$$\omega_1(\{w_J;\, |J|=n\})=\delta.$$

On observe que le polynôme $P_k=\sum_{|I|=n-k}\hat{A}_I$, $1\leqslant k\leqslant n$, a pour degre $\delta+k-1$ et que P_k s'annule à l'ordre k en chaque point w_J; il est aisé de vérifier d'autre part que les parties homogènes de plus haut degré des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ n'ont pas d'autre zéro commun que le point 0. Posons $\tau=\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)$; si l'on applique la proposition 3 aux polynômes de degré τ :

$$P_1^{\tau/\delta},\ P_2^{\tau/\delta+1},\ \ldots,\ P_n^{\tau/\delta+n-1},$$

avec $m=m(\delta)$, $s=t$, $s_k=k\tau/\delta+k-1$, il vient :

COROLLAIRE 8. — *Soit S une partie de $\mathbb{C}^n$ contenant un polytope complet à $\binom{\delta+n-1}{n}$ sommets. Il existe une constante $C_3\geqslant 1$, telle que si F est une fonction entière ayant en chaque point de S un zéro d'ordre $\geqslant t$, on ait pour tout $R\geqslant r\geqslant 1$:*

$$\operatorname{Log}|F|_r\leqslant\operatorname{Log}|F|_R-t\frac{\delta+n-1}{n}\operatorname{Log}\frac{R}{C_3 r}.$$

4. Nouvelle démonstration du théorème de Bombieri

Nous allons établir le théorème de BOMBIERI au moyen des lemmes de Schwarz énoncés au paragraphe 3. Soit K un corps de nombres. On note $[K:\mathbb{Q}]$ son degré, et on pose :

$$[[K:\mathbb{Q}]]=[K:\mathbb{Q}] \quad \text{si} \quad K\subset\mathbb{R},$$

$$[[K:\mathbb{Q}]]=\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}] \quad \text{sinon.}$$

THÉORÈME 3. — *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, telles que $f_1, \ldots, f_d$ $(n<d\leqslant p)$ soient algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et d'ordres finis $\rho_1, \ldots, \rho_d$. On suppose que les dérivations $d/dz_1, \ldots, d/dz_n$ appliquent l'anneau $K[f_1, \ldots, f_p]$ dans lui-même. Alors l'ensemble S des points $z\in\mathbb{C}^n$, distincts des pôles des f_j, tels que $(f_1(z), \ldots, f_p(z))\in K^p$, est contenu dans une hypersurface algébrique dont le degré δ vérifie la majoration :*

$$\frac{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}{n!\,\delta^{n-1}}\leqslant\frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n}[[K:\mathbb{Q}]].$$

Démonstration. — Si l'ensemble S n'est pas contenu dans une hypersurface algébrique de degré $<\delta$, le raisonnement d'algèbre linéaire du lemme 4 montre qu'on peut trouver $m=m(\delta)$ points $w_1, w_2, \ldots, w_m\in S$ qui ne sont situés sur aucune hypersurface de degré $<\delta$. Quitte à remplacer $\rho_1, \ldots, \rho_d$ par les nombres $\rho_1+\varepsilon, \ldots, \rho_d+\varepsilon$, on peut supposer $\rho_j>0$ et $f_j=g_j/h_j$ avec :

$$|g_j(z)|+|h_j(z)|\leqslant\exp(B_j|z|^{\rho_j}+C_j), \qquad 1\leqslant j\leqslant d,$$

$$h_j(w_k)\neq 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant d, \qquad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Les méthodes arithmétiques classiques (*voir* par exemple M. WALDSCHMIDT [10], § 5.4) permettent alors d'obtenir le résultat suivant.

LEMME 5. — *Il existe des constantes positives r, C_1, C_2 et une suite (F_t) de fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$ (où t décrit une partie infinie $\mathcal{T}$ de $\mathbb{N}$) telles que :*

(31) *F_t s'annule à l'ordre t aux points $w_1, w_2, \ldots, w_m$;*

(32) $$|F_t|_r \geqslant (C_1 t)^{-t[[K:\mathbb{Q}]]};$$

(33) $$|F_t|_{R(t)} \leqslant C_2^t, \qquad \text{où} \quad R(t)=\left(\frac{t^{d-n}}{\operatorname{Log} t}\right)^{1/(\rho_1+\ldots+\rho_d)}$$

La majoration du théorème 3 résulte aisément du corollaire 7 appliqué à la fonction $F=F_t$ et à $R=R(t)$, quand $t \to +\infty$. ■

Le théorème 3 entraîne en particulier l'inégalité :

$$\omega_1(S)+\frac{n(n-1)}{2} \leqslant n!\,\frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n}[[K:\mathbb{Q}]].$$

Ici encore, il est possible de faire mieux si l'on connaît plus précisément l'ensemble S. Dans une première tentative de démonstration en plusieurs variables du théorème 3, S. Lang a montré que si S contenait un produit cartésien $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ alors on avait :

$$\omega_1(S_1 \times \ldots \times S_n)=\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{card} S_j \leqslant \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n}[[K:\mathbb{Q}]].$$

D'une manière analogue, les corollaires 7 et 8 fournissent le résultat suivant, qui semble ne pas avoir été établi à ce jour par la méthode des estimations L^2.

PROPOSITION 4. — *Si $n=1$, 2, ou si S contient un polytope complet à $\binom{\omega_1(S)+n-1}{n}$ sommets (en particulier si $\omega_1(S)=1, 2$) alors :*

$$\frac{\omega_1(S)+n-1}{n} \leqslant \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n}[[K:\mathbb{Q}]].$$

Il paraît naturel de conjecturer que ce résultat reste valable dans tous les cas. La méthode de E. BOMBIERI, améliorée par H. SKODA [8], en donne une bonne approche :

(34) $$\frac{\omega_1(S)}{n} \leqslant \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n}[[K:\mathbb{Q}]].$$

5. Polynômes s'annulant sur une partie finie de $\mathbb{C}^n$

Soit S une partie finie de $\mathbb{C}^n$. Suivant M. WALDSCHMIDT [9], nous noterons, pour tout entier $t>0$, $\omega_t(S)$ = degré minimum des polynômes P qui s'annulent à l'ordre t sur S.

De la propriété de sous-additivité :

$$\omega_{t_1+t_2}(S) \leqslant \omega_{t_1}(S)+\omega_{t_2}(S),$$

résulte aisément l'égalité suivante, qui est une définition du nombre $\Omega(S)$ (« degré singulier » de S) :

$$\inf \frac{\omega_t(S)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\omega_t(S)}{t} = \Omega(S).$$

En utilisant le théorème d'HORMANDER-BOMBIERI-SKODA (H. SKODA [8]) M. WALDSCHMIDT [10] a démontré l'encadrement :

$$(35) \qquad \frac{\omega_{t_1}(S)}{t_1+n-1} \leqslant \Omega(S) \leqslant \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2},$$

pour tout couple (t_1, t_2) d'entiers positifs; il a prouvé aussi le lemme de Schwarz suivant.

PROPOSITION 5. — *Soient S une partie finie de $\mathbb{C}^n$ et ε un nombre réel, $\varepsilon>0$. Il existe un nombre réel positif $r_0=r_0(S, \varepsilon)$ tel que pour tout entier $t>0$ et pour toute fonction entière F dans $\mathbb{C}^n$ ayant en chaque point de S un zéro d'ordre $\geqslant t$, on ait :*

$$\operatorname{Log} |F|_r \leqslant \operatorname{Log} |F|_R - t(\Omega(S)-\varepsilon) \operatorname{Log} \frac{R}{4nr}$$

pour $R \geqslant r \geqslant r_0$.

J.-C. MOREAU [6] en a déduit un lemme de Schwarz analogue où le nombre $t(\Omega(S)-\varepsilon)$ est remplacé par $\omega_t(S)-t\varepsilon$. Si S est l'ensemble exceptionnel du théorème 3, la proposition 5 montre que :

$$(36) \qquad \Omega(S) \leqslant \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-n} [[K:\mathbb{Q}]].$$

En observant d'après (35) appliqué à $t_1=1$ que :

$$\Omega(S) \geqslant \frac{\omega_1(S)}{n},$$

on voit que (36) permet de retrouver la majoration (34).

G. V. CHUDNOVSKY [2] a conjecturé que l'on avait l'inégalité plus forte :

$$\Omega(S) \geqslant \frac{\omega_1(S)+n-1}{n}, \tag{37}$$

et en a annoncé une démonstration dans le cas $n=2$, utilisant la théorie des intersections. Les corollaires 7 et 8 vont nous permettre de démontrer ce résultat sous les hypothèses plus générales de la proposition 4. Choisissons pour fonction entière F un polynôme P de degré $\omega_t(S)$ qui s'annule à l'ordre t en tout point de S. Fixons r et faisons tendre R vers $+\infty$. Il vient, avec $\delta=\omega_1(S)$:

$$\omega_t(S) \geqslant t\frac{\omega_1(S)(\omega_1(S)+1)\ldots(\omega_1(S)+n-1)}{n!\,\omega_1(S)^{n-1}},$$

et en faisant à nouveau tendre t vers $+\infty$:

PROPOSITION 6. — *Pour toute partie finie S de $\mathbb{C}^n$, on a :*

$$\Omega(S) \geqslant \frac{\omega_1(S)(\omega_1)(S)+1)\ldots(\omega_1(S)+n-1)}{n!\,\omega_1(S)^{n-1}}.$$

Si $n=1, 2$, ou si S contient un polytope complet à $\binom{\omega_1(S)+n-1}{n}$ sommets (en particulier si $\omega_1(S)=1, 2$) alors :

$$\Omega(S) \geqslant \frac{\omega_1(S)+n-1}{n}.$$

Observons que l'inégalité (37) ne peut pas être améliorée. En effet, avec les notations du corollaire 8, lorsque S est un polytope complet à $\binom{\delta+n-1}{n}$ sommets, le polynôme :

$$P=A_1 A_2 \ldots A_{\delta+n-1},$$

est de degré $\delta+n-1$ et s'annule à l'ordre n en tous les points de S.

On peut se demander si plus généralement on n'a pas :

$$\Omega(S) \geqslant \frac{\omega_t(S)+n-1}{t+n-1},$$

pour tout entier $t>0$, mais ce résultat semble inaccessible par les méthodes précédentes lorsque $t \geqslant 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (E.). — Algebraic values of meromorphic maps, *Inventiones Math.*, Vol. 10, 1970, p. 267-287 et Vol. 11, 1970, p. 163-166.

[2] CHUDNOVSKY (G. V.). — Singular points on complex hypersurfaces and multidimensional Schwarz lemma, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 21e année, 1979-1980, *Progress in Math.*, n° 12, p. 29-69, Marie-José BERTIN, éd., Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1981.

[3] DEMAILLY (J.-P.). — *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé*, à paraître aux *Ann. Inst. Fourier*, t. 32, fasc. 2, 1982.

[4] LELONG (P.). — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Gordon and Breach, New York, et Dunod, Paris, 1967.

[5] LELONG (P.). — Sur les cycles holomorphes à coefficients positifs dans $\mathbb{C}^n$ et un complément au théorème de E. Bombieri, *C. R. Math. Rep. Acad. Sc. Canada*, vol. 1, n° 4, 1979, p. 211-213.

[6] MOREAU (J.-C.). — Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques, *Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda*, Analyse, année 1978-1979, p. 174-190; *Lectures Notes in Math.*, n° 822, Springer Verlag, 1980.

[7] NARASIMHAN (R.). — Introduction to analytic spaces, *lecture Notes in Math.*, n° 25, Springer Verlag, 1966.

[8] SKODA (H.). — Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ et applications arithmétiques, *Séminaire Pierre Lelong*, Analyse, année 1975-1976, p. 314-323; *Lecture Notes in Math.*, n° 538, Springer Verlag, 1977.

[9] WALDSCHMIDT (M.). — Propriétés arithmétiques des fonctions de plusieurs variables (II), *Séminaire Pierre Lelong*, Analyse, année 1975-1976, p. 108-135; *Lecture Notes in Math.*, n° 538, Springer Verlag, 1977.

[10] WALDSCHMIDT (M.). — Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque*, n° 69-70, 1979.