Inventiones math. 48, 293–302 (1978)

Inventiones mathematicae

Un exemple de fibré holomorphe non de Stein a fibre $\mathbf{C}^2$ ayant pour base le disque ou le plan

Jean-Pierre Demailly

Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France, et L.A. au C.N.R.S. n° 213, Université de Paris VI, Département de Mathématique

Introduction

Dans le présent travail, nous construisons un fibré holomorphe non de Stein au dessus d'un ouvert connexe non vide quelconque de $\mathbf{C}$, ayant pour fibre $\mathbf{C}^2$, et dont les automorphismes de transition sont de type exponentiel.

La première réponse négative au problème posé en 1953 par J.-P. Serre [4] de savoir si un espace fibré à base et à fibre de Stein est lui-même de Stein, a été donnée récemment par H. Skoda dans [5] et [6], où le lecteur trouvera une bibliographie complète sur le sujet. Dans le contre-exemple de H. Skoda, la base est un ouvert multiplement connexe, et les automorphismes de transition sont localement constants et à croissance exponentielle.

En réponse à une question soulevée par H. Skoda, nous avons donné dans [1] un contre-exemple où la base est une couronne, où les automorphismes de transition sont polynomiaux, et nous avons montré qu'alors le groupe de Dolbeault $H^{0,1}$ de l'espace total du fibré est muni de la topologie grossière.

L'outil principal pour la construction de tels fibrés est une inégalité due à P. Lelong [3], qui permet de contrôler précisément la croissance des fonctions plurisousharmoniques sur les fibres. On prouve ici, par un calcul d'enveloppe pseudo-convexe utilisant le principe du disque, que les fonctions plurisousharmoniques continues sont constantes sur certaines fibres particulières, achevant ainsi la construction du fibré. On montre de plus (cf. la remarque 3) que les fonctions holomorphes du fibré sont triviales, c'est-à-dire constantes sur toutes les fibres.

1. L'inégalité de P. Lelong

Nous nous contenterons d'énoncer le résultat, et renvoyons le lecteur à [1], § 1, [3] p. 193 th. 6.5.2 et p. 194, th. 6.5.4, ou [6], §9, pour un exposé complet.

Soient Ω une variété analytique *connexe* de dimension p, V une fonction plurisousharmonique sur $\Omega \times \mathbf{C}^n$, ω un ouvert relativement compact de Ω.

0020-9910/78/0048/0293/$02.00

On mesure la croissance de V sur les fibres en posant

$$M(V,\omega,r)=\sup_{x\in\bar\omega,\,|z|\leqq r} V(x,z),$$

où $r\geqq 0$ et $|z|=\sup_{1\leqq j\leqq n}|z_j|$.

D'après P. Lelong [3], $M(V,\omega,r)$ est une fonction convexe croissante de $\operatorname{Log} r$, strictement croissante pour r assez grand si V est non constante sur au moins une fibre au dessus de ω.

Lemme. *Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^p$, $\omega_1\subset\omega_2\subset\omega_3$ trois polydisques concentriques de rayons $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, relativement compacts dans Ω, et V une fonction plurisousharmonique sur $\Omega\times\mathbf{C}^n$, alors*

$$M(V,\omega_2,r)\leqq M(V,\omega_1,r^\sigma)+\mu[M(V,\omega_3,1)-M(V,\omega_1,r^\sigma)],\tag{1}$$

avec

$$\sigma=\frac{\operatorname{Log}\rho_3/\rho_1}{\operatorname{Log}\rho_3/\rho_2},\qquad \mu=1-\frac{1}{\sigma}=\frac{\operatorname{Log}\rho_2/\rho_1}{\operatorname{Log}\rho_3/\rho_1}.\tag{2}$$

Corollaire (inégalité de P. Lelong). *Soient Ω une variété analytique connexe de dimension p, V une function plurisousharmonique sur $\Omega\times\mathbf{C}^n$ non constante sur au moins une fibre, et ω_1,ω_2 deux ouverts relativement compacts de Ω. Il existe une constante $\sigma>1$ ne dépendant que de ω_1, ω_2, Ω, et une constante $R>0$ dépendant en outre de V telles que*

$$M(V,\omega_2,r)\leqq M(V,\omega_1,r^\sigma)\qquad pour\ \ r\geqq R.\tag{3}$$

2. Construction du fibré X

La base du fibré sera un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbf{C}$. Nous nous intéresserons surtout au cas où Ω est un disque ou le plan, car si Ω n'est pas simplement connexe, on peut donner une construction plus simple avec des automorphismes polynomiaux localement constants (cf. [1] § 2, 3).

Soient a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6, six points distincts de Ω, et posons

$$\Omega_0=\Omega-\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\},$$
$$\Omega_k=\Omega_0\cup\{a_k\},\qquad 1\leqq k\leqq 6.$$

On définit un fibré X à fibre $\mathbf{C}^2$ au dessus de Ω par les cartes locales trivialisantes

$\tau_k: X|_{\Omega_k}\to\Omega_k\times\mathbf{C}^2$ au dessus de Ω_k, $0\leqq k\leqq 6$, avec les automorphismes de transition

$$\tau_{kl}=\tau_k\circ\tau_l^{-1}:\Omega_0\times\mathbf{C}^2\to\Omega_0\times\mathbf{C}^2,$$

(si $k\neq l$, $\Omega_k\cap\Omega_l=\Omega_0$) définis par:

$$\tau_{kl} = \tau_{0k}^{-1} \circ \tau_{0l} \qquad \text{pour tous } k, l = 1, \ldots, 6,$$

$$\tau_{0k}(x, z) = (x, w), \quad x \in \Omega_0, \quad z = (z_1, z_2), \quad w = (w_1, w_2),$$

où

$$w_1 = z_1, \quad w_2 = z_2 \exp(z_1 j^{k-1} \varphi(x)), \quad \text{si } k = 1, 2, 3,$$

$$w_1 = z_1 \exp(z_2 j^{k-4} \varphi(x)), \quad w_2 = z_2, \quad \text{si } k = 4, 5, 6,$$

avec

$$z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbf{C}, \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{1 \leq k \leq 6} \frac{\beta_k}{x - a_k}\right),$$

β_k, $k = 1, \ldots, 6$, étant un nombre complexe non nul.

Remarque 1. Pour définir X, la carte $\Omega_0 \times \mathbf{C}^2$ est en principe superflue, mais sa considération introduit des automorphismes τ_{0k} plus simples que les automorphismes τ_{kl}, $k, l \neq 0$.

3. Restrictions sur la croissance d'une fonction plurisousharmonique non constante sur une fibre $\{a_k\} \times \mathbf{C}^2$

Soit V une fonction plurisousharmonique *continue* sur X, représentée dans la carte $\Omega_k \times \mathbf{C}^2$ par la fonction du même type $V_k = V \circ \tau_k^{-1}$.

On a donc sur $\Omega_0 \times \mathbf{C}^2$

$$V_k \circ \tau_{kl} = V_l, \qquad k, l = 0, \ldots, 6.$$

L'idée est la suivante: la croissance de $V_k = V_0 \circ \tau_{0k}$ au dessus d'un ouvert ω_0 relativement compact dans Ω_0 est comparable à la croissance de V_k au dessus d'un petit disque voisin de a_k (inégalité de P. Lelong). Ce petit disque peut être choisi de sorte que φ y prenne des valeurs très petites, et que τ_{0k} y soit proche de l'application identique. Revenant à l'ouvert initial ω_0, on voit que le croissance de V_k va être contrôlée par celle de V_0, comme l'exprime de façon précise la proposition ci-dessous.

Proposition. *Soient ω_0 un ouvert relativement compact dans Ω_0, V une fonction plurisousharmonique continue sur X. Si pour un certain $k = 1, \ldots,$ ou 6, $V_k = V \circ \tau_k^{-1}$ est non constante sur la fibre $\{a_k\} \times \mathbf{C}^2$, il existe une constante $R > 1$ telle que pour $r \geqq R$ on ait:*

$$M(V_0 \circ \tau_{0k}, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_0, \exp(\mathrm{Log}^4 r)).$$

Démonstration. Désignons par $\omega(a, \rho)$ le disque ouvert de centre $a \in \Omega$, et de rayon $\rho > 0$.

Soit b un point de Ω_0 tel que $\frac{\beta_k}{b-a_k}$ soit réel négatif, et assez voisin de a_k pour que le disque $\omega(b, 4\rho)$, $\rho = |b-a_k|$, soit contenu et relativement compact dans Ω_k. Nous poserons:

$$b_t = a_k + t(b-a_k), \qquad \rho_t = \tfrac{1}{2}\rho\, t, \qquad \text{avec } 0 < t \leqq \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

Dans la suite $C_1, C_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots$, désigneront des constantes dépendant des données de l'énoncé, mais indépendantes de r et du paramètre t. Puisque Ω_k est connexe, (3) entraîne pour $r \geqq R_1$

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b, \rho), r^{C_1}),$$

et

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, 2\rho), r^{C_1}), \qquad \text{car } \omega(b, \rho) \subset \omega(b_t, 2\rho). \tag{5}$$

D'après le lemme (formules (1), (2)) appliqué aux disques concentriques $\omega_1 = \omega(b_t, \rho_t)$, $\omega_2 = \omega(b_t, 2\rho)$, $\omega_3 = \omega(b_t, 3\rho)$, contenus dans $\omega(\mathrm{b}, 4\rho)$, on a

$$M(V_k, \omega(b_t, 2\rho), r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{\sigma_t})$$
$$+ \mu_t [M(V_k, \omega(b_t, 3\rho), 1) - M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{\sigma_t})],$$

avec

$$\sigma_t = \frac{\operatorname{Log} 3\rho/\rho_t}{\operatorname{Log} 3\rho/2\rho} = \frac{\operatorname{Log} 6/t}{\operatorname{Log} 3/2} \leqq C_2 \operatorname{Log} \frac{1}{t},$$

$$\mu_t = 1 - \frac{1}{\sigma_t},$$

d'où pour $r \geqq 1$, compte tenu de ce que $\sigma_t > 1$ et $\omega(b_t, 3\rho) \subset \omega(b, 4\rho)$,

$$M(V_k, \omega(b_t, 2\rho), r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{C_2 \operatorname{Log} \frac{1}{t}})$$
$$+ \mu_t [M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1) - M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r)]. \tag{6}$$

V_k étant non constante par hypothèse sur la fibre $\{a_k\} \times \mathbf{C}^2$, $\sup_{|z| \leqq r} V_k(a_k, z)$ tend vers ∞ quand r tend vers ∞.

Grâce à la continuité de V_k, il existe pour tout nombre A une constante r_A et un voisinage U_A de a_k tels que

$$\sup_{|z| \leqq r_A} V_k(x, z) \geqq A \qquad \text{pour tout } x \in U_A. \tag{7}$$

Prenons

$$A = M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1).$$

Pour $0 < t \leqq t_0$ assez petit, $\omega(b_t, \rho_t)$ rencontre U_A, donc pour $r \geqq r_A$ on a

$$M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r) \geqq A = M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1). \tag{8}$$

En combinant (5), (6) et (8), il vient:

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}), \tag{9}$$

pour $r \geqq R_2 = \sup(R_1, 1, r_A)$ et $0 < t \leqq t_0$.

Remplaçons maintenant V_k par $V_0 \circ \tau_{0k}$ et choisissons t pour que τ_{0k} «approche l'application identique» sur le polydisque $|z| \leqq r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}$.

r étant fixé $\geqq R_2$, déterminons t pour que

$$r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}} \cdot \sup_{x \in \omega(b_t, \rho_t)} |\rho(x)| \leqq 1. \tag{10}$$

Le transformé du disque $\omega(b_t, \rho_t)$ par l'homographie $x \mapsto \frac{\beta_k}{x-a_k}$ est le disque de points diamétralement opposés

$$\frac{\beta_k}{t/2(b-a_k)} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_k}{3t/2(b-a_k)}.$$

Comme $\frac{\beta_k}{b-a_k}$ a été choisi réel négatif, on a pour $x \in \omega(b_t, \rho_t)$

$$\operatorname{Re}\frac{\beta_k}{x-a_k} \leqq -\frac{C_3}{t}, \quad \text{avec } C_3 = \frac{2|\beta_k|}{3|b-a_k|}.$$

Puisque $\omega(b_t, \rho_t) \subset \omega(b, 4\rho) \Subset \Omega_k$, on a les majorations

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leqq C_4 \exp\left(\operatorname{Re}\frac{\beta_k}{x-a_k}\right) && \text{pour } x \in \omega(b, 4\rho), \\ |\varphi(x)| &\leqq \exp\left(-\frac{C_5}{t}\right) && \text{pour } x \in \omega(b_t, \rho_t). \end{aligned} \tag{11}$$

(10) est donc réalisé dès que

$$\exp\left(\frac{C_5}{t}\right) \geqq r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}, \quad \text{soit} \quad \frac{1/t}{\operatorname{Log} 1/t} \geqq \frac{C_2}{C_5} \operatorname{Log} r,$$

ou encore avec $C_6 > C_2/C_5$ et $r \geqq R_3$ assez grand:

$$\frac{1}{t} \geqq C_6 \operatorname{Log} r \cdot \operatorname{Log}\operatorname{Log} r \tag{12}$$

Avec le choix (10) de t, l'image par τ_{0k} du polydisque $|z| \leqq r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}$ est incluse dans le polydisque $|w| \leqq e\, r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}$.

On a donc d'après (9) et (12)

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0 \circ \tau_{0k}, \omega(b_t, \rho_t), r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}),$$

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega(b_t, \rho_t), e\, r^{C_2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}}),$$

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega(b_t, \rho_t), r^{C_7 \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}) \tag{13}$$

en prenant

$$C_6 \operatorname{Log} r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r \leqq \frac{1}{t} \leqq \frac{3}{2} C_6 \operatorname{Log} r \cdot \operatorname{Log}\operatorname{Log} r$$
$$r \geqq R_4 = \sup(R_2, R_3). \tag{14}$$

Il nous reste à revenir du disque $\omega(b_t, \rho_t)$ à l'ouvert ω_0. Considérons à cet effet une suite de disques concentriques $\omega_1^n \subset \omega_2^n \subset \omega_3^n$ de centre b_{t_n}, de rayons $\frac{1}{4}\rho\, t_n, \frac{1}{2}\rho\, t_n, \frac{3}{4}\rho\, t_n$ (cf. (4)).

La condition $\omega_1^n \subset \omega_2^{n-1}$ équivaut à $t_n \geqq \frac{2}{3} t_{n-1}$, $t_n \leqq \frac{6}{5} t_{n-1}$ par un calcul facile.

Nous prendrons $t_n = \frac{2}{3} t_{n-1} = (\frac{2}{3})^n$.

Pour $n = n(r)$ déterminé de façon unique, on a

$$C_6 \operatorname{Log} r \cdot \operatorname{Log}\operatorname{Log} r \leqq \frac{1}{t_n} < \frac{3}{2} C_6 \operatorname{Log} r \cdot \operatorname{Log}\operatorname{Log} r,$$

et d'après (13), (14) il vient pour $r \geqq R_4$

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_2^{n(r)}, r^{C_7 \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}) \tag{15}$$

(Noter que $\omega_2^n = \omega(b_{t_n}, \rho_{t_n})$.)

D'après le lemme, formules (1) et (2), on a pour $r \geqq 1$ et pour tout entier n

$$M(V_0, \omega_2^n, r) \leqq M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) + \mu[M(V_0, \omega_3^n, 1) - M(V_0, \omega_1^n, r)], \tag{16}$$

avec

$$\sigma = \frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 3/2}, \qquad \mu = \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 3}.$$

Or

$$\begin{aligned} M(V_0, \omega_3^n, 1) &= M(V_k \circ \tau_{0k}^{-1}, \omega_3^n, 1) \\ &\leqq M(V_k, \omega_3^n, C_8) \\ &\leqq M(V_k, \omega(b, 3\rho), C_8), \end{aligned} \tag{17}$$

avec

$$C_8 = \sup_{\substack{|z| \leqq 1 \\ x \in \omega(b, 3\rho), \operatorname{Re} \frac{\beta_k}{x - a_k} < 0}} |\tau_{0k}^{-1}(x, z)|,$$

et compte tenu de l'inclusion $\omega_3^n \subset \omega(b, 3\rho)$ (cf. (11) ainsi que la définition de τ_{0k} au paragraphe 2). Choisissons maintenant pour $A = M(V_k, \omega(b, 3\rho), C_8)$ une constante r_A et un voisinage U_A tels que la condition (7) soit satisfaite. On a pour $r \geqq 1$

$$M(V_0, \omega_1^n, r) = M(V_k \circ \tau_{0k}^{-1}, \omega_1^n, r) \geqq M(V_k, \omega_1^n, C_9 \operatorname{Log} r), \tag{18}$$

où C_9 est une constante positive assez petite.

En effet pour $x \in \omega_1^n$, on a à la fois $x \in \omega(b, 4\rho)$ et $\operatorname{Re} \dfrac{\beta_k}{x - a_k} \leqq 0$, ce qui entraîne $|\varphi(x)| \leqq C_4$ grâce à (11). Dans ces conditions, si $|z| \leqq C_9 \operatorname{Log} r$, l'image $w = \tau_{0k}(x, z)$

vérifie

$$|w| \leqq \sup(C_9 \operatorname{Log} r, C_9 \operatorname{Log} r \exp(C_4 C_9 \operatorname{Log} r)),$$

d'où

$$|w| \leqq r \text{ si } C_9 \text{ est assez petit.}$$

Si n est plus grand qu'un certain entier n_0, ω_1^n rencontre U_A, et d'après (7) on a

$$M(V_k, \omega_1^n, C_9 \operatorname{Log} r) \geqq A \text{ pour } C_9 \operatorname{Log} r \geqq r_A. \tag{19}$$

En prenant $n \geqq n_0$, $r \geqq \exp(r_A/C_9)$, (16), (17), (18), (19) donnent

$$M(V_0, \omega_2^n, r) \leqq M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) \leqq M(V_0, \omega_2^{n-1}, r^\sigma),$$

puisque $\omega_1^n \subset \omega_2^{n-1}$.
De proche en proche on obtient

$$M(V_0, \omega_2^n, r) \leqq M(V_0, \omega_2^{n_0}, r^{\sigma^{n-n_0}}), \tag{20}$$

avec

$$n \geqq n_0,\ r \geqq \exp\left(\frac{r_A}{C_9}\right).$$

Dans l'ouvert connexe Ω_0, (3) implique pour $r \geqq R_5$

$$M(V_0, \omega_2^{n_0}, r) \leqq M(V_0, \omega_0, r^{C_{10}}). \tag{21}$$

Enfin (15), (20), (21) fournissent

$$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_0, r^{C_7 C_{10} \sigma^{n(r)-n_0} \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}), \tag{22}$$

pour $r \geqq R_6 = \sup(R_4, R_5, \exp(r_A/C_9))$.
Mais

$$\sigma = \frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \quad \text{avec } \alpha = 2{,}458\ldots < 3,$$

d'où

$$\sigma^{n(r)} = \frac{1}{t_{n(r)}^\alpha} \leqq \left(\frac{3C_6}{2}\right)^\alpha (\operatorname{Log} r \cdot \operatorname{Log}\operatorname{Log} r)^\alpha$$

d'après (14), et $C_7 C_{10} \sigma^{n(r)-n_0} \operatorname{Log}\operatorname{Log} r \leqq (\operatorname{Log} r)^3$ pour $r \geqq R_7$ assez grand.
L'inégalité de la proposition résulte de (22) en posant $R = \sup(R_6, R_7)$.

4. Calcul d'enveloppe pseudo-convexe

Théorème. *Le fibré X construit au paragraphe 2 au moyen des 7 cartes $\Omega_k \times \mathbf{C}^2$ et des automorphismes de transition τ_{kl} a la propriété suivante: il existe une fibre*

$\tau_k^{-1}(\{a_k\}\times\mathbf{C}^2)$, $k=1,\dots,6$ *où toutes les fonctions plurisousharmoniques continues sur X sont constantes; en particulier X n'est pas de Stein, et n'est pas isomorphe au fibré trivial $\Omega\times\mathbf{C}^2$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $k=1,\dots,6$ il existe une fonction $V_{(k)}$ plurisousharmonique et continue sur X non constante sur la fibre $\tau_k^{-1}(\{a_k\}\times\mathbf{C}^2)$. Posons $V=\sum_{k=1}^{6}\lambda_k V_{(k)}$ où les λ_k sont des scalaires réels >0. Lorsque les λ_k sont bien choisis, V est non constante sur les six fibres $\{a_k\}\times\mathbf{C}^2$, car il y a au plus un hyperplan de $(\lambda_1,\dots,\lambda_6)\in\mathbf{R}^6$ pour lesquels V soit constante sur l'une des six fibres. On peut alors appliquer la proposition à chacune des fibres $\{a_k\}\times\mathbf{C}^2$, $k=1,\dots,6$:

$$M(V_0\circ\tau_{0k},\omega_0,r)\leqq M(V_0,\omega_0,\exp(\mathrm{Log}^4 r))\qquad\text{pour } r\geqq R,$$

ce qui s'écrit encore

$$\sup_{x\in\bar\omega_0,\,z\in K_{x,r}} V_0(x,z)\leqq M(V_0,\omega_0,\exp(\mathrm{Log}^4 r)),\tag{23}$$

avec

$$K_{x,r}=\bigcup_{1\leqq k\leqq 6}\tau_{0k}(\{x\}\times D_r).$$

Comme V_0 est plurisousharmonique en z, on a

$$\sup_{x\in\bar\omega_0,\,z\in K_{x,r}} V_0(x,z)=\sup_{x\in\bar\omega_0,\,z\in\widehat{K_{x,r}}} V_0(x,z),\tag{24}$$

où, par définition même de celle-ci, $\widehat{K_{x,r}}$ est l'enveloppe pseudo-convexe de $K_{x,r}$.

$\widehat{K_{x,r}}$ coïncide d'ailleurs avec l'enveloppe polynomialement convexe de $K_{x,r}$ d'après Hörmander [2] p. 91, th. 4.3.4. Il nous reste à évaluer $\widehat{K_{x,r}}$. La forme de τ_{0k} montre que pour $k=1,2,3$, $\tau_{0k}(\{x\}\times D_r)$ contient l'ensemble

$$\left\{(w_1,w_2)\in\mathbf{C}^2;|w_1|\leqq r,|w_2|\leqq r\exp\left(\frac{r}{2}|\varphi(x)|\right),\quad\text{et }|\mathrm{Arg}\,w_1 j^{k-1}\varphi(x)|\leqq\frac{\pi}{3}\right\},$$

donc $\bigcup_{k=1,2,3}\tau_{0k}(\{x\}\times D_r)$ contient le polydisque $|w_1|\leqq r$, $|w_2|\leqq r\exp\left(\frac{r}{2}|\varphi(x)|\right)$; de même $\bigcup_{k=4,5,6}\tau_{0k}(\{x\}\times D_r)$ contient le polydisque $|w_1|\leqq r\exp\left(\frac{r}{2}|\varphi(x)|\right), |w_2|\leqq r$.

Le principe du disque (cf. par exemple Hörmander [2], p. 34, th. 2.4.3.) montre que $\widehat{K_{x,r}}$ contient le polydisque de rayon moyenne géométrique

$$r\exp\left(\frac{r}{4}|\varphi(x)|\right).\tag{25}$$

Mais pour $x\in\bar\omega_0$, on a $|\varphi(x)|\geqq C>0$, et d'après (23), (24), (25), la majoration $M\left(V_0,\omega_0,r\exp\left(\frac{Cr}{4}\right)\right)\leqq M(V_0,\omega_0,\exp(\mathrm{Log}^4 r))$ est vérifiée pour $r\geqq R$.

Comme V est non constante sur au moins une fibre de X, $M(V_0, \omega_0, r)$ est strictement croissante pour r assez grand; on en conclut

$$r \exp\left(\frac{C r}{4}\right) \leqq \exp(\mathrm{Log}^4 r)$$

pour tout r assez grand, ce qui est contradictoire.

5. Compléments et bibliographie

Remarque 2. La démonstration ci-dessus ne permet pas de préciser la fibre «exceptionnelle» $\tau_k^{-1}(\{a_k\} \times \mathbf{C}^2)$ du théorème. Supposons néanmoins qu'il existe un groupe d'automorphismes de X permutant transitivement les fibres $\tau_k^{-1}(\{a_k\} \times \mathbf{C}^2)$, $k=1, \ldots, 6$: toutes les fonctions plurisousharmoniques continues sur X sont alors constantes sur chacune des six fibres. Un exemple de cette situation est obtenu avec les données suivantes: Ω est un disque de centre 0 et de rayon ρ, $0<\rho \leqq \infty$,

$$a_k = a j^{k-1} \qquad \text{pour } k=1,2,3,$$

$$a_k = -a j^{k-5} \qquad \text{pour } k=4,5,6, \text{ avec } 0<|a|<\rho,$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{k=0,1,2} \frac{\beta}{a^2 - j^k x^2}\right), \qquad \beta \neq 0;$$

le groupe d'automorphismes de X est le groupe d'ordre 6 engendré par l'automorphisme θ tel que

$$\theta_{kl} = \tau_k \circ \theta \circ \tau_l^{-1}: \Omega_l \times \mathbf{C}^2 \to \Omega_k \times \mathbf{C}^2$$
$$(x, z_1, z_2) \mapsto (-j x, z_2, j z_1)$$

où k et l sont liés par la relation $\Omega_k = -j \Omega_l$. (Les conditions de recollement des θ_{kl} se vérifient facilement sachant que $\varphi(-jx) = \varphi(x)$.)

Remarque 3. Il est aisé de voir, de façon générale, que les fonctions holomorphes sur X sont constantes sur toutes les fibres.

Soit en effet f une fonction holomorphe sur X, représentée dans la carte $\Omega_k \times \mathbf{C}^2$ par la fonction $f_k = f \circ \tau_k^{-1}$. Au dessus d'un disque de centre a_k contenu dans Ω_k, on peut écrire

$$f_k(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - a_k)^n g_n(z),$$

où les g_n sont des fonctions entières de 2 variables. $g_0(z) = f_k(a_k, z)$ est une constante α_0 d'après le théorème; par récurrence sur n, on voit que chaque g_n est une constante α_n en considérant la fonction holomorphe sur X

$$h_n = \frac{f - \sum_{m<n} \alpha_m (x - a_k)^m}{(x - a_k)^n},$$

qui est représentée dans la carte $\Omega_k \times \mathbf{C}^2$ par la fonction $h_{n,k} = h_n \circ \tau_k^{-1} = \sum_{m \geqq n} (x - a_k)^{m-n} g_m(z)$. On a donc $f_k(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - a_k)^n$, et f est constante sur toutes les fibres par connexité de la base (ou par l'inégalité de Lelong).

Remarque 4. On peut montrer que le groupe de Dolbeault $H^{0,1}(X)$ est de dimension infinie, et non séparé; voir [1], §6.

Bibliographie

1. Demailly, J.P.: Différents exemples de fibrés holomorphes non de Stein, à paraître au Séminaire Lelong 1976/1977
2. Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Second edition. North Holland Publishing Company, 1973
3. Lelong, P.: Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1968, séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1967, n° 28
4. Serre, J.P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles, 1953
5. Skoda, H.: Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein. C.R. Acad. Sc. de Paris, 16 mai 1977, A. 1159–1202
6. Skoda, H.: Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein, Inventiones Mathematicae, p. 97–107, Vol. 43, Fasc. 2, 1977

Reçu le 5. Juillet, 1978