CONSTRUCTIBILITÉ DES FAISCEAUX DE SOLUTIONS DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS HOLONOMES

d'après Masaki KASHIWARA

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Introduction.

Le présent travail est une version écrite détaillée d'un exposé oral sur l'étude des opérateurs microdifférentiels analytiques, qui constituait le sujet de deuxième thèse de l'auteur (Thèse de Doctorat d'Etat soutenue le 19 Octobre 1982 à l'Université de Paris VI sous la direction de Henri SKODA , le sujet de deuxième thèse ayant été posé par Louis BOUTET de MONVEL).

Ce texte vise en principe un public de non-spécialistes, et se présente comme une introduction élémentaire à quelques idées de base de la théorie algébrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles (cf. S-K-K [5]) . L'objectif final est la démonstration de la constructibilité du faisceau des solutions d'un système holonôme, due à M.KASHIWARA [3] , (1975). Nous nous sommes inspirés sans vergogne de la littérature existante, en particulier du cours de KASHIWARA [4] à l'Université de Paris-Nord.

Le paragraphe 1 rappelle brièvement la construction des faisceaux $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{E}_X$ des opérateurs différentiels et microdifférentiels sur une variété analytique complexe X . Nous montrons ensuite le lien entre la notion classique de système différentiel et la notion intrinsèque de $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$; par exemple, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{D}_X$-modules, le faisceau des solutions à valeurs dans $\mathcal{F}$ est donné par $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$. Après quelques rappels sur la géométrie symplectique du fibré cotangent $T^\star X$, nous donnons au paragraphe 3 la définition des systèmes holonômes, appelés aussi systèmes surdéterminés maximaux. Le paragraphe 4 est consacré à la démonstration d'un théorème de prolongement pour les solutions holomorphes d'un système différentiel sur un ouvert à frontière non caractéristique. Ce dernier théorème est l'outil essentiel pour la démonstration du théorème de KASHIWARA , moyennant quelques résultats de H.WHITNEY [6] , [7] sur l'existence de "bonnes" stratifications d'un ensemble analytique. Pour rester accessible au lecteur non spécialiste, nous avons évité l'usage (non indispensable ici) du langage des catégories dérivées.

Conventions et notations.

Tous les faisceaux (ou foncteurs à valeurs dans la catégorie des faisceaux) seront désignés par des lettres majuscules cursives, leurs espaces de sections par des lettres majuscules droites. Ainsi par exemple, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux de $\mathcal{A}$-modules sur X , on écrira $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X\,;\mathcal{F},\mathcal{G}) = \Gamma(X\,;\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$.

Un faisceau $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$-modules est dit injectif si le foncteur exact à gauche $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\ .\ ,\mathcal{J})$ est aussi exact à droite. Etant donné des $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M},\mathcal{F}$ et une résolution cohomologique $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^{\cdot}$ de $\mathcal{F}$ par des faisceaux injectifs, les faisceaux de cohomologie du complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{J}^{\cdot})$ ne dépendent pas (à isomorphisme près) du choix de la résolution injective (cf. R.GODEMENT [2]) ; on pose alors :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{F}) = \mathcal{H}^j(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{J}^{\cdot}))\ ,$$
$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(X\ ;\mathcal{M},\mathcal{F}) = H^j(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X\ ;\mathcal{M},\mathcal{J}^{\cdot}))\ .$$

Si de plus $\mathcal{M}$ possède une résolution homologique libre $\mathcal{L}_{\cdot} \to \mathcal{M} \to 0$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^j(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_{\cdot}\ ,\mathcal{F}))\ .$$

Enfin, si Z est une partie de X , $\mathcal{F}|_Z$ désigne la restriction à Z du faisceau $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_Z$ le faisceau des sections de $\mathcal{F}$ à support dans Z .

1. Construction des faisceaux $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{E}_X$.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n , $\Omega \subset X$ un ouvert de carte , $x = (x_1,\dots,x_n)$ des coordonnées locales sur Ω , et $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ les coordonnées correspondantes sur les fibres du fibré cotangent $T^{\star}X$. Le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur X est défini comme suit.

DÉFINITION 1.1. - Pour tout ouvert $U \subset \Omega$, $\Gamma(U,\mathcal{D}_X)$ est l'ensemble des opérateurs différentiels de la forme

$$P(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha\ ,$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$.

La fonction sur $T^{\star}X|_\Omega$ définie par

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

est appelée symbole total de P (dans les coordonnées $x_1,\dots,x_n$) .

Un calcul aisé montre que le symbole total du composé $P \circ Q$ est donné par

$$(1.1) \qquad (P \circ Q)(x,\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha P\ \partial_x^\alpha Q\ .$$

Si U n'est plus contenu dans un ouvert de carte, $\Gamma(U,\mathcal{D}_X)$ est défini par recollement au moyen des formules de changement de variable. $\mathcal{D}_X$ devient ainsi un faisceau d'anneaux sur X .

Le faisceau $\mathcal{E}_X$ des opérateurs microdifférentiels sera quant à lui un faisceau d'anneaux sur $T^\star X$.

DÉFINITION 1.2. - Soit $m \in \mathbb{Z}$ un entier fixé , $U \subset T^\star X|_\Omega$ un ouvert . Le module $\Gamma(U, \mathcal{E}_X(m))$ est l'ensemble des séries formelles $\sum_{-\infty < j \leqslant m} P_j(x,\xi)$ telles que :

(1.2) $\quad P_j \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{T^\star X})$ est homogène de degré j en ξ ;

(1.3) Quel que soit $K \subset\subset U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{j \leqslant 0} \frac{\varepsilon^{-j}}{(-j)!} \sup_K |P_j(x,\xi)| < +\infty .$$

La loi produit de l'anneau filtré $\mathcal{E}_X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_X(m)$ est déduite de la formule (1.1) : étant donné $P \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(m))$ et $Q \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(\ell))$, $R = P \circ Q \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(m + \ell))$ est l'opérateur dont les composantes homogènes R_s sont les sommes (finies)

$$R_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ j+k=s+|\alpha|}} \frac{1}{\alpha !} \partial_\xi^\alpha P_j \, \partial_x^\alpha Q_k .$$

La condition de convergence (1.3) relative à R résulte d'une inégalité démontrée par BOUTET de MONVEL et KRÉE [1] .

Si $P \in \mathcal{E}_X(m)$, le symbole principal de P est défini par $\sigma_m(P) = P_m$. On vérifie aisément que $\sigma_m(P)$ est défini intrinsèquement sur $T^\star X$.

Propriétés du symbole principal. Soit $Q \in \mathcal{E}_X(\ell)$. On a :

(1.4) $\quad P \circ Q \in \mathcal{E}_X(m + \ell)$ et $\sigma_{m+\ell}(P \circ Q) = P_m Q_\ell$;

(1.5) $[P,Q] = PQ - QP \in \mathcal{E}_X(m + \ell - 1)$ et $\sigma_{m+\ell-1}([P,Q]) = \{P_m, Q_\ell\}$,

où $\{f,g\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$

est le crochet de Poisson des fonctions f,g définies sur $T^\star X$.

Soit $\pi : T^\star X \to X$ la projection sur la base. Comme les seules fonctions entières homogènes de degré j sont les polynômes de degré j si $j \geqslant 0$ et 0 si $j < 0$, on voit que

$$\pi_\star \mathcal{E}_X = \mathcal{D}_X ;$$

$\pi^{-1} \mathcal{D}_X = \pi^{-1} \pi_\star \mathcal{E}_X$ est donc un faisceau de sous-anneaux de $\mathcal{E}_X$. La proposition suivante montre que $\mathcal{E}_X$ va jouer le rôle de "localisé" de $\pi^{-1} \mathcal{D}_X$.

PROPOSITION 1.3. - Soit $P \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(m))$ un opérateur dont le symbole principal $P_m(x,\xi)$ ne s'annule pas sur U . Alors P est inversible, i.e. il existe $Q \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(-m))$ tel que $P \circ Q = Q \circ P = 1$.

Démonstration. On pose $Q_{-m} = \dfrac{1}{P_m}$, de sorte que

$$Q_{-m} \circ P = 1 - R \quad , \quad \text{où} \quad R \in \Gamma(U, \mathcal{E}_X(-1)) .$$

On vérifie alors que la série $(1 - R)^{-1} = 1 + R + R^2 + \ldots$ est convergente , par

il suffit de poser

$$Q = (1 - R)^{-1} Q_{-m} .$$

2. Systèmes différentiels.

On peut démontrer que $\mathcal{D}_X$, $\mathcal{E}_X$ sont des faisceaux d'anneaux cohérents; il en résulte qu'on a une bonne théorie des modules sur ces anneaux.

DÉFINITION 2.1. - Un système différentiel sur X est la donnée d'une $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ sur X .

Pour justifier cette définition, nous allons montrer le lien avec la notion usuelle de système différentiel. Etant donné un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}_X$-modules (par exemple $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{F}$ = distributions, hyperfonctions,...) et une matrice $P = (P_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant N_1$, $1 \leqslant j \leqslant N$ d'opérateurs différentiels, on considère le système

$$(2.1) \qquad \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(x,D)u_j = 0 \quad , \; i = 1 , \ldots , N_1 ,$$

dont les inconnues sont les sections $u_1,\ldots,u_N \in \mathcal{F}$. Soit P' l'opérateur $\mathcal{D}_X$-linéaire à gauche : $R = (R_1,\ldots,R_{N_1}) \mapsto RP$.

Soit $\mathcal{M}$ le conoyau de P' :

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}_X^N \xleftarrow{P'} \mathcal{D}_X^{N_1} .$$

Si à cette suite exacte on applique le foncteur exact à gauche $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\,.\, , \mathcal{F})$, il vient la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F}) \to \mathcal{F}^N \xrightarrow{P} \mathcal{F}^{N_1} ,$$

donc $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$ s'identifie au faisceau des solutions de P dans le faisceau $\mathcal{F}$.

Le noyau $\operatorname{Ker} P'$ étant un faisceau cohérent, il existe d'autre part une suite exacte (localement sur X) :

$$(2.2) \qquad \mathcal{D}_X^N \xleftarrow{P'} \mathcal{D}_X^{N_1} \xleftarrow{Q'} \mathcal{D}_X^{N_2} ,$$

et en appliquant à nouveau le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\ .\ ,\mathcal{F})$ on obtient la suite

$$\mathcal{F}^N \xrightarrow{P} \mathcal{F}^{N_1} \xrightarrow{Q} \mathcal{F}^{N_2} .$$

Puisque (2.2) est le début d'une résolution libre du module $\mathcal{M}$, on a d'après l'introduction :

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Ker}\ Q/\mathrm{Im}\ P .$$

Si l'on considère le système différentiel non homogène $Pu = v$, on voit donc que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$ représente le groupe des données $v = (v_1,\dots,v_{N_1})$ compatibles (i.e. $Qv = 0$) modulo celles qui sont représentables par P.

DÉFINITION 2.2. - <u>Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Le support singulier de $\mathcal{M}$, noté $SS(\mathcal{M})$, est le sous-ensemble de $T^\star X$ défini par</u>

$$SS(\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}) .$$

<u>Exemple</u>. Considérons le cas d'un système $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ à une seule équation d'ordre m : $Pu = 0$. On a alors

$$\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P ,$$

$SS(\mathcal{M}) = \{\text{points de } T^\star X \text{ où } P \text{ non inversible}\}$

$\qquad = \{P_m(x,\xi) = 0\}$.

3. <u>Rappels de géométrie symplectique.</u>

Sur le fibré cotangent $T^\star X$ habite naturellement une 1-forme ω, dite 1-forme canonique, et définie par :

$$\omega_{(x,\xi)}(\zeta) = \langle \xi , \pi_\star \zeta \rangle$$

pour $(x,\xi) \in T^\star X$, $\zeta \in T_{(x,\xi)}(T^\star X)$, $\pi : T^\star X \to X$.

En coordonnées locales, on voit aussitôt que $\omega = \sum_{j=1}^n \xi_j\, dx_j$; par suite la forme $\sigma = d\omega$, dite 2-forme canonique, s'écrit

$$\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j .$$

Les énoncés qui suivent sont relatifs à la géométrie symplectique définie par σ sur $T^\star X$.

DÉFINITION 3.1. - <u>Soit</u> Λ <u>un sous-ensemble analytique de</u> $T^\star X$. Λ <u>est dit isotrope, resp. involutif, lagrangien, si et seulement si en tout point régulier</u>

de Λ on a :

$$T\Lambda \subset (T\Lambda)^{\perp} \text{ , resp. } T\Lambda \supset (T\Lambda)^{\perp} \text{ , } T\Lambda = (T\Lambda)^{\perp} .$$

La proposition qui suit caractérise une importante classe de sous-variétés isotropes.

PROPOSITION 3.2. - Soit Λ un sous-ensemble analytique conique irréductible de $T^{\star}X$ tel que $Y = \pi(\Lambda)$ soit une sous-variété lisse de X . Alors :

(3.1) Λ est isotrope si et seulement si $\Lambda \subset T_Y^{\star} X$, où $T_Y^{\star} X$ est le fibré conormal à Y . Dans ce cas $\omega|_{\mathrm{Reg}\,\Lambda} = 0$.

(3.2) Λ est lagrangien si et seulement si $\Lambda = T_Y^{\star} X$.

Démonstration. Il est aisé de voir que $T_Y^{\star} X$ est une variété lagrangienne, de sorte que les conditions (3.1) et (3.2) sont suffisantes. Inversement la condition Λ isotrope signifie que $\sigma|_{\mathrm{Reg}\,\Lambda} = 0$. Soit Λ' l'ensemble (dense) des points réguliers de Λ où $\pi : \Lambda \to Y$ est submersive, et $(y,\xi) \in \Lambda'$. La conicité de Λ implique que le vecteur vertical $(0, \xi)$ est tangent à Λ' . On a donc
$0 = \sigma((0, \xi) , T_{(y,\xi)} \Lambda') = \langle \xi, \pi_{\star} T_{(y,\xi)} \Lambda' \rangle = \langle \xi, T_y Y \rangle$, d'où $\omega|_{\Lambda'} = 0$ et $(y, \xi) \in T_Y^{\star} X$. Par suite $\Lambda = \overline{\Lambda'} \subset T_Y^{\star} X$. Λ est lagrangien si et seulement si Λ est isotrope de dimension maximale $\dim X = \dim T_Y^{\star} X$, d'où la conclusion (3.2). □

Il se trouve que le support singulier d'un système différentiel vérifie toujours la propriété d'involutivité.

THÉORÈME 3.3. - Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Alors $SS(\mathcal{M})$ est un ensemble analytique involutif.

Indications sur la démonstration. Pour toute suite exacte $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ on a $SS(\mathcal{M}) = SS(\mathcal{M}') \cup SS(\mathcal{M}'')$. Il suffit donc de considérer le cas d'un module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal à gauche. Soit $\bar{\mathcal{J}}$ l'idéal gradué de $\mathcal{O}_{T^{\star}X}$ engendré par les symboles principaux des éléments de $\mathcal{J}$. Puisque $(P,Q) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} \Rightarrow [P, Q] \in \mathcal{J}$, on a aussi l'implication $(f,g) \in \bar{\mathcal{J}} \times \bar{\mathcal{J}} \Rightarrow \{f,g\} \in \bar{\mathcal{J}}$. Cette condition traduit l'involutivité de $SS(\mathcal{M})$, du moins lorsque $\bar{\mathcal{J}} = \sqrt{\bar{\mathcal{J}}}$; en effet $SS(\mathcal{M})$ est l'ensemble des zéros de $\bar{\mathcal{J}}$, donc $\mathcal{J}_{SS(\mathcal{M})} = \sqrt{\bar{\mathcal{J}}}$ d'après le théorème des zéros de Hilbert. □

DÉFINITION 3.4. - <u>Un système différentiel est dit holonôme si</u> $SS(\mathcal{M})$ <u>est une sous-variété lagrangienne, autrement dit si</u> $\dim SS(\mathcal{M}) = \dim X$ <u>en tout point</u>.

4. Un théorème de prolongement.

Le résultat qui suit donne en particulier une condition suffisante pour que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega\,;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega'\,;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)\ ,\qquad \Omega' \subset \Omega \subset X\ ,$$

soit <u>surjectif</u>, autrement dit pour que les solutions holomorphes de $\mathcal{M}$ sur Ω' se prolongent à Ω.

THÉORÈME 4.1. - <u>Soit</u> $\mathcal{M}$ <u>un</u> $\mathcal{D}_X$<u>-module cohérent</u>, Ω , $(\Omega_c)_{c\in\mathbb{R}}$ <u>des ouverts de</u> X <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

(4.1) $c' \leqslant c \Rightarrow \Omega_{c'} \subset \Omega_c$;

(4.2) $\Omega = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \Omega_c$, $\Omega_c = \bigcup_{c'<c} \Omega_{c'}$;

(4.3) $c' \leqslant c \Rightarrow \overline{\Omega_c - \Omega_{c'}}$ <u>compact</u> ;

(4.4) <u>Soit</u> $Z_{c_o} = \bigcap_{c>c_o} \overline{\Omega_c - \Omega_{c_o}}$. <u>Alors</u> $Z_{c_o} \subset \Omega_c$ <u>si</u> $c > c_o$;

(4.5) <u>Pour tout</u> $c \in \mathbb{R}$, <u>la frontière</u> $\partial\Omega_c = \overline{\Omega}_c - \Omega_c$ <u>est au voisinage de</u> Z_c <u>une sous-variété de classe</u> C^1 <u>non caractéristique par rapport à</u> $\mathcal{M}$ [i.e. <u>si</u> $\partial\Omega_c = \{f=0\}$ <u>au voisinage de</u> $z\in Z_c$, <u>alors</u> $(z,\partial f_z) \notin SS(\mathcal{M})$] .

<u>Alors pour tout</u> $j\in\mathbb{N}$ <u>et tout</u> $c\in\mathbb{R}$ <u>on a</u>

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega\,;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c\,;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)\ .$$

<u>Démonstration</u>. Posons $E^j_c = \mathrm{Ext}^j_X(\Omega_c\,;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$, de sorte que pour $c' \leqslant c$ on a un morphisme de restriction

$$E^j_c \to E^j_{c'}\ .$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme quels que soient c, c' , il suffit de prouver les deux propriétés :

(4.6) $$\varinjlim_{c>c_o} E^j_c \xrightarrow{\simeq} E^j_{c_o}\ ,$$

(4.7) $$E^j_{c_o} \to \varprojlim_{c<c_o} E^j_c\ .$$

Commençons par démontrer (4.6) . Soit $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{J}^{\cdot}$ une résolution $\mathcal{D}_X$-injective de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{G}^{\cdot} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}^{\cdot})$ et

$$F = \bigcap_{c > c_o} \Omega_c .$$

Tout ouvert qui contient F contient un Ω_c , $c > c_o$, à cause des conditions (4.3) et (4.4) . On obtient par conséquent

$$\begin{aligned}\varinjlim_{c>c_o} E_c^j &= \varinjlim H^j(\Gamma(\Omega_c, \mathcal{G}^{\cdot})) \\ &= H^j(\varinjlim \Gamma(\Omega_c, \mathcal{G}^{\cdot})) = H^j(\Gamma(F, \mathcal{G}^{\cdot})) ,\end{aligned}$$

et il s'agit de vérifier que

$$H^j(\Gamma(F, \mathcal{G}^{\cdot})) \xrightarrow{\simeq} H^j(\Gamma(\Omega_{c_o}, \mathcal{G}^{\cdot})) .$$

Comme $\mathcal{G}^{\cdot}$ est un complexe de faisceaux flasques (cf. GODEMENT [2] , lemme 7.3.2) on a une suite exacte

$$0 \to \Gamma_Z(F, \mathcal{G}^{\cdot}) \to \Gamma(F, \mathcal{G}^{\cdot}) \to \Gamma(\Omega_{c_o}, \mathcal{G}^{\cdot}) \to 0$$

avec $Z = Z_{c_o} = F - \Omega_{c_o}$. Il suffit donc de montrer que

$$H^j(\Gamma_Z(F, \mathcal{G}^{\cdot})) = H^j(\Gamma(F, \mathcal{G}_Z^{\cdot})) = 0 ,$$

ou encore que le complexe flasque $\mathcal{G}_Z^{\cdot}$ est lui-même exact au-dessus de F . Or il est clair que la fibre de $\mathcal{G}_Z^{\cdot}$ en tout point $x \in F$ est donnée par

$$\mathcal{G}_{Z,x}^{\cdot} = \mathcal{G}_{\Omega - \Omega_{c_o},x}^{\cdot} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^{\cdot})_x .$$

Soit $\mathcal{L}_{\bullet} \to \mathcal{M} \to 0$ une résolution libre de $\mathcal{M}$ au voisinage de x . Comme le double complexe

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{L}_{\bullet}, \mathcal{J}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^{\cdot})_x$$

est exact en degré $\neq 0$ par rapport à la différentielle de $\mathcal{L}_{\bullet}$, sa cohomologie totale est isomorphe à celle de $\mathcal{G}_{Z,x}^{\cdot}$.

On va montrer que le terme E_2 de la suite spectrale associée à la première filtration est nul. Il vient successivement :

$$\mathcal{H}^j(\mathcal{J}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^{\cdot}) = \mathcal{H}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^j(\mathcal{O}) ,$$

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{L}_i, \mathcal{H}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^j(\mathcal{O}))_x ,$$

$$E_2^{i,j} = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{X,x}}^i(\mathcal{M}_x, \mathcal{H}_{\Omega - \Omega_{c_o}}^j(\mathcal{O})_x) .$$

Si $x \notin \partial\Omega_{c_o}$, on a $\mathcal{H}^j_{\Omega - \Omega_{c_o}}(\Theta)_x = 0$, tandis qu'au voisinage d'un point $x \in F \cap \partial\Omega_{c_o} \subset Z_{c_o}$, $\Omega - \Omega_{c_o}$ est d'après l'hypothèse (4.5) un domaine à bord $\Omega - \Omega_{c_o} = \{f \geqslant 0\}$, avec $\xi = \partial f_x \neq 0$ et $(x, \xi) \notin SS(\mathcal{M})$.

Nous admettrons le lemme suivant, élémentaire mais de démonstration laborieuse.

LEMME 4.2. - $\mathcal{H}^j_{\Omega - \Omega_{c_o}}(\Theta)_x$ <u>a une structure de</u> $\mathcal{E}_{X,(x,\xi)}$<u>-module prolongeant la</u> $\mathcal{D}_{X,x}$<u>-structure naturelle.</u>

Comme $\mathcal{E}_{(x,\xi)}$ est un $\mathcal{D}_x$-module plat, il vient

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_x , \mathcal{H}^j_{\Omega-\Omega_{c_o}}(\Theta)_x) = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{E}_{(x,\xi)}}(\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{E}_{(x,\xi)} , \mathcal{H}^j_{\Omega-\Omega_{c_o}}(\Theta)_x) ,$$

et $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{E}_{(x,\xi)} = 0$ puisque $(x, \xi) \notin SS(\mathcal{M})$.

<u>Preuve de (4.7)</u> . La difficulté essentielle est ici de commuter la $\varprojlim$ avec les foncteurs H^j . Ceci est possible en raisonnant par récurrence sur j et en utilisant le lemme algébrique qui suit.

LEMME 4.3. - <u>Soit</u> $(F^\bullet_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ <u>un système projectif de complexes (avec des morphismes de complexes</u> $F^\bullet_{\nu+1} \to F^\bullet_\nu$) .

<u>On a alors un morphisme naturel</u>

$$\phi^j : H^j(\varprojlim F^\bullet_\nu) \longrightarrow \varprojlim H^j(F^\bullet_\nu) .$$

(4.8) <u>On suppose que pour tous</u> i, ν <u>fixés la suite des images</u> $\mathrm{Im}(F^i_\mu \to F^i_\nu)$, $\mu \geqslant \nu$, <u>est stationnaire.</u>

<u>Alors</u> ϕ^j <u>est surjectif.</u>

(4.9) <u>On suppose de plus que la suite des images</u> $\mathrm{Im}(H^{j-1}(F^\bullet_\mu) \longrightarrow H^{j-1}(F^\bullet_\nu))$ <u>est stationnaire pour tout</u> ν . <u>Alors</u> ϕ^j <u>est un isomorphisme.</u>

Posons $F^\bullet_c = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{J}^\bullet) = \Gamma(\Omega_c , \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}^\bullet))$.

Il est clair que $\varprojlim_{c<c_o} F^\bullet_c = F^\bullet_{c_o}$, et la condition (4.8) est évidente puisque les faisceaux $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}^\bullet)$ sont flasques. D'autre part , la condition (4.9) résulte de l'hypothèse de récurrence. Le lemme 4.3

implique alors

$$E^j_{c_o} = H^j(F^\bullet_{c_o}) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim H^j(F^\bullet_c) = \varprojlim E^j_c .$$

La conclusion du théorème s'obtient en vérifiant de même que

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega ; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{c \in \mathbb{R}} \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) .$$

5. Constructibilité des solutions d'un système holonôme.

La démonstration s'effectuera en plusieurs étapes.

THÉORÈME 5.1. - Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonôme. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x < +\infty$.

Démonstration. La question est locale, donc on peut supposer X ouvert dans $\mathbb{C}^n$ et $x = 0$. Par hypothèse $\Lambda = SS(\mathcal{M})$ est une sous-variété lagrangienne de $T^\star X$. Un raisonnement géométrique simple va nous montrer que la sphère $S_r = \{x ; |x| = r\}$ est non caractéristique par rapport à $\mathcal{M}$ dès que r est > 0 assez petit.

Sinon il existe une suite $x_\nu \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tendant vers 0 telle que $(x_\nu, \bar{x}_\nu) \in \Lambda$ [noter que $\bar{x}_\nu = \partial(|x|^2 - r^2)_{x=x_\nu}$]; il existe donc en fait une courbe analytique réelle $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), \overline{x(t)})$ contenue dans Λ , telle que $x(0) = 0$ et $x(t) \neq 0$ si $0 < t < \varepsilon$. Comme Λ est isotrope et conique, on a $\omega|_\Lambda = 0$ (cf. proposition 3.2), donc $\omega|_\gamma = \overline{<x(t)}, dx(t)> = 0$ et $d|x(t)|^2 = 0$, ce qui est contradictoire.

Appliquons le théorème de prolongement aux boules $\Omega_r = \{x ; |x| < r\}$.

On obtient pour $0 < r' < r < \varepsilon$:

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_r ; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_{r'} ; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

$$\simeq \varinjlim_{r' > o} \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_o .$$

Soit $\mathcal{L}_\bullet \to \mathcal{M} \to 0$ une résolution libre de $\mathcal{M}$ au voisinage de 0 . Le morphisme de restriction

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega_r ; \mathcal{L}_\bullet, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega_{r'} ; \mathcal{L}_\bullet, \mathcal{O}_X)$$

induit alors un isomorphisme en cohomologie. Si l'on pose $\mathcal{L}_j = \mathcal{D}_X^{N_j}$, il vient $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega ; \mathcal{L}_\bullet, \mathcal{O}_X) = \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_X)^{N_j}$, par suite ρ est un morphisme compact entre complexes de Fréchet .

D'après un théorème de L.SCHWARTZ, les espaces de cohomologie sont de dimension finie.

THÉORÈME 5.2. - *Soit* $\mathcal{M}$ *un système holonome* , $\Lambda = SS(\mathcal{M})$ *et* Y *une sous-variété lisse de* X . *On suppose que* Y *est plate par rapport à* $\mathcal{M}$, *c'est-à-dire que* Y *vérifie les conditions suivantes* :

(5.1) $\pi^{-1}(Y) \cap \Lambda \subset T^\star_Y X$;

(5.2) $C_{\pi^{-1}(Y)}(\Lambda)_p \subset \{ \zeta \in T_p(T^\star X) \ ; \ <\omega_p, \zeta> = 0 \}$,

où l'ensemble de gauche est le cône normal à $\pi^{-1}(Y)$ *le long de* Λ , *défini comme l'ensemble des limites de suites* $a_\nu(\lambda_\nu - \eta_\nu)$, $a_\nu \in \mathbb{R}$, *et où* $\lambda_\nu \in \Lambda$, $\eta_\nu \in \pi^{-1}(Y)$ *tendent vers un point* $p \in T^\star_Y X$ *fixé* .

Alors pour tout j , $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y$ *est un faisceau localement constant de rang fini.*

Démonstration. Fixons $y_o \in Y$ et choisissons une carte locale en y_o de sorte que Y s'identifie à un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^n$, avec $y_o = 0$. Alors pour $0 < r < \varepsilon$ et pour $y \in Y$, $|y| < \varepsilon$ (ε assez petit) , la sphère $\{x \ ; \ |x - y| = r\}$ est non caractéristique par rapport à $\mathcal{M}$. Sinon il existe des suites $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X$, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Y$ convergeant vers 0 telles que $(x_\nu , \overline{x_\nu - y_\nu}) \in \Lambda$, $x_\nu \neq y_\nu$.

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons choisir $c_\nu > 0$ de sorte que $\lim\limits_\nu c_\nu(x_\nu - y_\nu) = \xi$ existe et soit non nul. Alors $p = (0, \bar{\xi}) \in \Lambda \cap \pi^{-1}(Y) \subset T^\star_Y X$.

On a donc $\lambda_\nu = (x_\nu , c_\nu (\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu)) \in \Lambda$, $\eta = (y_\nu , c_\nu (\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu)) \in \pi^{-1}(Y)$ et

$\lim\limits_\nu c_\nu(\lambda_\nu - \eta_\nu) = (\xi, 0) \in C_{\pi^{-1}(Y)}(\Lambda)_p$. L'hypothèse (5.2) implique

$<\omega_p , (\xi, 0)> = <\bar{\xi}, \xi> = 0$, ce qui est contradictoire.

Dans ces conditions, le théorème de prolongement s'applique avec

$\Omega = \{|x| < \varepsilon\}$, $\Omega_c = \{x \ ; \ |x - (1 - c)y| < c\varepsilon\}$, $0 < c < 1$,

$y \in Y \cap \Omega$ étant fixé; par hypothèse $\partial\Omega_c$ est non caractéristique et les conditions (4.1) - (4.4) sont clairement vérifiées.

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) &\simeq \varinjlim_{c \to 0} \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \\ &\simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_y \ . \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{E}xt^j_X(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_{Y\cap\Omega}$ est le faisceau des applications localement constantes à valeurs dans $\mathrm{Ext}^j_X(\Omega\,; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$, espace dont la dimension est finie d'après le théorème 5.1. □

Le reste de la démonstration n'utilise plus les propriétés spécifiques des $\mathcal{D}_X$-modules, mais simplement l'existence de "bonnes" stratifications d'un ensemble analytique.

DÉFINITION 5.3. - Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous-ensembles de X. On dit que $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de X si

(5.3) $X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ et $X_\alpha \cap X_\beta = \phi$ lorsque $\alpha \neq \beta$;

(5.4) la famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est localement finie ;

(5.5) $\bar{X}_\alpha$ et $\bar{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des ensembles analytiques ;

(5.6) $\bar{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \phi$ implique $\bar{X}_\alpha \supset X_\beta$.

$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est appelée une stratification de Whitney si les strates X_α sont lisses et si les deux conditions supplémentaires (5.7), (5.8) sont réalisées pour tous α, β :

(5.7) $\overline{T^\star_{X_\alpha} X} \cap \pi^{-1}(X_\beta) \subset T^\star_{X_\beta} X$;

(5.8) $C_{\pi^{-1}(X_\alpha)}(T^\star_{X_\beta} X) \subset \{v \in T(T^\star X)\ ;\ \langle \omega, v\rangle = 0\}$.

PROPOSITION 5.4 (WHITNEY [6], [7]). Toute statification $X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ peut se raffiner en une stratification de Whitney $X = \bigsqcup_{\beta\in B} X'_\beta$. (i.e. pour tout β, il existe α tel que $X'_\beta \subset X$

Le lemme suivant caractérise la structure des sous-variétés lagrangiennes coniques.

LEMME 5.5. - Soit Λ une sous-variété lagrangienne conique de $T^\star X$. Alors il existe une famille localement finie $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous-variétés lisses, telles que les ensembles $\bar{V}_\alpha - V_\alpha$ soient des ensembles analytiques, et telles que

$$\Lambda = \bigsqcup_{\alpha\in A} \overline{T^\star_{V_\alpha} X}.$$

Démonstration. On peut supposer Λ irréductible. La projection $\pi(\Lambda)$ est un ensemble analytique d'après le théorème de REMMERT. Posons $V_1 = \mathrm{Reg}\,\pi(\Lambda)$. La proposition 3.2 implique $\Lambda \cap \pi^{-1}(V_1) = T^\star_{V_1} X$. Le raisonnement se poursuit par récurrence sur $\dim \pi(\Lambda)$ en considérant $\Lambda_1 = \overline{\Lambda - \overline{T^\star_{V_1} X}}$ (qui est encore un sous-ensemble analytique lagrangien).

Nous pouvons enfin énoncer le résultat que nous avions en vue.

THÉORÈME 5.6 (M.KASHIWARA [3]). - Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau constructible, i.e. il existe une stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)\,|\,X_\alpha$ soit localement constant de rang fini pour chaque strate X_α.

Démonstration. D'après le lemme 5.5 on peut construire une stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que

$$\Lambda = SS(\mathcal{M}) \subset \bigsqcup_\alpha \overline{T^\star_{X_\alpha} X} \ .$$

Quitte à raffiner, on peut supposer qu'il s'agit d'une stratification de Whitney. D'après la condition (5.7) il vient

$$\Lambda \subset \bigsqcup_\alpha T^\star_{X_\alpha} X$$

de sorte que les hypothèses (5.1) et (5.2) sont satisfaites pour chaque strate $Y = X_\alpha$.

Le théorème 5.2 permet de conclure.

B I B L I O G R A P H I E

[1] BOUTET de MONVEL (L.), KRÉE (P.). - Pseudo-differential operators and Gevrey classes ; Ann. Inst. Fourier, 17, 1967, p. 295-323.

[2] GODEMENT (R.). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux ; Paris, Hermann, 1957.

[3] KASHIWARA (M.). - On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I ; Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., vol. 10, n° 2, 1975, p. 563-579.

[4] KASHIWARA (M.). - Systèmes d'équations micro-différentielles ; Cours polycopié à l'Université de Paris-Nord, rédigé par T.Monteiro-Fernandes, 1976-1977.

[5] SATO (M.), KAWAI (T.) and KASHIWARA (M.). - Microfunctions and pseudo-differential equations ; in Lecture Notes in Math., n° 287, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, p. 265-529, 1973.

[6] WHITNEY (H.). - Tangents to an analytic variety ; Ann. of Math. 81, p. 496-549, 1964.

[7] WHITNEY (H.). - Local properties of analytic sets ; Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, p. 205-244, 1965.

L.A. n° 213 au C.N.R.S.
Analyse complexe et Géométrie
Université de Paris VI, tour 45-46, 5e étage
4, Place Jussieu

75230 - PARIS CEDEX 05