Institut Fourier
Université de Grenoble I

SUR LE CALCUL NUMERIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. UN PEU D'HISTOIRE

La constante d'Euler $\gamma = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{Log}\, n$, dite parfois constante de Mascheroni, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux et d'évaluations numériques depuis le XVIIIe siècle. Elle garde néanmoins encore beaucoup de son mystère aujourd'hui. Ainsi, on ne sait toujours pas si γ est ou non irrationnel, en dépit de plusieurs tentatives de démonstration, dont celle de P. Appell [2] en 1926 qui avorta par suite d'une erreur matérielle, et celle de A. Froda [14] en 1965 qui repose sur un critère d'irrationnalité encore incomplètement démontré. Signalons toutefois que certains résultats de transcendance pour des expressions faisant intervenir γ ont été obtenus par K. Mahler [18].

Nous nous intéresserons ici surtout à la mise en oeuvre d'algorithmes rapidement convergents qui, outre l'intérêt calculatoire, laissent espérer l'obtention de résultats arithmétiques.

La première évaluation de γ est due naturellement à Leonhard Euler, qui obtint la valeur 0.577218 en 1735 [12], bientôt étendue par Mascheroni et quelques autres. En 1781, Euler détermina la valeur plus précise 0.577215664901532 [13]. Il fut suivi notamment par C.F. Gauss, avec 22 décimales exactes, puis par un certain nombre de mathématiciens anglais du XIXe siècle. Le lecteur pourra consulter J.W.L. Glaisher [15] pour l'historique détaillé des calculs antérieurs à 1870. W. Shanks [19] publia 110 décimales, dont 101 exactes, en 1867-71 ; peu après, le célèbre mathématicien-astronome

J.C. Adams [1] calcula laborieusement 263 décimales, record qui devait tenir depuis sa publication en 1878 jusqu'à l'apparition des premiers ordinateurs et les 328 décimales de J.W. Wrench Jr [23] en 1952.

Tous ces calculs, ainsi que celui ultérieur de D.E. Knuth [17] en 1962 avec 1271 D , reposaient sur le développement asymptotique de $1 + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$ par la formule d'Euler - Mac Laurin. Le temps de calcul prohibitif des nombres de Bernoulli requis dans cette méthode conduisit Dura W. Sweeney [21] à introduire un nouvel algorithme plus efficace, basé sur la formule $\gamma = -\int_0^{+\infty} \operatorname{Log} x \, e^{-x} dx$. Sweeney obtint ainsi 3566 D en 1963, et sa méthode fut reprise successivement par Beyer-Waterman [3], [4] en 1974 (7114 D , dont 4879 exactes) et par R.P. Brent [7], [8] (20700 D en 1977). Enfin en 1980, R.P. Brent et E. Mc Millan [10] découvrirent un nouvel algorithme plus performant, utilisant les fonctions de Bessel, et calculèrent 30100 D [9]. Voici un bref aperçu des algorithmes évoqués plus haut, avec analyse comparée des temps de calcul.

I. FORMULE D'EULER – MAC LAURIN

Cette formule sera utilisée sous la forme suivante (cf. Bourbaki [5]) :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n)+f(1)) + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(1)\right] + R_k$$

où b_j est la suite des nombres de Bernoulli, définie par

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{j!} z^j ,$$

de sorte que

$$b_0 = 1 , \quad b_1 = -\frac{1}{2} , \quad b_2 = \frac{1}{6} , \quad b_3 = 0 \ldots .$$

Le reste R_k est donné par

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!}\int_1^n B_{2k+1}(\{x\})f^{(2k+1)}(x)dx ,$$

où $B_m(x) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}b_j x^{m-j}$ est le m-ième polynôme de Bernoulli et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x . Si nous posons $f(x) = \frac{1}{x}$, la formule ci-dessus entraîne d'après D. Knuth [17] :

$$1 + \frac{1}{2} +\ldots+ \frac{1}{n} =$$

$$= \mathrm{Log}\, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) +\ldots+ \frac{b_{2k}}{2k}\left(1-\frac{1}{n^{2k}}\right) - \int_1^n \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}dx .$$

Quand $n \to +\infty$, il vient

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{b_2}{2} +\ldots+ \frac{b_{2k}}{2k} - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}dx .$$

Par soustraction, nous obtenons donc :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} +\ldots+ \frac{1}{n} - \mathrm{Log}\, n - \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2n^2} +\ldots+ \frac{b_{2k}}{2kn^{2k}} - \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}dx .$$

Ce développement asymptotique diverge quand $k \to +\infty$, mais il donne cependant de bonnes valeurs approchées de γ lorsque n et k sont bien choisis. En effet, l'identité classique

$$B_{2k+1}(\{x\}) = 2(-1)^{k-1}(2k+1)! \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\sin 2r\pi x}{(2r\pi)^{2k+1}}$$

entraîne

$$|B_{2k+1}(\{x\})| \leq 4\frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} ,$$

et grâce à la formule de Stirling, nous en déduisons

$$\left|\int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})dx}{x^{2k+2}}\right| \leq \frac{4}{n}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\left(\frac{k}{n\pi e}\right)^k .$$

Le reste est donc très petit tant que k demeure sensiblement inférieur à n .

Analyse du temps de calcul.

Désignons par E_1 cet algorithme et par $E_1(d)$ le temps de calcul de γ à la précision 10^{-d} . On attribue par convention une unité de temps à chaque opération arithmétique élémentaire (portant sur 1 mot de la machine). La somme de 2 nombres ayant d décimales nécessite donc, à des constantes près que nous négligerons ici, d unités de temps ; idem pour les produits ou quotients de nombres en multiprécision par des "petits" nombres (1 mot-machine).

L'évaluation la plus brutale de $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ réclame alors dn unités de temps. Dans la pratique, on choisira pour n une puissance de 2 ou 10, et $\operatorname{Log} n$ sera évalué en d^2 unités de temps à partir des séries entières $\operatorname{Log} 2 = 2 \operatorname{Argth}\frac{1}{3}$, $\operatorname{Log}\frac{10}{8} = 2\operatorname{Argth}\frac{1}{9}$ exponentiellement convergentes.

D'autre part, les nombres $\beta_{2k} = \frac{b_{2k}}{n^{2k}}$ peuvent être calculés au moyen de la formule de récurrence des nombres de Bernoulli :

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2k+1}\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n^{2k}} - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{2k+1}{2j}\frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}}\right] .$$

L'étape de récurrence exige environ kd unités de temps, à condition de stocker en mémoire les résultats partiels $\binom{2k+1}{2j}\frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}}$, soit au total $k^2 d$ pour l'évaluation de la somme

$\frac{b_2}{2n^2}+\ldots+\frac{b_{2k}}{2kn^{2k}}$. On aboutit donc à :

$$E_1(d) \sim nd + d^2 + k^2 d .$$

Bien entendu, n et k doivent être choisis de manière que le terme d'erreur soit $< 10^{-d}$, ce qui impose

$$k \operatorname{Log}\frac{n\pi e}{k} \simeq d \operatorname{Log} 10 .$$

Le choix optimal est obtenu pour $n \sim k^2$, d'où $k \operatorname{Log} k \sim d \operatorname{Log} 10$, $k \sim \frac{d \operatorname{Log} 10}{\operatorname{Log} d}$ et

$$E_1(d) \sim C\, d^3 (\operatorname{Log} d)^{-2} .$$

Signalons qu'il existe une formule (peu connue) permettant de contourner le calcul des b_{2k}. Cette formule exprime le reste sous forme de série double rapidement convergente :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \operatorname{Log} n + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\ell\,!}{2^{\ell+1} 2^k n (2^k n+1) \dots (2^k n+\ell)} .$$

Pour vérifier cette identité, on part de l'intégrale convergente

$$I(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \left(\frac{q}{1-x^q} - \frac{1}{1-x} \right) dx \quad , \text{ où } \quad p,q > 0 .$$

Pour tout entier $n \geq 1$, un calcul aisé donne

$$I(n,n) = \int_0^1 (1+x+\dots+x^{n-2}) dx - d \left[\operatorname{Log} \frac{1-x^n}{1-x} \right] ,$$

de sorte que $I(n,n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \operatorname{Log} n \to \gamma$ quand $n \to +\infty$.
Le changement de variable $x = t^r$ dans $I(p,q)$ fournit d'autre part l'identité

$$I(p,q) + I(pr,r) = I(pr,qr) .$$

Appliquons cette formule par récurrence avec $p = q$, $r = 2$. Il vient

$$I(n,n) + I(2n,2) + \dots + I(2^k n,2) = I(2^k n, 2^k n) ,$$

d'où à la limite quand $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \gamma &= I(n,n) + \sum_{k=1}^{+\infty} I(2^k n,2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \operatorname{Log} n + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{2^k n-1} \frac{dx}{1+x} . \end{aligned}$$

La formule annoncée s'en déduit maintenant par développement en série de $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-x}{2} \right)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(1-x)^\ell}{2^{\ell+1}} .$$

En particulier, pour $n = 1$, on obtient la formule simple

$$(E_2) \qquad \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell!}{2^{\ell+1} 2^k (2^k+1) \dots (2^k+\ell)} .$$

Le terme général de la série est majoré par $\min(2^{-\ell-k-1}, (\ell 2^{-k})^\ell)$; la précision 10^{-d} est donc atteinte en sommant pour

$$k, \ell \leq d \operatorname{Log} 10 / \operatorname{Log} 2 \ , \qquad \ell \leq \frac{d \operatorname{Log} 10}{k \operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} \ell} ,$$

ce qui laisse environ $\frac{\mathrm{Log}\,10}{\mathrm{Log}\,2} d \,\mathrm{Log}\, d$ termes à calculer. Le temps de calcul requis par (E_2) admet donc l'estimation

$$E_2(d) \sim C\, d^2 \,\mathrm{Log}\, d \;,$$

asymptotiquement inférieure à celle de l'algorithme (E_1). Nous allons voir qu'il existe en fait des algorithmes simples en $O(d^2)$, mais cela n'empêche pas l'algorithme (E_1) d'être sans doute le plus efficace pour les calculs manuels $(d \leq 100)$.

2. ALGORITHME DE SWEENEY

Le point de départ en est l'égalité

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Log}\, t \; e^{-t} dt = -\gamma \;,$$

qui découle de l'identité des définitions d'Euler et de Weierstrass de la fonction Γ :

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{n}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} .$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\gamma = F(x) - \mathrm{Log}\, x - R(x)$$

avec

$$F(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n\, n!} \;,$$

$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \ldots + \frac{(-1)^k k!}{x^k}\right) + (-1)^{k+1}(k+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^{k+2}} .$$

La méthode (S_1) la plus simple, utilisée par Sweeney [21] et Beyer-Waterman [3], consiste à choisir un entier x assez grand de manière que $R(x)$ soit négligeable et à calculer la valeur approchée $\gamma \simeq F(x) - \mathrm{Log}\, x$. Comme $0 < R(x) < \frac{e^{-x}}{x}$, la précision 10^{-d} est obtenue pour $x \simeq d \,\mathrm{Log}\, 10$.

Etant donné $p \geq 0$, soit a_p l'unique racine réelle > 0 de l'équation

$$a_p(\operatorname{Log} a_p - 1) = p ,$$

de sorte que

$$a_0 = e \simeq 2.718 , \quad a_1 \simeq 3.591 , \quad a_2 \simeq 4.319 , \quad a_3 \simeq 4.971 .$$

La formule de Stirling montre que $\frac{x^n}{n!} \simeq \left(\frac{ex}{n}\right)^n$ est de l'ordre de e^{-px} pour $n = a_p x$. La série $F(x)$ doit donc être sommée ici jusqu'à $n = a_1 x$.

Le calcul de chaque terme de la série, après factorisation suivant la règle de Hörner

$$F(x) = \frac{x}{1}\left(\frac{1}{1} - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - \ldots \frac{x}{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{x}{n}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ldots\right)\right) ,$$

réclame 3 opérations arithmétiques (1 multiplication, 1 division, 1 soustraction). Une difficulté supplémentaire se présente ici du fait qu'une partie des chiffres significatifs est perdue par compensation des termes de signes opposés. Le terme de valeur absolue maximale étant de l'ordre de $\frac{x^n}{n!} \simeq e^x$ pour $n = x$, ceci amène à travailler avec $2d$ décimales au lieu de d . On obtient en définitive le temps de calcul suivant (en négligeant le calcul de $\operatorname{Log} x$) :

$$S_1(d) = a_1 \times d \operatorname{Log} 10 \times 3 \times 2d = 6a_1 \operatorname{Log} 10\, d^2 \simeq 49.6\, d^2 .$$

Une méthode (S_1') plus élaborée, suggérée par Sweeney [21] et mise en oeuvre par Brent [7], consiste à évaluer le reste $R(x)$ par son développement asymptotique limité à l'ordre $k = x$. Compte tenu que

$$\left| R(x) - \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \ldots + \frac{(-1)^x x!}{x^x}\right) \right| \leq \frac{e^{-x} x!}{x^{x+1}} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{-2x} ,$$

on est amené à choisir $x = \frac{1}{2} d \operatorname{Log} 10$, à sommer la série $F(x)$ jusqu'à $n = a_2 x$ $(a_2 \simeq 4.319)$, et à travailler avec des nombres ayant $\frac{3d}{2}$ chiffres décimaux. Le calcul de $R(x)$ ou de e^x nécessite 2 opérations pour chaque terme, effectuées à la précision $10^{-d/2}$. On en déduit

$$S'_1(d) = \left(\frac{9}{4}a_2 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}\, 10\, d^2 \simeq 26.7\, d^2 .$$

Il existe deux autres alternatives pour le calcul de $F(x)$ qui évitent la perte de précision intervenant dans l'algorithme (S_1). Elles reposent sur les développements en séries à termes positifs ci-dessous :

$$(S_2) \qquad F(x) = e^{-x} \int_0^x \frac{e^x - e^t}{x-t}\, dt = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$(S_3) \qquad F(x) = e^{-x/2} \int_{-x/2}^{x/2} \frac{e^{x/2} - e^t}{x/2 - t}\, dt$$

$$= 2e^{-x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \left(\frac{(x/2)^{2n-1}}{(2n-1)\,!} + \frac{(x/2)^{2n}}{(2n)\,!} \right) .$$

La série (S_2), et de façon analogue (S_3), peut être évaluée par factorisation suivant la règle de Hörner (nous posons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$) :

$$e^{-x} \sum_{n=1}^{N} H_n \frac{x^n}{n!} = H_N - e^{-x} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{N}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= H_N - e^{-x}\left(\ldots\ \frac{x}{n}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{N} + \frac{x}{n+1}\left(\ldots\ \frac{x}{N-1}\left(\frac{1}{N}\right)\ldots\right)\right)\right) ,$$

ce qui nécessite 1 multiplication, 1 division et 2 additions à chaque étape. Suivant que l'on néglige ou non le reste $R(x)$ (les algorithmes avec reste seront notés (S'_2) et (S'_3)), ces méthodes conduisent aux temps de calcul

$$S_2(d) = 6a_0 \,\mathrm{Log}\, 10\, d^2 \simeq 37.6\, d^2 ,$$

$$S_3(d) = \frac{11}{4} a_1 \,\mathrm{Log}\, 10\, d^2 \simeq 22.7\, d^2 ,$$

$$S'_2(d) = \left(3a_1 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}\, 10\, d^2 \simeq 26.0\, d^2 ,$$

$$S'_3(d) = \left(\frac{11}{8} a_3 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}\, 10\, d^2 \simeq 16.9\, d^2 .$$

3. ALGORITHME DE BRENT - MAC MILLAN

Cet algorithme repose sur certaines identités vérifiées par les fonctions de Bessel modifiées $I_\alpha(x)$ et $K_0(x)$:

$$I_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha+2n}}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)} \quad ,$$

$$K_0(x) = -\left.\frac{\partial I_\alpha(x)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \quad ;$$

les spécialistes observeront que nous avons substitué $2x$ à x dans les notations classiques du traité de Watson [22]. Par dérivation de I_α, il vient

$$K_0(x) = -(\operatorname{Log} x + \gamma)I_0(x) + S_0(x)$$

où $I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}$, $S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{2n}}{n!^2}$.

Un calcul faisant intervenir l'intégrale de Hankel de la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ donne par ailleurs

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(2x\cos u)\cos\alpha u\,du - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-2x\operatorname{ch} v)e^{-\alpha v}dv \ .$$

En particulier, on obtient les expressions intégrales et les équivalents suivants de $I_0(x)$, $K_0(x)$ quand $x \to +\infty$:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2x\cos u}du \sim \text{ et } > \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}e^{2x} \quad \text{si} \quad x \geq 1 \ ,$$

$$K_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2x\operatorname{ch} v}dv \sim \quad \text{et} \quad < \sqrt{\frac{\pi}{4x}}e^{-2x} \ .$$

La constante d'Euler peut donc s'écrire sous la forme

$$\gamma = \frac{S_0(x)}{I_0(x)} - \operatorname{Log} x - \frac{K_0(x)}{I_0(x)} \ ,$$

avec $0 < \frac{K_0(x)}{I_0(x)} < \pi e^{-4x}$ si $x \geq 1$.

Dans l'algorithme (B) utilisé par Brent, le reste $\frac{K_0(x)}{I_0(x)}$ est purement et simplement négligé ; la précision 10^{-d} est donc atteinte pour $x = \frac{1}{4} d \operatorname{Log} 10$, et les séries $I_0(x)$, $S_0(x)$ doivent être sommées jusqu'à $n = a_1 x$. Le calcul de

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{1^2}\left(1+\frac{x^2}{2^2}\left(\ldots\frac{x^2}{n^2}\left(1+\frac{x^2}{(n+1)^2}(\ldots)\right)\ldots\right)\right)$$

nécessite 2 opérations arithmétiques pour chaque terme, et celui de

$$\frac{S_0(x)}{I_0(x)} = H_N - \frac{x^2}{1^2}\left(\cdots \frac{x^2}{n^2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{x^2}{(n+1)^2}(\cdots)\right)\cdots\right)$$

en exige 4 . Le temps requis par l'algorithme (B) est donc

$$B(d) = a_1 \times \frac{1}{4} d \operatorname{Log} 10 \times 6 \times d \simeq 12.4 d^2 .$$

Comme dans le cas de la méthode de Sweeney, le reste $\frac{K_0(x)}{I_0(x)}$ peut être évalué au moyen d'un développement asymptotique. On a en effet

$$I_0(x)K_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{-\pi<u<\pi \\ v>0}} \exp(2x(\cos u - \operatorname{ch} v))\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \exp(-4xr)\,dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|}$$

grâce au changement de variable $re^{i\theta} = \sin^2 \frac{u+iv}{2}$. Du développement en série

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!^2}{2^{4k} k!^4} r^{2k} , \quad 0 \leq r < 1 ,$$

on déduit alors le développement asymptotique (divergent)

$$I_0(x)K_0(x) \sim \frac{1}{4x} \sum \frac{(2k)!^3}{k!^4 (16x)^{2k}} .$$

Le terme général de ce développement passe par un minimum pour $k = 2x$, et on peut vérifier que le reste correspondant est de l'ordre de grandeur du terme $k = 2x$, soit $\frac{e^{-4x}}{\sqrt{8\pi}\, x^{3/2}}$. La valeur approchée

$$\frac{K_0(x)}{I_0(x)} \simeq \frac{1}{4x I_0(x)^2} \sum_{k=0}^{2x} \frac{(2k)!^3}{(k!)^4 (16x)^{2k}}$$

est donc affectée d'une erreur ne dépassant pas e^{-8x} . Cette méthode amène à choisir $x = \frac{1}{8} d \operatorname{Log} 10$ et conduit au temps de calcul

$$B'(d) = \left(\frac{3}{4} a_3 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} 10\, d^2 \simeq 9.7\, d^2 ,$$

optimal parmi tous les algorithmes présentés ici.

Nous terminons en donnant le "hit-parade" de ces algorithmes, rangés par ordre d'efficacité croissante.

Algorithmes	Euler		Sweeney						Brent	
	E_1	E_2	S_1	S_2	S'_1	S'_2	S_3	S'_3	B	B'
Temps de calcul $/d^2$	$\frac{Cd}{(\mathrm{Log}\, d)^2}$	$C \,\mathrm{Log}\, d$	49.6	37.6	26.7	26.0	22.7	16.9	12.4	9.7

Signalons qu'il existe des algorithmes théoriquement encore plus rapides, permettant d'évaluer γ à 10^{-d} près en $O(d(\mathrm{Log}\, d)^3 \,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, d)$ unités de temps . Ces derniers reposent sur l'utilisation de l'algorithme de multiplication rapide de Schönhage-Strassen [20] et sur une factorisation par blocs de la série $F(x)$ (resp. e^x , $I_0(x)$, $S_0(x)$) ; voir Brent [6]. De tels algorithmes "rapides" sont toutefois très difficiles à programmer et ne l'emportent sur les algorithmes "classiques" présentés ici que lorsque d est très grand.

4. DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE γ

Les valeurs numériques de γ obtenues par les auteurs mentionnés ci-dessus ont été utilisées pour déterminer les développements en fraction continue de γ et e^γ , qui sont connus maintenant jusqu'à l'ordre 29 000 (Brent - Mac Millan [11]). La distribution statistique des réduites successives ne fait apparaître aucune différence significative au niveau de 5 % par rapport à la loi de Gauss - Kusmin (cf. Khintchine [16]) :

$$f_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

donnant la fréquence des réduites égales à n dans le développement de presque tout nombre réel. On obtient d'autre part le résultat suivant, qui rend extrêmement improbable la rationalité de γ ou e^γ :

<u>Théorème</u>. Si γ ou $e^\gamma = P/Q$ pour des entiers P, Q positifs, alors $Q > 10^{15000}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.C. ADAMS. - On the value of Euler's constant ; Proc. Roy. Soc. London, v.27, 1878, p. 88-94. Voir aussi v.42, 1887, p. 22-25.

[2] P. APPELL. - Sur la nature arithmétique de la constante d'Euler ; Comptes Rend. Ac. Sc. Paris, v.182, 12 avril 1926, p. 897-899 ; 19 avril 1926, p. 949.

[3] W.A. BEYER & M.S. WATERMAN. - Error analysis of a computation of Euler's constant ; Math. of Comp., v.28, 1974, p. 599-604.

[4] W.A. BEYER & M.S. WATERMAN. - Decimals and partial quotients of Euler's constant and $\ell n\ 2$; UMT 19, Math. of Comp., v.28, 1974, p. 667. Errata : Math. of Comp., MTE 549, v.32, 1978, p. 317-318.

[5] N. BOURBAKI. - Fonctions d'une variable réelle ; chap. VI, § 1, n° 7 ; Hermann, Paris, 1951.

[6] R.P. BRENT. - The complexity of multiple-precision arithmetic ; Complexity of Computational Problem Solving (R.S. Anderssen and R.P. Brent, Editors), Univ. of Queensland Press, Brisbane, 1976, p. 126-165.

[7] R.P. BRENT. - Computation of the regular continued fraction for Euler's constant ; Math. of Comp., v.31, July 1977, p. 771-777.

[8] R.P. BRENT. - γ and $\exp(\gamma)$ to 20700 D and their regular continued fractions to 20000 partial quotients ; UMT 1, Math. of Comp., v.32, 1978, p. 311.

[9] R.P. BRENT. - Euler's constant and its exponential to 30,100 decimals ; Math. of Comp., UMT File.

[10] R.P. BRENT & E.M. Mc MILLAN. - Some new algorithms for high-precision computation of Euler's constant ; Math. of Comp., v.34, January 1980, p. 305-312.

[11] R.P. BRENT & E.M. Mc MILLAN. - The first 29,000 partial quotients in the regular continued fraction for Euler's constant and its exponential ; Math. of Comp., UMT File.

[12] L. EULER. - De progressionibus harmonicis observationes ; Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v.14, Teubner, Leipzig and Berlin, 1925, p. 93-100.

[13] L. EULER. - De summis serierum numeros Bernoullianos involventium ;
Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v.15, Teubner, Leipzig and Berlin, 1927, p. 91-130. Voir en particulier p. 115. Le calcul est donné en détail p. 569-583.

[14] A. FRODA. - La constante d'Euler est irrationnelle ; Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 38 (1965), p. 338-344.

[15] J.W.L. GLAISHER. - History of Euler's constant ; Messenger of Math., v.1, 1872, p. 25-30.

[16] A. Ya. KHINTCHINE (A. Ja. HINČIN). - Continued Fractions ; 3e édition, traduction anglaise par P. Wynn, Noordhoff, Groningen, 1963.

[17] D.E. KNUTH. - Euler's constant to 1271 places ; Math. of Comp., v.16, 1962, p. 275-281.

[18] K. MAHLER. - Applications of a theorem by A.B. Shidlovskii ; Proc. Roy. Soc. London, A 305 (1968), p. 149-173.

[19] W. SHANKS. - On the numerical value of Euler's constant ; Proc. Roy. Soc. London, v.15, 1867, p. 429-432 ; v. 20, 1871, p. 29-34.

[20] A. SCHÖNHAGE & V. STRASSEN. - Schnelle Multiplikation grosser Zahlen ; Computing, v.7, 1971, p. 281-292.

[21] D.W. SWEENEY. - On the computation of Euler's constant ; Math. of Comp., v.17, 1963, p. 170-178.

[22] G.N. WATSON. - A Treatise on the Theory of Bessel Functions ; 2nd edition, Cambridge Univ. Press, London, 1944.

[23] J.W. WRENCH, Jr. - A new calculation of Euler's constant ; Math. Tables & other Aids to Comp., v.6, 1952, p. 255.

Ouvrages de référence sur la fonction Γ .

[24] E. ARTIN. - The Gamma Function ;
Holt, Rinehart and Winston, 1964, traduit de : Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, 1931.

[25] R. CAMPBELL. - Les intégrales eulériennes et leurs applications ;
Dunod, Paris, 1966.

(juin 1984)