GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Fonctions holomorphes bornées ou à croissance polynomiale sur la courbe* $e^x + e^y = 1$. Note (*) de **Jean-Pierre Demailly,** transmise par Paul Malliavin.

Nous démontrons un théorème d'extension très précis pour les fonctions holomorphes de deux variables complexes sur la courbe $e^x + e^y = 1$, et en déduisons que les fonctions holomorphes bornées sont constantes, ou plus généralement, que toute fonction à croissance polynomiale s'étend en un polynôme sur $\mathbf{C}^2$. Outre l'application immédiate aux fonctions méromorphes, ce résultat permet d'étudier certaines hypersurfaces de $\mathbf{C}^n$.

We show a very precise extension theorem for holomorphic functions on the curve $e^x + e^y = 1$, *and deduce from it that bounded holomorphic functions are constant, or more generally, that every holomorphic function with polynomial growth extends to a polynomial in* $\mathbf{C}^2$. *This result immediately applies to meromorphic functions, and can also be used to study some hypersurfaces of* $\mathbf{C}^n$.

1. Extension des fonctions holomorphes. — Nous noterons S la courbe d'équation $e^x + e^y = 1$ dans $\mathbf{C}^2$.

Théorème 1. — *Soient* φ *une fonction plurisousharmonique dans* $\mathbf{C}^2$ *vérifiant la condition de Lipschitz* $|\varphi(z) - \varphi(z')| \leqq A$ *pour tous points* z, z' *tels que* $|z - z'| < 1$, *et* f *une fonction holomorphe sur la courbe* S *telle que* $|f(z)| \leqq e^{\varphi(z)}$ *pour* z *appartenant à* S. *Alors il existe une fonction entière* F *prolongeant* f *telle que*

$$|F(z)| \leqq 10^4 e^{3A} (1 + |z|)^5 (1 + |e^x + e^y|) e^{\varphi(z)},$$

avec les notations $z = (x, y) \in \mathbf{C}^2$, $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

La démonstration, très technique, est néanmoins classique dans son principe, et fait appel aux estimations d'Hörmander ([2]). Nous renvoyons le lecteur à ([1]) pour le détail.

2. Fonctions a croissance polynomiale sur S. — Le principal résultat, déjà démontré par I. Wakabayashi ([4]) pour les fonctions bornées (par une méthode différente), est le suivant :

Théorème 2. — *Soit* f *une fonction holomorphe sur* S *telle que* $|f(z)| \leqq C(1 + |z|)^n$ *pour* $z \in S$, *où* C *est une constante positive, et* n *un réel. Alors* f *est la restriction à* S *d'un polynôme sur* $\mathbf{C}^2$ *de degré au plus égal à* n.

Nous démontrons le théorème 2 en considérant l'extension F de f fournie par le théorème 1. L'argument essentiel consiste à remarquer que F est polynomiale sur chacune des droites $y = x + (2k+1) i\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, de la courbe $e^x + e^y = 0$, et permet d'obtenir le :

Lemme. — (i) *Soit* F *une fonction entière sur* $\mathbf{C}^2$ *telle que* $|F(z)| \leqq C(1 + |z|)^n (1 + |e^x + e^y|)$ *pour tout* z *dans* $\mathbf{C}^2$. *Alors il existe des polynômes* G *et* H *de degré au plus égal à* n *tels que*

$$F(z) = G(z) + (e^x + e^y) H(z).$$

(ii) *Soit* P *un polynôme sur* $\mathbf{C}^2$ *tel que* $|P(z)| \leqq C(1 + |z|)^n$ *sur* S. *Alors le degré de* P *ne dépasse pas* n.

Il en résulte très facilement les corollaires suivants :

Corollaire 1 (*analogue pour* S *du théorème de Picard*). — *Une fonction méromorphe non constante sur* S *prend toute valeur une infinité de fois, sauf éventuellement un ensemble maigre de valeurs.*

COROLLAIRE 2. — *Soit f une fonction méromorphe non nulle (resp. et d'ordre fini) dans $\mathbf{C}^n$. Alors toute fonction holomorphe bornée (resp. à croissance polynomiale par rapport à x, y, w) sur l'hypersurface de $\mathbf{C}^{n+2}$ d'équation $e^x + e^y = f(w)$, est constante (resp. polynomiale).*

Le corollaire 2 résout un cas particulier d'une conjecture de L. A. Rubel, W. A. Squires et B. A. Taylor :

CONJECTURE. — *Si $f_1, \ldots, f_n$, $n \geqq 3$, sont des fonctions méromorphes non constantes dans le plan, toute fonction holomorphe bornée sur l'hypersurface $f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n) = 0$ [irréductible d'après (3)] est constante.*

3. APPLICATIONS. — Soient $\Sigma_n (n \geqq 1)$ l'hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$ d'équation $e^{z_1} + \ldots + e^{z_{n+1}} = 1$, égale à S pour $n = 1$, et p_n l'application de Σ_n dans $\mathbf{C}^n$ qui au point $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ fait correspondre $(e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$.

p_n est un revêtement d'espace total Σ_n, et de base l'espace $X_n = \mathbf{P}^n$ privé des $(n+2)$ hyperplans $w_1 = 0, \ldots, w_n = 0$, $w_1 + \ldots + w_n - 1 = 0$, et de l'hyperplan à l'infini (en coordonnées non homogènes $w_1, \ldots, w_n$). Le groupe des automorphismes du revêtement est le groupe, isomorphe à $\mathbf{Z}^{n+1}$, des transformations $(z_j)_{1 \leqq j \leqq n+1} \mapsto (z_j + 2ik_j\pi)_{1 \leqq j \leqq n+1}$ où les k_j sont des entiers. Comme $X_1 = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ admet pour groupe fondamental un groupe libre à deux générateurs, et que le groupe d'automorphismes du revêtement $\Sigma_1 \to X_1$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$, $\Sigma_1 = S$ est le revêtement homologique de X_1 (i.e. le plus « grand » revêtement abélien de X_1). Pour $n \geqq 2$, Σ_n s'identifie au revêtement universel de X_n (ce qui signifie encore que Σ_n est simplement connexe).

Le corollaire 2 nous permet donc de retrouver le résultat suivant de I. Wakabayashi [4] :

COROLLAIRE 3. — *Pour $n \geqq 2$, toute fonction holomorphe bornée sur le revêtement universel de l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ privé de $(n+2)$ hyperplans en position générale est constante.*

(*) Séance du 11 décembre 1978.

(1) J.-P. DEMAILLY, *Fonctions holomorphes à croissance polynomiale sur la surface d'équation $e^x + e^y = 1$* [*Bull. Sc. Math.* (à paraître)].

(2) L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 1973.

(3) L. A. RUBEL, W. A. SQUIRES et B. A. TAYLOR, *Irreducibility of Certain Entire Functions with Applications to Harmonic Analysis* (preprint).

(4) I. WAKABAYASHI, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 373.

École normale supérieure, 45, *rue d'Ulm*, 75005 *Paris*
et *L. A. au C.N.R.S.*, n° 213, « *Analyse complexe et Géométrie* »,
Université Paris-VI, 75005 *Paris*.