Lycée Naval
de Brest

CERTIFICAT D'EXERCICE

Je soussigné, N. LEFORT, Proviseur du Lycée Naval, certifie que Monsieur DEMAILLY, Professeur de Mathématiques a assuré dans mon établissement avec compétence et efficacité, un service d'enseignement notamment en classe de Seconde C, durant son service national (année scolaire 1980-1981).

MARINE NATIONALE
LYCÉE NAVAL

Fait à BREST, le 22 Juin 1981

Le Proviseur du Lycée Naval
de Brest

— o —

Le **PRIX IBM** a été attribué pour 1989 à Jean-Pierre Demailly de l'université de Grenoble. A cette occasion, le président du jury A. Beauville nous a transmis ce texte de présentation des travaux de J.-P. Demailly.

Jean-Pierre Demailly, âgé de 32 ans, est professeur à l'université de Grenoble I depuis 1983. Ses travaux portent sur l'analyse complexe, avec une forte composante géométrique. Il n'est pas question ici de les analyser tous; je vais essayer d'en dégager les thèmes essentiels.

1) *La positivité des fibrés holomorphes.* Il existe différentes notions de positivité pour un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe, en particulier celles introduites par Griffiths d'une part et par Nakano d'autre part; la relation entre ces notions a été remarquablement clarifiée par Demailly dans une partie de sa thèse. Cela lui permet d'établir un lien très simple (auparavant inexpliqué) entre les théorèmes d'annulation établis par ces deux auteurs.

Demailly est revenu récemment sur ce sujet avec deux résultats frappants. Le premier concerne l'annulation d'espaces de cohomologie $H^p(X,\Omega^q \otimes S^kE)$ pour p, q, k convenables, lorsque E est un fibré positif. Le Potier a observé voici deux ou trois ans que les résultats de Faltings sur le sujet étaient un peu trop optimistes ; Demailly a alors obtenu ses énoncés, qui sont probablement les meilleurs possibles. Il convient de souligner que, parti d'une approche analytique, Demailly est arrivée à une présentation entièrement algébrique (et très conceptuelle) de ces théorèmes.

Le second résultat, encore plus spectaculaire, est une estimation de la dimension asymptotique des espaces $H^p(X, E \otimes L^k)$ en fonction de k (p fixé), qui a été exposée par Siu au séminaire Bourbaki. La démonstration de Demailly s'inspire de la démonstration par Witten des inégalités de Morse. Elle utilise de l'analyse très fine pour estimer la distribution des valeurs propres du laplacien. Elle permet d'améliorer notablement la conjecture de Grauert et Riemenschneider (d'abord démontrée par Siu) qui caractérise les variétés de Moishezon par l'existence d'un fibré en droites faiblement positif.

Tout récemment Demailly a montré que le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, qui est un raffinement du théorème de Kodaira très utile en géométrie algébrique, résulte simplement des estimations L^2 de Hörmander; cela lui permet d'ailleurs d'en donner uneformulation très agréable.

2) *L'étude des courants positifs* constitue un gros morceau de la thèse de Demailly. Cette étude va dans plusieurs directions : l'une est proche de l'arithmétique, avec notamment une minoration du degré des hypersurfaces s'annulant en un ensemble donné de points; celle-ci lui permet entre autres de résoudre une conjecture de Chudnovski et Waldschmidt sur les multiplicités des courbes algébriques dans $\mathbf{C}^2$. Une autre tend vers la géométrie algébrique : il faut citer, en particulier, un exemple de courant fermé positif extrémal sur $\mathbf{P}^2$ qui ne provient pas d'un cycle algébrique. Cet exemple, qui répond à une question vieille de 20 ans, paraît ruiner les espoirs d'une démonstration analytique de la conjecture de Hodge; mais Demailly les rétablit en prouvant que la conjecture de Hodge résulterait d'un énoncé plus faible que celui qui était généralement conjecturé.

3) *Equations de Monge-Ampère et fonctions plurisousharmoniques.* Je citerai simplement deux résultats : la caractérisation des variétés affines par l'existence d'une fonction psh vérifiant certaines propriétés, et récemment la construction d'une fonction de Green pour l'opérateur de Monge-Ampère sur les ouverts hyperconvexes de $\mathbf{C}^n$, qui lui permet de jeter les bases d'une analyse harmonique dans $\mathbf{C}^n$ où l'opérateur de Laplace est remplacé par celui de Monge-Ampère.

A cheval sur 2) et 3), il faut citer aussi un article récent aux *Acta Mathematica* où Demailly donne une définition générale des nombres de Lelong associés à un courant de type (p,p) en un point d'un espace analytique. Il clarifie ainsi les notions introduites par différents auteurs, généralise et simplifie tout à la fois les théorèmes d'intégralité et d'analyticité de ces nombres de Lelong. On retrouve là une recherche de la clarté et de la simplification qui me paraît être une constante du travail de Demailly.
J'espère que ce bref résumé donne une idée de la richesse et de la diversité de l'œuvre de Demailly. Le plus brillant des jeunes analystes complexes en France (et probablement dans le monde) est un lauréat incontestable du prix IBM.

— o —

Institut Fourier
Université de Grenoble

Saint-Martin d'Hères, le 23 novembre 1982

RAPPORT SUR LES TRAVAUX DE J.P. DEMAILLY

M. DEMAILLY est âgé de 25 ans ; c'est donc, et de loin, le plus jeune des candidats, il a soutenu sa thèse en octobre 1982 à Paris 6 ; son directeur de thèse était M. Skoda.

Avant sa thèse, il avait publié quelques articles, notamment deux où il améliore le contre exemple de Skoda au problème de Serre (fibrés dont la base et la fibre sont des variétés de Stein, sans que le fibre lui-même soit de Stein) ; en particulier, DEMAILLY donne un exemple de cette situation où la base est le disque et la fibre $\mathbf{C}^2$.

Sa thèse elle-même regroupe 7 articles, publiés ces deux dernières années ou en cours de publications, qui étudient différents aspects de la positivité en analyse complexe et géométrie analytique. Étant donné la très grande richesse de ses articles, je me contenterai de noter quelques points particulièrement remarquables.

En premier lieu, DEMAILLY élucide le rapport entre les différentes notions de positivité pour les fibrés vectoriels holomorphes hermitiens en démontrant notamment le résultat suivant : si E est positif au sens de Griffiths, $E \otimes \det E$ est positif au sens de Nakano. La résolution de ce problème, que DEMAILLY ramène à des résultats élémentaires sur les formes hermitiennes semble avoir beaucoup surpris les spécialistes. Il montre aussi que les mêmes résultats permettent d'analyser les relations entre les différentes notions de positivité des courants.

Dans un autre article, il montre comment les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur d" et les théorèmes d'existence qui en découlent se ramènent à des majorations de type Kodaira-Nakano sur des variétés kählériennes complètes : le rapport entre ces deux types de majorations avait souvent été noté, mais sans doute jamais aussi nettement, La fin du même article, d'une grande virtuosité technique, montre comment on peut se débarrasser de la régularité des poids qui interviennent dans ce type de majorations ; ceci lui permet de retrouver et d'améliorer des résultats de divers auteurs, notamment Nakano, Griffiths, Skoda.

Dans un troisième travail; il établit une formule de Jensen à n variables, et en déduit un lemme de Schwarz qui lui permet de retrouver le théorème de Bombieri sur l'ensemble des points où une application méromorphe prend une valeur algébrique, en éliminant les majorations de Hörmander de la question ; la démonstration est de ce fait beaucoup plus simple et naturelle ; l'estimation du degré des hypersurfaces obtenues est un peu moins bonne que celle de Bombieri en dimension ≥ 3 ; mais en dimension 2 elle est meilleure et optimale. La même méthode lui permet aussi de démontrer une conjecture de Chudnovski sur le degré des hypersurfaces algébriques qui s'annulent sur un ensemble fini donné de $(\mathbf{C}^n$ avec multiplicité t , lorsque $t \to \infty$.

D'autres articles sont consacrés aux courants positifs ; dans l'un d'eux il généralise la notion de nombre de Lelong d'un courant positif fermé et en déduit une démonstration très simple de l'invariance du nombre de Lelong par un isomorphisme analytique ; il éclaircit aussi le problème du comportement du nombre de Lelong par image directe par un morphisme propre. Dans un autre article, il donne un exemple de courant positif extrémal sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui n'est pas un ensemble algébrique (son exemple est le suivant :

$S = \lim_d 1/d\ [\Gamma_d]$ est le courant d'intégration sur la courbe de Fermat de degré d ; il résout ainsi un problème vieux de 15 ans ; il montre aussi le rapport de ce type de questions avec la conjecture de Hodge.

Je dois dire que je suis très impressionné par l'ensemble des résultats de DEMAILLY, et plus encore par son style : DEMAILLY ne se contente pas d'améliorer des résultats d'auteurs tels que Hörmander, Nakano, Skoda, Bombieri, etc.. à coup de prouesses techniques ; dans les problèmes qu'il étudie, il simplifie, cherche à aller au fond des choses, à la méthode définitive et au résultat optimal, et il y parvient souvent. A cela viennent s'ajouter tout naturellement un soin et une clarté de rédaction et d'exposition orale remarquables. C'est peu de dire que c'est un excellent candidat, il semble qu'il a l'étoffe d'un grand mathématicien ; dans d'autres temps, il n'aurait eu que le choix entre plusieurs des meilleures universités françaises ou étrangères.

Bernard MALGRANGE

Présentation des travaux de Jean-Pierre DEMAILLY

Jean-Pierre Demailly est professeur à l'Université Grenoble 1. Il est l'auteur d'une oeuvre exceptionnelle par sa profondeur et l'étendue des résultats obtenus. Ceux-ci, fondamentaux pour l'Analyse complexe, apportent des méthodes analytiques nouvelles en géométrie algébrique, en théorie des nombres, et, pour certains d'entre eux, en Physique mathématique. Ils ont donné à Demailly une réputation internationale. Prix Carrière (1981), Prix Mergier-Bourdeix (1994), il a été conférencier invité aux Congrès internationaux de Kyoto (1990) et de Zürich (1994). Il a reçu les Prix Heinemann (Göttingen, 1991) et Humboldt (Max Planck, 1996).

1 - Le point de départ des travaux de J-P. Demailly est l'Analyse complexe à plusieurs variables avec la présence, à côté des fonctions holomorphes, d'objets (fonctions, opérateurs) qui n'ont plus le caractère holomorphe mais forment des classes invariantes par les isomorphismes analytiques complexes: tels sont les fonctions plurisousharmoniques (p.s.h.) et les opérateurs formes-courants positifs fermés. Ils se prêtent à l'étude des opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ et de leurs cohomologies ainsi qu'à celle de la "positivité". Celle-ci fait l'objet de la Thèse de Demailly qui comprend 7 mémoires. Il y définit la s-positivité des espaces fibrés vectoriels holomorphes hermitiens, en faisant intervenir la courbure. Demailly résout ainsi des problèmes nés de la présence de plusieurs notions différentes (Griffiths, Nakano) et sa méthode lui donne la solution de problèmes fins en montrant l'existence de rétractions holomorphes, et d'extensions de fonctions avec contrôle de croissance. Elle utilise des scindages de suites exactes et les estimations L^2. Après sa formule de Jensen, Demailly donne une généralisation du nombre de Lelong pour les courants positifs fermés (P. Lelong, 1957, Y.T. Siu, 1974) en introduisant un poids p.s.h.. Il crée ainsi une technique d'une remarquable efficacité. Un lemme de Schwarz nouveau lui permet de résoudre des conjectures (Chudnovski) en théorie des nombres et d'aller au delà des résultats de Bombieri grâce à une méthode directe qui évite le recours aux techniques L^2. L'étude des éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés en liaison avec la conjecture de Hodge lui permet de montrer par construction qu'ils ne sont pas nécessairement donnés par des cycles analytiques. Demailly donne une caractérisation intrinsèque des variétés algébriques. Elles sont caractérisées par l'existence d'une fonction d'exhaustion p.s.h. qui vérifie une condition simple, ce fut là une réussite très remarquée après les résultats partiels obtenus par Y.T. Siu et S.T. Yau. Je citerai encore la fonction de Green hypercomplexe que Demailly a construite pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe, ainsi que son étude sur les nombres de Lelong des images directes de courants positifs fermés et les résultats qu'il ne cesse de préciser, vu leur importance pour les applications, sur la propagation de leurs singularités. En résolvant une telle succession de problèmes, Demailly a créé une série de techniques nouvelles.

2 - Les résultats de Demailly sur les espaces fibrés l'ont amené à utiliser les techniques précédentes pour l'étude de problèmes de la Géométrie analytique ou algébrique. Une étude spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami complexe le conduit à démontrer des inégalités de Morse asymptotiques pour la cohomologie à valeurs dans un fibre holomorphe. Ses résultats sur les puissances tensorielles des fibrés vectoriels ont été vite remarqués et utilisés. Soit E un fibré holomorphe en droites et F un fibre de rang r sur une variété complexe compacte X. Demailly donne pour la dimension des espaces de cohomologie $H^q(X, E^k \otimes F)$ une majoration fonction de la courbure de X, pour $k \to +\infty$. Ce résultat lui permet de démontrer en géométrie algébrique des conjectures (Grauert-Riemenschneider) sur les espaces de Moishezon. L'étude fournit aussi des propriétés asymptotiques. En les appliquant à l'opérateur de Schrödinger des champs magnétiques intenses, Demailly a obtenu des propriétés asymptotiques optimales, elles sont valables dans une situation plus générale que celle étudiée par Witten pour la théorie de la supersymétrie.

3- La mesure de l'amplitude des fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe X amène Demailly à étudier des critères numériques. L'analyse de la conjecture de Fujita (1993) le conduit à un résultat précis pour passer d'un fibre ample à un fibre "vraiment ample". En utilisant les techniques L^2, des résultats de Yau, et les propriétés des nombres de Lelong, Demailly établit une version effective pour des énoncés importants tel le théorème de Matsusaka.

Les succès de Demailly l'ont amené récemment à développer ses méthodes en Géométrie. En collaboration avec Peternell et Schneider (1994), il a entrepris une série d'études sur les variétés kählériennes compactes à fibré tangent numériquement effectif. Une autre étude en cours (avec Kollár) apporte des résultats sur les exposants (au sens d'Arnold) des singularités des fonctions plurisousharmoniques.

Ces travaux qui intéressent l'Analyse complexe, la géométrie algébrique et la théorie des nombres ont valu à Demailly de nombreuses invitations et lui ont donné une activité internationale. Il est actuellement rédacteur de plusieurs des meilleurs journaux mathématiques.

L'étendue et l'importance de l'oeuvre déjà faite par J.-P. Demailly font de lui un candidat exceptionnel. Cette oeuvre poursuivie avec une continuité remarquable donne dès maintenant à Demailly une réputation internationale.

P. Lelong

Principales publications de JEAN-PIERRE DEMAILLY

[1] Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques. *Bull. Soc. Math. de France, 110, 1982, 75-102.*

[2] Estimations L^2 pour l'opérateur d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4e Sér.15, 1982, 457-511.*

[3] Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge. *Invent. Math.69, 1982, 347-374.*

[4] Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' cohomologie. *C.R.A.S., 305, 119-122 et Ann. Inst. Fourier Grenoble 35, 1985, 189-229.*

[5] Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité. *Acta Math. 159, 1987, 153-159.*

[6] Holomorphic Morse inequalities. *Proc. Symposia in pure Math. 52, 1991,93-114.*

[7] A numerical criterion for very ample line bundles. *Jour. Diff. Geom., 37, 1993, 323-374.*

[8] Regularization of closed positive currents and intersection theory. *Jour. Alg. Geom. 1, 1992, 361-409.*

[9] Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials. *Proc. A.M.S., Summer School on Alg. Geom.,Santa-Cruz, 1995.*

[10] Effective bounds for very ample line bundles. *Invent. Math. 124, 1996, 243-261.*

[11] Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds, *Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1997.*

Note sur l'œuvre et les travaux de Jean-Pierre Demailly, mathématicien.

Je crois nécessaire de préciser, ne fût-ce que brièvement, le caractère et la valeur exceptionnelle des résultats que J.-P. Demailly a apportés aux mathématiques. J'essaierai de le faire en quelques mots. Poincaré, autrefois, avait dit et prévenu que la recherche mathématique, pour le passage de 1 à $n > 1$, du nombre n des variables (ou des coordonnées) complexes, en analyse ou en géométrie, ne pourrait être une généralisation ni s'y ramener. Par là, certes, il jugeait déjà la valeur mais aussi les difficultés des créations à accomplir au sein de secteurs fondamentaux pour la science mathématique et pour ses applications.

C'est cependant vers de tels problèmes qui obligent à former des méthodes et à créer des situations nouvelles au sein d'un domaine fondamentalement nouveau (mais parfois, à tort, on le juge classique) que Demailly a fait cette oeuvre étendue qui a conduit si souvent à une analyse, une géométrie et des applications nouvelles. J'en donnerai ici un exemple simple en évoquant un problème qui était demeuré longtemps sans solution et que Demailly a résolu dès ses débuts, avant sa thèse, en montrant qu'un domaine fibré dans l'espace complexe, même si sa base et ses fibres ont la propriété de pseudo-convexité, ne saurait posséder lui-même cette convexité complexe que dans des situations exceptionnelles que l'analyse de Demailly a été capable de préciser.

En conclusion, l'oeuvre de Demailly, est de qualité et d'importance exceptionnelle dans un domaine mathématique étendu et important pour la science par ses applications. Elle a résolu des problèmes mathématiques essentiels. Leur solution par Demailly fait de lui un candidat exceptionnel. La valeur de l'oeuvre qu'il a faite lui a valu nombre de prix parmi les plus recherchés, nationaux et internationaux, confirmant la réputation d'une recherche de première importance scientifique.

Je prie le lecteur d'excuser l'envoi de cette Note sur la situation mathématique, je le renvoie à l'exposé des travaux de Demailly dans la présentation de sa candidature.

Pierre Lelong
9 place de Rungis
75013 Paris
Tél. 01.45.81.51.45

19 Novembre 2005

P. Lelong

UNIVERSITÉ PARIS VI
ANALYSE COMPLEXE
ET GÉOMÉTRIE
Laboratoire Associé au C. N. R. S.
(LA. 213)
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS - CEDEX 05
TOUR 45-46 5° ÉTAGE
TEL 329-12-21 POSTE 53-46

ENVOI DE : H.SKODA

PARIS, le 29/X/1982

Monsieur le Président de la

Commission de "Mathématiques"

(Section 17)

Cher Collègue,

Je vous transmets ci-joint les rapports de la soutenance de thèse de Jean-Pierre DEMAILLY destinés à être joints à son dossier de candidature à un poste de professeur.

Il y a en particulier un rapport de R.HARVEY, mathématicien américain qui avait été invité à parler au Congrès ajourné de Varsovie (1982) . Ces rapports contiennent une analyse détaillée de l'oeuvre déjà impressionnante de J.-P.DEMAILLY.

Je voudrais seulement ajouter qu'à mon avis J.-P.DEMAILLY est certainement l'un des jeunes mathématiciens les plus doués de sa génération et que de plus ses qualités personnelles et ses qualités d'exposition feront de lui un excellent professeur d'Université.

Si cette candidature vous intéresse, je vous invite à demander des avis complémentaires à Louis BOUTET de MONVEL, J.-P.RAMIS, J.-L. VERDIER en France, à Y.T.SIU (Harvard) et C.O.KISELMAN (Uppsala) à l'étranger. Ces personnes ont en effet suivi de près la carrière de J.-P.DEMAILLY.

Je vous prie de croire, cher Collègue, à l'expression de mes sentiments dévoués.

H. SKODA

H Skoda

UNIVERSITÉ PARIS VI
ANALYSE COMPLEXE ET GÉOMÉTRIE
Laboratoire Associé au C. N. R. S.
(LA. 213)
4. PLACE JUSSIEU
75230 PARIS - CEDEX 05
TOUR 45-46 5e ÉTAGE
TÉL. 329-12-21 - POSTE 53-44

ENVOI DE : Pierre Dolbeault

RAPPORT SUR LA THESE D'ETAT DE J.-P. DEMAILLY

La thèse de Demailly est une contribution majeure à l'étude de la positivité des fibrés vectoriels holomorphes d'une part, des courants d'autre part. L'introduction de ces notions remonte à plus de trente ans pour la première, à 25 ans pour la seconde. Elles ont donné lieu à de nombreux travaux de mathématiciens éminents. Deux contributions de Demailly me paraissent essentielles :

(a) pour les fibrés, les relations entre les notions de positivité de Nakano, de Griffiths et les nouvelles notions introduites par Demailly ;

(b) pour les courants positifs, l'exemple de courant positif extrémal qui n'est pas le courant d'intégration sur un ensemble analytique complexe irréductible, résolvant un problème classique depuis 15 ans.

Il faut insister sur la profondeur de l'idée de Demailly pour le point (a) qui a ramené une situation qui paraissait confuse à un problème simple de géométrie hermitienne et, d'autre part, l'ingéniosité des méthodes souvent originales et des exemples comme celui du point (b) .

Si beaucoup de ces travaux ont leur origine dans ceux de Skoda, beaucoup aussi en sont indépendants et l'autonomie de Demailly est acquise depuis longtemps.

Il y a lieu de remarquer aussi la rapidité et la qualité de rédaction de Demailly.

Parmi les thèses de mathématiques récentes, toutes spécialités confondues, celle-ci me parait figurer dans le lot des toutes premières.

PARIS, le 28 Septembre 1982

P.DOLBEAULT

Report on the Thesis of Jean-Pierre Demailly

by Reese Harvey

It is my pleasure to report on the thesis of J.-P. Demailly. Because of the comprehensive and detailed report of Henri Skoda on his individual papers, I will confine myself to more general remarks.

Demailly has made major contributions to complex analysis/ complex geometry. His work contains many results which are highly original and of great significance. I mention just two of many examples. First, his understanding of positivity (of extreme importance because of the Bochner method) goes beyond that of the world's experts. I rate this work very high. Second, and more recently, he has obtained a beautiful Jensen type formula for currents of bidimension (p,p), and shown originality and depth in applying this formula.

His contributions to various problems consistently demonstrate good mathematical taste, depth, and originality. In my opinion, there is no doubt whatsoever that his work constitutes a worthy thesis. By American standards his work is comparable to the union of several first class theses at a first class university.

Reese Harvey

Reese Harvey, 5/20/82

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
-PARIS 6-
4 Place Jussieu 73230 PARIS CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITÉ
Bureau des Enseignements du 3e Cycle
Bât. C - 11 Quai St. Bernard Paris 5e

Tél. 326-12-21 - 336-26-25

DOCTORAT ES SCIENCES
Spécialité

MATHÉMATIQUES

R A P P O R T

de M. Henri S K O D A

qualité Professeur
Lieu d'exercice Paris VI
sur la Thèse présentée par M DEMAILLY Jean-Pierre

ayant pour sujet "SUR DIFFÉRENTS ASPECTS DE LA POSITIVITÉ EN ANALYSE COMPLEXE"

La thèse d'Etat de Jean-Pierre Demailly regroupe un ensemble de huit articles qui apportent chacun une contribution majeure à l'analyse complexe. Le thème central de sa thèse est sans aucun doute la notion de positivité en analyse complexe et en géométrie analytique sous ses différents aspects: fibrés positifs, courants positifs, fonctions plurisousharmoniques.

Nous analysons brièvement chacun des articles par ordre chronologique.

- L'article « Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lien singulier donné dans $\mathbf{C}^n$ » a été publié aux Annales de l'institut Fourier en 1980. Dans cet article, J.-P. Demailly construit des exemples d'hypersurfaces complexes irréductibles à croissance très lente dont néanmoins l'ensemble des points singuliers est à croissance très rapide. Cela montre que l'analogue transcendant de la propriété bien connue des courbes algébriques de se décomposer, si elles ont trop de points doubles, n'est pas vrai. Il s'agit en fait d'un analogue pour les singularités du contre-exemple de Cornalba-Shiffman pour le problème de Bezout transcendant. Par l'intermédiaire du théorème de Paley-Wiener, il en déduit en particulier que
$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) * \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \neq \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \text{ pour } n \geq 2$$
(résultat dû à Dixmier, Malliavin, Rubel).

- Dans l'article « Relations entre les notions de positivités de P.A.Griffiths et de S.Nakano pour les fibrés vectoriels », il montre que si E est positif au sens de Griffiths, $E \otimes$ dét E est positif au sens de Nakano. Il clarifie de la sorte les liens entre les deux types de positivité et montre que contrairement au sentiment qui prévalait chez les spécialistes, la notion forte de positivité au sens de Nakano est également très géométrique et très répandue .

- Dans l'article « Relations entre les différentes notions de fibrés et de courants positifs », J.-P. Demailly affine les résultats précédents. Il montre qu'il y a en fait trois notions naturelles de positivité pour les fibrés vectoriels. Il étudie leurs relations puis il montre que ces résultats se transposent à la positivité des courants : si T est un courant faiblement positif, alors $P(L,\Lambda)T$ est fortement positif, où P est un certain polynôme très naturel appliqué aux opérateurs L et Λ de la géométrie hermitienne.

- Dans l'article « Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2 », J.-P. Demailly montre, sous des hypothèses de positivité très raisonnables, l'existence de scindages holomorphes d'une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes avec contrôle de la croissance. Il s'inspire de mes travaux antérieurs sur les morphismes de fibrés, mais il les dépasse en faisant preuve de beaucoup d'originalité. De plus il en donne des applications intéressantes à l'existence de rétractions holomorphes locales sur une sous-variété lisse de $\mathbf{C}^n$, avec estimations précises. Il en déduit un théorème de prolongement des fonctions holomorphes toujours avec estimations L^2 précises. Les résultats qu'il obtient sur ces questions fondamentales semblent à peu près optimaux et définitifs. Ces trois derniers articles ont été publiés dans le Séminaire Lelong-Skoda, 1980 et 1980-1981.

- Dans l'article « Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques », J.-P. Demailly généralise les notions de mesure trace, de mesure projective et de nombre de Lelong d'un courant positif fermé. Il obtient de nouvelles formules de Jensen dans $\mathbf{C}^n$. Il en déduit un lemme de Schwarz très général dans $\mathbf{C}^n$ qui lui a permis de redémontrer le théorème de Bombieri sur l'ensemble des points où une application méromorphe prend des valeurs algébriques, sans utiliser les estimations L^2 de Hörmander. Il parvient ainsi à éliminer de la théorie un argument peu constructif et difficile.
  L'estimation du degré des hypersurfaces est un peu moins bonne que celle de Bombieri dans le cas $n \geq 3$, mais pour $n = 2$ elle est meilleure et optimale. Ce travail a été publié au Bulletin de la Société Mathématique de France, 1980.

- Dans l'article « Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé » , il définit le nombre de Lelong d'un courant T positif fermé associé à un poids φ par :
  $$\nu(T,\varphi)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{\varphi(z)<r} T\wedge(i\partial\bar\partial\varphi)^p$$
  (où T est de bidimension (p,p)).
  Il montre que $\nu(T,\varphi)$ ne dépend que du comportement asymptotique de log φ au voisinage de l'ensemble $\varphi = 0$.
  Il en déduit une démonstration très simple de l'invariance du nombre de Lelong par un isomorphisme analytique local.
  Il éclaircit d'autre part complètement le problème de la transformation du nombre de Lelong d'un courant positif fermé par image directe par un morphisme propre.
  Il montre que si le morphisme est à fibres totalement discontinues, le nombre de Lelong augmente par image directe et que sinon on ne peut rien dire.
  Il précise d'autre part la façon dont se transforme le nombre de Lelong en tenant compte de certaines multiplicités du morphisme.

- Dans l'article « Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète", J.-P. Demailly généralise les estimations L^2 de Hörmander au cas d'une variété kahlérienne complète, munie d'une métrique kählérienne non nécessairement complète. De plus, les métriques des fibrés et les poids utilisés peuvent être singuliers. Il substitue avantageusement à la technique des trois poids de Hörmander une idée astucieuse et simple, consistant à approcher une métrique non complète par une suite de métriques complètes. Il introduit une notion de s-positivité particulièrement adaptée à l'identité de Kodaira et généralisant les notions de positivité de S. Nakano et P.A. Griffiths. Il obtient une formulation optimale de mes résultats sur les morphismes de fibrés semi-positifs, en les généralisant de plus au cas des q-formes $\bar{\partial}$ -fermées et en éliminant certaines hypothèses superflues.

- Pour approcher des poids singuliers sur la variété par des poids C^∞ , J.P. Demailly a été amené à développer une théorie de la régularisation sur les variétés à l'aide d'un noyau qui fait intervenir l'application exponentielle et qui est "symétrique" vis-à-vis de la métrique kählérienne.
  Il obtient alors l'approximation d'une fonction plurisousharmonique, aux singularités arbitraires, à l'aide d'une suite décroissante de fonctions, dont les défauts de plurisousharmonicité sont continus et tendent uniformément vers 0 sur tout compact.
  Les résultats obtenus sont quasiment optimaux.
  Il faut noter que l'estimation du hessien de la régularisée est un joli tour de force technique.

- Dans le dernier article « Courants, positifs, extrémaux et conjecture de Hodge », J.-P. Demailly exhibe un courant, positif, fermé sur $\mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{C}^2$ qui est extrémal et qui n'est pas le courant d'intégration sur un ensemble analytique irréductible. Il résout ainsi un problème posé depuis près de quinze ans. Le courant est obtenu comme limite de cycles à coefficients rationnels : grossièrement parlant, son support est un fibré en disques complexes. Le caractère extrémal du courant est démontré à l'aide d'un théorème du support pour les courants positifs fermés, à support dans une variété, fibrée en variétés complexes et totalement réelle dans les directions transverses aux fibres. J.-P. Demailly pose un nouveau problème : tout courant extrémal est-il limite de cycles ? Il montre qu'une réponse positive à ce problème entraîne la conjecture de Hodge : toute classe de cohomologie rationnelle d'une variété projective contient un cycle rationnel. Il fournit de la sorte une motivation exceptionnelle aux recherches dans ce domaine.

En résumé, cet ensemble imposant de résultats nouveaux et profonds constitue une thèse d'Etat d'un très haut niveau qui a déjà donné lieu à six publications. J.-P. Demailly a fait la preuve qu'il maîtrise parfaitement les méthodes et techniques diverses de l'Analyse Complexe. Il a su trouver par lui-même des directions de recherche très originales en particulier dans son article sur les formules de Jensen et dans celui qui porte sur les éléments extrémaux. La rédaction de tous ces articles est extrêmement précise et soignée. Il s'agit, à mon avis, d'une très bonne thèse qui révèle chez son auteur des qualités de chercheur exceptionnelles.

Fait à PARIS, le 19/1/1982

Henri SKODA

H Skoda

UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE
-PARIS 6-
4 Place Jussieu 75230 PARIS CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITÉ

Bureau des Enseignements du 3e Cycle
Bât. C - 11 Quai St. Bernard Paris, 5e
Tél. 325-12-21 - 336-26-25

DOCTORAT ÈS SCIENCES
Spécialité :
MATHÉMATIQUES PURES

RAPPORT de SOUTENANCE
de THÈSE

Thèse soutenue le 19 OCTOBRE 1982
par Monsieur DEMAILLY Jean-Pierre

Sujet de la thèse :
SUR DIFFÉRENTS ASPECTS DE LA POSITIVITÉ EN ANALYSE COMPLEXE

Composition du jury :

Monsieur LELONG...**Président**
Monsieur DOLBEAULT..
Monsieur SKODA...
Monsieur BOUTET DE MONVEL...
Monsieur LE POTIER..

Rapport de soutenance : Le Jury souscrit entièrement à l'analyse de la thèse de J.-P.DEMAILLY et au rapport de M. Henri SKODA ainsi qu'aux appréciations élogieuses données dans les 3 rapports, rapports qui soulignent bien l'étendue exceptionnelle des résultats et l'apport personnel du candidat. La soutenance confirme les remarquables qualités d'exposition de J.-P.DEMAILLY qui sait dégager l'essentiel sans sacrifier la précision.

Concernant la seconde thèse, M. J.-P. DEMAILLY a exposé avec une clarté et une précision tout-à-fait exceptionnelle la constructibilité du faisceau des solutions d'un système holonome, d'après KASHIWARA, sujet qui demandait pourtant en deux mois un investissement intellectuel considérable.

Dans ces conditions, en présence d'un candidat et de travaux d'une étendue assez exceptionnelle, le jury est unanime à souhaiter que M. DEMAILLY soit proposé rapidement pour un poste de professeur d'Université.

Mention accordée au candidat par le jury* :
Très honorable

PARIS, le 19 octobre 1982

Le Président
Le Président et les membres du jury

** L'article 10 de l'arrêté du 16 avril 1974 prévoit l'attribution des mentions : passable / honorable / très honorable*

UNIVERSITÉ PARIS VI

ANALYSE COMPLEXE
ET GÉOMÉTRIE
Laboratoire Associé au C. N. R. S.
(L.A. 213)

4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS - CEDEX 05
TOUR 45-46 5* ÉTAGE
TÉL. 329-12-21 - POSTE 53-44

ENVOI DE : Henri SKODA

Janvier 1979

RAPPORT SUR LES TRAVAUX de J.-P.DEMAILLY en vue d'une candidature au C.N.R.S.

Directeur de Recherche : H.SKODA, Université de Paris VI

Jean-Pierre DEMAILLY est actuellement élève (en quatrième année) à l'École Normale Supérieure (de la rue d'Ulm) et agrégé de l'université (1977) [rang 3e].

Depuis Octobre 1977 il travaille sous ma direction à la préparation d'une thèse de 3e Cycle. Extrêmement doué et rapide, J.-P. Demailly a déjà accumulé la matière d'une excellente thèse de 3e Cycle. Il s'agit d'une thèse d'Analyse complexe, utilisant les propriétés de croissance des fonctions entières pour l'étude des espaces fibrés d'une part, d'une remarquable surface de Riemann d'autre part. Cette thèse regroupe et améliore les résultats de deux articles originaux déjà acceptés pour publication dans des revues scientifiques, et dont chacun aurait suffi à lui seul pour l'obtention d'un 3e Cycle.

La première partie du travail de J.-P. Demailly se situe dans le cadre du problème de J.-P. Serre : un fibré à base et à fibre de Stein est-il lui-même de Stein ? En 1977, j'avais donné une réponse négative à ce problème en construisant un contre-exemple dont la base était un ouvert de $\mathbf{C}$ à deux trous, la fibre était $\mathbf{C}^2$ et les automorphismes de transition étaient de type exponentiel et localement constants. Je montrais alors que les fonctions holomorphes sur le fibré étaient constantes sur les fibres.

J.-P. Demailly a considérablement développé les idées de ce contre-exemple. Il a construit un contre-exemple dans lequel la base n'a qu'un trou ($\mathbf{C}\setminus\{0\}$ ou une couronne par exemple), dans lequel la fibre est toujours $\mathbf{C}^2$, et dans lequel les automorphismes de transition sont localement constants et surtout polynomiaux, ce qui constitue le contre-exemple "maximal" puisque la réponse au problème de Serre est positive si les automorphismes de transitions sont linéaires affines.

Dans le cas d'une couronne de $\mathbf{C}$ définie par $0 < \rho_1 < |z| < \rho_2 \leq +\infty$ et de l'automorphisme de transition :

$$(z_1, z_2) \to (z_1^k - z_2, z_1)$$

il a fait une étude quantitative précise, montrant que le fibré est de Stein si $k \leq \exp(2\pi^2/\log \rho_2/\rho_1)$ non de Stein si $k > \exp(2\pi^2/\log \rho_2/\rho_1)$.

L'holomorphe convexité du fibre dépend donc aussi de la structure de la base. Elle dépend en fait fondamentalement de certaines constantes dans une inégalité de P. Lelong, qui exprime une certaine invariance de la croissance d'une fonction holomorphe sur les fibres d'un espace fibré, quand la fibre varie. Le travail de J.-P. Demailly a consisté alors par un calcul ingénieux d'enveloppe pseudo-convexe a évaluer très précisément la constante de P.Lelong.

Dans les contre-exemples précédents, la base n'est pas simplement connexe. Il était donc naturel de se demander si la réponse était encore négative avec une base simplement convexe. J.-P.Demailly a construit un tel contre-exemple, ayant pour base **C** ou le disque unité, dans lequel les automorphismes de transition sont (non constants bien sûr) de type exponentiel. L'idée est de substituer aux trous des contre-exemples précédents des singularités ponctuelles essentielles des automorphismes de transition. Quand on approche la singularité dans une direction privilégiée, l'automorphisme de transition est très proche de l'identité, ce qui permet en gros de montrer que la croissance d'une fonction sur le fibré est invariante par les automorphismes de transition et par conséquent qu'une telle fonction est constante sur les fibres.

L'idée sous-jacente est simple, mais la réalisation technique est rendue particulièrement difficile par le fait qu'il faut faire "varier les constantes" de l'inégalité de P.Lelong, en gardant néanmoins un contrôle très précis de ces constantes. J.-P. Demailly a parfaitement su maîtriser cette difficulté. Il étudie ensuite la topologie de $H^1(X,O)$ dans ces différents contre-exemples. Il montre que le $H^1(X,O)$ est toujours de dimension infinie et non séparé et même grossier dans certains cas, répondant ainsi complètement à une question que m'avait posée J.-P. Ramis.

Ce travail a été publié d'une part au Séminaire LELONG-SKODA, 1976/77, et d'autre part dans la revue Inventiones Mathematicae en 1978, revue particulièrement sélective et renommée.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude de la surface de Riemann S (courbe complexe dans $\mathbf{C}^2$):

$$e^x + e^y = 1,$$

où x.y sont les coordonnées de $\mathbf{C}^2$. L'intérêt particulier de cette surface réside dans le fait qu'elle est isomorphe au revêtement homologique du plan complexe privé de deux points (i.e. le revêtement de **C** \{0, 1}) dont le groupe d'automorphisme est isomorphe à **Z** x **Z** .

J.-P. Demailly démontre que toute fonction holomorphe sur S à croissance polynomiale est la restriction à S d'un polynôme de degré correspondant. En particulier, d'après le théorème de Liouville, toute fonction holomorphe bornée sur S est constante. Ce dernier résultat est un cas particulier d'un problème posé par Rubel :

si f_1 , f_2 , ... , f_n sont des fonctions entières de **C**, toute fonction holomorphe bornée sur l'hypersurface de C définie par :

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + ... + f_n(z_n) = 0$$

est-elle constante ?

La méthode de Demailly consiste à étendre dans une première phase la fonction f définie sur S en une fonction F sur $\mathbf{C}^2$, qui n'est pas polynomiale, mais qui possède des propriétés de croissance très particulières. Il utilise à cet effet les estimations L^2 de L.HORMANDER pour l'opérateur $\bar\partial$. Dans une deuxième phase, il utilise le fait que la surface « voisine » $e^x + e^y = 0$ est réunion de droites complexes pour montrer en utilisant le théorème de Liouville et des identités formelles ingénieuses que F est du type

$$P(x,y) + (e^x + e^y)Q(x,y)$$

où P et Q sont des polynômes, puis que f est restriction d'un polynôme. Il faut bien voir que la réussite de la méthode n'était nullement évidente à priori, car généralement l'usage courant des estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ s'accompagne de pertes plus ou moins automatiques sur la croissance de l'extension F, pertes qui rendraient inutilisables les identités formelles de la 2ème partie de la démonstration.

J.-P. Demailly a donc dû et su renouveler complètement et très ingénieusement l'usage classique du $\bar\partial$ dans ce problème d'extension.

La deuxième partie d'identification formelle est à la fois remarquablement élémentaire, très ingénieuse et spécifique à l'hypersurface $e^x + e^y - 1 = 0$.

J.-P. Demailly termine par un analogue du théorème de Picard pour les fonctions-méromorphes sur S, qui lui permet de démontrer que S ne peut pas s'obtenir à partir de C par une suite d'opérations élémentaires du type : retrancher une partie polaire, prendre un revêtement ramifié fini.

Ce travail a été accepté pour publication au Bulletin des Sciences Mathématiques .

Je dois ajouter que si dans la première partie de sa thèse J.-P. Demailly a suivi de très près mon travail antérieur et mes suggestions, en y ajoutant toutefois une très grande originalité technique, en revanche dans la deuxième partie il a pris lui-même toutes les initiatives originales qui l'ont conduit à la solution finale du problème. Cette seconde partie qui est apparemment moins spectaculaire que celle qui concerne le très célèbre problème de Serre, est néanmoins celle qui est peut-être la plus ingénieuse.

Cet ensemble imposant de résultats nouveaux et profonds constitue une thèse de 3e Cycle d'un niveau exceptionnel, qui a déjà donné lieu à quatre publications (dont l'une aux Inventiones).

J.-P. DEMAILLY qui est de plus agrégé de l'Université depuis 1977, n'aura 22 ans qu'en Septembre prochain.

Je pense personnellement qu'après des débuts aussi prometteurs J.-P. Demailly sera l'un des meilleurs chercheurs en Analyse complexe de sa génération.

Je suis convaincu qu'un poste de chercheur au C.N.R.S. permettra à J.P. Demailly, qui a déjà atteint le niveau de la recherche internationale, d'arriver très rapidement à des résultats tout à fait exceptionnels et je recommande chaleureusement sa candidature au C.N.R.S.

Fait à Paris, le 19 Janvier 1979
H. S K O D A
Maître de Conférences à l'Université de PARIS VI

M. Cl. WROBEL
U.E.R. "Sciences Mathématiques"

UNIVERSITE de NANCY I

Case Officielle n° 140

54037 - NANCY - CEDEX

Nancy, le 8 mai 1978

M. DEMAILLY

E.N.S.

45, rue d'Ulm

75005 – PARIS

Cher Collègue,

J'ai le plaisir de vous informer que la Commission a étudié avec un grand soin votre dossier de candidature et vous aurait classé parmi les tous premiers mais, à cause du grand nombre de candidats d'excellent niveau, a préféré ne pas prendre les élèves de 3e année de l'École Normale Supérieure.

Votre dossier est tel que, votre candidature ne devrait faire l'objet d'aucune difficulté pour l'année prochaine.

Vous trouverez, ci-joint, une copie du rapport de votre dossier.

Veuillez agréer, Cher Collègue, l'expression de mes meilleurs sentiments.

Cl. WROBEL

P.J. - 1

- RAPPORT -

M. Demailly est un jeune normalien, reçu 3ème à l'agrégation 77 obtenue après une brillante scolarité (mention T.B. partout). Il travaille actuellement sous la direction de M. SKODA. Après avoir rédigé un excellent mémoire de D.E.A. sur les méthodes de Hörmander (idéaux de fonction holomorphes...) il s'est attaqué à l'étude de contre exemples à un problème de J.P.Serre, à savoir si un espace fibré analytique dont la base et la fibre sont des variétés de Stein, est lui-même de Stein.

En l'espace de 3 mois, il a trouvé des centre-exemples particulièrement forts concernant différents fibrés holomorphes, non de Stein. Ces résultats publiés au Séminaire Lelong font l'objet d'une thèse de 3ème cycle qui doit être soutenue prochainement.

D'autre part, M. Demailly poursuit ses recherches dans 3 directions :

- classification des obstructions à une réponse positive au problème de Serre et recherche d'une réponse positive sous des hypothèses convenables
- l'étude du nombre de Lelong de l'image directe d'un courant positif fermé par un morphisme propre.
- le problème de l'existence de fibrés de rang 2 non triviaux sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ pour n assez grand.

La rapidité avec laquelle M. Demailly a obtenu ses premiers résultats permettent d'espérer un avenir fructueux.

Avis extrêmement favorable.

Cl. WROBEL