

**Texte de présentation des travaux de Jean-Pierre Demailly**  
**Professeur à l'Université de Grenoble I**  
**Académie des Sciences, le 17 juin 2008**

Monsieur le Président, Monsieur le Vice-Président,  
Messieurs les Secrétaires Perpétuels,  
Mesdames, Messieurs,

Je voudrais tout d'abord remercier les Consœurs et Confrères qui m'ont élu Membre de l'Académie des Sciences en décembre dernier, alors que je travaillais auprès de la section de Mathématiques comme membre correspondant depuis 1994.

Je vais essayer ici de retracer mon parcours et décrire mes intérêts scientifiques. Il n'est pas toujours facile d'expliquer à des non spécialistes la substance intime de travaux de mathématiques fondamentales, et je vais donc tenter de traduire quelques unes de mes contributions en termes simples et compréhensibles par tous.

Déjà depuis les travaux de Bernhard Riemann autour de 1860, et peut-être même avant, les mathématiciens ont utilisé des idées issues de la Physique, à savoir des méthodes issues de la théorie du potentiel et de l'électromagnétisme, pour aborder des questions de géométrie ou de topologie. Ce point de vue a été ensuite considérablement approfondi par Henri Poincaré et par beaucoup d'autres. On en a vu récemment une illustration spectaculaire avec la résolution par Grigori Perelman de la conjecture de Poincaré. Celle-ci énonce une caractérisation topologique de la sphère de dimension 3, et sa solution surprenante repose sur l'analyse d'équations d'évolution liées aux équations de la gravitation d'Einstein.

Imaginez une surface fermée qui soit bosselée de toutes parts : dans les endroits où il y a des creux, on cherche à redresser la surface, tandis qu'aux endroits les plus bombés vers l'extérieur on cherche à diminuer la courbure. On peut conjecturer alors que la surface va finir par converger vers une forme parfaitement ronde. C'est ce que Perelman a démontré en dimension 3, sous des conditions adéquates, et au prix de "délicates chirurgies", suivant en cela un programme initié par Richard Hamilton dans les années 1980. Mais il y a eu en chemin des difficultés techniques très importantes, que Perelman a pu surmonter autour de 2003. Cela lui a valu la médaille Fields au Congrès international des mathématiciens de Madrid en 2006, médaille qu'il a malheureusement refusée ! Mais en tout cas, la solution de l'un des sept prestigieux "problèmes du millénaire" de la Fondation Clay lui revient de plein droit.

Avant ces développements fondamentaux, et de manière beaucoup plus modeste, j'ai moi-même contribué à ce type d'idées en introduisant depuis 1985, et jusqu'aux années récentes, un certain nombre de méthodes analytiques nouvelles permettant de mieux comprendre la géométrie des variétés algébriques. Les objets auxquels je m'intéresse sont les variétés algébriques ou analytiques complexes, c'est-à-dire les ensembles de solutions des équations polynomiales ou analytiques à coefficients complexes. Le problème est de comprendre leur géométrie de divers points de vue : courbure, propriétés topologiques ou arithmétiques.

J'ai débuté comme chercheur au CNRS de 1979 à 1982 au Laboratoire d'Analyse Complexe de l'Université de Paris 6, après avoir passé une thèse sous la direction de Monsieur Henri Skoda, et j'ai ensuite été nommé Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, où j'ai passé l'essentiel de ma carrière.

En 1985, j'ai établi un théorème connu maintenant sous le nom "d'inégalités de Morse holomorphes", qui relie de manière précise la courbure des variétés complexes à l'existence de certaines structures algébriques ou analytiques. On utilise pour cela la théorie spectrale de l'oscillateur harmonique en grande dimension, combinée à des considérations de convexité holomorphe. On fait intervenir une fonctionnelle d'énergie pour des particules évoluant dans un champ magnétique, et on en étudie en détail la répartition spectrale. Celle-ci donne en retour des estimations précises sur les objets analytiques globaux, au moyen de techniques quelque peu inspirées de celles du physicien Edward Witten. L'idée d'utiliser une telle fonctionnelle d'énergie m'est venue après des échanges avec Yves Colin de Verdière, peu après mon arrivée à l'Institut Fourier de Grenoble. Deux ans plus tard, en 1987, mon Confrère Jean-Michel Bismut a pu entrevoir une nouvelle approche probabiliste de ces résultats, en étudiant de manière approfondie l'équation de la chaleur associée.

Dans les années 1990-2000, je me suis intéressé à l'étude des équations d'Einstein dans le cadre complexe, en particulier à un théorème démontré à la suite des travaux de Thierry Aubin, dont le point final a été apporté en 1977 par Shing-Tung Yau, récompensé par la médaille Fields en 1982 – Thierry Aubin est d'ailleurs aujourd'hui à nos côtés, et je le remercie d'être présent. J'ai pu démontrer assez vite des théorèmes de géométrie algébrique effective : la connaissance précise de certaines solutions singulières des équations d'Einstein permet de prédire l'existence d'objets purement algébriques. D'un point de vue physique, on peut dire qu'on regarde ce qui se passe quand on a une singularité de type trou noir, à savoir une masse importante concentrée en un point, au sein d'une densité de matière diffuse. Du côté mathématique, et pour la situation de la géométrie complexe qui est celle de mes travaux, on trouve une alliée précieuse dans la théorie des fonctions plurisousharmoniques et celle des courants positifs introduites par mon confrère et ancien maître Pierre Lelong dans les années 1942-1970. Il s'agit en gros de concepts qui décrivent finement la convexité et la structure géométrique des objets analytiques complexes. Ces méthodes ont débouché sur de nombreux résultats, et ensuite été développées dans diverses directions par plusieurs équipes de géométrie algébrique dans le monde, sur une durée d'une bonne dizaine d'années.

Depuis 2000, en collaboration avec mon ancien étudiant Mihai Paun, maintenant professeur à l'Université de Nancy, j'ai repris ces techniques dans un cadre un peu différent pour comprendre la géométrie des variétés dites kählériennes : il s'agit d'un type de variétés qui interviennent par exemple en théorie des cordes en Physique, et qui possèdent une structure géométrique extrêmement "symétrique". Dans ce cadre, Mihai Paun et moi-même avons utilisé les équations d'Einstein pour déterminer de manière précise la relation entre ce que les mathématiciens appellent les "classes de cohomologie positive", d'une part, et la structure topologique des sous-variétés analytiques et algébriques, d'autre part. Ces résultats ont été exposés en séance plénière lors du Congrès International des Mathématiciens à Madrid, en 2006.

Depuis 1993 environ, je poursuis parallèlement un programme de recherches visant

à comprendre la géométrie des variétés algébriques dites hyperboliques, en relation avec les propriétés globales des systèmes d'équations différentielles pour les courbes holomorphes. Ces développements encore en cours ont des applications potentielles en théorie des nombres, à partir des travaux fondamentaux de Faltings et Vojta.

Au delà des mathématiques, je me suis beaucoup impliqué pour tenter de favoriser le développement des logiciels libres dans notre pays, en particulier dans le secteur de l'enseignement et de la recherche. À la suite d'une école spécialisée organisée à Grenoble 1999, le CNDP a coordonné une initiative de recensement et d'évaluation des logiciels libres disponibles et plusieurs centaines d'enseignants ont rejoint le réseau. Des distributions de logiciels libres scientifiques et éducatifs ont été diffusées auprès de milliers d'établissements scolaires de toutes les académies. L'initiative est maintenant solidement implantée et ne demande qu'à s'étendre, dans un contexte où les logiciels libres atteignent ou dépassent le plus souvent leurs équivalents commerciaux sur le plan technique.

A côté de tout cela, je suis également très préoccupé par ce qui me semble être une dégradation continue de notre système éducatif depuis 3 ou 4 décennies. Cette dégradation s'est accélérée depuis le milieu des années 1990 et se traduit aujourd'hui par une désaffection pour les sciences qui est observée de tous côtés et aussi dans beaucoup de pays occidentaux. Il me semble urgent que l'Académie des Sciences poursuive ses efforts pour remettre en place des programmes d'enseignement riches, structurés et progressifs, afin de remédier à un effritement des contenus provoqué par une succession de réformes régressives sur le plan des connaissances enseignées. Je loue les efforts de la Délégation à l'Éducation et à la Formation, qui a organisé en particulier l'an dernier un Colloque sur la question importante de la formation des maîtres. Ces questions sont un enjeu majeur pour notre pays et je compte bien tenter d'y contribuer dans la mesure de mes moyens.

Je vous remercie de votre attention.

Texte prononcé sous la Coupole de l'Académie des Sciences lors de la séance solennelle du 17 juin 2008.