Séminaire P.LELONG
(Analyse)
12e année, 1971/72

21 Mars 1972

ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX SUR LE CÔNE DES COURANTS POSITIFS FERMÉS

par Pierre LELONG (Paris)

1. On renvoie le lecteur au livre [7c] ou à ce séminaire [7,f] pour la définition et les propriétés des courants positifs. Soit G une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, de dimension n, réunion dénombrable de cartes (S_i) relativement compactes formant un recouvrement localement fini de G . Est positif sur G un courant qui est positif sur chaque carte par rapport aux coordonnées locales. On peut aussi considérer une partition $\{\alpha_s\}$ de l'unité, C^∞, subordonnée aux S_i et si t est un courant , écrire $t = \sum_s t\alpha_s = \sum t_s$: dire que t est positif équivaut à dire que les t_s le sont par rapport aux coordonnées locales correspondantes . La définition ainsi donnée est indépendante du système $\{S_i\}$ et des $\{\alpha_s\}$, car l'image d'un courant positif par une application analytique propre est un courant positif.

On désigne par $T_p(G)$ les courants positifs dans G de la dimension complexe p, par $T_{p,f}(G)$ ceux qui sont fermés. Rappelons qu'à un sous-espace L^p de C^n, on fait correspondre canoniquement (cf. [7, c])une forme positive

$$\tau(L^p) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \wedge \bar{\omega}_p$$

déterminée par les conditions suivantes : on a $\omega_i = \sum_j a_i^j dz_j$;ilexiste une application $(dz_i) \to (\omega_s)$, i, s = 1, ... n , unitaire $C^n(dz_i)$ dans $C^n(\omega_s)$ et telle que L^p soit défini par les équations

$\omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0$.

Alors pour que t soit un courant positif de dimension p, il faut et il suffit que pour tout L^p , les mesures

(1) $T(t, L^p) = t \wedge \tau(L^p)$

soient positives sur chaque carte de coordonnées loales. D'où :

PROPOSITION 1. - L'ensemble $T_p(G)$ des courants positifs de dimension p dans G et l'ensemble $T_{p,f}(G)$ de ceux qui sont fermés, sont deux cônes convexes saillants.

En effet, $t_1 \in T_p(G)$, $t_2 \in T_p(G)$ entraînent $c_1 t_1 + c_2 t_2 \in T_p(G)$ quels que soient $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$. De plus $t_1 \in T_p(G)$, $-t_1 \in T_p(G)$ entraînent que les mesures (1) soient toutes nulles. La forme différentielle (de type $n - p$, $n - p$ des dz_i, $d\bar{z}_i$) qui représente le courant t a alors ses coefficients nuls, d'où $t_1 = 0$. Même démonstration pour le cône $T_{p,f}(G)$ des courants positifs fermés dans G.

Dans la suite on désigne par $\mathcal{D}^\circ(G)$ l'espace des formes à support compact, à coefficients continus dans G, muni de la topologie limite inductive $\mathcal{D}^\circ(G) = \lim\limits_{\rightarrow} \mathcal{D}^\circ(K_m)$, où K_m est une suite exhaustive de compacts dans G, par exemple $K_m = \bigcup\limits_{s \leqslant m} \gamma_s$ où $\gamma_s = \operatorname{supp} \alpha_s$; $\mathcal{D}^\circ(K)$ est l'espace de Banach des formes φ à coefficients continus, à support dans le compact K, avec la norme $\|\varphi\|$, maximum de la valeur absolue des coefficients de φ.

Le dual $\mathcal{D}'^\circ(G)$ est l'espace des courants continus d'ordre zéro sur G et s'identifie au produit des $\mathcal{D}'^\circ(\gamma_s)$. Sur $\mathcal{D}'^\circ(G)$ nous prendrons la topologie de la convergence simple des courants sur les formes. Les cônes $T_p(G)$, $T_{p,f}(G)$ sont fermés dans $\mathcal{D}'^\circ(G)$. Pour qu'un filtre sur $\mathcal{D}'^\circ(G)$ converge, il faut et il suffit qu'il converge sur chacun des $\mathcal{D}'^\circ(\gamma_s)$. On rappelle aussi qu'il existe sur chaque $\mathcal{D}^\circ(\gamma_s)$ et par suite aussi sur $\mathcal{D}^\circ(G)$ une famille dénombrable dense $\{g_q\}$; un borné B de $\mathcal{D}'^\circ(G)$ est relativement compact ét sur B la topologie est déterminée par les semi-normes $|\langle t, g_q\rangle|$ et métrisable .

2. On se propose ici de donner des résultats sur les génératrices extrémales des cônes fermés $T_{p,f}(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Dire qu'un courant $t_o \in T_{p,f}(G)$, $t_o \neq 0$, est extrémal ou détermine une génératrice extrémale de ce cône, c'est dire que la décomposition

$$t_o = t_1 + t_2 \quad , \quad t_1, t_2 \in T_{p,f}(G),$$

entraîne la proportionnalité

$$t_1 = c_1 t_o \quad , t_2 = c_2 t_o \quad , c_1 \geqslant 0, \; c_2 \geqslant 0, \; c_1 + c_2 = 1 \; .$$

Si $p = 0$, un courant positif de dimension nulle est une mesure positive. Un tel courant est représenté par une forme de degré maximum (n, n) ; il est donc nul sur les formes $\psi = d\varphi$; il est donc fermé et les cônes $T_{p,f}(G)$, $T_p(G)$ sont identiques pour $p = 0$. Les éléments extrémaux sont les mesures ponctuelles $c\,\delta(a)$, $a \in G$, $\delta(a)$ mesure de Dirac $+1$ en a, $c > 0$. Le point a est d'autre part un ensemble irréductible de dimension $p = 0$. Donc pour $p = 0$, les génératrices extrémales de $T_{p,f}(G)$ sont déterminées par les courants d'intégration $t\,[M]$ sur les ensembles analytiques irréductibles (cycles analytiques dans G).

Plus généralement on a :

PROPOSITION 2a.- Pour que t soit un élément extrémal de $T_{p,f}(G)$, il faut que $A = \mathrm{supp}\; t$ soit un continu, c'est-à-dire que l'ensemble fermé A ne soit pas la réunion de deux ensembles fermés A_1, A_2, sans point commun.

Soit en effet $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: G étant un espace normal, il existe $f(x)$, C^∞, $0 \leqslant f \leqslant 1$ qui vaut 1 sur un voisinage de A_1 , nulle sur un voisinage de A_2 . Alors si l'on pose

$$t_1 = ft \quad , \quad t_2 = (1-f)t$$

on a $t = t_1 + t_2$. De plus

$$(3) \qquad dt_1 = df \wedge t + f dt = df \wedge t \; .$$

Par construction on a supp(df) $\cap$ supp t = $\emptyset$, d'où $dt_1 = 0$ d'après (3). De même on a $dt_2 = 0$. D'où t_1, $t_2 \in T_{p,f}(G)$ et supp $t_1 \cap$ supp $t_2 = \emptyset$, ce qui montre que t_1 et t_2 ne peuvent être proportionnels et non nuls, et établit l'énoncé .

PROPOSITION 3. - _Soit_ $t \in T_{p,f}(G)$ _et_ A _un ensemble fermé . Si sur chaque carte de_ G _la mesure_ $\Lambda_{2p}[A \cap \text{supp } t]$ _en dimension réelle_ 2p _est nulle, alors_ t _est l'extension simple de la restriction de_ t _à_ G - A.

En particulier si $\Lambda_{2p}(\text{supp } t) = 0$ _sur chaque carte, on a_ t = 0.

La propriété étant locale on peut supposer que A _est un compact et_ G _un domaine de_ C^n. L'énoncé signifie que pour toute fonction $\alpha_r(z)$ qui vérifie $\alpha_r(z) = 1$ pour $z \in A$, $0 \leqslant \alpha_r(z) \leqslant 1$, et telle que son support soit à distance au plus r de A , on a

$$t = \lim_{r=o} t(1 - \alpha_r) \tag{4}$$

Soit $\beta = \frac{i}{2}\, d'\, d''\, \|z\|^2$ et $\beta_p = \frac{1}{p!}\, \beta^p$ la forme "élément de volume" de la dimension complexe p . On sait que si l'on considère la mesure positive $\sigma = t \wedge \beta_p$, une _mesure majorante_ de t est donnée par $c_{n,p}\sigma$, $c_{n,p}$ constante numérique dépendant de n, p .

Si l'on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}^\circ(G)$, φ homogène de type (p,p) des $dz_i, d\bar{z}_j$:

$$|\varphi|(z) = \sup \text{ des } |\varphi_{(i)(j)}(z)| ,$$

$\varphi_{i,j}$ coefficients de φ, on a :

$$|t(\varphi)| \leqslant c_{n,p}\sigma\big[|\varphi|(z)\big] .$$

Ceci posé soit ν_o une borne supérieure du nombre densité (nombre de Lelong) $\nu(x)$ (cf [7c]) relatif à t quand x parcourt le compact A. Si $\sigma(x, r)$ est la mesure σ portée par la boule B(x, r) on a $\sigma(x, r) \leqslant \nu_o\, \tau_p(1) r^{2p}$.

Soit la norme $\|t\|_G = \sup |t(\varphi)|$, pour $\varphi \in \mathcal{D}^\circ(G)$, $|\varphi|(z) \leqslant 1$. On a alors

$$\| t\,\alpha_r \|_G \leq c_{n,p}\ \nu_o\ \tau_p(1)\left[\Lambda_{2p}(A) + \varepsilon_r\right]$$

où $\varepsilon_r \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$, ce qui montre la convergence de (4) sous l'hypothèse $\Lambda_{2p}(A) = 0$.

COROLLAIRE. <u>Soient</u> t_1, $t_2 \in T_{p,f}(G)$ <u>et</u> A <u>fermé dans</u> G, <u>de mesure</u> Λ_{2p} <u>nulle sur chaque carte ; alors si on a</u> $t_1 = t_2$ <u>dans</u> $G - A$, <u>on a</u> $t_1 = t_2$.

Ceci permet de donner un énoncé plus précis que la proposition 2a.

PROPOSITION 2b. - <u>Soit</u> t <u>un élément extrémal de</u> $T_{p,f}(G)$ <u>et</u> $A = \operatorname{supp} t$. <u>Il n'existe pas de décomposition de</u> $A = \operatorname{supp} t$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup C$$

<u>telle que</u> A_1, A_2 <u>soient fermés,</u> $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ <u>et</u> $\overline{C}$ <u>de mesure</u> Λ_{2p} <u>nulle sur chaque carte.</u>

On construit t_1 et t_2 comme plus haut ; sur un compact K situé sur une carte et ne coupant ni A_1 ni A_2 on a $\|df \wedge t\|_K \leq \sup|df| \times \|t\|_K = 0$, ce qui établit que t_1 et t_2 sont encore positifs et fermés, ces propriétés étant locales. Alors t est l'extension simple de $t_1 + t_2$; on a $t = t_1 + t_2$, t_1 et t_2 non proportionnels, t n'est donc pas extrémal dans $T_{p,f}(G)$.

PROPOSITION 4. - <u>Un isomorphisme analytique complexe entre deux variétés</u> G, G', <u>connexes, dénombrables à l'infini, induit une bijection</u> $\tilde{h}$ <u>entre les cônes</u> $T_{p,f}(G)$, $T_{p,f}(G')$; $\tilde{h}$ <u>et</u> $\tilde{h}^{-1}$ <u>sont continus pour les topologies</u> $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$, $\mathcal{D}'^{\circ}(G')$ <u>et échangent les génératrices extrémales.</u>

Soient $\{S_i\}$ sur G, $\{S'_j\}$ sur G' des systèmes de cartes relativement compactes ; on substitue à $\{S_i\}$ un recouvrement plus fin (Σ) constitué par les $S_{i,j} = S_i \cap h^{-1}(S'_j)$ et aux S'_j le recouvrement

$(\Sigma') = \left\{h(S_{i,j})\right\}$; h induit une application analytique complexe entre les coordonnées locales. On utilise des partitions de l'unité, C^{∞}, $\{\alpha_i'\}$ subordonnées à (Σ'), $\alpha_i = h^{\times}\alpha_i'$ s'obtient en substituant $z' = h(z)$ dans α_i'. On définit $t' = ht$ pour $\varphi = \sum_i \alpha_i' \varphi = \sum_i \varphi_i$ par

(5) $$t'(\varphi) = \tilde{h}t(\varphi) = \sum_i t(h^{\times}\varphi_i) = \sum_i t(\alpha_i\, h^{\times}\varphi)$$

Le résultat est indépendant du système de cartes ; sur chaque carte l'image $\tilde{h}t$ est un courant positif fermé, donc $\tilde{h}$ est une application de $T_{p,f}(G)$ dans $T_{p,f}(G')$; $\tilde{h}$ est linéaire d'après (5); de plus l'inverse $\tilde{h}^{-1}$ est défini par $t = \tilde{h}^{-1}t'$, donné par

$$t(\psi) = t'\left[(h^{-1})^{\times}\psi\right]$$

qui vérifie bien $\tilde{h}t(\varphi) = t'\left[(h^{-1})^{\times} h^{\times}\varphi\right] = t'(\varphi)$

D'autre part h est continu car $\left|\tilde{h}t(\varphi_i)\right| < \varepsilon_i$ équivaut à $\left|t(h^{\times}\varphi_i)\right| < \varepsilon_i$.

Enfin $\tilde{h}$ et $\tilde{h}^{-1}$ étant linéaires, l'image d'un élément extrémal est de même nature.

2. Courants extrémaux $t[M]$. On va maintenant établir

THÉORÈME 1. - *Si M est un ensemble analytique de dimension complexe p, irréductible sur une variété analytique connexe, dénombrable à l'infini, alors le courant d'intégration*

$$t[M](\varphi) = \int_M \varphi \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}^{\circ}(G)$$

est extrémal dans $T_{p,f}(G)$.

Démonstration. On a d'abord

PROPOSITION 5. - *Soit* $t \in T_p(G)$; *si l'on a* $t = t_1 + t_2$, $t_1, t_2 \in T_p(G)$, *alors on a* $\operatorname{supp} t_1 \subset \operatorname{supp} t$ *et* $\operatorname{supp} t_2 \subset \operatorname{supp} t$.

En effet $x \notin \operatorname{supp} t$ a un voisinage U dans lequel on a $t = t_1 + t_2 = 0$ ce qui entraîne $t_1 = t_2 = 0$ les courants étant positifs.

Pour établir le théorème 1, il suffit alors d'utiliser l'énoncé

PROPOSITION 6. - (cf. [6] et [7, f]) . Soit $t \in T_{p,f}(G)$ et M un ensemble analytique irréductible dans G. Alors si l'on a

$$\operatorname{supp} t \subset M$$

il existe une constante $c > o$ telle que

$$t = c\, t[M] . \tag{6}$$

Rappelons brièvement la démonstration:

a) Soit $\overset{\circ}{M}$ la variété analytique des points ordinaires de M : il suffit d'établir

$$t = c\, t[\overset{\circ}{M}] \tag{7}$$

au voisinage d'un point $x \in \overset{\circ}{M}$. En effet c sera alors localement constant sur $\overset{\circ}{M}$, donc constant sur $\overset{\circ}{M}$ puisque $\overset{\circ}{M}$ est connexe , M étant irréductible. Alors (6) s'obtient par extension simple de (7) car on a $\Lambda_{2p}(M - \overset{\circ}{M}) = 0$, $M - \overset{\circ}{M}$ étant un ensemble analytique de dimension $p' < p$.

b) Par un isomorphisme analytique on se ramène au cas où $\overset{\circ}{M}$ est un sous-espace $C^p(z_1 \ldots z_p)$, c'est-à-dire au

LEMME. Soit $t \in T_{p,f}(G)$, G domaine de C^n et $\operatorname{supp} t \subset C^p(z_1 \ldots z_p)$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}^\circ(G)$ de type (p, p) et soit $\varphi_1 \in \mathcal{D}^\circ(G \cap C^p)$ obtenue à partir de φ en annulant les z_i et les dz_i pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$. Alors il existe $c > o$ tel qu'on ait $t(\varphi) = c \int_{C^p} \varphi_1$, $c > 0$ dépend de t et non de φ.

D'une part t appartient à la classe des courants pour lesquels t et dt sont continus d'ordre zéro. Pour de tels courants l'inclusion $\operatorname{supp} t \subset W$, ou W est une variété, entraîne $t \in \mathcal{D}'^\circ(W)$, c'est-à-dire que t est un courant sur l'espace W. On a donc ici

$$t(\varphi) = t_1[\varphi_1]$$

Soit $z' = (z_1, \ldots z_p)$; la forme $\varphi_1(z')$ se réduit à $\psi(z')\, \beta_p(dz')$, β_p élément de volume sur C^p ; on a alors :

$$t_1(\varphi_1) = \mu(\psi) \qquad , \quad \mu \text{ mesure positive.}$$

En un point $z' \in C^p$, μ a une densité qui est le nombre $\nu(z')$ relatif à t_1. Donc on a

$$t(\varphi) = t_1(\varphi_1) = \int_{C^p} \nu(z')\,\psi(z')\,\beta_p$$

où $\nu(z') > 0$ est semi-continue supérieurement sur C^p, donc sommable. D'autre part $dt = 0$ donne $d\nu = 0$; donc ν définit une distribution invariante par translation $z' \to z' + h$ dans C^p, elle est donc une distribution constante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que l'on ait

$$t(\varphi) = c\int_{C^p} \psi(z')\,\beta_p = c\int_{C^p} \varphi_1$$

où φ_1 est la restriction de φ à C^p ; alors $\nu(z') = c$ est constant.

On a donc établi localement (6) ce qui entraîne (6) sur G ainsi qu'on l'a vu.

Il est probable que le théorème 1 ne donne pas tous les éléments extrémaux de $T_{p,f}(G)$; c'est là une question importante de géométrie complexe encore ouverte.

3. <u>Étude du cas</u> $p = n-1$. Une fonction V définie sur G sera dite <u>plurisousharmonique sur</u> G si elle l'est sur chaque carte.

PROPOSITION 7. – a/ <u>Les fonctions plurisousharmoniques sur</u> G <u>forment un cône convexe réticulé supérieurement</u> P(G) <u>(éventuellement vide)</u>.

b/ <u>Le cône</u> $P_1(G) = P(G)/H(G)$ <u>quotient par l'espace vectoriel</u> H(G) <u>des fonctions plurisousharmoniques dans</u> G <u>est convexe saillant.</u>

c/ <u>L'opérateur linéaire</u> $\theta = 2i d_z d_{\bar z}$ <u>est une application linéaire injective de</u> $P_1(G)$ <u>dans</u> $T_{n-1,f}(G)$. <u>Un élément extrémal sur</u> $T_{n-1,f}(G)$ <u>qui appartient à l'image de</u> θ <u>est transformé par</u> θ^{-1} <u>en un élément extrémal de</u> $P_1(G)$.

a/ est classique ; si $V \in P_1(G)$ et $-V \in P_1(G)$, V est par définition pluriharmonique, donc V appartient à l'élément nul de $P_1(G)$, donc $P_1(G)$ est saillant. Enfin l'image $\theta(V) = 2i d_z d_{\bar z} V$ est un courant positif fermé (cf. [7c]), et $\theta(V) = 0$ entraîne $V \in H(G)$.

Soit alors t un élément extrémal de $T_{n-1,f}(G)$ pour lequel il existe $V \in P(G)$ tel qu'on ait $t = \theta(V)$: si l'on a $V = V_1 + V_2$, on a $t = \theta(V_1) + \theta(V_2)$, mais, t étant extrémal, on a $\theta(V_1) = c_1 t$, $\theta(V_2) = c_2 t$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, ce qui entraîne $\theta(c_1 V - V_1) = 0$, $V_1 = c V + h_1$, $h_1 \in H(G)$, donc $V_1 = c_1 V$, $V_2 = c_2 V$, modulo H(G).

Rappelons d'autre part :

PROPOSITION 8. - <u>Si</u> G <u>est une variété de Stein de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>une condition nécessaire et suffisante pour que l'application linéaire</u> θ <u>de</u> $P_1(G)$ <u>sur</u> $T_{n-1,f}(G)$ <u>soit surjective est que l'espace de cohomologie</u> $H^2(G, \mathbb{C})$ <u>se réduise à</u> 0.

En effet, considérons l'espace vectoriel $H^{1,1} = Z^{1,1}/R^{1,1}$ des courants représentés par une forme de type (1, 1), modulo ceux qui sont de la forme $d_z d_{\bar z} f$. Alors l'homomorphisme de G.de Rham induit (cf. [4]) un isomorphisme de $H^{1,1}$ sur $H^2(G, \mathbb{C})$.

On obtient alors, θ étant surjectif :

PROPOSITION 9. - <u>Si</u> G <u>est une variété connexe, de Stein, qui vérifie</u> $H^2(G, \mathbb{C}) = 0$ <u>l'opérateur</u> $V \to \theta(V) = 2i d_z d_{\bar z} V$ <u>induit une application linéaire bijective du cône</u> $P_1(G)$ <u>sur</u> $T_{n-1,f}(G)$; θ <u>et</u> θ^{-1} <u>conservent les éléments extrémaux.</u>

Soit V un élément extrémal de P(G) : $t = \theta(V)$ est extrémal sur le cône $T_{n-1,f}(G)$, car $t = t_1 + t_2$ entraîne $V = V_1 + V_2$, modulo H(G), avec $V_1 = \theta^{-1}(t_1)$, $V_2 = \theta^{-1}(t_2)$, modulo H(G). Alors il existe $c_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$, $c_1 + c_2 = 1$, tels que l'on ait $V_1 = c_1 V$, $V_2 = c_2 V$, d'où $t_1 = c_1 t$, $t_2 = c_2 t$, ce qui montre que t est extrémal. Ainsi θ conserve les éléments extrémaux; il en est de même de θ^{-1} d'après la proposition 7.

4. Continuité de l'application θ. Complétons ce qui a été dit dans [7, f], pages 47 et suivantes. Sur le cône P(G) on prendra la topologie $L^1_{loc}(G)$ définie, par exemple, par les semi-normes p_i,
$p_i(V) = \int_{B_i} |V(z)| \beta_n(z)$, où $\{B_i\}$ est une famille dénombrable de boules compactes sur chaque carte, les B_i recouvrant G. Le séparé est un espace de Fréchet. On a :

PROPOSITION 10. La topologie $L^1_{loc}(G)$ est séparée sur le cône P(G) ; celui-ci est fermé dans $L^1_{loc}(G)$.

En effet deux fonctions plurisousharmoniques égales sauf sur un ensemble de mesure nulle sont égales. De plus si V_n est une suite de Cauchy dans $L^1_{loc}(G)$, il existe une fonction $V \in P(G)$ qui est la limite de V_n ; on peut la construire par les opérations suivantes (cf. [7, f])

$$U = \limsup V_n \qquad \text{et} \qquad U^{\times} = \text{reg.sup. } U$$

PROPOSITION 11. - Sur le cône P(G) il est équivalent de dire

a/ qu'un ensemble $B \subset P(G)$ est borné pour $L^1_{loc}(G)$

b/ que pour toute fonction φ à support compact contenu dans une carte, $|\langle V, \varphi\rangle| = \left|\int V \varphi \beta_n\right|$ est borné pour $V \in B$.

c/ que la famille est localement bornée supérieurement sur G, et n'admet pas de suite extraite qui converge vers $-\infty$ sur un ouvert.

Démonstration. Dire que B est borné dans $L^1_{loc}(G)$, c'est dire que les restrictions des $V \in B$ forment un borné sur chaque carte, ce qui entraîne immédiatement l'assertion b/, donc a/ $\rightarrow$ b/. De plus sur chaque carte supposée compacte, si b/ est vérifié, les $V \in B$

définissent un ensemble de mesures à densité qui sont simplement bornées, donc bornées en norme ; il existe donc une majoration de $\int |V| \beta_n$ sur chaque compact d'une carte, donc on a b/ $\longrightarrow$ a/ , ce qui établit l'équivalence entre a/ et b/.

Si une suite $V_n \in P(G)$ localement bornée supérieurement converge vers $-\infty$ sur un ouvert, cette suite converge vers $-\infty$ uniformément sur tout compact (propriété classique des fonctions R^{2n}-sousharmoniques) de sorte que l'équivalence de a) et c) résulte de la proposition 7, p. 47 de [7, f] .

PROPOSITION 12. - <u>Sur les suites</u> $V_m \in P(G)$ <u>la topologie</u> L^1_{loc} <u>est équivalente à la topologie</u> T <u>de la convergence des</u> $\langle V_m, \varphi\rangle = \int V_m \varphi \beta_n$, <u>où φ parcourt les fonctions continues à support compact sur les cartes de</u> G.

Il est évident que L^1_{loc} est plus fine que T. Inversement si $\langle V_n, \varphi\rangle$ converge pour toutes les $\varphi = \psi \alpha_s$, où ψ parcourt les fonctions continues et α_s est une fonction continue de support compact A sur une carte, les mesures μ_m de densité V_m sont simplement bornées donc bornées sur tout compact $K \subset \mathring{A}$; $\|\mu_m\|_K = \int_K |V_m| \beta_n$ est borné, de sorte que $\{V_m\}$ est un borné sur K.

On sait que pour un tel ensemble les $V_{m,q} = \sup (V_m, -q)$ q entier positif approchent uniformément les V_m (7, f, p. 51) dans L^1_{loc} ; il en est de même des produits de convolution

$$V_{m,r} = V_m * \gamma_r$$

$\gamma_1(z)$ est un noyau C^∞, fonction de $\|z\| = r$, à support la boule unité et vérifie $\int \gamma_1 \beta_n = 1$; on a posé $\gamma_r(z) = r^{-2n} \gamma_1(r^{-1}z)$. Soit $K \subset \mathring{A}$; on prendra $r > 0$ inférieur à la distance de K à la frontière de A , et assez petit pour qu'on ait $\int_K |V_m - V_m * \alpha_r| \beta_n < \varepsilon$, pour tout m . Si $V_r = \lim_m (V_m * \alpha_r)$, V_r est plurisousharmonique , il en est de même de la limite décroissante $W = \lim V_r$ quand $r \to 0$.

On a alors $\int_K |V_r - W| \beta_n < \varepsilon$; on choisit alors m_o de manière que

$$\int_K |V_r - V_m * \alpha_r| \beta_n < \varepsilon \quad \text{pour } m > m_o \ ;$$

ce qui entraîne $\int |V_m - W| \beta_n < 3\varepsilon$ pour $m > m_o$, et établit la proposition.

Rappelons alors l'énoncé suivant [7, f, p. 48] :

PROPOSITION 13. - L'application θ sur P(G) est continue de $L^1_{loc}(G)$ dans $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$ et elle est uniformément continue sur les bornés de P(G).

On peut alors énoncer :

THÉORÈME 2. - Si G est un domaine pseudo-convexe de C^n, le cône positif convexe engendré sur les rationels par les fonctions $\log |f_i(z)|$, f_i holomorphe dans G, et irréductible dans G est dense sur P(G) pour la topologie L^1_{loc}.

Démonstration. Soit $V(z) \in P(G)$.

Considérons le domaine pseudo-convexe $\Delta = \left[z \in G \ ; \ |z'| < e^{-V(z)} \right]$ dans $C^{n+1}(z_1, \ldots, z_n, z')$. Soit une fonction

$$F(z', z) = \sum A_q(z) \, z'^q$$

ayant Δ comme domaine d'holomorphie (application du théorème de K.Oka).

On a

$$V(z) = \operatorname{reg.sup.}_{z} \left[\operatorname{lim.sup.}_{q} \frac{1}{q} \log |A_q(z)| \right].$$

Posons $W(z) = \operatorname{lim.sup.}_{q} \frac{1}{q} \log |A_q(z)|$; on a $\|W-V\|_{L^1_{loc}} = 0$.

D'autre part soit

$$W_{s,t} = \sup_{s \leqslant q \leqslant s+t} \frac{1}{q} \log |A_q(z)|$$

Les $W_{s,t}$ sont sommables et majorées sur tout compact de G.

On va montrer :

LEMME 1. - Les $W_{s,t} \in P(G)$ approchent V sur G pour la topologie L^1_{loc}.

En effet on a $W = \lim\limits_{s=\infty} W_{s,\infty}$ la limite étant décroissante. Si K est un compact donné de G, on aura $\| W - W_{s,\infty} \|^1_K \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $s \geqslant s_o$. Ensuite on utilise

$$W_{s_o,\infty} = \lim_{t=\infty} W_{s_o,t} ,$$

la limite étant croissante et majorée par $W_{s_o,\infty}$ fonction sommable; on aura donc

$$\| W_{s_o,t} - W_{s_o,\infty} \|_K < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad t > t_o$$

D'où :

$$\| V - W_{s,t} \|_K < \varepsilon \quad \text{pour } s \geqslant s_o \ , \quad t \geqslant t_o$$

qui établit le lemme.

Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffit de montrer

LEMME 2. - Les fonctions plurisousharmoniques $\frac{1}{q} \log |f(z)|$ où f est holomorphe dans G et q un entier positif quelconque approchent les $W_{s,t}$ dans $L^1_{loc}(G)$.

En effet soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ une suite finie de nombres complexes. Si l'on a $|\alpha_i| \neq |\alpha_j|$, on a

$$\sup |\alpha_i| = \lim_{p=\infty} \left| \left[\alpha_1^p + \ldots + \alpha_m^p \right] \right|^{1/p}$$

Appliquons ceci à

$$W_{s,t} = \sup\left(\frac{1}{s} \log |A_s(z)| \ , \ \ldots , \frac{1}{s+t} \log |A_{s+t}(z)|\right)$$

Soit $\sigma = s(s+1) \ldots (s+t)$. On a

$$W_{s,t}(z) = \frac{1}{\sigma} \log \ \sup \left[|A'_s(z)| \ , \ \ldots |A'_{s+t}(z)| \right]$$

où A'_j est égale à une puissance entière de A_j, donc holomorphe. Il en résulte qu'en tout point z où l'on n'a pas une égalité

$\left|A'_i\right| = \left|A'_j\right|$, on a

$$(8)\qquad W_{s,t}(z) = \lim_{p=\infty} \frac{1}{\sigma p} \log\left|\left[A'^{p}_{s}(z) + \dots + A'^{p}_{s+t}(z)\right]\right|$$

$$= \lim_{p=\infty} \frac{1}{\sigma p} \log \left| H_p(z)\right|$$

où $H_p(z)$ est holomorphe dans G et vaut

$$H_p(z) = A'^{p}_{s}(z) + \dots A'^{p}_{s+t}(z) .$$

Les fonctions plurisousharmoniques $\frac{1}{\sigma p} \log \left|H_p(z)\right|$ sont bornées supérieurement sur tout compact de G quand $p \to +\infty$. Les points où l'on a une égalité $\left|A'_i(z)\right| = \left|A'_j(z)\right|$ forment un ensemble fermé ; il est de mesure nulle dans R^{2n} ; s'il est un vrai sous-ensemble analytique réel. Sinon $\left|A'_i(z)\right|$ et $\left|A'_j(z)\right|$ coïncident dans un ouvert, ce qui entraîne l'existence d'un nombre λ , $|\lambda| = 1$, tel qu'on ait $A'_i(z) \equiv \lambda A'_j(z)$ dans G. On conviendra dans ce cas que si certains des $A'_i(z)$ sont liés par de telles relations , dans la somme au second membre de (8) , on ne garde que l'un d'eux et supprime les autres . Dans ces conditions on a la limite (8) sauf sur un ensemble fermé de mesure nulle. D'autre part les fonctions

$$\xi_p(z) = \frac{1}{\sigma p} \log \left|H_p(z)\right|$$

quand $p \to \infty$ forment un borné de P(G) pour la topologie L^1_{loc} si l'on n'a pas $W_{s,t}(z) \equiv -\infty$, ce qu'on peut supposer d'après $V \not\equiv -\infty$.
La suite $\xi_p(z)$ converge vers $W_{s,t}(z)$ presque partout ; donc $\xi_p(z)$ tend vers $W_{s,t}(z)$ dans $L'_{loc}(G)$, ce qui établit le lemme 2, σp étant un entier et H_p étant holomorphe dans G.

La démonstration du théorème 2 en découle : on a $H_p = \prod \left(f_k\right)^{\alpha_k}$, f_k holomorphe indécomposable dans G ; $\xi_p(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\xi_p(z) = \frac{1}{p} \sum c_k \log \left|f_k(z)\right|$$

où c_k est un nombre rationel positif, $f_k(z)$ est holomorphe indécomposable dans G ; les $\xi_p(z)$ sont denses sur P(G) pour la topologie L^1_{loc} .

On en déduit

THÉORÈME 3. - Soit G un domaine pseudo-convexe de C^n pour lequel on a $H^2(G, \mathbb{C}) = 0$: alors le cône positif Γ engendré par les courants $t[M]$ d'intégration sur les ensembles analytiques M, de dimension $n-1$, irréductibles dans G (cycles analytiques dans G), est dense sur $T_{n-1,f}(G)$ pour $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$.

Plus précisément les M_k étant des cycles analytiques dans G de la dimension $n-1$, les sommes finies $S = 2\pi\sum c_k\, t[M_k]$, $c_k > 0$, c_k rationnels, sont denses sur $T_{n-1,f}(G)$ pour la topologie $\mathcal{D}''^{\circ}(G)$ de la convergence simple des courants sur les formes.

Démonstration. Soit $t_o \in T_{n-1,f}(G)$: il existe $V_o \in P(G)$ solution de $2id'd''V = t_o$; $V_o = \theta^{-1}(t_o)$. Soit $\omega(t_o)$ un voisinage de t_o dans $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$; il existe un voisinage $\omega_1(V_o)$ de V_o dans $L^1_{loc}(G)$ de manière que pour $V \in \omega_1(V_o)$, on ait $\theta(V) \subset \omega(t_o)$, θ étant continue. Il existe dans $P(G) \cap \omega_1(V_o)$ des éléments

$$\xi = \sum c_k \log |f_k| \quad , \; f_k \text{ irréductible dans } G.$$

Alors le courant

$$2id'd''\xi = \theta(\xi) = \sum c_k\, 2id'd''\log|f_k| = 2\pi\sum c_k\, t[M_k]$$

appartient au cône Γ et l'on a $\theta(\xi) \in \omega(t_o)$, ce qui établit l'énoncé.

Un corollaire immédiat du théorème 3 est :

si G vérifie les hypothèses du théorème 3, l'enveloppe convexe du cône formé par les génératrices extrémales déterminées sur $T_{n-1,f}(G)$ par les cycles analytiques, est dense sur $T_{n-1,f}(G)$ pour la topologie $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$ de la convergence simple des courants.

Conjecture.

Il est conjecturé que dans $L^1_{loc}(G)$ les éléments de la forme $c \log |f(z)|$, $c > 0$, f analytique irréductible dans G approchent les sommes finies $\sum p_k \log |f_k(z)|$, p_k positif. Si cette conjecture est établie la conclusion précédente se simplifie et s'énonce : les

<u>génératrices extrémales du cône</u> $T_{n-1,f}(G)$ <u>déterminées par les courants d'intégration</u> $t[M]$ <u>sur les cycles irréductibles sont denses dans</u> $T_{n-1,f}(G)$ <u>pour la topologie</u> $\mathcal{D}'^{\circ}(G)$.

5. <u>Remarque</u> . On peut se demander si certaines fonctions plurisousharmoniques remarquables peuvent être extrémales, en particulier si pour une quasi-norme plurisousharmonique $q(z)$ sur un espace vectoriel , $\log q(z)$ est une fonction plurisousharmonique extrémale.

Rappelons que nous avons appelé <u>quasi-norme dans un espace vectoriel complexe</u> une fonction plurisousharmonique $q(z)$ qui vérifie pour tout $u \in \mathbb{C}$:

$$q(uz) = |u| q(z) .$$

Pour une telle fonction on sait (cf. [7, h], pages 285 et 312) que l'on a $q(z) \geqslant 0$ et que $\log q(z)$ est plurisousharmonique .

On va montrer en prenant l'exemple

$$(9) \qquad q(z) = \left[|z_1|^2 + |z_2|^2\right]^{1/2} \quad \text{dans} \quad \mathbb{C}^2$$

que $\log q(z)$ <u>n'est pas extrémale</u>.

Rappelons d'abord un résultat établi dans [7, h, p. 317].

PROPOSITION 14. - <u>Soit</u> $\varphi(t_1, \dots t_{n-1})$ <u>une fonction plurisousharmonique dans</u> $\mathbb{C}^{n-1}(t)$ <u>qui vérifie pour</u> $\|t\| \to \infty$

$$\limsup \frac{\varphi(t)}{\log \|t\|} = c > 0$$

<u>Alors la fonction</u>

$$V(z_1 .. z_n) = c \log |z_n| + \varphi(z_1 z_n^{-1}, \dots z_{n-1} z_n^{-1})$$

<u>est plurisousharmonique dans</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et vérifie pour tout</u> $u \in \mathbb{C}$

$$V(uz_1, \dots uz_n) = c \log |u| + V(z_1, \dots z_n) .$$

Appliquons ceci au cas particulier

$$V(z) = \log q(z) = \frac{1}{2} \log (|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

on va établir que l'on a

(10) $$V(z) = V_1(z) + V_2(z)$$

V_1, $V_2 \in P(C^2)$ étant non proportionnels.

Soit $t = z_2\, z_1^{-1}$, on a

$$V(z_1, z_2) = \log|z_1| + \frac{1}{2}\log(1 + |t|^2)$$

La fonction $\log(1 + |t|^2)$ est sousharmonique et s'écrit sous forme d'un potentiel dans C^1 :

(11) $$\frac{1}{2}\log(1 + |t|^2) = \pi^{-1}\int_C \frac{\log|a - t|\;|a|\;d|a|\;d\theta}{(1 + |a|^2)^2}$$

où l'on pose $a = |a|\,e^{i\theta}$

Partageons la mesure positive μ de densité $(1 + |a|^2)^{-2}$ de masse totale 1, dont le potentiel figure au second membre de C, en une somme

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

où μ_1 est la restriction de μ au disque unité $|a| \leqslant 1$. On a

$$\|\mu_1\| = \pi^{-1}\int_{\|a\| \leqslant 1} \frac{|a|\;d\;|a|\;d\theta}{(1 + |a|^2)^2} = \frac{1}{2}\;,\quad \|\mu_2\| = \frac{1}{2}$$

Les potentiels U^{μ_1} , U^{μ_2} vérifient

$$U^{\mu_1}(t) + U^{\mu_2}(t) = \frac{1}{2}\log(1 + |t|^2)\;.$$

De plus $U^{\mu_1}(t)$ ne dépend que de $|t|$, est harmonique pour $|t| > 1$, et vérifie donc

$$\frac{\partial U^{\mu_1}(t)}{\partial \log|t|} = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad t > 1$$

D'où $\limsup_{t \to \infty}\, (\log|t|)^{-1}\, U^{\mu_1}(t) = \frac{1}{2}$

Posons

$$V_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log|z_1| + U^{\mu_1}(z_2 z_1^{-1})$$
$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log|z_1| + U^{\mu_2}(z_2 z_1^{-1})$$

Alors on a

(10) $V = V_1 + V_2 = \log |z_1| + \frac{1}{2} \log(1 + |t|^2) = \log q(z)$.

D'autre part on a :

$$A_1 = \operatorname{supp} d'd''V_1 = \left[(z_1=0) \cup |z_2 z_1^{-1}| \leqslant 1\right]$$

$$A_2 = \operatorname{supp} d'd''V_2 = \left[(z_1=0) \cup |z_2 z_1^{-1}| \geqslant 1\right]$$

Au voisinage d'un point intérieur au cône A_2, défini par $|z_1| \leqslant |z_2|$, on a $|t| > 1$, $z_1 \neq 0$, μ_2 est une mesure à densité non nulle, et $d'd''V_2$ n'est pas nul, tandis que $d'd''V_1$ l'est ; il n'existe donc pas de constante $a > 0$ telle qu'on ait $V_1 = a V_2$; il résulte alors de la décomposition (10) que dans $C^2(z_1, z_2)$ la fonction $\log q(z)$ et en particulier

$$\log \|z\| = \log \left[|z_1|^2 + |z_2|^2\right] = 2 \log q(z)$$

ne sont pas extrémales sur le cône $P(C^2)$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] BISHOP (E.). - Conditions for the analyticity of certain sets. Michigan Math. J. , p. 289-304, 1964.

[2] BOMBIERI (E.). - Algebraic values of meromorphic maps. Inv. Math. t. 10, p. 267-287, 1970 et t. 11, p. 163-166, 1970.

[3] DOLBEAULT (P.). - Ann. Math., t. 64, p. 84-130, 1956.

[4] FRENKEL (J.) et NORGUET (F.). - Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein. C.R.Ac.Sci.Paris, t. p. 2988-2989, 1963.

[5] HARVEY (F.-R.) et KING (J.). - On the structure of positiv currents, Inventiones Math. , t. 15, p. 47-52, 1972.

[5b] HARVEY (F.-R.). - A result on extending positiv currents (à paraître dans Rice University Studies).

[6] KING (J.). - The currents defined by analytic varieties. Acta Math, , t, 127, p. 184-220, 1971.

[7] LELONG (P.). - a) Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. de France, t. 85, p. 239-262, 1957.

-b) Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes, Séminaire P.Lelong, 6e année, 1965-1966, n° 2, Paris, Institut Henri Poincaré, 1966.

-c) Plurisubharmonic functions and positiv differential forms, Gordon and Breach édit., New-York, 1967.

-d) Notes aux C.R.Ac.Sci.Paris, t. 237, p. 691-693, p. 865-867 et p. 1379.

-e) Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n. J.Anal.,Jérusalem, t. 12, p. 365-406, 1964.