NOTICE

sur les

TITRES ET TRAVAUX SCIENTIFIQUES

de

M. Pierre LELONG

Professeur à l'Université de PARIS VI

1973

CURRICULUM VITAE

Né à Paris (XV°) le 14 Mars 1912.

Elève à l'Ecole Normale Supérieure, 1931-1934.

Agrégé des Sciences Mathématiques, 1934.

Docteur ès Sciences Mathématiques, 1941.

Service militaire (sous-lieutenant) à Metz puis au 404e D.C.A., 1934-1935.

Elève de 4e année à l'Ecole Normale Supérieure, 1935-1936 ; boursier de la Fondation Commercy, 1936-1938, boursier puis chargé de recherches au C.N.R.S., 1938-1942

Chargé de conférences (Mécanique) à la Faculté des Sciences de Paris, 1940-1942.

Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Grenoble, 1942-1944.

Professeur titulaire (Mécanique) à la Faculté des Sciences de Lille, 1946-1954.

Professeur titulaire à titre personnel à la Faculté des Sciences de Paris, puis à l'Université Paris VI.

Lauréat de l'Académie des Sciences :

Prix Léonard Eugène Dickson, 1950.

Prix Ernest Dechelle, 1967.

Grand Prix des Sciences mathématiques et physiques, 1972.

Prix "Au service de la Pensée française", 1952.

Membre de la Commission de Mathématiques du C.N.R.S. (1962-1970), Président de la Commission (1962-1966) - Membre du Directoire du C.N.R.S. (1962-1966).

Président de la Commission des Thèses de Mathématiques organisée par les mathématiciens parisiens.

Membre du Conseil scientifique de l'I.R.I.A. (Institut de recherche en informatique et automatique).

Président du Comité mathématiques appliquées de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (depuis 1967).

Membre du Comité Consultatif des Universités (depuis 1969).

Conseiller technique (Recherche scientifique, Education nationale et Santé publique) au Secrétariat général de la Présidence de la République (8 Janvier 1959 au 8 Janvier 1961).

Membre du Comité Consultatif de la Recherche Scientifique et Technique de Décembre 1960 à Décembre 1964.

Président du Comité Consultatif de la Recherche Scientifique et Technique de Décembre 1961 à Décembre 1963.

Président de la Commission de la Recherche scientifique du IVe Plan (1962, 1963, 1964 jusqu'au 4.IV.1964).

Membre de section du Conseil Economique et Social (1962 , 1963 et 1965, 1966) dans la section du Plan et des Investissements.

Président du Comité Mathématiques pour la préparation du Ve Plan, 1964-1966.

Chevalier de la Légion d'Honneur, 1959.

Officier de la Légion d'Honneur, 1967.

LISTE DES TRAVAUX

1937

1 - Sur le principe de Lindelöf et les valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe (C.R.Ac.Sc., t. 204, p. 652).

1938

2 - Limitation d'une fonction analytique de deux variables complexes à l'intérieur d'un domaine ayant une surface remarquable (Bull.des Sc.Math., t. 62, p. 199-204).

1940

3 - Sur l'ordre d'une fonction entière de deux variables (C.R.Ac. Sc., t. 210, p. 470).

4 - Sur l'intégrale de Kronecker appliquée à un système de deux fonctions de deux variables complexes (C.R.Ac.Sc., t. 211, p. 351).

5 - Sur les zéros d'une fonction entière de deux variables (C.R.Ac. Sc., t. 211, p. 533).

1941

6 - Sur les domaines cerclés qui sont domaines naturels d'existence d'une fonction analytique de deux variables complexes (C.R.Ac.Sc., t. 212, p. 426).

7 - Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes (Ann.Ec.Norm., t. 58, p. 83-177 - Thèse, Paris).

1942

8 - Sur certaines fonctions multiformes (C.R.Ac.Sc., t. 214, p. 53).

9 - Sur les valeurs lacunaires d'une relation à deux variables complexes (Bull.des Sc.Math., t. 56, p. 103-112).

10 - Sur la capacité de certains ensembles de valeurs exceptionnelles (C.R.Ac.Sc., t. 214, p. 992).

11 - Définition des fonctions plurisousharmoniques (C.R.Ac.Sc., t. 215, p. 398).

12 - Sur les suites de fonctions plurisousharmoniques (C.R.Ac.Sc., t. 215, p. 454).

1943

13 - Sur une propriété de la frontière d'un domaine d'holomorphie (C.R.Ac.Sc., t. 216, p. 107).

1945

14 - Les fonctions plurisousharmoniques (Ann.Ec.Norm., t. 62, p. 301-338).

1946

15 - Sur la définition des fonctions harmoniques d'ordre infini (C.R.Ac.Sc., t. 223, p. 372).

1947

16 - Sur les fonctions indéfiniment dérivables de plusieurs variables dont les laplaciens successifs ont des signes alternés (Duke Math.Journal, t. 14, p. 143-149).

17 - Sur une propriété simple des polynomes (C.R.Ac.Sc., t. 224. p. 883).

18 - Sur une généralisation de l'indicatrice de Phragmen-Lindelöf (C.R.Ac.Sc., t. 224, p. 1046) [en collaboration avec M. J.DENY].

19 - Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône (Bull.Soc.Math.de France, t. 75, p. 89-112) [en coll. avec M. J.DENY] .

1948

20 - Sur les séries de Taylor à deux variables, à coefficients entiers (C.R.Ac.Sc., t. 226, p. 210).

21 - Sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables au moyen des fonctions polyharmoniques (C.R.Ac.Sc., t. 227, p. 26).

1949

22 - On a problem of M.A.Zorn (paru en 1951, Proceedings Am.Math. Soc., vol. 2, n° 1, p. 12-19).

1950

23 - Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation (Ann.Ec.Norm., t. 67, p. 393-419).

24 - Sur les séries de Taylor F(x, y) ayant des coefficients entiers (Publicationes Mathematicae, t. 1, Fasc. 4, p. 209-222).

1951

25 - Sur une propriété de quasi-analyticité des fonctions de plusieurs variables (C.R.Ac.Sc., t. 232, p. 1178).

26 - Sur les singularités complexes d'une fonction harmonique (C.R.Ac.Sc., t. 232, p. 1895).

1952

27 - La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (Journal de Math., t. 31, p. 191-219).

28 - Equivalence de certaines propriétés de pseudo-convexité (C.R.Ac.Sc., t. 235, p. 594-596).

29 - Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques (Journ.d'Analyse Math., Jérusalem, t. 2, p. 178-208).

1953

30 - Fonctions plurisousharmoniques ; mesures de Radon associées (Publ. du Centre Belge de Recherche Mathématique , Colloque de Mars 1953 sur "les fonctions de plusieurs variables", p. 21-40).

31 - Sur la représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel (C.R.Ac.Sc., t. 237, p. 691-693).

32 - Sur l'extension aux fonctions entières de n variables, d'ordre fini, d'un développement canonique de Weierstrass (C.R.Ac.Sc., t. 237, p. 865-867).

33 - Sur l'étude des noyaux primaires et un théorème de divisibilité des fonctions entières de n variables (C.R.Ac.Sc., t. 237, p. 1379).

1954

34 - Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique (C.R.Ac. Sc., t. 238, p. 2276-2278, Juin 1954).

35 - Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques (Bull.Soc.Math.de Belgique, p. 10-23).

1956

36 - Prolongement d'une fonction plurisousharmonique sur certains ensembles de capacité nulle (C.R.Ac.Sc., t. 242, p. 55-57).

1957

37 - Integration of a differential form on an analytic complex subvariety (Proc.Nat.Ac.of Sciences, 43, p. 246-248, Févr. 1957).

38 - Intégration sur un ensemble analytique complexe (Bull.Soc. Math.Fr., 85, p. 239-262).

39 - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques (Journ.de Math., t. 36, p. 263-303).

40 - Sur l'aire des ensembles analytiques complexes (Ann.Ac.Sc. Fennicae A, n° 250121).

1958

41 - Sur une classe de singularités impropres (Archiv.der Math., 9, 3, p. 161-166).

1960

42 - Fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace réel (C.R.Ac.Sc., t. 251, p. 2860-2862).

43 - Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, Cours professé au C.E.A. (Physique, Hautes Energies et I.N.S.T.N.).

1961

44 - Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques réelles (Ann.de l'Institut Fourier, t. 11, p. 515-562).

1962

45 - Sur un théorème de T.Carleman (Ann.de l'Institut Fourier, t. 12).

1963

46 - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Colloque du C.I.M.E., Varenna, Ed. Cremonese, Rome, 1963, réédité en français et en anglais par Gordon & Breach, New-York, 1968, 77 pages.

1964

47 - Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n (Journal d'Analyse, Jérusalem, t. 12, p. 365-406).

1965

48 - Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel (C.R.Ac.Sc. Paris, t. 260, p. 663).

1966

49 - Fonctions entières de type exponentiel dans C^n (Ann.Inst.Fourier, t. 16, p. 269-318).

50 - Non continuous indicators for entire functions of $n \geqslant 2$ variables and of finite order (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, t. 2, p. 285-297).

1967

51 - Fonctions entières et fonctionnelles analytiques (Cours professé à Montréal, publié en 1968 aux Presses de Montréal).

1968

52 - Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires dans les espaces vectoriels topologiques (C.R.Ac.Sc. Paris, t. 267, p. 916-918).

53 - Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 71, exposé 17.

1969

54 - Petits ensembles dans les espaces vectoriels topologiques et les algèbres complexes et probabilité nulle. Colloque International du C.N.R.S. "Probabilités sur les structures algébriques", Clermont-Ferrand, édité par le C.N.R.S.

55 - Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires sur une algèbre de fonctions holomorphes. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 116, exposé 1.

56 - Fonctions et applications de type exponentiel dans les espaces vectoriels topologiques. C.R.Ac.Sc. Paris, t. 269, p. 420-422.

1970

57 - Some new results on analytic mappings and plurisubharmonic functions in topological linear spaces. International Math. Conference on several complex variables. University of Maryland, Avril 1970.

58 - Théorème de Banach-Steinhaus pour les polynomes ; applications entières d'espaces vectoriels complexes. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 205, exposé 9.

59 - Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales. Colloque d'Analyse fonctionnelle, Liège, Septembre 1970.

1971

60 - Topologies sur les ensembles analytiques et les courants positifs fermés. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 275, exposé 3.

61 - Eléments extrémaux dans le cône des courants positifs fermés de type (1, 1) et fonctions plurisousharmoniques (C.R.Ac.Sc. Paris, t. 273, p. 665-667).

1972

62 - Eléments extrémaux parmi les courants positifs fermés (à paraître).

INTRODUCTION

Dans plusieurs mémoires de grande importance, H.Poincaré avait montré les difficultés que présentait l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. L'espace C^n où un point est déterminé par n coordonnées complexes est peu accessible à notre intuition dès que n surpasse l'unité. A cet obstacle s'en ajoutaient d'autres, propres à l'étude des fonctions analytiques. Ainsi que H.Poincaré le constate, leurs domaines d'existence ne sont pas des domaines quelconques dans C^n. Peu après, P.Cousin montrait la difficulté et souvent l'impossibilité de résoudre un problème essentiel pour les applications : construire dans un domaine de C^n une fonction ayant des zéros donnés. Le célèbre Traité d'Analyse de E.Picard se contente de souligner les difficultés de telles études. En 1938, quand j'ai entrepris de résoudre une série de problèmes concernant les fonctions analytiques de deux puis de $n > 2$ variables, seul un petit nombre de mathématiciens s'attaquait à ce genre de difficultés dont, en particulier, je citerai le japonais K.Oka et, en France, H.Cartan.

Aujourd'hui de nombreux travaux enrichissent cette partie de l'analyse qu'on appelle l'analyse complexe. Mes résultats ont contribué à l'élargissement des points de vue. Dans mes travaux l'étude des fonctions analytiques occupe une place importante, mais non exclusive et c'est en partie à enrichir l'analyse complexe d'autres notions que je me suis attaché. J'ai été conduit au cours de ma carrière scientifique,et d'abord pour l'étude des fonctions analytiques elles-mêmes, à créer des notions nouvelles, invariantes par les applications analytiques, mais fort différentes des fonctions analytiques. Ces outils sont eux-mêmes devenus objets d'étude pour les mathématiciens. J'ai eu ainsi la chance au cours de mes recherches, de donner à l'analyse complexe des notions qui y demeurent et s'y développent.

Parmi ces notions je citerai d'abord les fonctions plurisousharmoniques que j'ai définies peu après ma thèse. Dans trois Notes à l'Académie en 1942 et en 1943, j'en ai donné des propriété fondamentales et les premières applications. Elles sont devenues peu à peu un instrument classique de l'analyse et leur utilité s'est affirmée dans un cadre de plus en plus large. Il n'est guère aujourd'hui de problème sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, de problème global en particulier, qui ne les utilise. De ce fait certaines théories de la mécanique quantique les emploient et j'ai été conduit pour en exposer les propriétés à donner des conférences au C.E.A. à Saclay, à participer activement aux rencontres entre mathématiciens et certains physiciens. Le livre du physicien russe Vladimirov édité à Moscou, préfacé par Bogolioubov et traduit en français, rend compte, mieux que je ne saurais le faire, de l'intérêt pris par certains spécialistes de la mécanique quantique aux fonctions plurisousharmoniques.

Il n'est pas toujours aisé de rendre intuitives certaines notions, même fondamentales, dont il sera question dans cette Notice. Le corps des nombres complexes est moins présent à notre intuition concrète que le corps des réels et il en est certainement ainsi des constructions faites sur lui. Il n'est peut-être pas inutile de dire ici, d'une manière très schématique, que les fonctions plurisousharmoniques présentent, au moins formellement, une analogie avec les fonctions convexes des espaces réels (elles ont été quelquefois appelées pseudo-convexes) ; mais elles sont seulement semi-continues supérieurement ; elles sont liées à la structure complexe et beaucoup moins intuitives que les fonctions convexes qui en sont un cas particulier.

. . .

En fait, auparavant j'avais beaucoup expérimenté, si toutefois le mathématicien a le droit d'user de ce mot. Sous l'influence des enseignements et des oeuvres de P.Montel et de A.Denjoy je m'étais dirigé d'abord vers l'étude des singularités des fonctions analytiques d'une variable : ma première Note , en 1937, généralise un théorème de Denjoy-Ahlfors et donne sous certaines hypothèses la classe la plus générale de valeurs asymptotiques non directes des fonctions méromorphes d'une variable dont le nombre est fini et limité en fonction de l'ordre de croissance supposé fini. J'avais remarqué à cette occasion combien l'étude des singularités emprunte aux techniques de l'analyse réelle. Un peu plus tard, en 1939, j'aperçois un lien étroit entre certains problèmes fondamentaux concernant les fonctions analytiques de deux variables complexes et l'étude des potentiels newtoniens dans le plan, plus précisément celle des fonctions sousharmoniques que le mathématicien hongrois F.Riesz avait, quelques années auparavant, définies dans leur généralité.

Préciser ces problèmes, les traiter ensemble, tel a été le but de ma thèse [7, 95 pages] en 1941, intitulée "Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes". A distance, il m'apparaît que, résoudre ces problèmes en constatant qu'ils relevaient d'une même méthode que j'établissais ainsi, a été un apport. Mais, à l'époque, ce sont des exigences de précision, la recherche de propriétés assez fines pour permettre des réciproques, qui m'ont guidé.

Ma thèse étudiait les singularités des fonctions analytiques de deux variables ; ma méthode permettait pour la première fois d'étudier les frontières les plus générales des domaines d'existence sans faire sur celles-ci des hypothèses de régularité, difficilement tolérables. Elle contenait une étude de la croissance des fonctions entières de deux variables par les mêmes voies : j'ai du surmonter des difficultés techniques pour me libérer de la méthode des cercles d'exclusion que E.Borel et J.Sire avait introduite dans cette étude et y substituer des notions capacitaires plus délicates (la capacité des ensembles à l'encontre de la mesure n'est pas additive) qui seules permettaient d'établir des réciproques. Par la suite ces méthodes m'ont permis de résoudre des problèmes posés par G.Julia, et par M.Zorn. J'ai été amené à donner des compléments utiles à la théorie du potentiel que j'utilisais. Ma thèse a aussi suscité de la part de plusieurs mathématiciens des recherches sur les notions capacitaires.

Les fonctions plurisousharmoniques sont nées alors d'un problème de méthode posé par le passage de deux variables à $n > 2$ variables, ou, brièvement, de C^2 à C^n. Quel était, en fait, ce groupe de propriétés des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes dont j'avais pu faire l'étude dans ma thèse pour $n = 2$ en utilisant, d'une manière paradoxale, à peu près uniquement des méthodes de l'analyse réelle? Je me suis rendu compte que ces propriétés concernaient essentiellement le module $|f|$ de la fonction analytique f. On pouvait les rapporter à $\log |f|$. Je définis alors les fonctions plurisousharmoniques V par la condition d'être à valeurs réelles $(-\infty \leq V)$, bornées localement et d'avoir sur la circonférence de tout disque de C^n une moyenne au moins égale à leur valeur au centre. De telles fonctions sont semi-continues supérieurement ; l'ensemble de celles qu'on peut définir dans un domaine G de C^n forme un cône convexe qui contient les fonctions $\log |f|$, quelle que soit f analytique dans G. Pour $n = 1$, on retrouve les fonctions sousharmoniques. Renvoyant le lecteur à l'analyse technique de mes résultats faite plus loin dans cette Notice, je recopie quelques lignes qui figurent en tête de mon mémoire [14] de 1945 car elles présentent un intérêt de méthode : "l'étude des fonctions plurisousharmoniques permet de grouper un ensemble de propriétés des fonctions analytiques de plusieurs variables, ou, plus exactement, de leurs modules. Ces propriétés, dont l'ensemble est particulièrement riche pour $n > 1$ ne sont pas liées à la totalité de la structure analytique complexe, étant l'apanage d'une classe de fonctions semi-continues. En conséquence elles peuvent être obtenues sans l'emploi de tous les moyens que le caractère holomorphe pourrait offrir. On conçoit que leur démonstration fasse appel aux méthodes de la théorie des fonctions de variables réelles et les raisons du succès de celle-ci apparaissent ainsi nettement. Ces considérations contribuent à une classification logique des difficultés qu'on rencontre dans l'étude des fonctions de plusieurs variables complexes.... et conduit à considérer à part les propriétés d'une fonction holomorphe f qui découlent du fait que $\log |f|$ est une fonction plurisousharmonique ...".

Un résultat de K.Oka, connu à la fin des hostilités entraine que les domaines d'existence des fonctions analytiques, dont H.Poincaré s'était occupé, soient exactement les domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques : l'étude des ensembles de singularités des fonctions analytiques se ramène ainsi à l'étude de ces dernières. Elles déterminent aussi l'étude de la croissance des fonctions entières. J'ai été de la sorte conduit à écrire une vingtaine de notes ou mémoires sur les fonctions plurisousharmoniques. Tout d'abord comme je l'avais fait pour $n = 2$, je pouvais étudier les singularités des fonctions analytiques dans toute leur généralité. J'ai étudié les propriétés géométriques des domaines d'existence en montrant leur équivalence, ce qui mettait fin, en quelque sorte, aux études qu'on faisait de la "pseudo-convexité". Puis je traite des problèmes de prolongement de fonctions plurisousharmoniques, qui expliquent et généralisent l'existence de singularités impropres des fonctions analytiques. J'étudie par la suite la croissance des fonctions entières. Une autre direction de mes recherches a été l'étude du comportement des fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace R_o^n dans C^n, R_o^n étant l'ensemble des points à coordonnées réelles. Dans ces travaux ma méthode introduisait peu à peu des notions nouvelles, la classe des ensembles polaires, celle des ensembles C-négligeables, qui dans l'étude des fonctions plurisousharmoniques sont indispensables pour $n \geqslant 2$. Les notions capacitaires que j'avais utilisées auparavant dans le cas $n = 2$ font en effet complétement défaut pour ces études dans C^n . Après les années 1960 les travaux des mathématiciens se sont succédé à un rythme rapide en utilisant les fonctions plurisousharmoniques. J'ai établi que les indicatrices complexes et radiales régularisées des fonctions entières d'ordre fini étaient plurisousharmoniques homogènes. Cette propriété les caractérisait elles? Je l'ai établi pour les premières, mais pour les secondes, j'ai été devancé simultanément par le suédois C.-O.Kiselman et le regretté A.Martineau. Mais j'avais entre temps construit de telles indicatrices discontinues. L'emploi des fonctions plurisousharmoniques était devenu systématique en analyse fonctionnelle et L.Hörmander les utilisait pour l'étude des supports singuliers des distributions.

En fait dès 1950, je m'étais dirigé vers un autre problème, l'étude métrique des ensembles analytiques complexes c'est-à-dire des ensembles fermés définis au voisinage de chacun de leurs points en annulant des fonctions analytiques.

L'exemple des fonctions d'une variable montre l'importance et presque la nécessité pour les applications de connaître des propriétés quantitatives de tels ensembles. Un premier pas à faire était de déterminer si pour de tels ensembles (la présence de points singuliers fait qu'ils n'ont pas en général une structure de variété), on pouvait raisonnablement définir une "aire", ce qui revient, essentiellement, à définir l'intégration des formes différentielles sur l'ensemble. Ce problème avait été attaqué par de nombreux mathématiciens et le seul cas traité, celui des ensembles définis par une équation, l'avait été par Kodaira en complétant une méthode de H.Poincaré. Pour résoudre le problème je définis les courants positifs fermés , famille d'opérateurs linéaires à laquelle appartient l'intégration sur les variétés analytiques complexes ; ils se prolongent à travers les points singuliers des ensembles analytiques . J'obtiens ainsi le résultat essentiel de l'existence de l'opérateur d'intégration comme courant positif fermé porté par l'ensemble analytique. Les courants positifs fermés rentrent dans la classe générale de ces formes différentielles généralisées appelées courants par G.de Rham et dont les coefficients peuvent être des distributions (au sens de L.Schwartz). Dans le cas des courants positifs, ces distributions sont en fait des mesures de Radon et offrent le grand avantage de permettre la construction et le calcul sur des mesures, à partir d'une algèbre multiplicative assez simple que j'ai développée. Actuellement les problèmes à croissance en font le plus grand usage, notamment pour obtenir des théorèmes de représentation globale des ensembles analytiques.

Pendant longtemps on a du se contenter pour les fonctions de plusieurs variables de donner des théorèmes d'existence, ou de non existence, et de définir les groupes d'obstruction aux grands problèmes classiques. De ce fait les études sur les fonctions analytiques de plus d'une variable complexe paraissaient sinon inutiles, du moins inutilisables, même à l'intérieur des mathématiques. Il n'en est plus de même aujourd'hui et les résultats que j'ai obtenus y ont concouru. J'en citerai un exemple : l'étude des points où une application méromorphe prend des valeurs rationnelles est importante parce qu'elle recouvre de nombreux problèmes de transcendance en théorie des nombres. Mes travaux sur les courants positifs fermés et les propriétés de leur densité ν_x (appelée dans les travaux américains nombre de Lelong) , ont permis récemment à E.Bombieri de surmonter dans la théorie des nombres transcendants des difficultés qui avaient arrêté des mathématiciens comme S.Lang ; mes énoncés apportaient en effet des résultats quantitatifs et constructifs dont l'analyse complexe à plusieurs variables avait besoin pour satisfaire aux exigences de précision de la théorie des nombres.

La notion de courant positif fermé reçoit beaucoup d'applications car un ensemble analytique identifié à un tel courant devient infiniment plus maniable pour l'analyste. Récemment des travaux américains (P.Thie, J.King) ont établi une conjecture que j'avais faite dans mon Séminaire en 1966 : les ensembles analytiques sont exactement les supports des courants positifs fermés pour lesquels le nombre ν_x est un entier positif pour tout point x, ce qui définit les ensembles analytiques à partir des courants positifs fermés.

La méthode de mon mémoire de 1957 [38] avait d'abord étonné car j'employais des méthodes d'analyse fonctionnelle ; cette méthode a depuis été employée avec succès (M.Herrera) pour établir l'existence de l'opérateur d'intégration sur les ensembles analytiques réels et les ensembles semi-analytiques.

La représentation des fonctions entières d'ordre fini à partir de leurs zéros que j'ai donnée dès 1953, la complétant en 1964, a eu des conséquences sur les travaux de nombreux mathématiciens. Elle donnait (notamment pour les fonctions de type exponentiel si importantes pour les applications) des résultats aussi précis et aussi constructifs pour n variables que ceux obtenus jadis par E.Borel et J.Hadamard dans leurs études des zéros des fonctions entières d'une variable.

Dans un ordre d'idées différent, les 6 Notes que j'ai consacrées aux classes quasi-analytiques ont introduit pour leur étude une méthode qui utilise le comportement des fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace réel et "un théorème de Hartogs réel" que je donne (cf. le § 6 de l'analyse qui suit).

. . .

Mes recherches et celles de mes élèves ont depuis 1967 abordé un domaine nouveau qui est l'extension de l'analyse complexe aux espaces vectoriels topologiques de dimension infinie construits sur le corps C des nombres complexes. Dans ce passage à la dimension infinie, la notion de fonction analytique ne s'impose plus aussi clairement dès qu'on quitte le cadre des espaces de Banach. Paradoxalement celle de fonction plurisous-harmonique se transpose aux espaces les plus généraux, comme le montrent mes résultats publiés à partir de 1967. J'ai pu aussi étendre à la dimension infinie les notions ensemblistes définies à partir des fonctions plurisousharmoniques : elles sont indispensables car les notions de mesure auxquelles nous sommes habitués en dimension finie disparaissent en partie en dimension infinie.

C'est une tendance récente des mathématiques de travailler en dimension infinie et sur des espaces fonctionnels ; mes résultats apportent des moyens nouveaux dans cette voie. J'étends des propriétés des applications linéaires continues d'espaces vectoriels aux familles d'applications polynomiales : les notions ensemblistes, les ensembles polaires notamment, y jouent un rôle important et s'introduisent ainsi dans la théorie des espaces vectoriels topologiques. J'ai pu appliquer ces notions nouvelles à des problèmes très classiques. J'en donnerai un exemple : E.Borel avait remarqué que, "en général", les séries de Taylor convergentes représentent des fonctions analytiques ayant leur cercle de convergence comme coupure. Les probabilistes ont par la suite donné des énoncés dans cette direction. Je fais de l'ensemble de ces séries de Taylor un espace fonctionnel E ; d'un énoncé général que j'ai donné dans [55] découle, ainsi que je le montre dans [54] , que celles des séries qui représentent une fonction prolongeable forment selon le cas soit un ensemble polaire dans E, soit une réunion dénombrable d'ensembles négligeables ; mon point de vue donne des résultats plus précis que le point de vue probabiliste et la comparaison faite dans [54] est instructive, tous deux conduisant par ailleurs à travailler en dimension infinie. Dans cette extension de l'analyse complexe à la dimension infinie , j'ai défini des topologies nouvelles, mieux adaptées aux espaces vectoriels construits sur le corps C des nombres complexes.

Les notions que j'ai introduites ont montré récemment leur intérêt dans l'étude du prolongement des fonctions analytiques, de l'espace vectoriel à son complété topologique . Les résultats obtenus dont l'analyse est faite plus loin montrent qu'il n'était pas prématuré d'aborder ces problèmes nouveaux.

Carrière, charges et distinctions. - Je décrirai ici ma carrière et dirai quelles fonctions j'ai occupées. Certaines m'ont conduit à accepter de lourdes charges pour aider la science française

Ma carrière elle-même s'est déroulée dans l'Université; j'ai professé dans les Facultés des Sciences de Grenoble, de Lille, puis, après 1954, à Paris et j'appartiens aujourd'hui au corps enseignant de Paris VI.

A Grenoble je me suis trouvé dans un milieu scientifique actif, très ouvert aux applications ; il venait d'être renforcé par l'équipe de L.Néel. J'y ai beaucoup appris sur l'organisation de la recherche, sur le fonctionnement et les difficultés des laboratoires et aussi sur la vie des industries, plus aisée à connaître sur le plan local. Dans ma spécialité, je m'efforçais, avec l'appui de J.Pérès dont j'avais été l'assistant à Paris, d'établir un contact avec les ingénieurs et de classer leurs problèmes. Les observations que j'ai faites m'ont servi plus tard. J'ai trouvé ensuite à Lille une orientation universitaire différente ; je me suis alors concentré sur mes propres recherches et j'ai commencé à avoir des élèves ; le premier a été Fr.Norguet, aujourd'hui professeur à Paris VII. Nommé à Paris en 1954, j'organise le Séminaire d'Analyse qui, depuis, publie chaque année ses travaux (Lecture Notes, Springer) : il est pour moi un moyen d'orienter et de coordonner les travaux d'un groupe de chercheurs.

Très tôt, j'ai été amené à effectuer de nombreuses missions à l'étranger, étant fréquemment sollicité par des groupes de mathématiciens qui utilisent mes travaux.

L'activité de recherche d'un mathématicien s'exerce souvent dans la concentration et la solitude. Sur le plan moral, il en ressent parfois une impression désagréable, d'être égoïste, ou peu utile, ou mal utilisé. Aussi ai-je accepté quand l'occasion s'en est présentée, des fonctions supplémentaires,afin qu'une autre partie de mon activité pût bénéficier au reste de la science et aux travaux de mes collègues.

A la fin de 1958, j'ai été, ainsi que plusieurs scientifiques français, consulté sur la mise en place d'une organisation nouvelle de la recherche française. Mes avis ont été suivis. Sans doute les rédigeais-je avec le sens du possible, ayant été en 1938 l'élève d'une de nos grandes écoles administratives. A la fin de 1958, je fus vivement pressé d'accepter de suivre ces questions en devenant conseiller technique auprès de la plus haute autorité de l'Etat. J'acceptai. Les expériences russes et américaines montraient l'utilité et presque la nécessité d'une présence scientifique à ce niveau. J'avais d'autre part le goût de connaître et de servir l'Etat. Enfin ma position d'universitaire et d'homme de science, mais d'une science qui ne demande pratiquement rien pour elle-même, me donnait du recul et de l'indépendance.

La charge était lourde, car je continuais d'assurer mes tâches d'enseignement et de recherche : je n'ai pu y faire face que grâce au climat d'efficacité et de confiance que j'ai trouvé. Cette confiance entrainait la collaboration de la haute administration. Il fallait assurer la bonne marche des nouvelles institutions, Délégation, Comité Consultatif de la Recherche scientifique et technique. La science est aisément sacrifiée à des besoins quotidiens : un strict respect des procédures nouvelles créées en sa faveur devait être imposé à tous, si l'on voulait que ses besoins pussent être utilement exprimés au niveau le plus élevé. Après deux années, je changeai mon poste contre celui de membre, puis de président du Comité Consultatif, afin de continuer et de préciser mon action pendant quatre ans encore. J'ai ainsi donné pendant six ans une part de mon activité pour favoriser l'ensemble de la recherche : l'accroissement régulier des crédits et des moyens mis à la disposition de la science française a été, je crois, apprécié. Des organismes nouveaux de recherche ont été créés : je n'avais pas perdu mon temps en y aidant. Dans les années suivantes, menant les travaux du groupe "Mathématiques" du Plan, j'ai poussé au développement des mathématiques appliquées et de l'informatique ; les travaux que j'ai présidés ont préparé la création de l'I.R.I.A. ; mon action se poursuivait parallèlement au C.N.R.S. où je présidais la commission de mathématiques.

Enfin je mentionnerai, pour terminer, que mes collègues mathématiciens me confient depuis plusieurs années la tâche délicate de présider une commission, non officielle, qu'ils ont créée et à laquelle ils soumettent avant la soutenance les thèses d'Etat qu'ils font faire.

ANALYSE DES TRAVAUX

1. - Premiers travaux ; fonctions de deux variables complexes.

A - J'indiquerai d'abord quelques résultats qui ont précédé ma thèse ; certains concernent les fonctions d'une variable complexe.

a/ Ma première publication [1] date de 1937 ; elle concerne les fonctions méromorphes d'une variable, d'ordre de croissance fini. Un théorème de A.Denjoy et L.Ahlfors limitait à 2 p le nombre des valeurs asymptotiques a d'une telle fonction qui sont directes, c'est-à-dire non prises par f dans un domaine D allant à l'infini. J'étends cette limitation au cas où $\frac{n(r,a)}{\varphi(r)} \to 0$ quand $r \to +\infty$, où $\varphi(r) = \log.\sup. \left|f(z) - a\right|$, pour $|z| \geqslant r$ sur le chemin de détermination et où $n(r, a)$ est le nombre de zéros de $f(z) - a$ pour lesquels on a $|z| \leqslant r$ sur D . Je définis ainsi une classe de valeurs asymptotiques semi-directes qui comprend les valeurs asymptotiques directes, l'ensemble étant limité à 2p si f est d'ordre p. Ce résultat est le meilleur possible comme l'a montré un exemple de G.Valiron.

b/ Par la suite j'ai rencontré nombre de propriétés des polynomes d'une variable qui étaient sans doute demeurées inaperçues, par exemple celle-ci que j'ai d'ailleurs étendue aux applications polynomiales d'espaces de Banach : si $P_n(z)$ est une famille de polynomes, et degré $P_n = n$, alors si l'on pose $U_n(z) = \frac{1}{n} \log |P_n(z)|$ il n'existe que trois possibilités pour $U = \limsup U_n$ et pour sa régularisée $U^*(z) = \limsup_{z' \to z} U(z')$:

1°) ou bien on a $U^*(z) \equiv +\infty$ et alors on a $U(z) = +\infty$ sauf sur un ensemble de type F_σ, de capacité nulle 2°) ou bien $U^*(z)$ est sousharmonique et l'ensemble $U(z) < U^*(z)$ est de capacité nulle 3°) ou bien on a $U = U^* \equiv -\infty$ et la suite U_n converge vers $-\alpha$ uniformément sur tout compact.

c/ Enfin parmi les publications antérieures à ma thèse, je signalerai la note [4] ; j'y étudie l'intégrale de Kronecker d'un système $f(x, y)$, $g(x, y)$ de deux fonctions analytiques de deux variables dans un domaine $|x| < r$, $|y| < r'$. Je montre que cette intégrale a toujours un sens et donne le nombre des zéros isolés du système ; les sous-variétés de dimension complexe un n'interviennent donc pas dans le calcul de cette intégrale. Le calcul appliqué au système $f(x) - y = 0$, $y = 0$ introduit commodément l'aire $A(r)$ de l'image du cercle $|x| < r$ donnée par f sur la sphère de Riemann et donne une démonstration naturelle d'une formule fondamentale dans la théorie des fonctions entières d'une variable complexe (formule dite de Ahlfors-Shiniizu dont A.Bloch avait conjecturé l'existence).

B - J'analyserai maintenant les travaux systématiques sur les fonctions analytiques de deux variables qui figurent dans ma thèse de doctorat [7] et dans quelques mémoires postérieurs [8], [9], [10], [17], [20], [22]. Le point de départ est le suivant : dans le développement en série de Hartogs $f(x, y)$ $f(x, y) = \sum_n A_n(x) y^n$ d'une fonction f holomorphe au voisinage de $\{x \in d, y = 0\}$ dans $C^2(x, y)$, le rayon de convergence uniforme de la série (donc le rayon d'holomorphie pour f) est donné par $y = R(x)$, où $U(x) = -\log R(x)$, $x \in d$ est la fonction sous-harmonique la plus générale. Ce premier résultat m'a conduit à de nombreux énoncés qui concernent l'étude fine des singularités des fonctions analytiques de 2 variables, en utilisant les notions (capacité, effilement, critère de Wiener) venues de la théorie du potentiel. Une réponse est donnée [9] à une question de G.Julia sur les valeurs exceptionnelles d'une relation $f(x, y) = 0$. Une étude poussée de la croissance des fonctions entières de deux variables est faite dans [7]. Par la suite ces résultats de ma thèse ont été améliorés et repris par moi dans un cadre plus général (Cours publié aux Presses de Montréal 1968, exposé de Hengartner, Séminaire P.Lelong, 1968) car il est apparu que, sauf pour quelques énoncés très particuliers, l'analyticité de f n'intervenait que par le fait que $\log |f|$ était plurisousharmonique. Citons aussi, toujours pour deux variables, le mémoire [24], (1950), sur les séries de Taylor à coefficients entiers, problème poursuivi récemment (1970) par A.Martineau, et le mémoire [22] sur les séries de Taylor formelles ; le résultat de ce travail, récemment étendu par moi à la dimension infinie, a donné dans les espaces vectoriels complexes une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux applications polynomiales de degré quelconque.

Signalons aussi que dans les travaux de cette période j'ai complété la théorie du potentiel et des fonctions sousharmoniques (construction directe de la régularisée U^*, plus petite majorante semi-continue supérieurement de $U = \lim\ \sup\ U_n$, U_n sousharmonique; théorème appelé par moi "théorème de Hartogs" relatif à la majoration uniforme des U_n sur un compact quand U est continue ; étude en collaboration avec J. Deny de l'indicatrice de Phragmen-Lindelöf pour les fonctions sousharmoniques [19]).

3. - <u>Les fonctions plurisousharmoniques.</u> Le passage de C^2 à C^n posait un problème de méthode : d'une part le cas n = 2 avait montré le lien étroit entre tout un groupe de propriétés fines des fonctions analytiques et les reliait quant aux démonstrations à l'utilisation des fonctions sousharmoniques du plan. D'autre part il était évident que dans C^n, $n > 2$, l'utilisation de celles-ci et de la théorie du potentiel donnait des résultats, certes nouveaux, mais insuffisants.

J'ai été ainsi conduit à définir les fonctions que j'ai appelées plurisousharmoniques : 3 notes à l'Académie en 1942 et 1943 en donnent la définition, des propriétés caractéristiques , et étudient les suites U_n localement majorées ; en particulier U^* demeure plurisousharmonique. Ces résultats étant maintenant intégrés dans les cours classiques, rappelons seulement que l'ensemble P(G) des fonctions plurisousharmoniques dans un domaine G de C^n est un cône positif convexe, réticulé supérieurement. Pour qu'on ait $V \in P(G)$, il faut et il suffit que $V(-\infty \leq V < \infty)$ soit semi-continue supérieurement et vérifie l'inégalité de la moyenne pour les disques (images linéaires du disque unité fermé de C dans C^n) contenus dans G ; ou encore , il faut et il suffit que V soit localement sommable et que la distribution $\delta_V(\lambda) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \, \partial \bar{z}_q} \lambda_p \bar{\lambda}_q$ soit une mesure positive pour tout $\lambda = \{\lambda_k\} \in C^n$,et que V soit en tout point égal à son maximum en mesure. Indiquons des applications que j'ai faites aussitôt [13], [14] :

-a) La pseudo-convexité d'un domaine d'holomorphie G dans C^n pour laquelle on donnait des formalismes peu commodes (conditions de E E.Levi , Kontinuitätssatz...) , et souvent entachées de conditions de régularité, se ramène au fait que pour tout $z \in G$, la distance d(z) à la frontière bG est telle que -log d(z) soit plurisousharmonique dans G. J'ai ensuite ramené cette propriété à la propriété pour G d'être P-convexe, c'est-à-dire convexe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques définies dans G.

Les mémoires [27] et [29] étudient l'équivalence des propriétés remarquées par divers auteurs et les ramènent à la P-convexité .

Un problème essentiel depuis H.Poincaré peut alors s'énoncer clairement : il est de savoir si dans C^n un tel domaine G est domaine d'holomorphie ; or cette dernière propriété se ramène à la A-convexité de G, c'est-à-dire à sa convexité par rapport au sous-ensemble de P(G) constitué par les log $|f|$, $f \in A(G)$, algèbre des fonctions holomorphes dans G. Ce problème à l'époque a fait l'objet dans C^2 d'un travail de K.Oka dont l'intuition est profonde mais dont le texte présente des obscurités majeures. F. Norguet, alors mon élève à Lille , les éclaire et récrit le mémoire de

Oka en dimension n ; peu après, un autre de mes élèves, J.-H.Bremermann parvient indépendamment au même résultat. Le problème de caractériser les domaines d'holomorphie dans C^n posé par H.Poincaré est alors résolu ; ce sont les domaines P-convexes et dans C^n la P-convexité entraine la A-convexité. Aujourd'hui cet important théorème, qu'il est juste d'attribuer à Oka, peut être obtenu par divers itinéraires. Certains, assez détournés, utilisent des théorèmes d'approximation et la cohomologie à valeurs dans un faisceau analytique cohérent, mais la méthode la plus précise et la plus courte , utilisant les travaux de L.Hörmander , étudie directement la $\bar{d}$ cohomologie dans un espace fonctionnel $L^2(G, V)$ défini à partir d'une fonction V plurisousharmonique qui tend vers $+\infty$ quand on s'approche de la frontière bG de G.

-b) L'étude des mesures liées aux fonctions plurisousharmoniques conduit dans le mémoire [23] à l'étude métrique d'un ensemble analytique f = 0 ; son "aire" se définit comme une mesure proportionnelle au laplacien $\Delta \log |f|$; le quotient de sa valeur $\sigma(r)$ dans la boule $\|z\| \leqslant r$ par r^{2n-2} est croissant, ce qui donne des propriétés de l'image dans l'espace projectif. On obtient une majoration du nombre des simplexes d'un recouvrement qui contiennent des points de l'ensemble analytique. Il en résulte aussi pour un polynome P une représentation de $\log |P|$ par un potentiel de la mesure-aire de P = 0, appliquée à un noyau newtonien dans R^{2n}.

-c) Dans des Notes parues en 1953, j'ai étendu cette méthode à la représentation des fonctions entières d'ordre fini dans C^n, grâce à une résolution explicite de l'équation $2id\bar{d}\, V = t$ mais ce mémoire qui concerne un problème de cohomologie à croissance n'est rédigé qu'en

1964, après l'introduction des courants positifs. Les deux études [39], [41] sur les singularités impropres des fonctions plurisousharmoniques définissent des ensembles fermés $N \subset G$, tels que toute fonction $V \in P(G - N)$ se prolonge en $\tilde{V} \in P(G)$; ces résultats qui ont un caractère technique ont été exposés récemment en détail dans l'ouvrage de Ronkin paru à Moscou : "Fonctions de plusieurs variables complexes".

4. - Courants positifs. Intégration sur un ensemble analytique.

Un ensemble M est dit analytique dans un domaine G de C^n s'il est fermé et défini localement en annulant des fonctions analytiques dans G. Il n'a pas une structure de variété. Peut-on intégrer sur M les formes différentielles ? Ce problème en codimension quelconque avait résisté à beaucoup d'efforts. En 1957 (cf. [37]), je puis donner la définition de l'opérateur d'intégration : c'est un courant (au sens de G.de Rham), et, ce qui est plus précis, c'est un courant fermé. Le mémoire [38] du Bulletin de la S.M.F. 1957 est devenu classique et Herrera en a prolongé la méthode (1967) en définissant l'intégration sur les ensembles semi-analytiques de Łojasiewicz.

Dans ce travail, j'ai dégagé une notion importante,celle de courant positif fermé. Elle est développée dans un Cours de Varenna réédité par Gordon Breach, New-York (1963). De même que nombre de propriétés des log $|f|$, $f \in A(G)$, sonten fait l'apanage de la classe P(G), de même, des propriétés métriques des ensembles analytiques appartiennent aussi à la classe plus générale T(G) des courants positifs fermés, et là encore l'analyticité disparait au profit d'autres structures. En un point x du support d'un courant positif fermé $t \in T(G)$, je puis démontrer l'existence d'un nombre $\nu_x \geqslant 0$, qu'on peut définir comme une mesure dans l'espace projectif des directions complexes issues de x. Les propriétés algébriques des courants positifs fermés, celle des systèmes multiplicatifs de formes positives ont été développées dans [46] ; elles permettent de construire par multiplication extérieure de formes et courants positifs des mesures positives dont ensuite la signification "concrète" apparaît (aires, aires projectives...). Cette théorie se développe actuellement aux Etats-Unis et deux conjectures que j'ai faites ont été récemment établies :-a) ν_x est un entier $\geqslant 1$ pour $x \in \mathrm{supp}\, t$ si $t \in T(G)$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique (P.Thie) -b) Si ν_x est un entier $\geqslant 1$ pour $x \in \mathrm{supp}\, t$, $t \in T(G)$, alors supp t est un ensemble analytique (J.King, Acta Mathematica 1971). Ce nombre ν_x dit "nombre de Lelong" joue un rôle essentiel dans le travail déja cité de E.Bombieri. De cette extension de la "géométrie analytique" obtenue en considérant les ensembles analytiques comme des supports de courants positifs fermés découle aussi une topologie naturelle sur les ensembles analytiques (cf. [60]) , c'est celle induite par la convergence faible dans l'espace des courants. Pour cette topologie il existe une propriété "de Paul Montel" : les bornés sont relativement compacts, ce qui entraîne, compte-tenu d'un résultat de E.Bishop, une propriété de "familles normales" pour les ensembles analytiques.

Le mémoire [47] résout par une construction explicite l'équation $2id\bar{d}V = t$, t courant positif fermé de type (1, 1), quand on suppose que $\sigma(r)$, mesure ΔV portée par la boule $\|z\| \leqslant r$ est d'ordre de croissance fini : c'est donc là un problème de cohomologie à croissance. Il est résolu dans [47] en construisant V par un potentiel de la mesure ΔV, le noyau étant déduit du noyau newtonien de R^{2n} : il est remarquable que ce potentiel soit une fonction plurisousharmonique. La comparaison faite récemment par Skoda avec la méthode de L.Hörmander est à l'avantage de cette construction directe ; si t résulte d'une donnée de Cousin de zéros de fonction holomorphe (U_i, f_i), on obtient $\log |F|$, et la solution F du problème de Cousin ; F holomorphe dans C^n est équivalente dans chaque U_i à f_i, et toute solution du problème de Cousin est de la forme $G = Fg$, où g ne s'annule pas dans C^n.

5. - Nouveaux travaux sur les fonctions plurisousharmoniques.

Les fonctions plurisousharmoniques entraînent avec elles diverses notions de "petits ensembles" ; ces classes d'ensembles qui ont déjà reçu des applications variées ont été définies et étudiées par moi à partir de 1961 et ont motivé le mémoire [44] . Je définis les ensembles C-polaires : ce sont dans un domaine G de C^n les sous-ensembles des ensembles $V(z) = -\infty$, $V \in P(G)$ - puis les ensembles C-négligeables, classe qui comprend la précédente : A est C-négligeable dans G s'il existe une suite $V_q \in P(G)$ localement majorée telle que A soit contenu dans l'ensemble $W(z) < W^*(z)$, où $W = \sup V_q$, $W^* = \text{reg sup } W$. J'établis que les réunions dénombrables de tels ensembles sont encore de même nature ; le mémoire [44] "Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles" montre qu'ils sont de mesure nulle sur le sous-espace réel R_o^n et sur les variétés analytiques réelles de dimension n dans $C^n = R^{2n}$, qui sont images localement de R_o^n par un homéomorphisme analytique complexe . D'où une étude fine des fonctions $W = \limsup V_q$, et un "théorème de Hartogs" dans les réels R_o^n , théorème qui permet une majoration dans le complexifié C^n. Cette étude est poursuivie dans [49], 1966, car dans l'intervalle les travaux de L.Hörmander sur le support singulier des distributions (1963), et surtout la thèse de A.Martineau sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier montraient l'intérêt des fonctions entières de type exponentiel à croissance majorée sur les réels ; un énoncé important de ce dernier résulte simplement du "théorème de Hartogs réel" relatif aux fonctions plurisousharmoniques. Le mémoire [49], montre aussi que pour les fonctions entières F de type exponentiel dans C^n les indicatrices de croissances $L_c(z)$ et $L_r(z)$:

$$L_c(z) = \limsup |u|^{-1} V(uz) \quad , u \in C, \; |u| \to +\infty \; , \qquad V = \log |F|$$

$$L_r(z) = \limsup t^{-1} V(tz) \; , \qquad t > 0, \; t \to +\infty$$

ont des régularisées supérieures L_c^*, L_r^* plurisousharmoniques ; [49] établit que L_c^* est la fonction plurisousharmonique la plus générale vérifiant $L_c^* |uz| = |u| L_c^*(z)$. Une telle fonction est nécessairement positive et de la forme e^U, où U est plurisousharmonique et appartient à une classe de croissance minimale qui est étudiée dans [49] . Peu après, séparément, A.Martineau et C.-O.Kiselman, élève de L.Hörmander, établissent que L_r^* est la fonction plurisousharmonique la plus générale positivement homogène, et étendent ces résultats au type moyen d'un ordre fini quelconque.

6. - <u>Classes quasi-analytiques.</u> Sommairement, on peut dire qu'une classe quasi-analytique est la donnée d'une famille M(G) de fonc-

tions f définies dans G (en général G est un domaine) et d'une famille d'opérateurs $Q_i(f)$ (éventuellement $Q_i(f)$ est la valeur de f ou d'une de ses dérivées en un point), M et $\{Q_i\}$ étant associés de manière que les $Q_i(f)$ déterminent f dans M(G) . J'ai publié mes résultats dans de courts articles et notes [16] , [17] , [21] , [25] , [35] , [45] . Résumons les en indiquant leurs conséquences:

a) Dans [17] , je montre que pour les classe quasi-analytiques $M_B[0, 1]$ de fonctions d'une variable réelle $0 \leqslant x \leqslant 1$ définies par S.Bernstein, au moyen de l'approximation polynomiale, les ensembles de détermination sont caractérisés par le fait d'avoir une fermeture de capacité positive , c'est-à-dire que f, $g \in M_B [0,1]$ et $f(x) = g(x)$, pour $x \in A$ entraîne $f(x) = g(x)$ sur $[0, 1]$ si et seulement si $\bar{A}$ est de capacité strictement positive,ce qui résout un problème laissé en suspens pour ces classes importantes.

b) Dans [21] ce résultat est étendu à n variables ; soit $A_m(d)$ la classe des fonctions polynomiales d'ordre m (solutions de $\Delta^m f = 0$ dans un domaine d de R^n) : de telles fonctions(qui se réduisent aux polynomes pour n = 1) se prolongent toutes analytiquement (d'après un résultat de Aronszajn) dans un domaine H(d), cellule d'harmonicité de d dans C^n : je montre qu'à tout compact $K \subset H(d)$ correspond un nombre $\tau > 0$ tel que si $\tilde{f}$ est le prolongement de $f \in A_m(d)$, $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in d$, entraîne $|\tilde{f}(z)| \leqslant M (1 + \tau)^{2m-2} (m + \frac{n}{2})^n d (K) \log m$, pour $z \in K$ .L'approximation polyharmonique (et en particulier l'approximation polynomiale) permet pour n quelconque de définir des classes quasi-analytiques.

Une classe $C(m_k)$ est définie à partir d'une suite croissante $\{m_k\}$ d'entiers ; $f(x) = f(x_1, \dots x_n)$ appartient à $C(m_k)$ s'il existe

τ, $0 < \tau < 1$, et $A > 0$, et une suite $U_k(x)$, U_k étant polyharmonique d'ordre m_k, de manière que l'on ait

$$\left| f(x) - U_k(x) \right| \leqslant A \tau^{m_k} \quad \text{pour } x \in d .$$

Je montre que la classe $C(m_k)$ est analytique si et seulement si $m_k \; m_{k-1}^{-1}$ demeure borné. Si f et g appartiennent à une classe $C(m_k)$ et coincident sur un ouvert, on a $f \equiv g$. Mais la classe des ensembles de détermination comprend tous les ensembles E dont l'adhérence $\overline{E}$ a la propriété suivante : il existe une boule B de l'espace complexifié C^n telle que $\overline{E} \cap B$ n'est pas C-négligeable dans B.

Ce travail [21, 1948] établit aussi un résultat dans une voie alors tout à fait inexplorée en montrant que d'une majoration de $|f|$ et de $|\Delta^m f|$ pour une fonction de classe C^{2m} résulte une majoration de toutes les dérivées partielles d'ordre total au plus $2m - 1$. Un autre résultat donné dans [16] établit qu'une fonction de classe C^∞ dont les laplaciens ont des signes constants, alternés. est analytique et même harmonique d'ordre infini. Tout récemment ces méthodes ont pu être généralisées à d'autres opérateurs par Goulaouic, Baouendi, Hanouzet en mettant à profit les grands progrès faits depuis dans le maniement des opérateurs différentiels.

c) Le cas où les opérateurs Q_i sont constitués par des polynomes homogènes de dérivation a été étudié par moi dans le travail "Extension d'un théorème de Carleman" [45, 1962]. La forme du résultat est proche de celle du célèbre théorème de Denjoy-Carleman, qui y est contenu pour $n = 1$. La démonstration de ce dernier théorème fait intervenir une certaine mesure harmonique (que Carleman avait construite en utilisant les résultats de A.Denjoy). Mon résultat découle de l'existence, que j'établis d'abord, d'une certaine fonction plurisousharmonique . L'énoncé donne une condition nécessaire et suffisante sur les $M_{(\alpha)}$ pour qu'une fonction f indéfiniment dérivable sur un compact K de R^n, nulle en dehors de K, et dont les dérivées vérifient $|D^{(\alpha)} f(x)| \leqslant M_\alpha$, soit identiquement nulle. Le travail considère ensuite le cas où les dérivées sont remplacées par une famille $P_m(f)$ d'opérateurs différentiels homogènes, et donne une condition nécessaire et suffisante pour que la classe définie par $|P_m(f)| \leqslant M_m$ possède la même propriété. Indirectement ces énoncés précisent le champ d'application des distributions de L.Schwartz et des ultra-distributions de Roumieu.

7. - <u>Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques</u>. A partir de 1967, mes travaux concernent l'analyse complexe en dimension infinie. De jeunes mathématiciens, entre autres Noverraz, Coeuré, tous deux actuellement maîtres de conférences, se sont inspirés de mes résultats récents. Déja le cours que j'avais fait à Montréal (été 1967)donnait les propriétés élémentaires des fonctions plurisousharmoniques dans un espace vectoriel topologique complexe, mais en supposant cet espace métrisable. Les résultats apparaissent dans leur généralité dans [53] . Il est très remarquable en particulier que le théorème sur la régularisée supérieure U^* de $U = \lim\sup U_m$, demeure vrai sans restriction sur l'espace ; l'invariance de la classe plurisousharmonique vis-à-vis des applications continues et G-analytiques (c'est-à-dire dont les restrictions aux droites complexes sont analytiques) est obtenue pour les espaces séquentiellement complets ; l'extension à la dimension infinie se fait plus naturellement pour les fonctions plurisousharmoniques que pour les applications analytiques pour lesquelles plusieurs définitions entrent en concurrence. Les mémoires [53] et [55] étudient

les ensembles C-polaires et C-négligeables, ce qui me conduit à donner une extension du théorème de Hartogs aux espaces de Baire pour les fonctions plurisousharmoniques continues.

En dimension infinie la réunion dénombrable d'ensembles C-polaires dans G n'est C-polaire que sous certaines conditions. Une application de ces notions est donnée : l'algèbre $A(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un domaine Ω de C^n, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est un espace de Fréchet ; le sous-ensemble des $f \in A(\Omega)$ qui n'ont pas Ω comme domaine d'holomorphie est soit tout $A(\Omega)$, soit un ensemble maigre (au sens de Baire), réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Si l'on considère un sous-espace M de $A(\Omega)$ muni d'une topologie plus fine qui en fait un espace de Banach, $M \cap \eta$ est soit M soit un ensemble polaire.

On obtient des résultats analogues pour les espaces de fonctions entières d'ordre ρ dans C^n d'indicatrice majorée par une fonction plurisousharmonique homogène d'ordre ρ.

8. - Extensions du théorème de Banach-Steinhaus, espaces pseudo-convexes, espaces C-tonnelés.

Le théorème de Banach-Steinhaus énonce que si $\{f_i\}$ est une famille d'applications linéaires continues $E \longrightarrow F$, et si pour tout $x \in E$, $\{f_i(x)\}$ est un borné dans F, alors les f_i sont également continues dans deux cas a) E est espace de Baire b) E est tonnelé et F localement convexe . J'ai repris l'étude de cette question pour les familles d'applications polynomiales homogènes P_i continues d'espaces vectoriels complexes, en vue d'obtenir des énoncés indépendants du degré des P_i. On dira que F a une topologie P-convexe s'il existe une base V_α de voisinages disqués de l'origine dans F, définis par $q_\alpha(y) < 1$ où q_α est une fonction plurisousharmonique homogène d'ordre un (c'est-à-dire une pseudo-norme) continue sur F ; F sera dit C-tonnelé s'il est à topologie

P-convexe et si toute famille $q_\alpha(y)$ de pseudo-normes continues bornée en chaque point est bornée dans un voisinage de l'origine (elle est alors localement bornée sur tout F). Indiquons ici un résultat en supposant E, F séparés complets. Soit degré $P_i = n_i$, F à topologie pseudo-convexe, et E C-tonnelé (il en est ainsi en particulier si E a la propriété de Baire) ; si pour tout $x \in E$, il existe $\sigma_x > 0$ et un borné $B_x \subset F$ tel qu'on ait $P_i(x) \subset \sigma_x^{n_i} B_x$ pour tout i, il existe pour chaque quasi-norme q_α déterminant la topologie de F, une quasi-norme continue p_α sur E telle qu'on ait quel que soit i, $q_\alpha \circ P(x) \leq p_\alpha^{n_i}(x)$, ce qui équivaut à dire que les pseudo-normes $U_{\alpha,i}(x) = \frac{1}{n_i} \log q_\alpha \circ P_i(x)$ sont équibornées sur E. La propriété est étendue aux applications polynomiales non homogènes. Un résultat plus fin est obtenu si l'on suppose que E est un espace de Banach (plus généralement si l'origine a un voisinage borné) : il suffit que les $P_i(x)$ vérifient la condition précédente sur une partie A de E qui n'est pas polaire et maigre dans E. Une application remarquable de ce résultat est la suivante. Il est bien connu qu'une fonction entière f : $E \to \mathbb{C}$, n'est pas, en général bornée sur les parties bornées de E. Mais si, par exemple, sa restriction à un ensemble A de droites complexes issues de l'origine est de type exponentiel (type qui peut varier avec la droite) et si A n'est pas simultanément maigre et polaire, alors f est bornée sur les bornés de E et f est globalement de type exponentiel, c'est-à-dire vérifie sur E : $\left|f(x)\right| \leqslant A\ e^{p(x)}$ pour une quasi-norme continue p(x) : c'est un cas particulier de résultats que j'ai établis dans [58] où une propriété plus générale est démontrée pour des types de croissance dépendant d'un nombre fini de paramètres. Le lecteur pourra, s'il le désire, remplacer dans ce qui précède, P-convexe par convexe, quasi-norme (plurisousharmonique) par semi-norme (convexe) afin d'énoncer des théorèmes dans le cadre familier des topologies localement convexes.

Le passage à la dimension infinie crée un reclassement des problèmes : en utilisant les propriétés des fonctions plurisousharmoniques et les résultats de la dimension finie, l'équivalence des domaines P-convexes et des domaines d'existence a pu être établie assez vite (1972), au moins dans les espaces de Banach séparables. Un autre problème, plus spécifique de la dimension infinie, est de préciser dans quels espaces E une fonction analytique se prolonge au complété topologique $\tilde{E}$; il n'a reçu que des solutions partielles ; elles font apparaître que ce problème est lié à la recherche des espaces pour lesquels E n'est pas C-polaire dans $\tilde{E}$.

COMPLÉMENT A LA NOTICE (Septembre 1974)

Mes travaux depuis deux ans concernent l'analyse, soit l'analyse complexe en dimension finie, soit son extension aux espaces vectoriels topologiques.

En dimension finie, l'intégration sur les ensembles analytiques complexes détermine une application de cette famille d'ensembles dans le cône positif convexe des courants positifs fermés (Notice p.33) ; j'étudie dans [62] les génératrices extrémales de ce cône. D'autre part, depuis peu, une école mathématique nombreuse a poursuivi ma méthode aux Etats-Unis et montré que les ensembles analytiques se définissent comme les supports des courants positifs fermés pour lesquels le nombre-densité ν_x que j'avais introduit en 1957 est un entier positif. J'ai été alors conduit à revenir sur ce sujet dans mon Séminaire [62,66] ; la thèse de H.Skoda prolonge mon travail [47] en donnant une représentation "à croissance" des ensembles analytiques. Un travail en cours de publication de Y.Siu "Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of meromorphic maps", utilisant un résultat de cette thèse montre l'analyticité des ensembles $\nu_x \geq c > 0$, ce qui contient les énoncés connus. Dans [67], je donne alors une méthode différente qui permet d'obtenir certains d'entre eux en dimension infinie. Signalons aussi que ces techniques de géométrie généralisée dont j'ai peut-être été l'initiateur sont utilisées aujourd'hui en calcul des variations.

J'ai d'autre part poursuivi l'extension de l'analyse complexe aux espaces vectoriels de dimension infinie. J'ai été conduit à préciser le rôle des ensembles C-polaires (Notice p.38) et à en donner des applications. Par exemple [63] , dans l'algèbre de Fréchet des fonctions entières f de n variables, l'image de l'application exponentielle $f \to e^f$ est un cône fermé polaire épointé à l'origine. De tels résultats donnent aisément des énoncés moins fins de style probabiliste en utilisant les mesures cylindriques (par exemple sur les polycylindres compacts de Coeuré). La recherche de notions aptes à remplacer les mesures de Radon de la dimension finie (en particulier pour parvenir à une définition du nombre densité ν_x) m'a conduit dans [65] à remarquer des propriétés de régularité pour les systèmes de mesures induites sur les sous-espaces de dimension finie ; ces recherches en cours font aussi l'objet de [67].

L'extension de l'analyse à la dimension infinie pose aux mathématiciens de difficiles problèmes techniques, mais je pense qu'elle leur procurera de nouvelles occasions de servir d'autres parties de la science. Je dirai aussi, qu'à côté de mes propres travaux, mon séminaire a peut-être suscité ceux de jeunes mathématiciens, français et étrangers, et contribué à leurs résultats, notamment dans les espaces de Banach séparables, et dans des espaces plus généraux à base. Je suis heureux de les avoir aidés.

COMPLÉMENT A LA LISTE DES TRAVAUX

1972

62 - Eléments extrémaux parmi les courants positifs fermés. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 332, p. 112-125.

63 - Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et les algèbres de fonctions analytiques. Colloque international du C.N.R.S., Juin 1972 (Agora Mathematica, n° 1, Gauthier-Villars, p. 95-115).

1973

64 - Résultats récents sur les propriétés métriques des ensembles analytiques complexes (exposé à la R.C.P. n° 25 entre physiciens et mathématiciens, Strasbourg, 1973).

65 - Plurisubharmonic functions in topological vector spaces : polar sets and problems of measure, Colloquium on infinite dimensional holomorphy. University of Kentucky, Mai 1973, Lecture-Notes Springer, n° 364, p. 58-68.

66 - Remarques sur un théorème de support pour une classe de courants. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer.

1974

67 - Un théorème de fonctions implicites pour les fonctions plurisousharmoniques et ses applications à l'étude des fonctions analytiques (Colloque d'Analyse fonctionnelle, Cracovie, Septembre 1974, à paraître).

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

COMPLÉMENT A LA NOTICE (Octobre 1976)

I. L'extension aux espaces vectoriels topologiques des propriétés des fonctions plurisousharmoniques faite dans [53], [54], [58] a été complétée dans les thèses de Ph.Noverraz et G.Coeuré . La recherche des "bons" espaces dans lequel les domaines d'holomorphie des fonctions sont encore caractérisés à partir des fonctions plurisousharmoniques par la pseudo-convexité a donné lieu à une suite de travaux dans les espaces à base. Le premier résultat significatif (du à L.Gruman et C.O.Kiselman pendant leur séjour à Paris) concerne les espaces de Banach séparables. C'est pour éclairer le rôle joué par les ensembles polaires dans les applications entières que je traite dans [69] le cas d'un endomorphisme analytique d'un espace de Fréchet, où, comme je le montre, l'image, ensemble polaire fermé dans l'espace privé de l'origine, n'est pas un ensemble analytique complexe.

II. En dimension finie, l'étude à croissance des ensembles analytiques complexes (c'est-à-dire les ensembles définis localement en annulant des fonctions analytiques) a une grande importance pour les applications. Quand en 1957 j'avais construit l'opérateur d'intégration des formes différentielles sur de tels ensembles, c'était pour étendre à des ensembles M ayant des singularités un outil classique de la géométrie différentielle applicable aux variétés. Peu à peu l'opérateur ainsi construit s'est substitué à l'ensemble M qui en est le support. Ces opérateurs que j'ai appelés courants positifs fermés (les opérateurs linéaires sur les formes différentielles sont appelés courants depuis G.de Rham) ont une propriété remarquable : ils possèdent en chaque point x un nombre-densité $\nu(x)$, appelé maintenant nombre de Lelong dans les travaux américains.

On sait maintenant (Thie, King, Siu) que les ensembles analytiques complexes sont exactement les supports des courants positifs fermés pour lesquels $\nu(x)$ est en tout point x un entier positif et que, plus précisément, sur le support d'un tel courant, l'ensemble $\nu(x) \geqslant c$, $c > 0$ est un ensemble analytique complexe. On aboutit aussi à une nouvelle définition . Elle se substitue avantageusement pour certaines recherches à la définition classique des ensembles analytiques complexes. Elle leur donne place dans la géométrie différentielle et permet d'utiliser d'emblée des méthodes globales. Je montre aussi [67] que les ensembles analytiques sont des éléments extrémaux du cône des courants positifs fermés.

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

1°/ La démonstration que j'avais donnée dans [38] a pu être appliquée sans modification notable d'abord aux ensembles analytiques réels, puis aux ensembles semi-analytiques (Herrera) ; le courant d'intégration obtenu n'est évidemment plus fermé ; des travaux récents (Hironaka, Verona) l'ont étendue aux ensembles sous-analytiques définis par Hironaka, ce qui paraît être l'extension extrême de la méthode.

2°/ C'est peut-être dans le domaine de l'analyse complexe que les résultats obtenus ainsi ont été les plus importants , malgré leur technicité. En effet, l'étude des ensembles analytiques et des idéaux dans les algèbres de fonctions analytiques présente de grosses difficultés pour le passage du local au global ; en particulier les raisonnements s'appuyant sur la cohérence des faisceaux sont impraticables quand on veut contrôler la croissance.

J'avais traité avec une très grande précision le cas des ensembles analytiques de codimension 1 dans C^n quand la croissance est d'ordre fini [47] : la méthode utilise un potentiel canonique à partir d'une mesure positive donnée par le courant d'intégration ; elle donne ce résultat surprenant que ce potentiel est plurisousharmonique. Elle a été considérablement étendue par H.Skoda dans sa thèse (1972). La recherche d'un système de fonctions analytiques ayant comme zéros communs un ensemble analytique donné M dans C^n est faite en construisant un potentiel canonique, puis une fonction plurisousharmonique unique V pour laquelle le courant positif fermé 2id'd"V a exactement M pour support singulier (le support total étant plus grand). La construction permet de contrôler la croissance de V, puis celle de n+1 fonctions entières construites à partir de V et dont les zéros communs définissent M. Je dois signaler que, paradoxalement, cette méthode globale donne actuellement des résultats d'algèbre locale (conjecturés par Mather), mais dont nous n'avons pas encore de démonstration par des méthodes d'algèbre locale.

ACADEMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

3°/ Les travaux d'une école américaine nombreuse (Harvey, Schiffmann, Siu ...) ont montré depuis 1970 que les propriétés de prolongement des ensembles analytiques (Remmert-Stein, Stoll) sont obtenues comme cas très particuliers de propriétés de prolongement des courants positifs fermés.

4°/ La concurrence des méthodes de géométrie différentielle avec les méthodes dérivées de la géométrie algébrique est sans doute féconde. Mais c'est le devoir souvent difficile du mathématicien, s'il veut qu'on applique ses résultats, de rechercher et d'obtenir la simplicité : il fallait trouver au résultat cité qui définit les ensembles analytiques à partir des courants positifs fermés une démonstration simple et en dégager la signification, celle connue (Siu, 1974) ayant plus de cent pages. Cela a été le but du travail résumé dans la Note [70] . Il m'a donné des propriétés inattendues dont je citerai quelques unes malgré leur caractère technique : si t est un courant positif fermé de type (p,p). il existe localement (et globalement dans tout domaine pseudo-convexe) un courant t' positif fermé de type (1,1) qui a même nombre de Lelong $\nu(x)$ que t ; $-\nu(x)$ est localement limite d'une suite croissante de fonctions plurisousharmoniques négatives ; dans un domaine speudo-convexe tout ensemble analytique complexe s'obtient à partir d'une fonction plurisousharmonique V comme ensemble des points où l'on a $\nu(x) \geqslant 1$, ν étant relatif au courant id'd"V. Laissant de côté la précision technique, on peut dire que, paradoxalement, l'ensemble analytique complexe , qui est lié par ailleurs à l'idée de loi analytique et régulière. apparaît ici comme le support d'une partie suffisamment singulière et "condensée" d'un opérateur.

COMPLÉMENT A LA LISTE DES TRAVAUX

ACADÉMIE DES SCIENCES
ARCHIVES
INSTITUT DE FRANCE

1972

62 - Eléments extrémaux parmi les courants positifs fermés. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 332, p. 112-125.

63 - Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et les algèbres de fonctions analytiques. Colloque international du C.N.R.S.,Juin 1972 publié dans Agora Mathematica n° 1,Gauthier-Villars, p. 95-115.

1973

64 - Résultats récents sur les propriétés métriques des ensembles analytiques complexes (exposé à la R.C.P., n° 25 entre physiciens et mathématiciens, Strasbourg, 1973).

65 - Plurisubharmonic functions in topological vector spaces : polar sets and problems of measure, Colloquium on infinite dimensional holomorphy. University of Kentucky, Mai 1973, Lecture-Notes Springer, n° 364, p. 58-68.

66 - Remarques sur un théorème de support pour une classe de courants. Séminaire d'Analyse, Lecture-Notes Springer, n° 410, p. 97-106.

1975

67 - Topologies semi-vectorielles. Applications à l'analyse complexe. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, fasc. 3/4, tome 25, 1975, p. 381-407.

68 - Real and semi-real zeros of entire functions in C^n, à paraître dans les communications du Colloque de l'A.M.S. (Williamstown, Août 1975).

69 - Sur l'application exponentielle dans l'espace des fonctions entières (Comptes-rendus du Congrès de Campinas, Brésil, Août 1975).

1976

70 - Sur la structure des courants positifs fermés (C.R.Ac.Sci. Paris, 28 Juin 1976).

INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES

1° - Missions à l'étranger. Alors que pendant les années 1950, j'avais été quelque peu retenu en France par un pneumothorax, dès 1956, j'ai fait un long séjour à Princeton (U.S.A.) à l'Institute for Advanced Studies, et j'y suis retourné souvent depuis. J'ai fait des exposés fréquents en Allemagne (Münster, Göttingen, Oberwolfach) où mes résultats ont été d'abord connus et utilisés . Par la suite j'ai donné des cours ou des conférences régulièrement à l'étranger : à Princeton , Harward, New-York University (U.S.A.) en 1956 , à Pise en 1957, à Helsinki en 1957 . J'ai fait des communications publiées dans divers congrès (Edinbourg, Naples, Innsbruck) . Le livre [46] est la publication d'un cours fait en 1963 à Varenna (Italie) au C.I.M.E. et réédité aux Etats-Unis. J'ai effectué des missions à Jérusalem , Moscou , Leningrad pour y donner des conférences sur mes travaux . J'ai fait un cours à la Jolla (University of California), puis à Mexico en 1966 . Le cours [51] a été donné à l'Université de Montréal en 1967. J'ai fait des missions, donné des conférences à Erivan (U.R.S.S.), à Athènes, à Salonique. Ces dernières années, j'ai fait des séjours fréquents aux U.S.A. où des équipes de valeur (King, Schiffmann, Harvey...) prolongent certains de mes travaux. Ainsi ai-je été à l'Université du Maryland, à Chicago, à Rochester, à Ithaca (U.S.A.) en 1969, à Urbana, Chicago, Notre-Dame en 1971, au M.I.T. à Princeton, à Yale, à Notre-Dame en 1972... Une de mes mission les plus efficaces a sans doute été au Japon (1970), car elle a instauré des échanges suivis. Mes recherches récentes m'ont conduit en 1973 à donner des cours et des conférences à Dublin (Irlande), à Rio (Brésil) et j'ai dû, à la demande de jeunes mathématiciens , organiser au dernier congrès international (Vancouver, Canada) un séminaire non prévu... Enfin je vais souvent dans les pays de l'Est : U.R.S.S., Pologne (1972, 1974), Roumanie (1972).

L'intérêt suscité par mes travaux a contribué ainsi à notre influence scientifique à l'étranger.

2° - Mon <u>séminaire</u> donne lieu depuis 1958 à la publication d'un volume annuel. Il est édité depuis 1969 par l'éditeur international Springer (Heidelberg et New-York) dans ses Lecture-Notes.

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

3° - <u>Collaborations diverses</u>.

a/ C'est à la suite de problèmes posés par des mécaniciens que j'ai publié des résultats sur les fonctions polyharmoniques [21] , [25] .

b/ A partir de 1960, une hypothèse fondamentale de la théorie quantique des champs (Wightman, Gärding) et ses applications (Bogoliubov, Jost...) ont amené certains physiciens à s'intéresser à mes travaux sur les domaines d'holomorphie. Mon cours fait au C.E.A. en 1960, a été publié par les soins de l'I.N.S.T.N. ; j'y ai bénéficié d'un auditoire exceptionnel (Froissart, Messiah, Stora, Bros et le regretté Bloch).

c/ J'ai été avec J.Leray l'un des initiateurs des rencontres de Strasbourg entre équipes de physiciens du C.E.A., du C.E.R.N., de l'Ecole polytechnique et des mathématiciens ; elles sont devenues la R.C.P. n° 25 du C.N.R.S. avec l'arrivée à Strasbourg de mon élève F.Norguet ; celle-ci publie aujourd'hui son XXII° volume. Elle réunit une soixantaine de physiciens dont des théoriciens comme Lascoux, Glaser, Michel. J'y donne régulièrement des articles. Ces collaborations diverses sont en liaison étroite avec mes propres résultats.

COMPLÉMENT A LA NOTICE (1 9 8 5)

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

J'indique ici des développements récents de mes travaux (cf. la bibliographie). C'est pour moi l'occasion de citer des mathématiciens qui y ont été associés, en France et à l'étranger, en particulier ceux que j'ai pu guider au début de leurs recherches. Leur influence a certainement contribué à maintenir mes recherches, parfois plus que je l'aurais souhaité, dans le domaine de l'analyse complexe devenu aujourd'hui, il est vrai un domaine très vaste.

1. Fonctions plurisousharmoniques et petits ensembles dans les espaces vectoriels.
L'extension aux espaces vectoriels topologiques de l'analyse complexe s'est faite plus largement à partir des années 1970 (la thèse de A.Douady était publiée déjà en 1966) et cela dans deux directions. La première est celle de l'étude locale des ensembles analytiques complexes, avec la thèse de J.-P.Ramis consacrée aux espaces de Banach, puis avec celle, plus tardive (1979) de P.Mazet que j'ai en partie dirigée et qui fait une étude générale et profonde des anneaux analytiques et de ces ensembles dans les espaces localement convexes. La seconde concerne les fonctions plurisousharmoniques et les notions qu'elles apportent de "petits ensembles" ; ensembles pluripolaires, ou négligeables en particulier. Mes publications [53],[54], puis [58] étendent aux espaces vectoriels les propriétés fondamentales. Cette étude nécessaire est poursuivie dans les thèses de Ph.Noverraz, et surtout dans celle de G.Coeuré (1970); un progrès significatif (obtenu d'abord dans les espaces de Banach à base par L.Gruman et C.O.Kiselman) a permis alors de caractériser les domaines d'holomorphie par leur convexité par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. Sur le plan technique l'étude des "petits ensembles" ou des ensembles exceptionnels s'avérait importante; j'en donne des propriétés et des applications dans [54] et [55]. Je veux ici me permettre une remarque : il existe parfois dans de telles études une concurrence avec le langage probabiliste. Ainsi dans [54] , j'établis que si G est un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, alors dans l'algèbre de

Fréchet $H(G)$ l'ensemble A des fonctions f qui sont analytiquement prolongeables au delà de la frontière de G est une réunion dénombrable de cônes fermés négligeables; si l'on munit $H(G)$ d'une norme $\|f\|$, par exemple $\|f\|^2 = \int_G |f(z)|^2 g(z)d\tau(z)$, dans l'espace E de Banach obtenu ainsi, A est un cône pluripolaire et l'on construit une fonction $U(f)$ plurisousharmonique sur $H(G)$ qui détermine A , c'est-à-dire dont A est l'ensemble des $-\infty$. Or de tels ensembles possèdent une propriété de "tout ou rien" : si L est un sous-espace de E , il est contenu dans A , sinon il le coupe selon un ensemble pluripolaire dans L (donc de mesure nulle si L est de dimension finie). Pour s'en tenir à l'exemple de la série de Taylor $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\Theta_n} z^n$, où l'on suppose $c_n \geqslant 0$, c_n fixés, les Θ_n variables aléatoires et $S(z)$ convergente pour $|z| < 1$, on peut dire avec E.Borel que $S(z)$ a "presque sûrement" le cercle $|z| = 1$ comme coupure . Les travaux de Steinhaus, la mesure de Jessen sur le produit infini $[0, 2\pi]^N$ ont précisé ce langage. Mais la propriété donnée dans [54] , découlant de la structure complexe, est plus générale et plus fine que le "presque sur" probabiliste. Dans son étude récente des martingales sur les variétés complexes, L.Schwartz la rencontre, liée aux propriétés des ensembles pluripolaires : le large champ d'application des notions stochastiques leur permet d'interférer avec l'étude de propriétés plus précises qui cependant doivent être étudiées. En fait dans l'exemple cité, les études à partir des mesures gaussiennes (Sean Dineen, Ph.Noverraz) ont donné des résultats limités. Je reviendrai plus loin sur ce rôle des petits ensembles dans les espaces de Fréchet.

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

2. Les courants positifs fermés et la représentation des ensembles analytiques.

a/ - Mon travail [38] de 1957 avait eu pour but de donner une démonstration de l'existence de l'opérateur $\varphi \rightarrow [X](\varphi)$ d'intégration des formes différentielles φ sur un ensemble analytique complexe et de montrer qu'il était positif et fermé. Aujourd'hui c'est l'étude systématique de ces opérateurs - courants qui intéresse car , comme objet mathématique, ils apparaissent être une extension de la classe des ensembles analytiques : à ce point de vue et pour employer le langage de [80] ils sont l'objet plus souple associé à cette classe . Un théorème important que j'avais seulement conjecturé lors d'une de nos réunions physiciens-mathématiciens à Strasbourg a été établi (J.King) : les courants positifs fermés pour lesquels on a $\nu(x) \geqslant c$, $c > 0$ pour le nombre-densité que j'avais défini dans [38] , ont un support qui est un ensemble analytique complexe. Plus généralement il en est ainsi de l'ensemble $E(c,t)$ des points x où l'on a $\nu(x) \geqslant c$, $c > 0$. Ce beau résultat (Y.T.Siu) permet de caractériser les courants positifs fermés dont le support est un ensemble analytique. J'ai simplifié la longue démonstration de Siu en montrant [69] qu'il existe dans les domaines pseudo-convexes une fonction plurisousharmonique V , telle que $t' = i\partial\bar{\partial}V$ et t aient même nombre $\nu(x)$ en tous les points.

b/ - J'ai eu grand plaisir à travailler avec H.Skoda pour sa thèse dont la première partie reprend la construction de potentiels que j'avais faite dans [47], mais procède à partir d'un courant positif fermé de type (p,p) dans C^n . Elle aboutit pour un ensemble analytique X , de dimension et de croissance quelconques, à donner une représentation $X = F^{-1}(0)$ où $F = (F ,\dots,F_{n+1})$ est un système de $n+1$ fonctions entières dont on contrôle la croissance par celle du courant d'intégration $[X]$. Le calcul du défaut de plurisousharmonicité du potentiel m'a aidé à comprendre ma réussite antérieure. Dans le cas de l'ordre fini et la codimension un la résolution directe dans [47] de l'équation $i\partial\bar{\partial}V = t$ donne un résultat plus précis ; c'est le contraire si la croissance de $[X]$ est d'ordre infini. Dans [74] des calculs précis m'ont montré que ce sont les irrégularités de croissance dans le cas de l'ordre de croissance infini qui donnent un avantage à la résolution du $\bar{\partial}$ par des estimées L^2 selon la méthode de Hörmander qu'a suivie H.Skoda, l'emploi d'une telle norme intégrale ayant un effet régularisant.

Notons aussi à propos de tels problèmes que l'étude des idéaux dans les algèbres de fonctions analytiques présente encore des difficultés pour le passage du local au global avec contrôle de croissance. Il en est ainsi des méthodes qui s'appuient sur la cohérence des faisceaux. Les méthodes à partir de l'opérateur courant associé ont actuellement l'avantage de mieux se prêter aux études à croissance, avec l'avantage de nous fournir des représentations utiles dans divers domaines d'application (théorie des nombres, mais surtout l'analyse fonctionnelle et le vaste champ ouvert à l'analyse complexe par l'emploi des méthodes de Fourier-Laplace). Paradoxalement, il est arrivé que cette méthode globale donne des résultats d'algèbre locale (conjecturés par Mather) avant qu'on obtienne la démonstration par les méthodes d'algèbre locale.

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

c/ – Dans [68] j'ai montré que le comportement d'une fonction entière F sur la partie de C^n que j'appelle semi-réelle $SR = R^n \times e^{i\theta}$, (ensemble des points ayant des coordonnées dont les rapports deux à deux sont des valeurs réelles) permet de contrôler la croissance de $|F|$; il en est de même pour ses zéros, ce qui donne une majoration dans R^n de la composante de codimension 1 des zéros réels.

d/ – L'article [62] concerne les génératrices extrémales du cône convexe saillant Γ constitué par les courants positifs fermés de type $(1,1)$ définis dans un domaine de C^n ou sur une variété de Stein G. Si $H^2(G,C) = 0$, l'opérateur $t = i\partial\bar{\partial}V$ crée une bijection continue qui conserve les arêtes extrémales entre Γ et le cône Γ' des fonctions plurisousharmoniques dans G (Γ est métrisable pour la topologie faible des courants, Γ' est muni de L^1_{loc}). Les courants d'intégration sur les cycles analytiques irréductibles de G déterminent des génératrices extrémales de Γ ; leur enveloppe convexe est dense sur Γ. Ce résultat et un exemple que je donne à la fin ont conduit J.-P.Demailly a construire dans sa thèse (1982) des courants extrémaux dans l'espace projectif P^2 qui ne sont pas des cycles analytiques, puis à étudier les liens entre le problème des courants extrémaux sur Γ (via les théorèmes de Krein-Milman et de Choquet) avec la validité de propriétés qui se rattachent à la conjecture de Hodge. La thèse de J.-P.Demailly dirigée par H.Skoda est en grande partie consacrée à l'étude des courants positifs fermés définissant des "nombres de Lelong" $\nu(x)$ généralisés et donnant des théorèmes d'images directe.

Dans [66] j'ai donné un théorème de support pour les courants $t = f + dg$ où f et g sont des formes à coefficient L^1_{loc}, ainsi qu'un théorème de divisibilité. Dans [78], j'étudie un problème nouveau : l'étude de la déformation des ensembles $E(c,t) = [x\ ;\ \nu_t(x) \geq c]$ pour un courant positif fermé t

dans C^n ; on se ramène à l'étude de $E(c, i\partial\bar{\partial}V)$ pour une fonction plurisousharmonique V ; je mets en évidence la famille des cycles extrémaux ; ils sont en général absorbés par un cycle de dimension supérieure quand c décroit , la continuité de l'ensemble $E(c,t)$ n'étant assurée qu'à droite. A un cycle extrémal Z est attachée une valence $N_t(Z) > 0$ qui est presque partout sur Z la valeur de $\nu_t(x)$. Les valeurs critiques de c, pour lesquelles $E(c,t)$ est modifié déterminent un ensemble dénombrable fermé D de segments ouverts à gauche, fermés à droite sur lesquels $E(c,t)$ ne varie pas; des cycles extrémaux apparaissent ou disparaissent seulement quand c traverse une de leurs extrémités. Mon but que je n'ai atteint qu'en partie était d'obtenir un contrôle de croissance dans C^n des ensembles $E(c,t)$ en fonction de données relatives à V ; on l'obtient pour la composante de codimension 1 ; je n'ai pu obtenir qu'une propriété de stabilité locale (c'est-à-dire sur les compacts) pour l'ensemble (théorème 4.4). Toutefois j'établis l'existence d'une hypersurface $Y = F^{-1}(0)$ contenant tout l'ensemble $E(c,t)$, avec contrôle asymptotique pour la croissance de Y quand on se donne celle de t (ou de V) . L'étude se simplifie si l'on fait une hypothèse de stabilité des ensembles $E(c,t)$ au voisinage des valeurs critiques ; l'application aux croissances lentes conduit à définir une classe de courants positifs fermés pour lesquels les ensembles de densité sont algébriques.

e/- Le court mémoire [79] répond à une question posée à la suite des résultats de E.Bedford et B.A.Taylor (1982) définissant $i\partial\bar{\partial}V_1 \wedge \ldots \wedge i\partial\bar{\partial}V_n$ dans C^n pour des fonctions plurisousharmoniques dans des bornés de L^∞_{loc} . Je montre en effet que pour la topologie L^1_{loc} , l'opérateur de Monge-Ampère $(i\partial\bar{\partial}V)^n$ s'annule sur un ensemble partout dense du cône des fonctions plurisousharmoniques, même supposées positives ; l'opérateur est discontinu au voisinage de toute fonction de ce cône .

f/ - Paradoxalement une suite de résultats a montré l'intérêt de la classe des courants positifs fermés pour des problèmes de prolongement analytique, d'ensembles analytiques complexes en particulier. La thèse de El Mir (1983) que j'ai dirigée montre que dans un domaine G , tout courant positif fermé défini dans $G\setminus A$, où A est un sous-ensemble fermé pluripolaire localement complet, s'étend à G par extension simple dès qu'il est de masse bornée au voisinage des points de A : ceci entraîne le prolongement par leur adhérence $\bar{M}$ des sous-ensembles analytiques M définis dans $G \setminus A$ et d'aire bornée ; d'autres résultats plus fins (El Mir, Sibony) permettent de se libérer de cette dernière hypothèse. J'ai été conduit à préciser ce qui peut sembler un paradoxe : à côté des objets classiques de la structure analytique complexe (fonctions et ensembles analytiques complexes) en existent d'autres qui sont ceux que j'ai cités : fonctions plurisousharmoniques, courants positifs fermés, ensembles pluripolaires, etc... Ils méritent peut-être le nom d'objets souples donné dans [83] car il existe chaque fois une application d'un objet classique $\mathscr{C}_c$ dans l'objet souple $\mathscr{C}_s$, application évidente dans les cas que nous venons de considérer. Il s'agit donc d'une méthode de relaxation. On peut alors se demander si les énoncés obtenus sur $\mathscr{C}_s$ ont une précision suffisante lorsqu'on les transporte à $\mathscr{C}_c$. Dans le cas des problèmes de prolongement et pour l'analyse très fine des fonctions d'une variable complexe, des mathématiciens aussi avertis que L.Ahlfors et Beurling ont eu ce souci, donnant la définition de classes d'ensembles plus gros que les parties polaires. Il est des problèmes où un tel effort s'impose. On sait qu'un ensemble analytique X de C^n de dimension p , est coupé par les espaces linéaires L de dimension $q \geqslant n-p$ selon des ensembles analytiques pour lesquels on peut donner un comportement asymptotique, sauf pour les L appartenant à un ensemble pluripolaire. L'intérêt est alors de préciser des situations où cet ensemble "exceptionnel" est analytique ou algébrique. J'en donne un exemple dans [83] en relation avec une croissance de X d'ordre fini dans C^n .

ACADEMIE DES SCIENCES
ARCHIVES
INSTITUT DE FRANCE

3. Ensembles de contrôle.

Dans [76] , [77] j'étends pour les fonctions plurisousharmoniques dans un espace vectoriel topologique la définition du nombre densité $\nu(x)$ qui commande la majoration classique donnée par le lemme de Schwarz .

Dans [70] j'établis un théorème de fonctions inverses pour les fonctions plurisousharmoniques $M(x,r)$ définies dans $G \times C$ pour $x \in G$, $r > 0$, $r = |z|$, où G est un domaine d'un espace vectoriel E et $M(x,r)$ étant fonction plurisousharmonique dans $G \times \mathbb{C}$ de $(x,z,|z|= r)$. Pour $\delta(x,\zeta) = [\sup\ r\ ,\ r>0\ ,\ M(x,r) + \log|\zeta| < 0]$ on obtient $-\log \delta(x,\zeta)$ plurisousharmonique de (x,ζ) dans un domaine Δ de $G \times C_\zeta$, qui comprend un voisinage de $\zeta = 0$, ce qui remplace l'étude d'une famille non bornée de fonctions plurisousharmoniques par celle d'une seule fonction plurisousharmonique régulière . Ce procédé a diverses applications et précise un énoncé que j'avais donné dans [51] et dont H.Skoda et J.-P.Demailly ont fait usage dans leur construction d'espaces fibrés non de Stein mais à base et à fibres de Stein. Le procédé est assez élémentaire pour être utilisé dans les espaces de Fréchet. D'autre part dans un tel espace les ensembles A non pluripolaires sont exactement ceux qui donnent un contrôle semi-continu pour les fonctions plurisousharmoniques négatives dans G . Pour une telle fonction V , l'hypothèse $V(z) < -1$ pour $z \in A$, entraîne $V(z) \leq g_A(z) < 0$ où g_A est la fonction plurisousharmonique extrémale de A dans G . Ces propriétés m'ont conduit à définir [75] une classe d'espaces de Fréchet complexes dans lesquels les bornés sont pluripolaires. Il est alors exclu qu'ils soient de contrôle. La recherche de tous les espaces de Fréchet complexes ayant cette propriété n'est pas terminée malgré un résultat récent (Dineen,Meise, Vogt , 1984) qui montre le lien de ce problème avec des propriétés fines importantes qui font intervenir la suite $p_n(x) = g(x, t_n)$, $t_n > 0$ des semi-normes, par les propriétés d'une telle fonction g , permettent leur représentation, sur laquelle porte mon hypothèse dans [75] .

Dans [71] je donne d'autre part l'exemple d'une application holomorphe d'un espace de Fréchet en lui-même avec une image qui est un ensemble pluripolaire localement complet et fermé, mais qui n'est un ensemble analytique au voisinage d'aucun de ses points.

×

× ×

<u>Activités diverses.</u> Les missions à l'étranger sont de plus en plus faciles et nécessaires; j'ai fait des séminaires et des conférences chez la plupart de nos voisins européens, au Japon, en U.R.S.S., en Pologne. Il n'est guère d'année où je n'ai du aller au moins une fois aux Etats-Unis. Nos relations avec la Suède et son école d'analyse mathématique de très grande valeur sont fréquentes et je suis docteur honoris causa de leur université d'Uppsala.

Le Séminaire d'Analyse que j'ai créé, publie cette année son XXe volume ; j'y suis maintenant aidé par mes collègues P.Dolbeault et H.Skoda ; il continue à réunir des mathématiciens de Paris et d'Orsay avec des étrangers et des chercheurs de province et la variété des sujets traités montre bien le riche développement actuel et les applications nombreuses de l'analyse complexe à plusieurs variables.

Comme on l'a vu en lisant cette Notice, le thème des solutions à croissance, thème très riche d'applications tant pour les mathématiques elles-mêmes qu'au profit d'autres parties de la science, a été souvent présent dans mes publications : j'ai été conduit ainsi à écrire en collaboration avec L.Gruman, chercheur au C.N.R.S. , l'ouvrage [84]:sur les neuf chapitres, il en est trois qui concernent les applications, en particulier à la transformée de Fourier-Borel et à l'analyse fonctionnelle.

En dehors de ma participation à de nombreuses commissions à l'Université et au C.N.R.S., j'ai eu l'occasion, dans des situations qui évoluent avec le temps, de collaborer avec certains organismes de recherche que j'avais pu contribuer à faire créer dans la période précédente, l'INRIA en particulier, dont les travaux vont de pair avec le développement que connait aujourd'hui l'analyse mathématique appliquée à de nombreux problèmes.

1993

ACADÉMIE DES SCIENCES ARCHIVES INSTITUT DE FRANCE

Complément à la Notice des travaux et au curriculum vitae de

Pierre LELONG

Ceux qui ont lu ma Notice ont peut-être remarqué que, tout en poursuivant sans interruption son activité universitaire, tout en poursuivant ses recherches, et ses publications, le mathématicien que je suis a mis à profit des ciconstances diverses pour satisfaire une curiosité et peut-être aussi un besoin de dévoument envers des activités qui le mettaient en contact avec nos institutions. L'époque s'y prêtait tout particulièrement. Dans le domaine de la Recherche, la décennie 1958-1968, a amené nombre de scientifiques français à participer non seulement à la gestion d'organismes dans des postes de direction mais, fait nouveau, à s'intéresser à l'organisation de cette mission, devenue essentielle pour l'Etat. Chez nous la nation n'agit que par l'Etat et celui-ci à son tour canalise, dirige, contrôle l'effort de la nation à travers des institutions. La recherche scientifique et technique posait en ces années-là des problémes de développpement et aussi de coordination. Chaque ministère, ou presque, avait créé ses Centres de recherche et parfois son corps de chercheurs. On avait créé une complexité politico-administrative qu'il fallait clarifier en y introduisant une autorité scientifique au niveau interministériel. Un projet élaboré avec quelques scientifiques dont plusieurs sont aujourd'hui mes confrères à l'Académie me valut d'être conseiller du Président à l'Elysée. J'y demeurai deux ans. Ensuite j'ai occupé divers postes plus compatibles avec mes travaux de recherche .

J'ai constaté à cette occasion q'un travail, souvent, repose d'un autre. J'avais conservé mes cours, ma leçon d'agrégation rue d'Ulm, mon Séminaire axé sur l'Analyse complexe. J'ai toujours aimé les voyages à condition qu'ils changent le paysage. Comment ne pas évoquer mon passage, dans ces années-là, des palabres universitaires au style ordonné et resté quelque peu militaire qui, alors, régissait le travail à l'Elysée ? C'est grâce à lui que j'ai pu cumuler des resposabilités lourdes, étant auprès du Président en charge des affaires de l'Education et de la Santé publique, en même temps que de la Recherche.

Ce n'est pas ici le lieu de parler de ce travail passionnant,sauf à rappeler l'importance attachée par De Gaulle à l'écrit: il annotait à la plume les Notes de ses collaborateurs,.Oral ou écrit le choix du mot propre importait donc. ainsi que la concision. A propos d'une aide offerte par nos amis américains mais qui leur eût donné des vues sinon un contrôle sur nos recherches : "Timeo Danaos et dona ferentes" ai-je failli énoncer .Une telle concision eût paru une .familiarité déplacée au chef de l'Etat. L'affaire était de conséquence pour notre informatique. Je fis une phrase française plus circonstanciée, son regard me fit saisir qu'il m'avait compris .J'avais alors de bons rapports avec le chimiste qui

60

était le conseiller scientifique de l'ambassade américaine. Louant notre effort et la promotion donnée à notre recherche, il me disait: " Pourquoi ne pas envoyer vos chercheurs chez nous où ils seraient accueillis dans des laboratoires déjà bien installés? " Les réflexions que peut suggérer cette honnête phrase me paraissent encore d'actualité. A un certain niveau la Recherche ne peut ignorer les concurrences internationales; elle en est un des éléments.

Chaque affaire a un dossier sur lequel les administrations ont travaillé Le rôle du conseiller est sans doute de bien situer les intérêts et aussi les résistances Dans les trois secteurs indiqués , les opinions sont souvent dépendantes de la culture, de la révérence apportée au passé, ou, inversement, témoignent d'un optimisme messianique . Tel est parfois le cas, à l'égard de la recherche scientifique, pour les membres du gouvernement eux-mêmes. Cette recherche d'un savoir qui ne se trouve pas dans les bibliothèques,mais dans des laboratoires, qui s'obtient par des méthodes aléatoires et coûteuses, s'insérait mal à l'époque dans la pratique administrative .Le contact scolaire à travers les cours de mathémathiques, n'est pas une bonne introduction à la magie des espaces de la science. En général, les hommes politiques ont, au niveau du baccalauréat, choisi des options littéraires.Pour la plupart, la recherche n'est appréhendée qu'à travers certaines applications ou philosophiquement, à travers le prisme d'une structure mentale d' origine différente. Le premier cas n'est pas toujours favorable. La durée et les moyens à consentir avant les résultats peuvent décourager l'échelon politique. La comparaison de deux hommes est ici instructive: Michel Debré a favorisé de son autorité de Premier Ministre l'éxécution des projets scientifiques évoqués plus haut ; un problème était ,par contre d'entrainer l'accord de son successeur, G.Pompidou, auprès duquel j'eus la charge, après deux ans passés auprès du chef de l'Etat, de préparer le budget de la Recherche. "Penses-tu qu'il faut vraiment faire l'Espace?" me disait-il alors qu'il était Premier Ministre. Je puis dire aujourd'hui que le projet spatial fut par mes soins retardé d'un an pour faire passer le projet de la biologie moléculaire Défendre le budget et les projets de la science française m'a donc montré la nécessité d'adapter leur présentation en fonction de l'interlocuteur et, si j'ose employer ce terme, de sa formation intellectuelle. Dois-je dire que cela convenait au mathématicien que je suis? Car, que font deux mathématiciens amis quand ils discutent ? Là où deux chimistes confrontent les résultats de leurs appareils et de leurs expériences, nos mathémathiciens vont confronter leurs raisonnements , donc essentiellement des différences de structure mentale en face d'un même problème, bien que, sans doute, en route tous deux vers le même énonçé.

Pendant ces années 1958-1968, j'ai occupé un assez grand nombre de postes , en annexe, si j'ose dire, des deux précédents,.au C.N.R S ,à l' I.N.R.I.A.qui a été créé à ce moment, mais aussi au Conseil Economique et Social où j'ai pu faire entrer dans une section notre confrère Champetier: Cette institution mériterait d'avoir des séances de travail en commun avec notre Académie des sciences..Elle offre un lieu de rencontre et d'échanges avec les syndicats. J'y ai appris beaucoup sur les problèmes des entreprises et ceux de la recherche industrielle.

Cette activité poursuivie à divers niveaux, me facilitait le contrôle du suivi dans la mise en place et le fonctionnement des institutions. A un certain point de vue, on pouvait dire que je faisais une carrière à l'envers, m'éloignant du Président mais récupérant la liberté nécessaire aux voyages, aux lectures qu'exigeaient à nouveau mes travaux mathémathiques. J'avais quelque expérience de ce genre de situation qu'il faut savoir dominer, malgré l'ètonnement quelquefois ironique des amis. Lors de mes premiers travaux, préparant ma thèse; fatigué par une grave maladie qui me rendait l'abstraction pénible, j'avais fait une scolarité dans la charmante Ecole libre des Sciences Politiques,. Sous la férule d'éminents maitres comme Rueff j'y avais appris beaucoup sans savoir combien cela devait me servir plus tard . Et cette même année j'avais apporté ma collaboration à mon ami Jean Stoetzel pour la création de l'Institut Français d'Opinion Publique . Le lecteur, s'il m'a suivi, remarquera la persistance de ma curiosité à l'égard des modes de pensée, qu'ils déterminent les opinion ou les décisions.

Dois-je ici compléter ce que ma Nntice dit de mon oeuvre mathématique? Il me répugne, malgré mon âge, de me dire qu'elle est sans doute terminée, J'ai le sentiment que des mathématiciens beaucoup plus jeunes lui donnent un développement que je pressentais et que l'améliorattion des techniques rend possible.

C'est donc seulement en me plaçant à une certaine distance des résultats et des techniques que je dirai quelques mots d'une méthode qui m'a permis de donner à l''analyse mathématique des instruments nouveaux. Grâce aux objets, aux notions ainsi introduites, l'Analyse complexe est devenue plus riche et dispose de moyens plus souples pour développer aujourd'hui des constructions où le corps de base est le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$. Celui-ci s'est imposé dans la science car des propriétés simples et essentielles ne sont vérifiées que si l'on complète le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels en le plongeant dans $\mathbf{C}$. Cependant $\mathbf{C}$ n'est pas donné par une perception immédiate, les mesure ne l'introduisent pas, il n'existe pas de relation d'ordre entre deux nombres complexes différents; F.Gauss qui, le premier, a défini la dérivation complexe et la fonction analytique dans le plan complexe, doutera à la fin de sa vie que ces éléments appelés alors imaginaires soient bien des nombres. Aujourd'hui le corps complexe joue un rôle central en mathématiques par rapport à $\mathbf{R}$ et à d'autres corps comme les corps p-adiques.

Mais les fonctions dérivables au sens complexe sont analytiques, elles sont entièrement déterminées ainsi que leur domaine d'existence dès qu'on les connait au voisinage d'un point. Elles sont donc plutôt objet d'étude pour le spécialiste qu'outil pour développer l'analyse complexe. Or la richesse de celle-ci m'apparaissait peu à peu dans les espaces à n dimensions. Un monde s'est ouvert à moi: d'abord par l'introduction des fonctions que j'ai appelées plurisousharmoniques, puis par celle des opérateurs courants

62

positifs fermés. Les premières étendaient les propriétés des fonctions analytiques, les seconds généralisaient les ensembles analytiques complexes dont j'avais pu définir l'opérateur d'intégration. Ils sont à l'origine de ce nombre de Lelong qui intrigue parfois les non mathématiciens. Ces notions nouvelles ont été suivies de plusieurs autres, qui parfois en découlent. Elles forment les objets souples de l'Analyse complexe. Elles ont contribué à modifier le paysage de cette partie de la science. Depuis, on ne l'appelle plus du même nom On ne parle plus, au niveau de la recherche, d'une Théorie des fonctions analytiques. On parle de l'Analyse complexe simplement Le domaine scientifique, enrichi d'objets nouveaux se prête à l'utilisation beaucoup plus large des formes différentielles et des opérateurs liés à la topologie. Il a acquis sa véritable identité que pressentait, je crois, un mathématicien comme H. Poincaré. Une telle transformation, à travers des résultats qui s'additionnent et dont certains, quand on les isole, apparaissent très techniques, m'a toujours paru tracer un passionnant chemin à travers la science .

Pierre LELONG