PANORAMAS ET SYNTHÈSES 3

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE HODGE

José Bertin, Jean-Pierre Demailly
Luc Illusie, Chris Peters

Société Mathématique de France 1996

AMS Subject classification : 14C30, 14D07, 14F17, 13A35, 58A14

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE HODGE

José Bertin, Jean-Pierre Demailly

Luc Illusie, Chris Peters

Le présent ouvrage développe un certain nombre d'éléments fondamentaux de la théorie de Hodge. Il est destiné principalement aux étudiants et chercheurs non spécialistes du sujet, qui souhaitent se familiariser en profondeur avec celui-ci et se faire une idée de l'état actuel de la recherche. Le texte comporte trois parties consacrées à des aspects variés et complémentaires de la théorie : aspects analytiques (méthodes L^2), algébriques (utilisation de la caractéristique p), et enfin applications à la géométrie algébrique au travers de l'étude des variations de structure de Hodge et des conjectures de symétrie miroir pour les variétés de Calabi-Yau.

This monograph develops a number of fundamental concepts and results of Hodge Theory. It is mainly aimed to students and researchers, non-experts in the field, who wish to get acquainted in depth with the subject and obtain precise up-to-date information on the current status of the theory. The manuscript is divided in three parts, each of them devoted to various and complementary aspects of the theory : analytic aspects (L^2 methods), algebraic aspects (use of characteristic p methods), applications to algebraic geometry through a study of variations of Hodge structures and mirror symmetry conjectures for Calabi-Yau manifolds.

Table des matières

Avant-propos 1

Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation
par Jean-Pierre Demailly 3

0. Introduction 3

Partie I : Théorie de Hodge L^2

1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure 8
2. Opérateurs différentiels sur les fibrés vectoriels 12
3. Résultats fondamentaux sur les opérateurs elliptiques 14
4. Théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes 20
5. Variétés hermitiennes et kählériennes 25
6. Identités de la géométrie kählérienne 29
7. Groupes $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ et dualité de Serre 38
8. Cohomologie des variétés kählériennes compactes 40
9. Suite spectrale de Hodge-Frölicher 46
10. Déformations et théorèmes de semi-continuité 52

Partie II : Estimations L^2 et théorèmes d'annulation

11. Concepts de pseudoconvexité et de positivité 60
12. Théorie de Hodge des variétés kählériennes complètes 68
13. Méthode de Bochner et théorèmes d'annulation 80
14. Estimations L^2 et théorèmes d'existence 83
15. Théorèmes d'annulation de Nadel et de Kawamata-Viehweg 86
16. Sur la conjecture de Fujita 94
17. Une version effective du grand théorème de Matsusaka 102

Références 108

Frobenius et dégénérescence de Hodge
par Luc Illusie 113

0. Introduction 113
1. Schémas : différentielles, complexe de de Rham 116

2. Lissité et relèvements 120
3. Frobenius et isomorphisme de Cartier 128
4. Catégories dérivées et suites spectrales 134
5. Théorèmes de décomposition, de dégénérescence et d'annulation en caractéristique p 140
6. De la caractéristique p à la caractéristique nulle 147
7. Développements récents et problèmes ouverts 155
8. Appendice : parallélisabilité et ordinarité 163

Références 166

Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

par José Bertin et Chris Peters 171

0. Introduction 171

Partie I. Variations de structures de Hodge 177

1. Fibrés de Hodge 177
2. Connexion de Gauss-Manin 180
3. Variations de structures de Hodge 190
4. Dégénérescences 199
5. Fibrés de Higgs 209
6. Modules de Hodge 210

Partie II. Symétrie miroir et variétés de Calabi-Yau 215

7. Introduction à la symétrie miroir 215
8. Cohomologie d'une hypersurface 222
9. Equations de Picard-Fuchs 229
10. Variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir 235
11. Lien avec la théorie de Hodge mixte 249

Bibliographie 256

Index 261

Abstract 273

Contents 275

Avant-propos

Les trois textes regroupés dans cet ouvrage sont consacrés à une présentation d'aspects variés – et importants à divers titres – de la théorie de Hodge. Ils reprennent avec des compléments substantiels les exposés oraux présentés lors de la session "l'Etat de la Recherche" sur la Théorie de Hodge, qui a eu lieu à l'Université Joseph Fourier de Grenoble du Vendredi 25 au Dimanche 27 novembre 1994, sous l'égide de la Société Mathématique de France. Le but des auteurs serait atteint si, conformément à l'esprit des sessions l'Etat de la Recherche, cet ouvrage permettait au lecteur non nécessairement spécialiste de se faire une idée précise de l'état de l'art.

Les trois thèmes abordés (Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, Frobenius et dégénérescence de Hodge, Variations de structures de Hodge et symétrie miroir) recouvrent une grande diversité de techniques : équations aux dérivées partielles elliptiques, géométrie différentielle complexe, géométrie algébrique en caractéristique p, méthodes cohomologiques et faisceautiques, théorie des déformations des variétés complexes, variétés de Calabi-Yau, théorie des singularités ... Cette accumulation d'outils venant de divers horizons rend sans doute assez difficile l'accès de la théorie au néophyte. Nous espérons que les textes ci-après permettront de faciliter quelque peu cet accès : un effort particulier a été fait pour aborder les divers thèmes par leur point de départ le plus naturel, chacun des textes étant complété par une introduction détaillée et de nombreuses références. Le lecteur y trouvera posés un bon nombre de problèmes ouverts ayant fait l'objet d'actives recherches dans les dernières années.

Les auteurs sont vivement reconnaissants envers la SMF et le MESR pour leur impulsion décisive – à la fois psychologique et financière – sans laquelle la session "Théorie de Hodge" de Grenoble n'aurait pu voir le jour. Ils remercient tout particulièrement le Comité des Sessions l'Etat de la Recherche en les personnes de ses deux responsables successifs Pierre Schapira et Colette Mœglin, ainsi que Michèle Audin, Rédactrice en Chef de la revue Panoramas et Synthèses, pour ses vifs encouragements à y publier le présent manuscrit. Enfin leurs remerciements vont au referee pour sa lecture approfondie du texte et ses très nombreuses suggestions d'amélioration.

le 27 novembre 1995,

José Bertin⋆, Jean-Pierre Demailly⋆, Luc Illusie⋆⋆, Chris Peters⋆

⋆ Université de Grenoble I, Institut Fourier,
BP74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

⋆⋆ Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Théorie de Hodge L^2 et Théorèmes d'annulation

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ces notes est de décrire deux applications fondamentales des techniques hilbertiennes L^2 à la géométrie analytique ou algébrique : la théorie de Hodge d'une part, la théorie des estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'autre part. Le point de vue adopté ici sera essentiellement analytique.

La première partie est consacrée à la théorie de Hodge et se veut avant tout introductive. Le lecteur ne trouvera donc ici que les aspects les plus élémentaires, dus pour la plupart à W.V.D. Hodge lui-même [Hod41] ou à A. Weil [Wei57]. La théorie de Hodge, dans le sens premier conçu par son créateur, consiste en l'étude de la cohomologie des variétés riemanniennes ou kählériennes, à partir d'une description des formes harmoniques et de leurs propriétés. Nous renvoyons aux textes de J. Bertin-Ch. Peters [BePe95] et L. Illusie [Ill95] pour une présentation d'aspects et d'applications plus avancés (variations de structures de Hodge, application des périodes, théorie de Hodge en caractéristique > 0 ...). Considérons une variété riemannienne X et un fibré euclidien ou hermitien E sur X. On suppose que E est muni d'une connexion D compatible avec la métrique : une connexion est par définition un opérateur de dérivation analogue à la différentiation extérieure, agissant sur les formes de degré quelconque à valeurs dans E, et satisfaisant la règle de Leibniz pour le produit extérieur. L'*opérateur de Laplace-Beltrami* associé est l'opérateur différentiel autoadjoint du second ordre $\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E$, où $D_E^\star$ est l'adjoint hilbertien de D_E. On vérifie aisément que Δ_E est un *opérateur elliptique*. Le théorème de finitude pour les opérateurs elliptiques montre alors que l'espace $\mathcal{H}^q(X, E)$ des q-formes harmoniques à valeurs dans E est de dimension finie si X est compacte (on dit qu'une forme u est harmonique si $\Delta_E u = 0$). Si on suppose de plus que la connexion est telle que $D_E^2 = 0$, l'opérateur D_E agissant sur les formes de tous degrés définit un complexe appelé *complexe de De Rham* à valeurs dans le système local de coefficients défini par E. Les groupes de cohomologie correspondants seront notés $H^q_{\mathrm{DR}}(X, E)$. L'observation fondamentale de la théorie de Hodge est que toute classe de cohomologie contient un unique représentant harmonique dès lors que X est compacte. Il en résulte alors un isomorphisme, dit *isomorphisme de Hodge*

$$H^q_{\mathrm{DR}}(X,E) \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{DR}}(X,E). \tag{0.1}$$

Lorsque la variété X et le fibré E sont holomorphes, il existe une connexion unique D_E appelée *connexion de Chern*, compatible avec la métrique hermitienne de E et ayant les propriétés suivantes : D_E se scinde en la somme $D_E = D'_E + D''_E$ d'une connexion D'_E de type $(1,0)$ et d'une connexion D''_E de type $(0,1)$, telles que $D'^2_E = D''^2_E = 0$ et $D'_E D''_E + D''_E D'_E = \Theta(E)$ (tenseur de courbure de Chern du fibré). L'opérateur D''_E agissant sur les formes de bidegré (p,q) définit alors pour p fixé un complexe appelé *complexe de Dolbeault*. Lorsque X est compacte, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ satisfont un isomorphisme de Hodge analogue à (0.1), à savoir

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E), \tag{0.2}$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ désigne l'espace des (p,q)-formes harmoniques à valeurs dans E, relativement au Laplacien anti-holomorphe $\Delta''_E = D''_E D''^\star_E + D''^\star_E D''_E$. En utilisant ce dernier résultat, on démontre facilement le *théorème de dualité de Serre*

$$H^{p,q}(X,E)^\star \simeq H^{n-p,n-q}(X,E^\star), \qquad n = \dim_{\mathbb{C}} X, \tag{0.3}$$

qui est le pendant complexe du théorème de dualité de Poincaré. Le théorème central de la théorie de Hodge concerne les variétés kählériennes compactes : une variété hermitienne (X,ω) est dite *kählérienne* si la $(1,1)$-forme hermitienne $\omega = \mathrm{i}\sum_{j,k}\omega_{jk}dz_j\wedge d\overline{z}_k$ est telle que $d\omega = 0$. Un exemple fondamental de variété kählérienne compacte est donné par les variétés algébriques projectives. Si X est kählérienne compacte et si E est un système local de coefficients sur X, le *théorème de décomposition de Hodge* affirme que

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,E) \qquad \text{(décomposition de Hodge)} \tag{0.4}$$

$$\overline{H^{p,q}(X,E)} \simeq H^{q,p}(X,E^\star), \qquad \text{(symétrie de Hodge).} \tag{0.5}$$

Le caractère intrinsèque de la décomposition sera démontré ici de manière quelque peu originale, via l'utilisation des groupes de cohomologie de Bott-Chern (groupes de $\partial\overline{\partial}$-cohomologie). Il découle de ces résultats que les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ vérifient la propriété de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p,n-q} = h^{n-q,n-p}$, et qu'ils sont liés aux nombres de Betti $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ par la relation $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$. Un certain nombre d'autres propriétés cohomologiques remarquables des variétés kählériennes compactes s'obtient au moyen de la décomposition primitive et du théorème de Lefschetz difficile (lequel résulte à son tour de l'existence d'une action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur les formes harmoniques).

Ces résultats permettent de décrire de façon précise la structure du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^\star)$ dans le cas kählérien. Dans un contexte plus général, nous explicitons la suite spectrale de Hodge-Frölicher (suite spectrale reliant la cohomologie de Dolbeault à la cohomologie de De Rham), et nous montrons comment on peut utiliser cette suite spectrale pour obtenir quelques résultats généraux sur les nombres de Hodge $h^{p,q}$ des variétés complexes compactes. Finalement, nous établissons la semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie $H^q(X_t, E_t)$ sur les fibres d'une fibration holomorphe propre et lisse $\mathcal{X} \to S$ (résultat dû à Kodaira-Spencer), et nous en déduisons que les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants si les fibres X_t sont kählériennes (invariance des $h^{p,q}$ par déformations) ; le caractère holomorphe de la filtration de Hodge $F^p H^k(X_t, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geqslant p} H^{r,k-r}(X_t, \mathbb{C})$ relativement à la connexion de Gauss-Manin est démontré au moyen du théorème de cohérence des images directes, appliqué au complexe de De Rham relatif $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ de $\mathcal{X} \to S$.

Dans la seconde partie, après quelques rappels sur les notions de positivité et pseudoconvexité mises en jeu, nous établissons l'*identité de Bochner-Kodaira-Nakano* reliant les Laplaciens Δ'_E et Δ''_E. L'identité en question fournit une expression explicite de la différence $\Delta''_E - \Delta'_E$ en termes de la courbure $\Theta(E)$ du fibré. Sous des hypothèses adéquates (faible pseudoconvexité de X, positivité de la courbure de E), on aboutit à une estimation a priori

$$\|D''_E u\|^2 + \|D''^\star_E u\|^2 \geqslant \int_X \lambda(z)|u|^2 dV(z)$$

où λ est une fonction positive dépendant des valeurs propres de courbure. L'inégalité est ici valide pour toute forme u de bidegré (n,q), $n = \dim X$, $q \geqslant 1$, à valeurs dans E, appartenant aux domaines hilbertiens u de D''_E et $D''^\star_E$. Par un argument de dualité hilbertien, on déduit de là le théorème fondamental suivant, dû essentiellement à Hörmander [Hör65] et Andreotti-Vesentini [AV65].

0.6. Théorème. *Soit (X, ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$*. Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de la forme de courbure $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ *par rapport à la métrique ω en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positive, i.e. $\gamma_1 \geqslant 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q} T^\star_X \otimes E)$ telle que*

$$D''_E g = 0 \quad \text{et} \qquad \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1} |g|^2 \, dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1} T^\star_X \otimes E)$ telle que

$$D''_E f = g \quad \text{et} \qquad \int_X |f|^2 \, dV_\omega \leqslant \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1} |g|^2 \, dV_\omega.$$

Une observation importante est que le théorème ci-dessus reste encore valable lorsque la métrique h de E présente des singularités. La métrique h est alors donnée dans chaque carte par un poids $e^{-2\varphi}$ associé à une fonction φ plurisousharmonique (par définition φ est psh si la matrice des dérivées secondes $(\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$, calculée au sens des distributions, est semi-positive en tout point). Compte tenu du Théorème (0.6), il est naturel d'introduire le *faisceau d'idéaux multiplicateur* $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$, constitué des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telles que $\int_V |f|^2 e^{-2\varphi}$ converge dans un voisinage V de x assez petit. Un résultat récent de A. Nadel [Nad89] garantit que $\mathcal{I}(\varphi)$ est toujours un faisceau analytique cohérent, quelles que soient les singularités de φ. Dans ce contexte, on déduit de (0.6) la version qualitative suivante, concernant la cohomologie à valeurs dans le faisceau cohérent $\mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)$ ($K_X = \Lambda^n T^\star_X$ étant le *fibré canonique* de X).

0.7. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b]). *Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit E un fibré en droites holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h singulière de poids φ. Supposons qu'il existe une fonction continue positive ε sur X telle que la courbure satisfasse l'inégalité $\mathrm{i}\,\Theta_h(E) \geqslant \varepsilon\omega$ au sens des courants. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geqslant 1.$$

En dépit de la relative simplicité des techniques mises en jeu, il s'agit là d'un théorème extrêmement puissant, qui contient à lui seul une bonne partie des résultats les plus fondamentaux de la géométrie analytique ou algébrique. Le théorème (0.7) contient ainsi la solution du problème de Levi (équivalence de la convexité holomorphe et de la pseudoconvexité), les théorèmes d'annulation de Kodaira-Serre, Kodaira-Akizuki-Nakano et de Kawamata-Viehweg pour les variétés algébriques projectives, de même que le théorème de plongement de Kodaira caractérisant ces variétés parmi les variétés complexes compactes. Par son caractère intrinsèque, l'énoncé "analytique" du théorème de Nadel se révèle utile même pour des applications purement algébriques (la version algébrique du théorème, connue sous le nom de théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, utilise la résolution des singularités et ne donne pas une description aussi nette du faisceau multiplicateur $\mathcal{I}(h)$). Dans un travail récent [Siu96], Y.T. Siu a montré le résultat remarquable suivant, en utilisant seulement la formule de Riemann-Roch et un argument de récurrence Noethérienne pour les faisceaux multiplicateurs. La technique est décrite au § 16 (avec quelques améliorations mises au point dans [Dem96]).

0.8. Théorème ([Siu96], [Dem96]). *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample (i.e. à courbure positive) sur X. Alors le fibré $K_X^{\otimes 2} \otimes L^{\otimes m}$ est très ample pour $m \geqslant m_0(n) = 2 + \binom{3n+1}{n}$, où $n = \dim X$.*

L'importance d'avoir une borne effective pour l'entier $m_0(n)$ est qu'on peut ainsi obtenir des plongements de la variété X dans l'espace projectif, avec un contrôle précis du degré du plongement. Il résulte de là une démonstration assez simple d'un théorème de finitude important, à savoir le *"grand théorème de Matsusaka"* (cf. [Mat72], [KoM83], [Siu93], [Dem96]) :

0.9. Grand théorème de Matsusaka. *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample sur X. Il existe une borne $m_1 = m_1(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ explicite ne dépendant que de la dimension $n = \dim X$ et des deux premiers coefficients du polynôme de Hilbert de L, telle que mL soit très ample pour $m \geqslant m_1$.*

De ce théorème, on déduit facilement de nombreux résultats de finitude, en particulier le fait qu'il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L), lorsque L est un fibré ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont donnés.

Partie I : Théorie de Hodge L^2

1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions de base de géométrie différentielle hermitienne liées aux concepts de connexion, courbure et première classe de Chern d'un fibré en droites.

1.A. Cohomologie de Dolbeault et cohomologie des faisceaux

Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n. Nous désignons par $\Lambda^{p,q}T^\star_X$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p,q) sur X, i.e., les formes différentielles qui peuvent s'écrire

$$u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J, \qquad dz_I := dz_{i_1} \wedge\cdots\wedge dz_{i_p}, \quad d\overline{z}_J := d\overline{z}_{j_1} \wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q},$$

où $(z_1, \ldots, z_n)$ désignent des coordonnées locales holomorphes, et où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$ sont des multi-indices (suites croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, \ldots, n]$, de longueurs $|I| = p$, $|J| = q$). Soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes différentielles de bidegré (p,q) à valeurs complexes et à coefficients C^∞. Rappelons que la différentielle extérieure d se décompose en $d = d' + d''$ où

$$d'u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q,1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$d''u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q,1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont de type $(p+1,q)$, $(p,q+1)$ respectivement. Le lemme bien-connu de Dolbeault-Grothendieck affirme que toute forme d''-fermée de type (p,q) avec $q > 0$ est localement d''-exacte (c'est l'analogue pour d'' du lemme usuel de Poincaré pour d, voir par exemple [Hör66]). En d'autres termes, le complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ est exact en degré $q > 0$; en degré $q = 0$, $\operatorname{Ker} d''$ est le faisceau Ω^p_X des germes de formes holomorphes de degré p sur X.

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, il existe un opérateur d'' naturel agissant sur l'espace $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$ des (p,q)-formes C^∞ à valeurs dans E. En effet, si $s = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant r} s_\lambda e_\lambda$ est une (p,q)-forme exprimée en termes d'un repère holomorphe local de E, on peut définir $d''s := \sum d''s_\lambda \otimes e_\lambda$, en observant que les matrices de transition mises en jeu dans des changements de repères holomorphes sont holomorphes, ce qui n'affecte pas le calcul de d''. Il est alors clair que le lemme de Dolbeault-Grothendieck est encore valable pour des formes à valeurs dans E. Pour tout entier $p = 0, 1, \ldots, n$, les *groupes de cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}(X,E)$ sont définis comme étant les groupes de cohomologie du complexe des formes globales de type (p,q) (gradué par q) :

$$H^{p,q}(X,E) = H^q\big(C^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}T^\star_X \otimes E)\big). \tag{1.1}$$

Maintenant, rappelons le résultat fondamental suivant de théorie des faisceaux (théorème d'isomorphisme de De Rham-Weil) : soit $(\mathcal{L}^\bullet, d)$ une résolution d'un faisceau $\mathcal{F}$ par des faisceaux acycliques, i.e. un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, \delta)$ donnant une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}^q \xrightarrow{\delta^q} \mathcal{L}^{q+1} \longrightarrow \cdots ,$$

avec $H^s(X, \mathcal{L}^q) = 0$ pour tout $q \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$ (pour avoir cette dernière condition d'acyclicité, il suffit par exemple que les $\mathcal{L}^q$ soient flasques ou mous, par exemple des faisceaux de modules sur le faisceau d'anneau $\mathcal{C}^\infty$). Alors il y a un isomorphisme fonctoriel

$$H^q\big(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)\big) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}). \tag{1.2}$$

Nous appliquons ceci dans la situation suivante : soit $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ le faisceau de germes de sections C^∞ de $\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E$. Alors $(\mathcal{A}^{p,\bullet}(E), d'')$ est une résolution du $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)$ (lemme de Dolbeault-Grothendieck), et les faisceaux $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sont acycliques comme $\mathcal{C}^\infty$-modules. Grâce à (1.2) nous obtenons

1.3. Théorème d'isomorphisme de Dolbeault (1953)**.** *Pour tout fibré vectoriel holomorphe E sur X, il existe un isomorphisme canonique*

$$H^{p,q}(X, E) \simeq H^q(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)). \qquad \square$$

Si X est algébrique projective et si E est un fibré vectoriel algébrique, le théorème GAGA de Serre [Ser56] montre que les groupes de cohomologie algébrique $H^q(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E))$ calculés avec les sections algébriques des faisceaux concernés sur des ouverts de Zariski sont isomorphes aux groupes de cohomologie analytiques correspondants. Comme nous utiliserons ici un point de vue exclusivement analytique, nous n'aurons en fait pas besoin de ce théorème de comparaison.

1.B. Connexions sur les variétés différentiables

Soit E un fibré vectoriel réel ou complexe de rang r sur une variété différentiable M de classe C^∞. Une *connexion* D sur E est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1

$$D : C^\infty(M, \Lambda^q T^\star_M \otimes E) \to C^\infty(M, \Lambda^{q+1} T^\star_M \otimes E)$$

tel que D satisfasse la règle de Leibnitz

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^{\deg f} f \wedge Du \tag{1.4}$$

pour toutes formes $f \in C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M)$, $u \in C^\infty(X, \Lambda^q T^\star_M \otimes E)$. Sur un ouvert $\Omega \subset M$ où E admet une trivialisation $\tau : E_{|\Omega} \xrightarrow{\simeq} \Omega \times \mathbb{C}^r$, une connexion D peut s'écrire

$$Du \simeq_\tau du + \Gamma \wedge u$$

où $\Gamma \in C^\infty(\Omega, \Lambda^1 T^\star_M \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r))$ est une matrice arbitraire de 1-formes et où d agit composantes par composantes sur $u \simeq_\tau (u_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$. Il est alors facile de vérifier que

$$D^2 u \simeq_\tau (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) \wedge u \quad \text{sur } \Omega.$$

Puisque D^2 est un opérateur globalement défini, il existe une 2-forme globale

$$\Theta(D) \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^\star_M \otimes \mathrm{Hom}(E, E)) \tag{1.5}$$

telle que $D^2 u = \Theta(D) \wedge u$ pour toute forme u à valeurs dans E. Cette 2-forme $\Theta(D)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E, E)$ est appelée tenseur de courbure de la connexion D.

Supposons maintenant que E soit muni d'une métrique euclidienne (resp. hermitienne) de classe C^∞ et que l'isomorphisme $E_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{C}^r$ soit donné par un repère (e_λ) de classe C^∞. Nous avons alors un accouplement bilinéaire (resp. sesquilinéaire) canonique

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E) \times C^\infty(M, \Lambda^q T^\star_M \otimes E) &\longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p+q} T^\star_M \otimes \mathbb{C}) \\ (u, v) &\longmapsto \{u, v\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

donné par

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\mu} u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu \ \langle e_\lambda, e_\mu \rangle, \qquad u = \sum u_\lambda \otimes e_\lambda, \quad v = \sum v_\mu \otimes e_\mu.$$

La connexion D est dite *hermitienne* si elle satisfait la propriété supplémentaire

$$d\{u, v\} = \{Du, v\} + (-1)^{\deg u}\{u, Dv\}.$$

En supposant que (e_λ) est orthonormé, on vérifie aisément que D est hermitienne si et seulement si $\Gamma^\star = -\Gamma$. Dans ce cas $\Theta(D)^\star = -\Theta(D)$, donc

$$\mathrm{i}\,\Theta(D) \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^\star_M \otimes \mathrm{Herm}(E, E)).$$

1.7. Cas particulier. Pour un fibré en droites complexe L (fibré vectoriel complexe de rang 1), la forme de connexion Γ d'une connexion hermitienne D peut être vue comme une 1-forme à coefficients purement imaginaires $\Gamma = \mathrm{i}A$ (A réelle). Nous avons alors $\Theta(D) = d\Gamma = \mathrm{i}\,dA$. En particulier $\mathrm{i}\,\Theta(L)$ est une 2-forme fermée. La *première classe de Chern* de L est définie comme étant la classe de cohomologie

$$c_1(L)_\mathbb{R} = \Big\{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(D)\Big\} \in H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbb{R}).$$

Cette classe de cohomologie est bien indépendante de la connexion, puisque toute autre connexion D_1 diffère par une 1-forme globale, $D_1 u = Du + B \wedge u$, de sorte que $\Theta(D_1) = \Theta(D) + dB$. Il est bien-connu que $c_1(L)_\mathbb{R}$ est l'image dans $H^2(M, \mathbb{R})$ d'une classe entière $c_1(L) \in H^2(M,\mathbb{Z})$. Soit en effet $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty$ le faisceau des fonctions C^∞ sur M ; grâce à la suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\bullet}} \mathcal{A}^\star \longrightarrow 0,$$

$c_1(L)$ peut être définie en cohomologie de Čech comme l'image du cocycle $\{g_{jk}\} \in H^1(M,\mathcal{A}^\star)$ définissant L par l'application cobord $H^1(M,\mathcal{A}^\star) \to H^2(M,\mathbb{Z})$; voir par exemple [GH78] pour plus de détails. □

1.C. Connexions sur les variétés complexes

Nous étudions maintenant les propriétés spécifiques des connexions liées à l'existence d'une structure complexe sur la variété de base. Si $M = X$ est une variété complexe, toute connexion D sur un fibré vectoriel complexe E de classe C^∞ peut être scindée de manière unique comme somme d'une $(1,0)$-connexion et d'une $(0,1)$-connexion, $D = D' + D''$. Dans une trivialisation locale τ donnée par un repère C^∞, on peut écrire

$$D'u \simeq_\tau d'u + \Gamma' \wedge u, \tag{1.8$'$}$$
$$D''u \simeq_\tau d''u + \Gamma'' \wedge u, \tag{1.8$''$}$$

avec $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. La connexion est hermitienne si et seulement si $\Gamma' = -(\Gamma'')^\star$ relativement à tout repère orthonormé. Par conséquent, il existe une unique connexion hermitienne D associée à une $(0,1)$-connexion prescrite D''.

Supposons maintenant que le fibré E lui-même possède une structure *holomorphe*. L'unique connexion hermitienne dont la composante D'' est l'opérateur d'' défini au §1.A est appelée la *connexion de Chern* de E. Dans un repère holomorphe local (e_λ) de $E_{|\Omega}$, la métrique est donnée par la matrice hermitienne $H = (h_{\lambda\mu})$ où $h_{\lambda\mu} = \langle e_\lambda, e_\mu\rangle$. Nous avons

$$\{u,v\} = \sum_{\lambda,\mu} h_{\lambda\mu} u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu = u^\dagger \wedge H\overline{v},$$

où $u^\dagger$ est la matrice transposée de u, et un calcul facile donne

$$\begin{aligned} d\{u,v\} &= (du)^\dagger \wedge H\overline{v} + (-1)^{\deg u} u^\dagger \wedge (dH \wedge \overline{v} + H\overline{dv}) \\ &= \big(du + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u\big)^\dagger \wedge H\overline{v} + (-1)^{\deg u} u^\dagger \wedge \big(\overline{dv + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge v}\big), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $dH = d'H + \overline{d'\overline{H}}$ et $\overline{H}^\dagger = H$. Par conséquent la connexion de Chern D coïncide avec la connexion hermitienne définie par

$$\begin{cases} Du \simeq_\tau du + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u, \\ D' \simeq_\tau d' + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge \bullet = \overline{H}^{-1} d'(\overline{H}\bullet), \qquad D'' = d''. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ces relations montrent que $D'^2 = D''^2 = 0$. Par conséquent $D^2 = D'D'' + D''D'$, et le tenseur de courbure $\Theta(D)$ est de type $(1,1)$. Puisque $d'd'' + d''d' = 0$, nous obtenons

$$(D'D'' + D''D')u \simeq_\tau \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge d''u + d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u) = d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H}) \wedge u.$$

1.10. Proposition. *Le tenseur de courbure de Chern $\Theta(E) := \Theta(D)$ est tel que*

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) \in C^\infty(X, \Lambda^{1,1}T^\star_X \otimes \mathrm{Herm}(E,E)).$$

Si $\tau : E_{\restriction\Omega} \to \Omega \times \mathbb{C}^r$ est une trivialisation holomorphe et si H est la matrice hermitienne représentant la métrique le long des fibres de $E_{\restriction\Omega}$, alors

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) \simeq_\tau \mathrm{i}\,d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H}) \quad \textit{sur } \Omega. \qquad \square$$

Si $(z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées holomorphes sur X et si $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ est un repère orthonormé de E, on peut écrire

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\,1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes e^\star_\lambda \otimes e_\mu, \tag{1.11}$$

où $(c_{jk\lambda\mu}(x))$ sont les coefficients du tenseur de courbure de E en tout point $x \in X$.

2. Opérateurs différentiels sur les fibrés vectoriels

Nous décrivons d'abord quelques concepts de base concernant les opérateurs différentiels (symbole, composition, ellipticité, adjonction), dans le contexte général des fibrés vectoriels. Soit M une variété différentiable de classe C^∞, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$, et soient E, F des $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur M, sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tels que $\mathrm{rang}\, E = r$, $\mathrm{rang}\, F = r'$.

2.1. Définition. *Un opérateur différentiel (linéaire) de degré δ de E vers F est un opérateur $\mathbb{K}$-linéaire $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$, $u \mapsto Pu$ de la forme*

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x) D^\alpha u(x),$$

$E_{\restriction\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^r$, $F_{\restriction\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^{r'}$ étant trivialisés localement sur un ouvert de carte $\Omega \subset M$ muni de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$, et les coefficients $a_\alpha(x)$ étant des matrices $\big(a_{\alpha\lambda\mu}(x)\big)_{1\leqslant\lambda\leqslant r',\,1\leqslant\mu\leqslant r}$ de format $r' \times r$ à coefficients C^∞ sur Ω. On écrit ici $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_m)^{\alpha_m}$ comme d'habitude, et les matrices $u = (u_\mu)_{1\leqslant\mu\leqslant r}$, $D^\alpha u = (D^\alpha u_\mu)_{1\leqslant\mu\leqslant r}$ sont vues comme des vecteurs colonnes.

Si $t \in \mathbb{K}$ est un paramètre et $f \in C^\infty(M,\mathbb{K})$, $u \in C^\infty(M,E)$, un calcul simple montre que $\mathrm{e}^{-tf(x)}P(\mathrm{e}^{tf(x)}u(x))$ est un polynôme de degré δ en t, de la forme

$$\mathrm{e}^{-tf(x)}P(\mathrm{e}^{tf(x)}u(x)) = t^\delta \sigma_P(x, df(x)) \cdot u(x) + \text{termes } c_j(x)t^j \text{ de degré } j < \delta,$$

où σ_P est une application homogène polynômiale $T^\star_M \to \mathrm{Hom}(E, F)$ définie par

$$(2.2)\qquad T^\star_{M,x} \ni \xi \mapsto \sigma_P(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x), \qquad \sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=\delta} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Alors $\sigma_P(x,\xi)$ est une fonction C^∞ des variables $(x,\xi) \in T^\star_M$, et cette fonction est indépendante du choix des coordonnées ou des trivialisations utilisées pour E, F. On dit que σ_P est *le symbole principal* de P. Le symbole principal d'une composition $Q \circ P$ d'opérateurs différentiels est simplement le produit

$$(2.3)\qquad \sigma_{Q\circ P}(x,\xi) = \sigma_Q(x,\xi)\sigma_P(x,\xi),$$

calculé comme un produit de matrices. Les opérateurs différentiels dont le symbole est injectif jouent un rôle très important :

2.4. Définition. *Un opérateur différentiel P est dit elliptique si $\sigma_P(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ est injectif pour tout $x \in M$ et $\xi \in T^\star_{M,x} \smallsetminus \{0\}$.*

Supposons maintenant que M soit orientée et munie d'une forme volume $dV(x) = \gamma(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ de classe C^∞, où $\gamma(x) > 0$ est une densité C^∞. Si E est un fibré vectoriel euclidien ou hermitien, nous pouvons définir un espace de Hilbert $L^2(M, E)$ de sections globales à valeurs dans E, à savoir l'espace des formes u à coefficients mesurables qui sont de carré sommable pour le produit scalaire

$$(2.5)\qquad \|u\|^2 = \int_M |u(x)|^2\,dV(x),$$

$$(2.5')\qquad \langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle = \int_M \langle u(x), v(x)\rangle\,dV(x), \qquad u, v \in L^2(M, E).$$

2.6. Définition. *Si $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ est un opérateur différentiel et si les fibrés E, F sont euclidiens ou hermitiens, il existe un unique opérateur différentiel*

$$P^\star : C^\infty(M, F) \to C^\infty(M, E),$$

appelé adjoint formel de P, tel que pour toutes sections $u \in C^\infty(M, E)$ et $v \in C^\infty(M, F)$ on ait une identité

$$\langle\!\langle Pu, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, P^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \textit{chaque fois que } \mathrm{Supp}\,u \cap \mathrm{Supp}\,v \subset\subset M.$$

Preuve. L'unicité est facile à vérifier, grâce à la densité des formes C^∞ à support compact dans $L^2(M, E)$. Au moyen d'un argument de partition de l'unité, on ramène la vérification de l'existence de $P^\star$ à la preuve de son existence locale. Maintenant, soit $Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$ le développement de P relativement à des trivialisations de E, F associées à des repères orthonormé et à des systèmes de coordonnées locales sur un ouvert $\Omega \subset M$. En supposant $\operatorname{Supp} u \cap \operatorname{Supp} v \subset\subset \Omega$, une intégration de parties donne

$$\begin{aligned}
\langle\langle Pu, v\rangle\rangle &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant\delta,\lambda,\mu} a_{\alpha\lambda\mu} D^\alpha u_\mu(x) \overline{v}_\lambda(x)\,\gamma(x)\,dx_1,\,\ldots\,,dx_m\\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant\delta,\lambda,\mu} (-1)^{|\alpha|} u_\mu(x) \overline{D^\alpha(\gamma(x)\,\overline{a}_{\alpha\lambda\mu} v_\lambda(x)}\,dx_1,\,\ldots\,,dx_m\\
&= \int_\Omega \langle u, \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma(x)^{-1} D^\alpha\big(\gamma(x)\,\overline{a}_\alpha^\dagger v(x)\big)\rangle\,dV(x).
\end{aligned}$$

Nous voyons donc que $P^\star$ existe et qu'il est défini de manière unique par

$$P^\star v(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma(x)^{-1} D^\alpha\big(\gamma(x)\,\overline{a}_\alpha^\dagger v(x)\big). \square \tag{2.7}$$

La formule (2.7) montre immédiatement que le symbole principal de $P^\star$ est

$$\sigma_{P^\star}(x,\xi) = (-1)^\delta \sum_{|\alpha|=\delta} \overline{a}_\alpha^\dagger \xi^\alpha = (-1)^\delta \sigma_P(x,\xi)^\star. \tag{2.8}$$

Si $\operatorname{rang} E = \operatorname{rang} F$, l'opérateur P est elliptique si et seulement si $\sigma_P(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$, l'ellipticité de P équivaut donc à celle de $P^\star$.

3. Résultats fondamentaux sur les opérateurs elliptiques

Nous supposons dans toute cette section que M est une variété *compacte orientée* de dimension m et de classe C^∞, munie d'une forme volume dV. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien C^∞ de rang r sur M.

3.A. Espaces de Sobolev

Pour tout nombre réel s, on définit l'espace de Sobolev $W^s(\mathbb{R}^m)$ comme étant l'espace de Hilbert des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ telles que la transformée de Fourier $\widehat{u}$ soit une fonction L^2_{loc} satisfaisant l'estimation

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\lambda(\xi) < +\infty. \tag{3.1}$$

Si $s \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\|u\|_s^2 \sim \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha|\leqslant s} |D^\alpha u(x)|^2 d\lambda(x),$$

donc $W^s(\mathbb{R}^m)$ est l'espace de Hilbert des fonctions u telles que toutes les dérivées $D^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leqslant s$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Plus généralement, nous notons $W^s(M,E)$ l'espace de Sobolev des sections $u : M \to E$ dont les composantes sont localement dans $W^s(\mathbb{R}^m)$ sur tout ouvert de carte. De façon précise, choisissons un recouvrement fini (Ω_j) de M par des ouverts de coordonnées $\Omega_j \simeq \mathbb{R}^m$ sur lesquels E est trivial. Considérons des repères orthonormés $(e_{j,\lambda})_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ de $E_{\restriction\Omega_j}$ et exprimons u par ses composantes, soit $u = \sum u_{j,\lambda}\, e_{j,\lambda}$. On pose alors

$$\|u\|_s^2 = \sum_{j,\lambda} \|\psi_j u_{j,\lambda}\|_s^2$$

où (ψ_j) est un "partition de l'unité" subordonnée à (Ω_j), telle que $\sum \psi_j^2 = 1$. A équivalence de normes près, $\| \ \ \|_s$ est indépendante des choix faits. Nous aurons besoin des faits fondamentaux suivants, que le lecteur pourra trouver dans la plupart des ouvrages spécialisés consacrés à la théorie des équations aux dérivées partielles.

3.2. Lemme de Sobolev. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel $s > k + \frac{m}{2}$, on a $W^s(M,E) \subset C^k(M,E)$ et l'inclusion est continue.* □

Il résulte aussitôt du lemme de Sobolev que

$$\bigcap_{s\geqslant 0} W^s(M,E) = C^\infty(M,E),$$
$$\bigcup_{s\leqslant 0} W^s(M,E) = \mathcal{D}'(M,E).$$

3.3. Lemme de Rellich. *Pour tout $t > s$, l'inclusion*

$$W^t(M,E) \hookrightarrow W^s(M,E)$$

est un opérateur linéaire compact. □

3.B. Opérateurs pseudodifférentiels

Si $P = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x) D^\alpha$ est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^m$, la formule d'inversion de Fourier donne

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\, d\lambda(\xi), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

où $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\, d\lambda(x)$ est la transformée de Fourier de u. Nous disons que

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha$$

est le symbole (ou symbole total) de P.

Un *opérateur pseudodifférentiel* est un opérateur Op_σ défini par une formule du type

$$(3.4)\qquad \mathrm{Op}_\sigma(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sigma(x,\xi)\,\widehat{u}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\,d\lambda(\xi), \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

où σ appartient à une classe convenable de fonctions sur $T^\star_{\mathbb{R}^m}$. La classe standard de symboles $S^\delta(\mathbb{R}^m)$ est définie comme suit : étant donné $\delta \in \mathbb{R}$, $S^\delta(\mathbb{R}^m)$ est la classe des fonctions $\sigma(x,\xi)$ de classe C^∞ sur $T^\star_{\mathbb{R}^m}$ telles que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^m$ on ait une estimation

$$(3.5)\qquad |D^\alpha_x D^\beta_\xi \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\delta-|\beta|}, \qquad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^m,$$

où $\delta \in \mathbb{R}$ doit être considéré comme le “degré” de σ. Alors $\mathrm{Op}_\sigma(u)$ est une fonction C^∞ bien définie sur $\mathbb{R}^m$, puisque $\widehat{u}$ appartient à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ des fonctions à décroissance rapide. Dans la situation plus générale des opérateurs agissant sur un fibré E et à valeurs dans un fibré F sur une variété compacte M, nous introduisons des espaces de symboles $S^\delta(M;E,F)$ analogues. Les éléments de $S^\delta(M;E,F)$ sont les fonctions

$$T^\star_M \ni (x,\xi) \mapsto \sigma(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$$

satisfaisant la condition (3.5) dans tout système de coordonnées. Finalement, nous prenons un recouvrement fini trivialisant (Ω_j) de M et une “partition de l'unité” (ψ_j) subordonnée à Ω_j telle que $\sum \psi_j^2 = 1$, et nous définissons

$$\mathrm{Op}_\sigma(u) = \sum \psi_j\, \mathrm{Op}_\sigma(\psi_j u), \qquad u \in C^\infty(M,E),$$

de manière à réduire les calculs à la situation de $\mathbb{R}^m$. Les résultats de base de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels sont résumés ci-dessous.

3.6. Existence de prolongement aux espaces W^s. *Si $\sigma \in S^\delta(M;E,F)$, alors Op_σ s'étend d'une manière unique en un opérateur linéaire continu*

$$\mathrm{Op}_\sigma : W^s(M,E) \to W^{s-\delta}(M,F). \qquad \square$$

En particulier, si $\sigma \in S^{-\infty}(M;E,F) := \bigcap S^\delta(M;E,F)$, alors Op_σ est un opérateur envoyant une section distribution arbitraire de $\mathcal{D}'(M,E)$ dans $C^\infty(M,F)$, et ce de manière continue. Un tel opérateur est appelé *opérateur régularisant*. Un résultat standard de la théorie des distributions affirme que la classe $\mathcal{R}$ des opérateurs régularisants coïncide avec la classe des opérateurs définis au moyen d'un noyau $K(x,y) \in \mathrm{Hom}(E_y,F_x)$ de classe C^∞, c'est-à-dire les opérateurs de la forme

$$R : \mathcal{D}'(M,E) \to C^\infty(M,F), \qquad u \mapsto Ru, \qquad Ru(x) = \int_M K(x,y)\cdot u(y)\,dV(y).$$

Inversement, si $dV(y) = \gamma(y)dy_1 \cdots dy_m$ sur Ω_j et si on écrit $Ru = \sum R(\theta_j u)$ avec une partition de l'unité (θ_j), l'opérateur $R(\theta_j \bullet)$ est l'opérateur pseudodifférentiel associé au symbole σ défini comme la transformée de Fourier partielle

$$\sigma(x,\xi) = \big(\gamma(y)\theta_j(y)K(x,y)\big)^{\wedge}_{y}(x,\xi), \qquad \sigma \in S^{-\infty}(M;E,F).$$

Quand on travaille avec des opérateurs pseudodifférentiels, il est habituel de travailler seulement modulo les opérateurs régularisants et d'autoriser des opérateurs plus généraux de la forme $\mathrm{Op}_\sigma + R$ où $R \in \mathcal{R}$ est un opérateur régularisant arbitraire.

3.7. Composition. *Si $\sigma \in S^\delta(M;E,F)$ et $\sigma' \in S^{\delta'}(M;F,G)$, $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$, il existe un symbole $\sigma' \diamond \sigma \in S^{\delta+\delta'}(M;E,G)$ tel que $\mathrm{Op}_{\sigma'} \circ \mathrm{Op}_\sigma = \mathrm{Op}_{\sigma'\diamond\sigma}$ mod $\mathcal{R}$. De plus*

$$\sigma' \diamond \sigma - \sigma' \cdot \sigma \in S^{\delta+\delta'-1}(M;E,G).$$

3.8. Définition. *Un opérateur pseudodifférentiel Op_σ de degré δ est dit elliptique s'il peut être défini par un symbole $\sigma \in S^\delta(M,E,F)$ tel que*

$$|\sigma(x,\xi)\cdot u| \geqslant c|\xi|^\delta |u|, \qquad \forall (x,\xi) \in T^\star_M, \quad \forall u \in E_x$$

pour $|\xi|$ assez grand, l'estimation étant uniforme pour $x \in M$.

Si E et F ont le même rang, la condition d'ellipticité implique que $\sigma(x,\xi)$ est inversible pour ξ grand. En prenant une fonction tronquante convenable $\theta(\xi)$ égale à 1 pour ξ grand, on voit que la fonction $\sigma'(x,\xi) = \theta(\xi)\sigma(x,\xi)^{-1}$ définit un symbole dans l'espace $S^{-\delta}(M;F,E)$, et d'après (3.8) nous avons $\mathrm{Op}_{\sigma'} \circ \mathrm{Op}_\sigma = \mathrm{Id} + \mathrm{Op}_\rho$, $\rho \in S^{-1}(M;E,E)$. Choisissons un symbole τ asymptotiquement équivalent à l'infini au développement $\mathrm{Id} - \rho + \rho^{\diamond 2} + \cdots + (-1)^j \rho^{\diamond j} + \cdots$. Il est clair qu'on obtient alors un inverse $\mathrm{Op}_{\tau\diamond\sigma'}$ de Op_σ modulo $\mathcal{R}$. Un corollaire facile de ces observations est le suivant :

3.9. Inégalité de Gårding. *Soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ, où $\mathrm{rang}\, E = \mathrm{rang}\, F = r$, et soit $\widetilde{P}$ l'extension de P aux sections à coefficients distributions. Pour tout $u \in W^0(M,E)$ tel que $\widetilde{P}u \in W^s(M,F)$, on a alors $u \in W^{s+\delta}(M,E)$ et*

$$\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s(\|\widetilde{P}u\|_s + \|u\|_0),$$

où C_s est une constante positive ne dépendant que de s.

Preuve. Comme P est elliptique, il existe un symbole $\sigma \in S^{-\delta}(M;F,E)$ tel que $\mathrm{Op}_\sigma \circ \widetilde{P} = \mathrm{Id} + R$, $R \in \mathcal{R}$. Alors $\|\mathrm{Op}_\sigma(v)\|_{s+\delta} \leqslant C\|v\|_s$ grâce à (3.6). Par suite, en posant $v = \widetilde{P}u$, nous voyons que $u = \mathrm{Op}_\sigma(\widetilde{P}u) - Ru$ satisfait l'estimation désirée. □

3.C. Théorème de finitude

Nous concluons cette section par la preuve du théorème de finitude fondamental suivant, qui est le point de départ de la théorie de Hodge L^2.

3.10. Théorème de finitude. *Soient E, F des fibrés vectoriels hermitiens sur une variété compacte M, tels que* $\operatorname{rang} E = \operatorname{rang} F = r$, *et soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ. Alors :*

i) $\operatorname{Ker} P$ *est de dimension finie.*

ii) $P\big(C^\infty(M,E)\big)$ *est fermé et de codimension finie dans* $C^\infty(M,F)$; *de plus, si $P^\star$ est l'adjoint formel de P, il existe une décomposition*

$$C^\infty(M,F) = P\big(C^\infty(M,E)\big) \oplus \operatorname{Ker} P^\star$$

comme somme directe orthogonale dans $W^0(M,F) = L^2(M,F)$.

Preuve. (i) L'inégalité de Gårding montre que $\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s\|u\|_0$ pour tout $u \in \operatorname{Ker} P$. Grâce au lemme de Sobolev, ceci implique que $\operatorname{Ker} P$ est fermé dans $W^0(M,E)$. De plus, la $\|\ \ \|_0$-boule unité fermée de $\operatorname{Ker} P$ est contenue dans la $\|\ \ \|_\delta$-boule de rayon C_0, donc elle est compacte d'après le lemme de Rellich. Le théorème de Riesz implique que $\dim \operatorname{Ker} P < +\infty$.

(ii) Nous montrons d'abord que le prolongement

$$\widetilde{P} : W^{s+\delta}(M,E) \to W^s(M,F)$$

a une image fermée pour tout s. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments $v_1, \ldots, v_N \in W^{s+\delta}(M,F)$, $N = N(\varepsilon)$, tels que

$$\|u\|_0 \leqslant \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} |\langle\langle u, v_j\rangle\rangle_0| \ ; \tag{3.11}$$

en effet l'ensemble

$$K_{(v_j)} = \Big\{u \in W^{s+\delta}(M,F)\ ;\ \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} |\langle\langle u, v_j\rangle\rangle_0| \leqslant 1\Big\}$$

est relativement compact dans $W^0(M,F)$ et $\bigcap_{(v_j)} \overline{K}_{(v_j)} = \{0\}$. Il s'ensuit qu'il existe des éléments (v_j) tels que $\overline{K}_{(v_j)}$ soit contenu dans la boule unité de $W^0(M,E)$, ce qu'il fallait démontrer. Substituons la majoration $\|u\|_0$ donnée par (3.11) dans l'inégalité de Gårding ; nous obtenons

$$(1 - C_s\varepsilon)\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s\Big(\|\widetilde{P}u\|_s + \sum_{j=1}^{N} |\langle\langle u, v_j\rangle\rangle_0|\Big).$$

Définissons $T = \{u \in W^{s+\delta}(M,E)\ ;\ u \perp v_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et posons $\varepsilon = 1/2C_s$. Il vient

$$\|u\|_{s+\delta} \leqslant 2C_s\|\widetilde{P}u\|_s, \qquad \forall u \in T.$$

Ceci implique que $\widetilde{P}(T)$ est fermé. Par conséquent

$$\widetilde{P}\big(W^{s+\delta}(M,E)\big) = \widetilde{P}(T) + \mathrm{Vect}\big(\widetilde{P}(v_1), \ldots, \widetilde{P}(v_N)\big)$$

est fermé dans $W^s(M,E)$. Prenons en particulier $s = 0$. Puisque $C^\infty(M,E)$ est dense dans $W^\delta(M,E)$, nous voyons que dans $W^0(M,E) = L^2(M,E)$ on a

$$\Big(\widetilde{P}\big(W^\delta(M,E)\big)\Big)^\perp = \Big(P\big(C^\infty(M,E)\big)\Big)^\perp = \mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}.$$

Nous avons ainsi prouvé que

$$W^0(M,E) = \widetilde{P}\big(W^\delta(M,E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}. \tag{3.12}$$

Puisque $P^\star$ est également elliptique, il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}$ est de dimension finie et que $\mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star} = \mathrm{Ker}\,P^\star$ est contenu dans $C^\infty(M,F)$. Grâce à l'inégalité de Gårding, la formule de décomposition (3.12) donne

$$W^s(M,E) = \widetilde{P}\big(W^{s+\delta}(M,E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,P^\star, \tag{3.13}$$

$$C^\infty(M,E) = P\big(C^\infty(M,E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,P^\star. \tag{3.14}$$

Nous terminons cette section par la construction de l'opérateur de Green associé à un opérateur elliptique auto-adjoint.

3.15. Théorème. *Soient E un fibré vectoriel hermitien de rang r sur une variété compacte M, et $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un opérateur différentiel elliptique autoadjoint de degré δ. Alors si H désigne l'opérateur de projection orthogonale $H : C^\infty(M,E) \to \mathrm{Ker}\,P$, il existe un unique opérateur G sur $C^\infty(M,E)$ tel que*

$$PG + H = GP + H = \mathrm{Id},$$

de plus G est un opérateur pseudo-différentiel de degré $-\delta$, appelé opérateur de Green associé à P.

Preuve. D'après le Théorème 3.10, $\mathrm{Ker}\,P = \mathrm{Ker}\,P^\star$ est de dimension finie, et $\mathrm{Im}\,P = (\mathrm{Ker}\,P)^\perp$. Il en résulte que la restriction de P à $(\mathrm{Ker}\,P)^\perp$ est un opérateur bijectif. On définit G comme étant égal à $0 \oplus P^{-1}$ relativement à la décomposition orthogonale $C^\infty(M,E) = \mathrm{Ker}\,P \oplus (\mathrm{Ker}\,P)^\perp$. Les relations $PG + H = GP + H = \mathrm{Id}$ sont alors évidentes, de même que l'unicité de G. De plus, G est continu pour la topologie d'espace de Fréchet de $C^\infty(M,E)$ d'après le théorème de Banach. On sait également qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel Q d'ordre $-\delta$ qui est un inverse de P modulo $\mathcal{R}$, i.e., $PQ = \mathrm{Id} + R$, $R \in \mathcal{R}$. Il vient alors

$$Q = (GP + H)Q = G(\mathrm{Id} + R) + HQ = G + GR + HQ,$$

où GR et HQ sont régularisants (H est un opérateur régularisant de rang fini défini par le noyau $\sum \varphi_s(x) \otimes \varphi_s^\star(y)$, si (φ_s) est une base de fonctions propres de $\operatorname{Ker} P \subset C^\infty(M, E)$). Par suite $G = Q \bmod \mathcal{R}$ et G est bien un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\delta$. □

3.16. Corollaire. *Sous les hypothèses du th.* 3.15, *les valeurs propres de* P *constituent une suite de réels* λ_k *tels que* $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_k| = +\infty$, *les espaces propres* V_{λ_k} *de* P *sont de dimension finie, et on a une somme directe hilbertienne*

$$L^2(M, E) = \widehat{\bigoplus_k} V_{\lambda_k}.$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, *un élément* $u = \sum_k u_k \in L^2(M, E)$ *est dans* $W^{m\delta}(X, E)$ *si et seulement si* $\sum |\lambda_k|^{2m} \|u_k\|^2 < +\infty$.

Preuve. L'opérateur de Green s'étend en un opérateur autoadjoint

$$\widetilde{G} : L^2(M, E) \to L^2(M, E)$$

se factorisant à travers $W^\delta(M, E)$, et donc compact. Cet opérateur définit un inverse de $\widetilde{P} : W^\delta(M, E) \to L^2(M, E)$ sur $(\operatorname{Ker} P)^\perp$. La théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints montre que les valeurs propres μ_k de $\widetilde{G}$ forment une suite de réels μ_k tendant vers 0 et que $L^2(M, E)$ est somme directe hilbertienne des espaces propres. Les valeurs propres correspondantes de $\widetilde{P}$ sont $\lambda_k = \mu_k^{-1}$ si $\mu_k \neq 0$, et d'après l'ellipticité de $P - \lambda_k \operatorname{Id}$, les espaces propres $V_{\lambda_k} = \operatorname{Ker}(P - \lambda_k \operatorname{Id})$ sont de dimension finie et contenus dans $C^\infty(M, E)$. Enfin, si $u = \sum_k u_k \in L^2(M, E)$, l'inégalité de Gårding montre que $u \in W^{m\delta}(M, E)$ si et seulement si $\widetilde{P}^m u \in L^2(M, E) = W^0(M, E)$, ce qui donne bien la condition $\sum |\lambda_k|^{2m} \|u_k\|^2 < +\infty$. □

4. Théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes

La théorie de Hodge a été bâtie de toutes pièces par W.V.D. Hodge pendant la décade 1930-1940 (voir [Hod41], [DR55]). Le but principal de la théorie est de décrire l'algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété riemannienne en termes de ses formes harmoniques. Le résultat principal est que toute classe de cohomologie possède un unique représentant harmonique.

4.A. Structure euclidienne de l'algèbre extérieure

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée de classe C^∞, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$, et soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien de rang r sur M. Nous notons respectivement $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ des repères orthonormés de T_M et de E sur une carte $\Omega \subset M$, et soient $(\xi_1^\star, \ldots, \xi_m^\star)$, $(e_1^\star, \ldots, e_r^\star)$ les repères duaux correspondants de $T_M^\star$, $E^\star$. Soit dV l'élément de volume riemannien sur M. L'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet T_M^\star$ possède un produit scalaire naturel $\langle \bullet, \bullet \rangle$, tel que

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det(\langle u_j, v_k \rangle)_{1 \leqslant j,k \leqslant p}, \qquad u_j, v_k \in T_M^\star \tag{4.1}$$

pour tout p, avec $\Lambda^\bullet T^\star_M = \bigoplus \Lambda^p T^\star_M$ comme somme directe orthogonale. Alors la famille de covecteurs $\xi^\star_I = \xi^\star_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi^\star_{i_p}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, définit une base orthonormée de $\Lambda^\bullet T^\star_M$. On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E$.

4.2. Opérateur étoile de Hodge. *L'opérateur $\star$ de Hodge-Poincaré-De Rham est l'endomorphisme de $\Lambda^\bullet T^\star_M$ défini par la collection d'applications linéaires telles que*

$$\star : \Lambda^p T^\star_M \to \Lambda^{m-p} T^\star_M, \qquad u \wedge \star\, v = \langle u, v \rangle\, dV, \qquad \forall u, v \in \Lambda^p T^\star_M.$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur se voient aisément en utilisant l'accouplement de dualité

$$\begin{aligned} &\Lambda^p T^\star_M \times \Lambda^{m-p} T^\star_M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(u, v) \longmapsto u \wedge v / dV = \sum \varepsilon(I, \complement I)\, u_I v_{\complement I}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $u = \sum_{|I|=p} u_I\, \xi^\star_I$, $v = \sum_{|J|=m-p} v_J\, \xi^\star_J$, et où $\varepsilon(I, \complement I)$ est la signature de la permutation $(1, 2, \ldots, m) \mapsto (I, \complement I)$ définie par I suivi du multi-indice complémentaire (ordonné) $\complement I$. De là, nous déduisons

$$\star\, v = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I, \complement I) v_I\, \xi^\star_{\complement I}. \tag{4.4}$$

Plus généralement, l'accouplement sesquilinéaire $\{\bullet, \bullet\}$ défini par (1.6) induit un opérateur $\star$ sur les formes à valeurs vectorielles, tel que

$$\star\ : \Lambda^p T^\star_M \otimes E \to \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E, \qquad \{s,\, \star\, t\} = \langle s, t \rangle\, dV, \tag{4.5}$$

$$\star\, t = \sum_{|I|=p,\lambda} \varepsilon(I, \complement I)\, t_{I,\lambda}\, \xi^\star_{\complement I} \otimes e_\lambda, \qquad \forall s, t \in \Lambda^p T^\star_M \otimes E, \tag{4.6}$$

pour $t = \sum t_{I,\lambda}\, \xi^\star_I \otimes e_\lambda$. Puisque $\varepsilon(I, \complement I) \varepsilon(\complement I, I) = (-1)^{p(m-p)} = (-1)^{p(m-1)}$, nous obtenons immédiatement

$$\star\star\ \ t = (-1)^{p(m-1)} t \quad \text{sur } \ \Lambda^p T^\star_M \otimes E. \tag{4.7}$$

Il est clair que $\star$ est une isométrie de $\Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E$. Nous aurons besoin aussi d'une variante de l'opérateur $\star$, à savoir l'opérateur antilinéaire

$$\# \ : \ \Lambda^p T^\star_M \otimes E \longrightarrow \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E^\star$$

défini par $s \wedge \#\, t = \langle s, t \rangle\, dV$, où le produit extérieur $\wedge$ est combiné avec l'accouplement canonique $E \times E^\star \to \mathbb{C}$. Nous avons

$$\#\, t = \sum_{|I|=p,\lambda} \varepsilon(I, \complement I)\, \overline{t}_{I,\lambda}\, \xi^\star_{\complement I} \otimes e^\star_\lambda. \tag{4.8}$$

4.9. Contraction par un champ de vecteurs. *Etant donné un vecteur tangent $\theta \in T_M$ et une forme $u \in \Lambda^p T_M^\star$, la contraction $\theta \lrcorner u \in \Lambda^{p-1} T_M^\star$ est définie par*

$$\theta \lrcorner u\,(\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}) = u(\theta, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1}), \qquad \eta_j \in T_M.$$

En termes de la base (ξ_j), $\bullet \lrcorner \bullet$ est l'opérateur bilinéaire caractérisé par

$$\xi_l \lrcorner (\xi_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p}^\star) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; l \notin \{i_1, \ldots, i_p\}, \\ (-1)^{k-1} \xi_{i_1}^\star \wedge \cdots \widehat{\xi_{i_k}^\star} \cdots \wedge \xi_{i_p}^\star & \text{si } \; l = i_k. \end{cases}$$

Cette formule est en fait valide même quand (ξ_j) est non orthonormé. Un calcul facile montre que $\theta \lrcorner \bullet$ est une *dérivation* de l'algèbre extérieure, i.e. que

$$\theta \lrcorner (u \wedge v) = (\theta \lrcorner u) \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge (\theta \lrcorner v).$$

De plus, si $\widetilde{\theta} = \langle \bullet, \theta \rangle \in T_M^\star$, l'opérateur $\theta \lrcorner \bullet$ est l'adjoint de $\widetilde{\theta} \wedge \bullet$, i.e.,

$$(4.10) \qquad \langle \theta \lrcorner u, v \rangle = \langle u, \widetilde{\theta} \wedge v \rangle, \qquad \forall u, v \in \Lambda^\bullet T_M^\star.$$

En effet, cette propriété est immédiate quand $\theta = \xi_l$, $u = \xi_I^\star$, $v = \xi_J^\star$.

4.B. Opérateurs de Laplace-Beltrami

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur M, et soit D_E une connexion hermitienne sur E. Nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ des p-formes s sur M à valeurs dans E, muni du produit scalaire L^2

$$\langle\!\langle s, t \rangle\!\rangle = \int_M \langle s, t \rangle \, dV$$

déjà considéré en (2.5). Ici $\langle s, t \rangle$ est le produit scalaire ponctuel sur $\Lambda^p T_M^\star \otimes E$ associé au produit scalaire riemannien sur $\Lambda^p T_M^\star$ et au produit scalaire hermitien sur E.

4.11. Théorème. *L'adjoint formel de D_E agissant sur $C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ est donné par*

$$D_E^\star = (-1)^{mp+1} \star D_E \star .$$

Preuve. Si $s \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ et $t \in C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E)$ sont à support compact, nous avons

$$\begin{aligned} \langle\!\langle D_E s, t \rangle\!\rangle &= \int_M \langle D_E s, t \rangle \, dV = \int_M \{D_E s, \star t\} \\ &= \int_M d\{s, \star t\} - (-1)^p \{s, D_E \star t\} = (-1)^{p+1} \int_M \{s, D_E \star t\} \end{aligned}$$

grâce à la formule de Stokes. Par conséquent (4.5) et (4.7) impliquent

$$\langle\!\langle D_E s, t\rangle\!\rangle = (-1)^{p+1}(-1)^{p(m-1)} \int_M \{s, \star\star\ D_E \star t\} = (-1)^{mp+1}\langle\!\langle s, \star D_E \star t\rangle\!\rangle.$$

La formule désirée s'ensuit. □

4.12. Remarque. Dans le cas de la connexion triviale d sur $E = M \times \mathbb{C}$, la formule devient $d^\star = (-1)^{m+1} \star d \star$. Si m est pair, ces formules se réduisent à

$$d^\star = -\star d \star, \qquad D_E^\star = -\star D_E \star.$$

4.13. Définition. *L'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fibrés $\Lambda^p T_M^\star \otimes E$, tel que*

$$\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E.$$

En particulier, l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur $\Lambda^p T_M^\star$ est $\Delta = dd^\star + d^\star d$. Ce dernier opérateur ne dépend que de la structure riemannienne (M, g).

Il est clair que le Laplacien Δ est formellement auto-adjoint, i.e. $\langle\!\langle \Delta_E s, t\rangle\!\rangle = \langle\!\langle s, \Delta_E t\rangle\!\rangle$ chaque fois que les formes s, t sont de classe C^∞ et que l'une d'elles est à support compact.

4.14. Calcul du symbole. Pour toute fonction f de classe C^∞, la règle de Leibnitz donne $\mathrm{e}^{-tf} D_E(\mathrm{e}^{tf} s) = t\, df \wedge s + D_E s$. Par définition du symbole, nous trouvons donc

$$\sigma_{D_E}(x, \xi) \cdot s = \xi \wedge s, \qquad \forall \xi \in T_{M,x}^\star, \quad \forall s \in \Lambda^p T_M^\star \otimes E.$$

Grâce à la formule (2.8) nous obtenons $\sigma_{D_E^\star} = -(\sigma_{D_E})^\star$, donc

$$\sigma_{D_E^\star}(x, \xi) \cdot s = -\widetilde{\xi} \lrcorner\ s$$

où $\widetilde{\xi} \in T_M$ est le vecteur tangent adjoint de ξ. L'égalité $\sigma_{\Delta_E} = \sigma_{D_E}\sigma_{D_E^\star} + \sigma_{D_E^\star}\sigma_{D_E}$ implique

$$\begin{aligned} &\sigma_{\Delta_E}(x, \xi) \cdot s = -\xi \wedge (\widetilde{\xi} \lrcorner\ s) - \widetilde{\xi} \lrcorner\ (\xi \wedge s) = -(\widetilde{\xi} \lrcorner\ \xi)s, \\ &\sigma_{\Delta_E}(x, \xi) \cdot s = -|\xi|^2 s. \end{aligned}$$

En particulier, Δ_E est toujours un opérateur elliptique. Dans le cas particulier où M est une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$ munie de la métrique constante $g = \sum_{i=1}^m dx_i^2$, tous les opérateurs d, $d^\star$, Δ sont à coefficients constants. Ils sont complètement déterminés par leur symbole principal (aucun terme d'ordre plus bas ne peut apparaître). Nous trouvons alors aisément

$$\begin{aligned} s &= \sum_{|I|=p} s_I dx_I, \qquad ds = \sum_{|I|=p,j} \frac{\partial s_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I, \\ d^\star s &= -\sum_{I,j} \frac{\partial s_I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner\ dx_I, \\ \Delta s &= -\sum_I \Big(\sum_j \frac{\partial^2 s_I}{\partial x_j^2} \Big) dx_I. \end{aligned}$$

Par suite, Δ a la même expression que l'opérateur de Laplace élémentaire, au signe moins près.

4.C. Formes harmoniques et isomorphisme de Hodge

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne *compacte* (M, g). Nous supposons que E possède une connexion hermitienne D_E telle que $\Theta(D_E) = D_E^2 = 0$. Une telle connexion est dite *intégrable* ou *plate*. Il est bien connu que ceci équivaut à ce que E soit donné par une représentation $\pi_1(M) \to \mathrm{U}(r)$; un tel fibré est appelé *fibré plat* ou *système local de coefficients*. Un exemple fondamental est bien sûr le fibré trivial $E = M \times \mathbb{C}$ avec sa connexion évidente $D_E = d$. Grâce à cette hypothèse, D_E définit un complexe de De Rham généralisé

$$C^\infty(M, E) \xrightarrow{D_E} C^\infty(M, \Lambda^1 T_M^\star \otimes E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) \xrightarrow{D_E} \cdots.$$

Les groupes de cohomologie de ce complexe seront notés $H^p_{DR}(M, E)$.

L'espace des *formes harmoniques de degré* p relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E$ est défini par

$$\mathcal{H}^p(M, E) = \big\{ s \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)\ ;\ \Delta_E s = 0 \big\}. \tag{4.15}$$

Comme $\langle\!\langle \Delta_E s, s \rangle\!\rangle = ||D_E s||^2 + ||D_E^\star s||^2$, nous voyons que $s \in \mathcal{H}^p(M, E)$ si et seulement si $D_E s = D_E^\star s = 0$.

4.16. Théorème. *Pour tout p, il existe une décomposition orthogonale*

$$\begin{aligned} &C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) = \mathcal{H}^p(M, E) \oplus \operatorname{Im} D_E \oplus \operatorname{Im} D_E^\star, \qquad \textit{où} \\ &\operatorname{Im} D_E = D_E\big(C^\infty(M, \Lambda^{p-1} T_M^\star \otimes E)\big), \\ &\operatorname{Im} D_E^\star = D_E^\star\big(C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E)\big). \end{aligned}$$

Preuve. Il est immédiat que $\mathcal{H}^p(M, E)$ est orthogonal aux deux sous-espaces $\operatorname{Im} D_E$ et $\operatorname{Im} D_E^\star$. L'orthogonalité de ces deux sous-espaces est elle aussi évidente, grâce à l'hypothèse $D_E^2 = 0$:

$$\langle\!\langle D_E s, D_E^\star t \rangle\!\rangle = \langle\!\langle D_E^2 s, t \rangle\!\rangle = 0.$$

Nous appliquons maintenant le th. 3.10 à l'opérateur elliptique $\Delta_E = \Delta_E^\star$ agissant sur les p-formes, i.e. l'opérateur $\Delta_E : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,F)$ agissant sur le fibré $F = \Lambda^p T_M^\star \otimes E$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}&C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star\otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E)\oplus\Delta_E\big(C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star\otimes E)\big),\\ &\operatorname{Im}\Delta_E = \operatorname{Im}(D_E D_E^\star + D_E^\star D_E)\subset \operatorname{Im}D_E + \operatorname{Im}D_E^\star.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\operatorname{Im}D_E$ et $\operatorname{Im}D_E^\star$ sont orthogonaux à $\mathcal{H}^p(M,E)$, ces espaces sont contenus dans $\operatorname{Im}\Delta_E$. □

4.17. Théorème d'isomorphisme de Hodge. *Les groupes de cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M,E)$ sont de dimension finie et $H^p_{DR}(M,E)\simeq\mathcal{H}^p(M,E)$.*

Preuve. Grâce à la décomposition (4.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}&B^p_{DR}(M,E) = D_E\big(C^\infty(M,\Lambda^{p-1}T_M^\star\otimes E)\big),\\ &Z^p_{DR}(M,E) = \operatorname{Ker}D_E = (\operatorname{Im}D_E^\star)^\perp = \mathcal{H}^p(M,E)\oplus\operatorname{Im}D_E.\end{aligned}$$

Ceci montre que toute classe de cohomologie de De Rham contient un unique représentant harmonique. □

4.18. Dualité de Poincaré. *L'accouplement*

$$H^p_{DR}(M,E)\times H^{m-p}_{DR}(M,E^\star)\longrightarrow\mathbb{C},\qquad (s,t)\longmapsto\int_M s\wedge t$$

est une forme bilinéaire non dégénérée, et définit donc une dualité entre $H^p_{DR}(M,E)$ et $H^{m-p}_{DR}(M,E^\star)$.

Preuve. Notons d'abord qu'il existe une connexion plate $D_{E^\star}$ naturellement définie telle que pour tout $s\in C^\infty(M,\Lambda^\bullet T_M^\star\otimes E)$, $t\in C^\infty(M,\Lambda^\bullet T_M^\star\otimes E^\star)$ on ait

$$d(s\wedge t) = (D_E s)\wedge t + (-1)^{\deg s}s\wedge D_{E^\star}t. \tag{4.19}$$

Il résulte alors de la formule de Stokes que l'application bilinéaire $(s,t)\mapsto\int_M s\wedge t$ peut se factoriser aux groupes de cohomologie. Soit $s\in C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star\otimes E)$. Nous laissons au lecteur le soin de prouver les formules suivantes (utiliser (4.19) de façon analogue à ce qui a été fait pour la preuve du th. 4.11) :

(4.20)

$$D_{E^\star}(\#\,s) = (-1)^p\#\,D_E^\star s,\quad (D_{E^\star})^\star(\#\,s) = (-1)^{p+1}\#\,D_E s,\quad \Delta_{E^\star}(\#\,s) = \#\,\Delta_E s,$$

Par conséquent $\#s\in\mathcal{H}^{m-p}(M,E^\star)$ si et seulement si $s\in\mathcal{H}^p(M,E)$. Puisque

$$\int_M s\wedge\#\,s = \int_M |s|^2\,dV = \|s\|^2,$$

nous voyons que l'accouplement de Poincaré a un noyau trivial dans le facteur de gauche $\mathcal{H}^p(M,E)\simeq H^p_{DR}(M,E)$. Par symétrie, il a aussi un noyau trivial à droite. La preuve est achevée. □

5. Variétés hermitiennes et kählériennes

Soit X une variété complexe de dimension n. Une *métrique hermitienne* sur X est une forme hermitienne définie positive de classe C^∞ sur T_X ; dans un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$, une telle forme peut s'écrire

$$h(z) = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\overline{z}_k,$$

où (h_{jk}) est une matrice hermitienne positive à coefficients C^∞. La $(1,1)$-*forme fondamentale* associée à h est

$$\omega = -\operatorname{Im} h = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant n.$$

5.1. Définition.

a) *Une variété hermitienne est un couple (X, ω) où ω est une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive sur X.*

b) *La métrique ω est dite kählérienne si $d\omega = 0$.*

c) *X est appelée variété kählérienne si X possède au moins une métrique kählérienne.*

Puisque ω est réelle, les conditions $d\omega = 0$, $d'\omega = 0$, $d''\omega = 0$ sont toutes équivalentes. En coordonnées locales, on voit que $d'\omega = 0$ si et seulement si

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{lk}}{\partial z_j}, \qquad 1 \leqslant j, k, l \leqslant n.$$

Un calcul simple donne

$$\frac{\omega^n}{n!} = \det(h_{jk}) \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} \Big(\frac{\mathrm{i}}{2} dz_j \wedge d\overline{z}_j\Big) = \det(h_{jk})\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

où $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$. Par conséquent la (n,n)-forme

$$dV = \frac{1}{n!}\omega^n \tag{5.2}$$

est positive et coïncide avec l'élément de volume hermitien de X. Si X est compacte, alors $\int_X \omega^n = n!\, \mathrm{Vol}_\omega(X) > 0$. Cette remarque simple implique déjà qu'une variété kählérienne compacte doit satisfaire certaines conditions topologiques restrictives :

5.3. Conséquence.

a) *Si (X, ω) est kählérienne compacte et si $\{\omega\}$ désigne la classe de cohomologie de ω dans $H^2(X, \mathbb{R})$, alors $\{\omega\}^n \neq 0$.*

b) *Si X est kählérienne compacte, alors $H^{2k}(X,\mathbb{R}) \neq 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. En effet, $\{\omega\}^k$ est une classe non nulle de $H^{2k}(X,\mathbb{R})$.*

5.4. Exemple. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ possède une métrique kählérienne ω naturelle, appelée *métrique de Fubini-Study*, définie par

$$p^\star\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log\big(|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2\big)$$

où $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ et où $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ est la projection. Soit $z = (\zeta_1/\zeta_0, \ldots, \zeta_n/\zeta_0)$ les coordonnées non homogènes de la carte $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$. Un calcul montre que

$$\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log(1+|z|^2) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(1)), \qquad \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = 1.$$

Comme les seuls groupes de cohomologie entière non nuls de $\mathbb{P}^n$ sont $H^{2p}(\mathbb{P},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$, nous voyons que $h = \{\omega\} \in H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ est un générateur de l'anneau de cohomologie $H^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. En d'autres termes, $H^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$ comme anneau.

5.5. Exemple. Un *tore complexe* est un quotient $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ de $\mathbb{C}^n$ par un réseau Γ de rang $2n$. C'est donc une variété complexe compacte. Toute forme hermitienne définie positive $\omega = \mathrm{i}\sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ à coefficients constants sur $\mathbb{C}^n$ définit une métrique kählérienne sur X.

5.6. Exemple. Toute sous-variété complexe X d'une variété kählérienne (Y,ω') est kählérienne pour la métrique induite $\omega = \omega'_{\restriction X}$. En particulier, toute variété projective est kählérienne (par définition, une *variété projective* est une sous-variété fermée $X \subset \mathbb{P}^n$ d'un espace projectif) ; dans ce cas, si ω' désigne la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n$, nous avons la propriété supplémentaire que la classe $\{\omega\} := \{\omega'\}_{\restriction X} \in H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ est entière, i.e., est l'image d'une classe entière de $H^2(X,\mathbb{Z})$. Une métrique kählérienne ω de classe de cohomologie entière est appelée *métrique de Hodge*.

5.7. Exemple. Considérons la surface complexe

$$X = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$$

où $\Gamma = \{\lambda^n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda \in\,]0,1[$, est vu comme groupe d'homothéties. Puisque $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^\star_+ \times S^3$, nous avons $X \simeq S^1 \times S^3$. Par conséquent $H^2(X,\mathbb{R}) = 0$ grâce à la formule de Künneth, et la propriété 5.3 b) montre que X n'est pas kählérienne. Plus généralement, on peut prendre pour Γ un groupe cyclique infini engendré par des contractions holomorphes de $\mathbb{C}^2$, de la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 + z_1^p \end{pmatrix},$$

où $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sont des nombres complexes tels que $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| < 1$, $0 < |\lambda| < 1$, et p un entier positif. Ces surfaces non kählériennes sont appelées *surfaces de Hopf.* □

Le théorème suivant montre qu'une métrique hermitienne ω sur X est kählérienne si et seulement si la métrique ω est tangente à l'ordre 2 à une métrique hermitienne à coefficients constants en tout point de X.

5.8. Théorème. *Soit ω une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive sur X. Pour que ω soit kählérienne, il faut et il suffit qu'en tout point $x_0 \in X$ il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ centré en x_0 tel que*

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1 \leqslant l,m \leqslant n} \omega_{lm}\, dz_l \wedge d\overline{z}_m, \qquad \omega_{lm} = \delta_{lm} + O(|z|^2). \tag{5.9}$$

Si ω est kählérienne, les coordonnées $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ peuvent en fait être choisies telles que

$$\omega_{lm} = \langle \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m} \rangle = \delta_{lm} - \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_{jklm}\, z_j \overline{z}_k + O(|z|^3), \tag{5.10}$$

où (c_{jklm}) sont les coefficients du tenseur de courbure de Chern

$$\Theta(T_X)_{x_0} = \sum_{j,k,l,m} c_{jklm}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial z_l}\Big)^\star \otimes \frac{\partial}{\partial z_m} \tag{5.11}$$

associé à (T_X, ω) en x_0. Un tel système (z_j) sera appelé système de coordonnées géodésiques en x_0.

Preuve. Il est clair que (5.9) implique $d_{x_0}\omega = 0$, par suite la condition est suffisante. Supposons maintenant que ω soit kählérienne. Alors on peut choisir des coordonnées locales $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ telles que $(d\zeta_1, \ldots, d\zeta_n)$ soit une base ω-orthonormée de $T^\star_{x_0}X$. Par conséquent

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1 \leqslant l,m \leqslant n} \widetilde{\omega}_{lm}\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m, \qquad \text{où}$$

$$\widetilde{\omega}_{lm} = \delta_{lm} + O(|\zeta|) = \delta_{lm} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (a_{jlm}\zeta_j + a'_{jlm}\overline{\zeta}_j) + O(|\zeta|^2). \tag{5.12}$$

Puisque ω est réelle, nous avons $a'_{jlm} = \overline{a}_{jml}$; d'autre part la condition de kählérianité $\partial\omega_{lm}/\partial\zeta_j = \partial\omega_{jm}/\partial\zeta_l$ en x_0 implique $a_{jlm} = a_{ljm}$. Posons maintenant

$$z_m = \zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l} a_{jlm}\zeta_j\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Alors (z_m) est un système de coordonnée locales en x_0, et

$$\begin{aligned}
dz_m &= d\zeta_m + \sum_{j,l} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l, \\
\mathrm{i}\sum_m dz_m \wedge d\overline{z}_m &= \mathrm{i}\sum_m d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_m + \mathrm{i}\sum_{j,l,m} a_{jlm}\zeta_j\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m \\
&\qquad + \mathrm{i}\sum_{j,l,m} \overline{a}_{jlm}\overline{\zeta}_j\, d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_l + O(|\zeta|^2) \\
&= \mathrm{i}\sum_{l,m} \widetilde{\omega}_{lm}\, d\zeta_l \wedge \overline{d}\zeta_m + O(|\zeta|^2) = \omega + O(|z|^2).
\end{aligned}$$

La condition (5.9) est demontrée. Supposons les coordonnées (ζ_m) choisies depuis le début en sorte que (5.9) ait lieu pour (ζ_m). Poursuivons alors le développement de Taylor (5.12) à l'ordre deux

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{lm} &= \delta_{lm} + O(|\zeta|^2)) \\
&= \delta_{lm} + \sum_{j,k} \big(a_{jklm}\zeta_j\overline{\zeta}_k + a'_{jklm}\zeta_j\zeta_k + a''_{jklm}\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k\big) + O(|\zeta|^3).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les nouveaux coefficients introduits satisfont la relation

$$a'_{jklm} = a'_{kjlm}, \qquad a''_{jklm} = \overline{a}'_{jkml}, \qquad \overline{a}_{jklm} = a_{kjml}.$$

La condition de kählérianité $\partial\omega_{lm}/\partial\zeta_j = \partial\omega_{jm}/\partial\zeta_l$ en $\zeta = 0$ fournit l'égalité $a'_{jklm} = a'_{lkjm}$; en particulier a'_{jklm} est invariant par toute permutation de j, k, l. Si on pose

$$z_m = \zeta_m + \frac{1}{3}\sum_{j,k,l} a'_{jklm}\, \zeta_j\zeta_k\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

alors grâce à (5.13) on trouve

$$\begin{aligned}
dz_m &= d\zeta_m + \sum_{j,k,l} a'_{jklm}\, \zeta_j\zeta_k\, d\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n, \\
\omega &= \mathrm{i}\sum_{1\leqslant m\leqslant n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + \mathrm{i}\sum_{j,k,l,m} a_{jklm}\, \zeta_j\overline{\zeta}_k\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m + O(|\zeta|^3),
\end{aligned}$$

$$\omega = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant m\leqslant n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + \mathrm{i}\sum_{j,k,l,m} a_{jklm}\, z_j\overline{z}_k\, dz_l \wedge d\overline{z}_m + O(|z|^3). \tag{5.14}$$

Il est maintenant facile de calculer le tenseur de courbure de Chern $\Theta(T_X)_{x_0}$ en termes des coefficients a_{jklm} et de vérifier que $c_{jklm} = -a_{jklm}$. Nous laissons cette vérification au lecteur à titre d'exercice. □

6. Identités fondamentales de la géométrie kählérienne

6.A. Opérateurs de la géométrie hermitienne

Soit (X,ω) une variété hermitienne et soient $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, des coordonnées $\mathbb{C}$-analytiques en un point $a \in X$, telles que $\omega(a) = \mathrm{i}\sum dz_j \wedge d\overline{z}_j$ soit diagonalisée en ce point. La forme hermitienne associée est $h(a) = 2\sum dz_j \otimes d\overline{z}_j$ et sa partie réelle est la métrique euclidienne $2\sum (dx_j)^2 + (dy_j)^2$. Il s'ensuit que $|dx_j| = |dy_j| = 1/\sqrt{2}$, $|dz_j| = |d\overline{z}_j| = 1$, et que $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ est une base orthonormée de $(T_a^\star X, \omega)$. La formule (4.1) pour u_j, v_k dans la somme orthogonale $(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = T_X^\star \oplus \overline{T_X^\star}$ définit un produit scalaire naturel sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$. La norme d'une forme

$$u = \sum_{I,J} u_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \Lambda^\bullet(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$$

au point a est alors donnée par

$$|u(a)|^2 = \sum_{I,J} |u_{I,J}(a)|^2. \tag{6.1}$$

L'opérateur $\star$ de Hodge (4.2) peut être étendu aux formes à valeurs complexes par la formule

$$u \wedge \overline{\star v} = \langle u, v\rangle\, dV. \tag{6.2}$$

Il s'ensuit que $\star$ est une isométrie $\mathbb{C}$-linéaire

$$\star\ :\ \Lambda^{p,q}T_X^\star \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}T_X^\star.$$

Les opérateurs usuels de la géométrie hermitienne sont les opérateurs d, $\delta = -\star d\,\star$, le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ déjà définis, et leurs analogues complexes

$$\begin{cases} d = d' + d'', \\ \delta = d'^\star + d''^\star, \qquad d'^\star = (d')^\star = -\star d''\star, \qquad d''^\star = (d'')^\star = -\star d'\star, \\ \Delta' = d'd'^\star + d'^\star d', \qquad \Delta'' = d''d''^\star + d''^\star d''. \end{cases} \tag{6.3}$$

On dira qu'un opérateur est de degré pur r s'il transforme une forme de degré k en une forme de degré $k+r$, et de même, un opérateur de bidegré pur (s,t) est un opérateur qui transforme les (p,q)-formes en formes de bidegré $(p+s, q+t)$ (son degré total est alors bien entendu $r = s+t$). Ainsi d', d'', $d'^\star$, $d''^\star$, Δ', Δ'' sont de bidegrés respectifs $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$. Un autre opérateur important est l'opérateur L de bidegré $(1,1)$ défini par

$$Lu = \omega \wedge u, \tag{6.4}$$

et son adjoint $\Lambda = L^\star = \star^{-1}L\,\star$ de bidegré $(-1,-1)$:

$$\langle u, \Lambda v\rangle = \langle Lu, v\rangle. \tag{6.5}$$

Observons que le groupe unitaire $\mathrm{U}(T_X) \simeq \mathrm{U}(n)$ possède une action naturelle sur l'espace des (p,q)-formes, donnée par

$$\mathrm{U}(n) \times \Lambda^{p,q}T_X^\star \ni (g, v) \longmapsto (g^{-1})^\star v.$$

Cette action fait de $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ une représentation unitaire de $\mathrm{U}(n)$. Comme la métrique ω est invariante, il est clair que L et Λ commutent à l'action de $\mathrm{U}(n)$.

6.B. Identités de commutation

Si A, B sont des endomorphismes (de degré pur) du module gradué $M^\bullet = C^\infty(X, \Lambda^{\bullet,\bullet}T_X^\star)$, leur *commutateur gradué* (ou *crochet de Lie gradué*) est défini par

$$[A, B] = AB - (-1)^{ab}BA \tag{6.6}$$

où a, b sont les degrés de A et B respectivement. Si C est un autre endomorphisme de degré c, on a l'*identité de Jacobi* purement formelle suivante :

$$(-1)^{ca}\big[A, [B, C]\big] + (-1)^{ab}\big[B, [C, A]\big] + (-1)^{bc}\big[C, [A, B]\big] = 0. \tag{6.7}$$

Pour tout $\alpha \in \Lambda^{p,q}T_X^\star$, nous désignerons encore par α l'endomorphisme associé de type (p, q), opérant sur $\Lambda^{\bullet,\bullet}T_X^\star$ par la formule $u \mapsto \alpha \wedge u$.

Soit $\gamma \in \Lambda^{1,1}T_X^\star$ une $(1, 1)$-forme réelle. Il existe une base ω-orthogonale $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de T_X qui diagonalise les deux formes ω et γ simultanément :

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star, \qquad \gamma = \mathrm{i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \gamma_j\, \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}.$$

6.8. Proposition. *Pour toute forme* $u = \sum u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star$, *on a*

$$[\gamma, \Lambda]u = \sum_{J,K} \Big(\sum_{j\in J} \gamma_j + \sum_{j\in K} \gamma_j - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \gamma_j\Big) u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star.$$

Preuve. Si u est de type (p, q), un calcul brutal donne

$$\begin{aligned}
\Lambda u &= \mathrm{i}(-1)^p \sum_{J,K,l} u_{J,K}\, (\zeta_l \lrcorner \zeta_J^\star) \wedge (\overline{\zeta}_l \lrcorner \overline{\zeta}_K^\star), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n,\\
\gamma \wedge u &= \mathrm{i}(-1)^p \sum_{J,K,m} \gamma_m u_{J,K}\, \zeta_m^\star \wedge \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n,\\
[\gamma, \Lambda]u &= \sum_{J,K,l,m} \gamma_m\, u_{J,K} \Big(\big(\zeta_l^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner \zeta_J^\star)\big) \wedge \big(\overline{\zeta}_l^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner \overline{\zeta}_K^\star)\big)\\
&\qquad\qquad - \big(\zeta_m \lrcorner (\zeta_l^\star \wedge \zeta_J^\star)\big) \wedge \big(\overline{\zeta}_m \lrcorner (\overline{\zeta}_l^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star)\big)\Big)\\
&= \sum_{J,K,m} \gamma_m\, u_{J,K} \Big(\zeta_m^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner \zeta_J^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star\\
&\qquad\qquad + \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner \overline{\zeta}_K^\star) - \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star\Big)\\
&= \sum_{J,K} \Big(\sum_{m\in J} \gamma_m + \sum_{m\in K} \gamma_m - \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \gamma_m\Big) u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star. \qquad \square
\end{aligned}$$

6.9. Corollaire. *Pour tout* $u \in \Lambda^{p,q}T^\star_X$, *on a* $[L,\Lambda]u = (p+q-n)u$.

Preuve. En effet, si $\gamma = \omega$, les valeurs propres de γ sont $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 1$. □

Introduisons l'opérateur $B = [L,\Lambda]$ tel que $Bu = (p+q-n)u$ pour u de bidegré (p,q). Comme L est de degré 2, on obtient aussitôt $[B,L] = 2L$, et de même $[B,\Lambda] = -2\Lambda$. Ceci suggère d'introduire l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (matrices de trace nulle, avec le crochet de commutation usuel $[\alpha,\beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ des matrices), dont les 3 matrices de base

$$\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

vérifient les relations de commutation

$$[\ell,\lambda] = b, \qquad [b,\ell] = 2\ell, \qquad [b,\lambda] = -2\lambda.$$

6.11. Corollaire. *On a une action naturelle de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *sur l'espace vectoriel* $\Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X$, *i.e. un morphisme d'algèbres de Lie* $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X)$, *tel que* $\rho(\ell) = L$, $\rho(\lambda) = \Lambda$, $\rho(b) = B$.

Nous allons maintenant expliciter d'autres identités de commutation très importantes. Supposons d'abord que $X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ soit un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et que ω soit la métrique kählérienne standard,

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j.$$

Pour toute forme $u \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$ on a

$$d'u = \sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, \tag{6.12$'$}$$

$$d''u = \sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J. \tag{6.12$''$}$$

Comme le produit scalaire global L^2 est donné par

$$\langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle = \int_\Omega \sum_{I,J} u_{I,J} \overline{v}_{I,J}\, dV,$$

des calculs faciles analogues à ceux de l'exemple 4.12 montrent que

$$d'^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J), \tag{6.13$'$}$$

$$d''^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J). \tag{6.13$''$}$$

Nous énonçons d'abord un lemme dû à Akizuki et Nakano [AN54].

6.14. Lemme. *Dans* $\mathbb{C}^n$, *on a* $[d''^\star, L] = \mathrm{i}\, d'$.

Preuve. La formule (6.13″) peut se récrire plus brièvement

$$d''^\star u = -\sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial u}{\partial z_k}\Big).$$

Nous obtenons alors

$$[d''^\star, L]u = -\sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge u)\Big) + \omega \wedge \sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial u}{\partial z_k}\Big).$$

Puisque ω est à coefficients constants, on a $\dfrac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge u) = \omega \wedge \dfrac{\partial u}{\partial z_k}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
[d''^\star, L]\, u &= -\sum_k \bigg(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k}\Big) - \omega \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_k}\Big)\bigg)\\
&= -\sum_k \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \omega\Big) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k}.
\end{aligned}$$

Or, il est clair que $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \omega = -\mathrm{i}\, dz_k$, donc

$$[d''^\star, L]\, u = \mathrm{i} \sum_k dz_k \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k} = \mathrm{i}\, d'u. \qquad \square$$

Nous sommes maintenant prêts pour établir les relations de commutation de base dans le cas d'une variété kählérienne arbitraire (X, ω).

6.15. Théorème. *Si* (X, ω) *est kählérienne, alors*

$$\begin{aligned}
&[d''^\star, L] = \ \ \mathrm{i}\, d', \qquad &&[d'^\star, L] = -\mathrm{i}\, d'',\\
&[\Lambda, d''] = -\mathrm{i}\, d'^\star, \qquad &&[\Lambda, d'] = \ \ \mathrm{i}\, d''^\star.
\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de vérifier la première relation, car la seconde est la conjuguée de la première, et les relations de la deuxième ligne sont adjointes de celles de la première ligne. Si (z_j) est un système de coordonnées géodesiques en un point $x_0 \in X$, alors pour toutes (p, q)-formes u, v à support compact dans un voisinage de x_0, (5.9) implique

$$\langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle = \int_M \Big(\sum_{I,J} u_{IJ} \overline{v}_{IJ} + \sum_{I,J,K,L} a_{IJKL}\, u_{IJ} \overline{v}_{KL}\Big)\, dV,$$

avec $a_{IJKL}(z) = O(|z|^2)$ en x_0. Une intégration de parties analogue à celle pratiquée pour obtenir (4.12) et (6.13″) donne

$$d''^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\ (dz_I \wedge d\overline{z}_J) + \sum_{I,J,K,L} b_{IJKL}\, u_{IJ}\, dz_K \wedge d\overline{z}_L,$$

où les coefficients b_{IJKL} sont obtenus par dérivation des a_{IJKL}. Par conséquent nous avons $b_{IJKL} = O(|z|)$. Puisque $\partial\omega/\partial z_k = O(|z|)$, la démonstration du lemme 6.14 implique ici $[d''^\star, L]u = \mathrm{i}\, d'u + O(|z|)$, en particulier les deux termes coïncident au point $x_0 \in X$ fixé d'avance. □

6.16. Corollaire. *Si (X,ω) est kählérienne, les opérateurs de Laplace-Beltrami complexes sont tels que*

$$\Delta' = \Delta'' = \frac{1}{2}\Delta.$$

Preuve. Montrons d'abord que $\Delta'' = \Delta'$. On a

$$\Delta'' = [d'', d''^\star] = -\mathrm{i}\big[d'', [\Lambda, d']\big].$$

Puisque $[d', d''] = 0$, l'identité de Jacobi (6.7) implique

$$-\big[d'', [\Lambda, d']\big] + \big[d', [d'', \Lambda]\big] = 0,$$

donc $\Delta'' = \big[d', -\mathrm{i}[d'', \Lambda]\big] = [d', d'^\star] = \Delta'$. D'autre part

$$\Delta = [d' + d'', d'^\star + d''^\star] = \Delta' + \Delta'' + [d', d''^\star] + [d'', d'^\star].$$

Il suffit donc de prouver :

6.17. Lemme. $[d', d''^\star] = 0$, $[d'', d'^\star] = 0$.

Preuve. Nous avons $[d', d''^\star] = -\mathrm{i}\big[d', [\Lambda, d']\big]$ et (6.7) implique

$$-\big[d', [\Lambda, d']\big] + \big[\Lambda, [d', d']\big] + \big[d', [d', \Lambda]\big] = 0,$$

donc $-2\big[d', [\Lambda, d']\big] = 0$ et $[d', d''^\star] = 0$. La deuxième relation $[d'', d'^\star] = 0$ est l'adjointe de la première. □

6.18. Théorème. *Si (X,ω) est kählérienne, Δ commute avec tous les opérateurs $\star$, d', d'', $d'^\star$, $d''^\star$, L, Λ.*

Preuve. Les identités $[d', \Delta'] = [d'^\star, \Delta'] = 0$, $[d'', \Delta''] = [d''^\star, \Delta''] = 0$ et $[\Delta, \star] = 0$ sont immédiates. De plus, l'égalité $[d', L] = d'\omega = 0$ combinée avec l'identité de Jacobi implique

$$[L, \Delta'] = \big[L, [d', d'^\star]\big] = -\big[d', [d'^\star, L]\big] = \mathrm{i}[d', d''] = 0.$$

Par adjonction, nous obtenons $[\Delta', \Lambda] = 0$. □

6.C. Éléments primitifs et isomorphisme de Lefschetz

Pour établir le théorème de Lefschetz, il est commode d'utiliser la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ exhibée au Cor. 6.11. Rappelons d'abord que si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie (réelle ou complexe) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$ des matrices complexes et si $G = \exp(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ est le groupe de Lie associé, une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ de l'algèbre de Lie dans un espace vectoriel complexe V induit par exponentiation une représentation $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ du groupe G. Inversement, une représentation $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ induit par différentiation une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ de l'algèbre de Lie ; il y a donc identité entre les deux notions. Si G est compact, un lemme classique de H. Weyl montre que toute représentation de $\mathfrak{g}$ se scinde en somme directe de représentations irréductibles (on dit alors que $\mathfrak{g}$ est *réductive*) : la mesure de Haar de G permet en effet de construire une métrique hermitienne invariante sur V, et on exploite le fait que l'orthogonal d'une sous-représentation est une sous-représentation. En particulier l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(r)$ du groupe compact $\mathrm{SU}(r)$ est réductive. Il en est de même de $\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C})$ qui est la complexifiée de $\mathfrak{su}(r)$. Nous aurons besoin du lemme suivant bien connu en théorie des représentations.

6.19. Lemme. *Soit $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V, et soient*

$$L = \rho(\ell),\ \Lambda = \rho(\lambda),\ B = \rho(b) \in \mathrm{End}(V)$$

les endomorphismes de V associés aux éléments de base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Alors :

a) *$V = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}} V_\mu$ est somme directe (finie) des espaces propres de B, dont les valeurs propres μ sont des entiers. Un élément $v \in V_\mu$ est dit élément de poids pur μ.*

b) *L et Λ sont nilpotents, tels que $L(V_\mu) \subset V_{\mu+2}$, $\Lambda(V_\mu) \subset V_{\mu-2}$ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}$.*

c) *On note $P = \mathrm{Ker}\,\Lambda = \{v \in V\,;\ \Lambda v = 0\}$, qui est appelé ensemble des éléments primitifs. On a alors une décomposition en somme directe*

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P).$$

d) *V est isomorphe à une somme directe finie $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} S(m)^{\oplus\alpha_m}$ de représentations irréductibles, où $S(m) \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$ est la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ induite par la puissance symétrique m-ième de la représentation naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^2$, et $\alpha_m = \dim P_m$ est la multiplicité de la composante isotypique $S(m)$.*

e) *Si $P_\mu = P \cap V_\mu$, alors $P_\mu = 0$ pour $\mu > 0$ et $P = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z},\,\mu\leqslant 0} P_\mu$. L'endomorphisme $L^r : P_{-m} \to V_{m+2r}$ est injectif pour $r \leqslant m$ et nul pour $r > m$.*

f) $$V_\mu = \bigoplus_{r\in\mathbb{N},\, r\geqslant\mu} L^r(P_{\mu-2r}), \qquad \text{où} \qquad L^r : P_{\mu-2r} \to L^r(P_{\mu-2r}) \text{ est bijectif.}$$

g) *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $L^r : V_{-r} \to V_r$ est bijectif.*

Preuve. On fait d'abord l'observation suivante : si $v \in V_\mu$, alors Lv est de poids pur $\mu + 2$ et Λv de poids pur $\mu - 2$. En effet, on a

$$\begin{aligned} BLv &= LBv + [B, L]v = L(\mu v) + 2Lv = (\mu + 2)Lv, \\ B\Lambda v &= \Lambda Bv + [B, \Lambda]v = \Lambda(\mu v) - 2\Lambda v = (\mu - 2)\Lambda v. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $V \neq 0$ et soit $v \in V_\mu$ un vecteur propre non nul. Si les vecteurs $(\Lambda^k v)_{k\in\mathbb{N}}$ étaient tous non nuls, on aurait une infinité de vecteurs propres de B de valeurs propres $\mu - 2k$ distinctes, ce qui est impossible. Donc il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que $\Lambda^r v \neq 0$ et $\Lambda^k v = 0$ pour $k > r$, par suite $\Lambda^r v$ est un élément primitif non nul de poids pur $\mu' = \mu - 2r$. Soit maintenant $w \in P$ un élément non nul de poids pur μ (on vient de voir qu'il en existe pour au moins un $\mu \in \mathbb{C}$). Le même raisonnement que ci-dessus appliqué aux puissances $L^k w$ montre qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $L^m w \neq 0$ et $L^{m+1} w = 0$. L'espace vectoriel W de dimension $m + 1$ engendré par $w_k = L^k w$, $0 \leqslant k \leqslant m$ est stable par l'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On a en effet $Bw_k = (\mu + 2k)w_k$, $Lw_k = w_{k+1}$ par définition, tandis que

$$\begin{aligned} \Lambda w_k = \Lambda L^k w &= L^k \Lambda w - \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} L^{k-j-1}[L, \Lambda]L^j w \\ &= 0 - \sum L^{k-j-1} BL^j w = - \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} (\mu + 2j)L^{k-1} w \\ &= k(-\mu - k + 1)w_{k-1}. \end{aligned}$$

En appliquant cette relation à l'indice $k = m + 1$ pour lequel $w_{m+1} = 0$, on voit qu'on doit avoir nécessairement $\mu = -m \leqslant 0$. On remarque que $B_{\restriction W}$ est diagonalisable (les vecteurs propres étant les vecteurs w_k, de poids entiers $2k - m$), et que les éléments primitifs de W se réduisent à la droite $\mathbb{C}w$, telle que $W = \bigoplus L^r(\mathbb{C}w)$. Les propriétés (a,b,c,d) annoncées s'obtiennent alors facilement par récurrence sur $\dim V$. En considérant la représentation quotient V/W on voit en effet aussitôt par récurrence que les valeurs propres de B sont des entiers et que L, Λ sont nilpotents. Il est facile de vérifier que $W \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$ comme représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (si e_1, e_2 sont les deux vecteurs de base de $\mathbb{C}^2$, l'isomorphisme envoie $w = w_0$ sur e_1^m et w_k sur $L^k e_1^m = m(m - 1) \cdots (m - k + 1)e_1^k e_2^{m-k}$). Le fait qu'on ait une somme directe de représentations $V = V' \oplus W$ (avec $V' = W^\perp \subset V$ pour une certaine métrique $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$-invariante) entraîne par récurrence sur $\dim V$ que B est diagonalisable, ainsi que la formule $V = \bigoplus L^r(P)$ et la décomposition d).

e) La relation $[B, \Lambda] = -2\Lambda$ montre que $P = \operatorname{Ker} \Lambda$ est stable par B, par suite

$$P = \bigoplus (P \cap V_\mu) = \bigoplus P_\mu.$$

Les calculs faits plus haut montrent que les éléments primitifs purs non nuls w sont de poids $-m \leqslant 0$, de sorte que $P_\mu = 0$ si $\mu > 0$. La dernière assertion de e) résulte du fait que pour $0 \neq w \in P_{-m}$ on a $L^r w \neq 0$ si et seulement si $r \leqslant m$.

f) Conséquence immédiate de e) et de la décomposition $V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P)$, si l'on se restreint aux seuls éléments de poids pur μ ; on ne peut avoir $L^r(P_{\mu-2r}) \neq 0$ que si $r \leqslant m = -(\mu - 2r)$, soit $r \geqslant \mu$.

g) Il suffit de vérifier l'assertion dans le cas d'une représentation irréductible $V \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$. Dans ce cas, le résultat est clair, puisque les poids $2k-m$, $0 \leqslant k \leqslant m$, se répartissent symétriquement dans l'intervalle $[-m, m]$ et que V est engendré par $(L^k w)_{0\leqslant k\leqslant m}$ pour tout vecteur non nul w de V_{-m}. □

Nous retraduisons maintenant ces résultats dans le cas de la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur $V = \Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X$. La composante $\Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}T^\star_X$ s'identifie alors à l'espace propre V_μ de B de poids $\mu = k - n = p + q - n$ (par définition même de B, voir (6.9)).

6.20. Définition. *Une forme homogène $u \in \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$ est appelée primitive si $\Lambda u = 0$. L'espace des formes primitives de degré total k sera noté*

$$\operatorname{Prim}^k T^\star_X = \bigoplus_{p+q=k} \operatorname{Prim}^{p,q} T^\star_X.$$

Puisque l'opérateur Λ commute avec l'action de $\mathrm{U}(T_X) \simeq \mathrm{U}(n)$ sur l'algèbre extérieure, il est clair que $\operatorname{Prim}^{p,q} T^\star_X \subset \Lambda^{p,q}T^\star_X$ est un sous-espace $\mathrm{U}(n)$-invariant. On verra plus loin (prop. 6.24) que $\operatorname{Prim}^{p,q} T^\star_X$ est en fait une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$. Les propriétés (6.19 e, f, g) impliquent successivement

6.21. Proposition. *On a $\operatorname{Prim}^k T^\star_X = 0$ pour $k > n$. De plus, si $u \in \operatorname{Prim}^k T^\star_X$, $k \leqslant n$, alors $L^r u = 0$ pour $r > n - k$.*

6.22. Formule de décomposition primitive. *Pour tout $u \in \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$, il existe une décomposition unique*

$$u = \sum_{r\geqslant(k-n)_+} L^r u_{k-2r}, \qquad u_{k-2r} \in \operatorname{Prim}^{k-2r} T^\star_X.$$

Par conséquent, on obtient une décomposition en somme directe de représentations de $\mathrm{U}(n)$

$$\Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = \bigoplus_{r\geqslant(k-n)_+} L^r \operatorname{Prim}^{k-2r} T^\star_X,$$
$$\Lambda^{p,q}T^\star_X = \bigoplus_{r\geqslant(p+q-n)_+} L^r \operatorname{Prim}^{p-r,q-r} T^\star_X.$$

6.23. Isomorphisme de Lefschetz. *Les opérateurs linéaires*

$$L^{n-k} : \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star \longrightarrow \Lambda^{2n-k}(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star,$$
$$L^{n-p-q} : \Lambda^{p,q}T^\star_X \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}T^\star_X,$$

sont des isomorphismes pour tous les entiers $k \leqslant n$ et (p,q) tels que $p+q \leqslant n$.

6.24. Proposition. *Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q \leqslant n$, $\mathrm{Prim}^{p,q}\, T_X^\star$ est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$; plus précisément, c'est la représentation irréductible associée au plus haut poids $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q - (\varepsilon_{n-p+1} + \cdots + \varepsilon_n)$, où (ε_j) est la base canonique des caractères du sous-groupe commutatif maximal $U(1)^n \subset \mathrm{U}(n)$. La décomposition primitive de $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ ou de $\Lambda^k(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$ n'est autre que la décomposition en composantes irréductibles sous l'action de $\mathrm{U}(n)$.*

Preuve. On observe d'abord que $\mathrm{Prim}^{p,q}\, T_X^\star \neq 0$, puisqu'on a par exemple

$$dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p \wedge d\overline{z}_{p+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{p+q} \in \mathrm{Prim}^{p,q}\, T_X^\star$$

La décomposition primitive donne par ailleurs

$$\Lambda^{p,q}T_X^\star = \bigoplus_{0 \leqslant r \leqslant m} L^r\, \mathrm{Prim}^{p-r,q-r}\, T_X^\star$$

avec $m = \min(p,q)$, ce qui montre que le $\mathrm{U}(n)$-module $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ possède au moins $m+1$ composantes irréductibles non triviales, à savoir celles de chacun des termes $\mathrm{Prim}^{p-r,q-r}\, T_X^\star$, $0 \leqslant r \leqslant m$. Pour voir que ceux-ci sont irréductibles, il suffit donc de montrer que le $\mathrm{U}(n)$-module $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ possède au plus $(m+1)$ composantes irréductibles. Or, par complexification de la représentation de $\mathrm{U}(n)$, on obtient une représentation isomorphe à celle de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sur $\Lambda^p T_X^\star \otimes \Lambda^q T_X$ donnée par $g\cdot(u \otimes \xi) = (g^{-1})^\star u \otimes g_\star \xi$. La théorie des représentations du groupe linéaire montre que les composantes irréductibles d'une représentation sont en correspondance biunivoque avec les vecteurs propres pour l'action du sous-groupe de Borel B_n des matrices triangulaires supérieures. Un calcul laissé au lecteur montre que ces vecteurs propres correspondent précisément aux (p,q)-formes

$$L^r(dz_{n-p+r+1} \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{q-r}), \qquad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

dont le poids sous l'action de $U(1)^n$ est $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{q-r} - (\varepsilon_{n-p+r+1} + \cdots + \varepsilon_n)$. $\square$

7. Groupes $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ et dualité de Serre

Nous arrivons maintenant aux aspects spécifiquement holomorphes de la théorie de Hodge. Une grande partie de cette théorie a été developpée par K. Kodaira, S. Lefschetz et A. Weil. Le lecteur pourra consulter avec profit les Œuvres Complètes de Kodaira [Kod75] et le livre de A. Weil [Wei57] ; voir aussi [Wel80] pour un exposé plus récent.

Soit (X,ω) une variété *hermitienne compacte* et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r sur X. Nous noterons D_E la connexion de Chern de E, $D_E^\star = -\star D_E \star$ l'adjoint formel de D_E, et $D_E'^\star$, $D_E''^\star$ les composantes de $D_E^\star$ de type $(-1,0)$ et $(0,-1)$. Un calcul similaire à ceux faits en 4.14 montre que

$$\sigma_{D''_E}(x,\xi)\cdot s = \xi^{0,1} \wedge s, \qquad \xi \in {}^{\mathbb{R}}T_X^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_X,\mathbb{R}), \quad s \in E_x,$$

où $\xi^{(0,1)}$ est la partie de type $(0,1)$ de la 1-forme réelle ξ. Par conséquent, nous voyons que la partie principale de l'opérateur $\Delta''_E = D''_E D''^\star_E + D''^\star_E D''_E$ est

$$\sigma_{\Delta''_E}(x,\xi)\cdot s = -|\xi^{0,1}|^2 s = -\frac{1}{2}|\xi|^2 s,$$

et on a bien sûr un résultat semblable pour Δ'_E. En particulier $\sigma_{\Delta'_E} = \sigma_{\Delta''_E} = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_E}$ et Δ''_E est un opérateur elliptique auto-adjoint sur chacun des espaces $C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$. Puisque $D''^2_E = 0$, le résultat suivant se démontre de la même façon que ceux obtenus au § 4.C.

7.1. Théorème. *Pour tout bidegré (p,q), il existe une décomposition orthogonale*

$$C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E) = \mathcal{H}^{p,q}(X,E)\oplus \operatorname{Im} D''_E \oplus \operatorname{Im} D''^\star_E$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ est l'espace des formes Δ''_E-harmoniques de $C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$.

La décomposition ci-dessus montre que le sous-espace des q-cocycles du complexe $\big(C^\infty(X,\Lambda^{p,\bullet}T^\star_X\otimes E), d''\big)$ est $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)\oplus\operatorname{Im} D''_E$. De là, nous déduisons le

7.2. Théorème d'isomorphisme de Hodge. *Les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ sont de dimension finie, et il y a un isomorphisme*

$$H^{p,q}(X,E)\simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E). \qquad \square$$

Une autre conséquence intéressante est une preuve du théorème de dualité de Serre pour les variétés complexes compactes. Voir Serre [Ser55] pour une démonstration dans un contexte quelque peu plus général.

7.3. Théorème de dualité de Serre. *L'accouplement bilinéaire*

$$H^{p,q}(X,E)\times H^{n-p,n-q}(X,E^\star)\longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (s,t)\longmapsto \int_M s\wedge t$$

est une dualité non dégénérée.

Preuve. Soient $s_1\in C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$, $s_2\in C^\infty(X,\Lambda^{n-p,n-q-1}T^\star_X\otimes E)$. Puisque $s_1\wedge s_2$ est de bidegré $(n,n-1)$, nous avons

$$d(s_1\wedge s_2) = d''(s_1\wedge s_2) = d''s_1\wedge s_2 + (-1)^{p+q} s_1\wedge d''s_2. \tag{7.4}$$

La formule de Stokes implique que l'accouplement bilinéaire ci-dessus peut être factorisé au travers des groupes de cohomologie de Dolbeault. L'opérateur # défini au § 4.A est tel que

$$\# : C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)\longrightarrow C^\infty(X,\Lambda^{n-p,n-q}T^\star_X\otimes E^\star).$$

De plus, (4.20) implique

$$D''_{E^\star}(\# s) = (-1)^{\deg s} \# (D''_E)^\star s, \qquad (D''_{E^\star})^\star(\# s) = (-1)^{\deg s+1} \# D''^\star_E s,$$
$$\Delta''_{E^\star}(\# s) = \# \Delta''_E s,$$

où $D_{E^\star}$ est la connexion de Chern de $E^\star$. Par conséquent, $s \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ si et seulement si $\# s \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(X,E^\star)$. Le théorème 7.3 est alors une conséquence du fait que l'intégrale $\|s\|^2 = \int_X s \wedge \# s$ ne s'annule pas si $s \neq 0$. □

8. Cohomologie des variétés kählériennes compactes

8.A. Groupes de cohomologie de Bott-Chern

Soit X une variété complexe, non nécessairement compacte pour le moment. Les “groupes de cohomologie” suivants sont utiles pour décrire certains aspects de la théorie de Hodge des variétés complexes compactes qui ne sont pas nécessairement kählériennes.

8.1. Définition. *On définit les groupes de cohomologie de Bott-Chern de X comme étant les groupes*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) = \big(C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X) \cap \operatorname{Ker} d\big)/d'd''C^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X).$$

Alors $H^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})$ a une structure d'algèbre bigraduée, que nous appellerons algèbre de cohomologie de Bott-Chern de X.

Comme le groupe $d'd''C^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X)$ est contenu aussi bien dans le groupe des cobords $d''C^\infty(X,\Lambda^{p,q-1}T^\star_X)$ du complexe de Dolbeault que des cobords du complexe de De Rham $dC^\infty(X,\Lambda^{p+q-1}(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star)$, il y a des morphismes canoniques

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \tag{8.2}$$
$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}), \tag{8.3}$$

de la cohomologie de Bott-Chern dans la cohomologie de Dolbeault ou de De Rham. Ces morphismes sont des homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres. Il est également clair à partir de la définition que nous avons la propriété de symétrie $H^{q,p}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})}$. On peut montrer à partir de la suite spectrale de Hodge-Frölicher (voir § 10) que $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})$ est toujours de dimension finie si X est compacte.

8.B. Théorème de décomposition de Hodge

On suppose à partir de maintenant que (X,ω) est une *variété kählérienne compacte*. L'égalité $\Delta = 2\Delta''$ montre que Δ est homogène par rapport au bidegré et qu'il y a une décomposition orthogonale

$$\mathcal{H}^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}). \tag{8.4}$$

Comme $\overline{\Delta''} = \Delta' = \Delta''$, on a également $\mathcal{H}^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})}$. En utilisant le théorème d'isomorphisme de Hodge pour la cohomologie de De Rham et la cohomologie de Dolbeault, on obtient :

8.5. Théorème de Décomposition de Hodge. *Sur une variété kählérienne compacte, il y a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} &H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}) && (\textit{décomposition de Hodge}),\\ &H^{q,p}(X,\mathbb{C}) \simeq \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})} && (\textit{symétrie de Hodge}). \end{aligned}$$

Le seul point qui n'est pas a priori complètement clair est que ces isomorphismes soient indépendants de la métrique kählérienne choisie. Pour montrer que c'est bien le cas, on peut utiliser le lemme suivant, qui va nous permettre de comparer les trois types de groupes de cohomologie considérés au § 8.A.

8.6. Lemme. *Soit u une (p,q)-forme d-fermée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *u est d-exacte ;*

b$'$) *u est d'-exacte ;*

b$''$) *u est d''-exacte ;*

c) *u est $d'd''$-exacte, i.e. u peut s'écrire $u = d'd''v$.*

d) *u est orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$.*

Preuve. Il est évident que *c*) implique a), b$'$), b$''$), et que a) ou b$'$) ou b$''$) implique *d*). Il suffit donc de prouver que d) implique c). Comme $du = 0$, nous avons $d'u = d''u = 0$, et comme u est supposée orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$, le th. 7.1 implique $u = d''s$, $s \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X)$. Le théorème analogue au th. 7.1 pour d' (qui s'en déduit d'ailleurs par conjugaison) montre qu'on a $s = h + d'v + d'^\star w$, avec $h \in \mathcal{H}^{p,q-1}(X,\mathbb{C})$, $v \in C^\infty(X, \Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X)$ et $w \in C^\infty(X, \Lambda^{p+1,q-1}T^\star_X)$. Par conséquent

$$u = d''d'v + d''d'^\star w = -d'd''v - d'^\star d''w$$

grâce au lemme 6.16. Comme $d'u = 0$, la composante $d'^\star d''w$ orthogonale à $\operatorname{Ker} d'$ doit être nulle. □

Du lemme 8.6 nous déduisons le corollaire suivant, qui à son tour implique que la décomposition de Hodge ne dépend pas de la métrique kählérienne choisie.

8.7. Corollaire. *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors les morphismes naturels*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

sont des isomorphismes.

Preuve. La surjectivité de $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ vient du fait que toute classe de $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ peut être représentée par une (p,q)-forme harmonique, donc par une (p,q)-forme d-fermée; la propriété d'injectivité n'est rien d'autre que l'équivalence (8.5 b″) $\Leftrightarrow$ (8.5 c). Donc $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$, et l'isomorphisme

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

se déduit de (8.4). □

Mentionnons maintenant deux conséquences simples de la théorie de Hodge. La première concerne le calcul des groupes de cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n$. Comme $H^{p,p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})$ contient la classe non nulle $\{\omega^p\}$ et comme $H^{2p}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, la formule de décomposition de Hodge implique :

8.8. Conséquence. *Les groupes de cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n$ sont*

$$H^{p,p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \quad \textit{pour } 0 \leqslant p \leqslant n, \qquad H^{p,q}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = 0 \quad \textit{pour } p \neq q. \qquad \square$$

8.9. Proposition. *Toute p-forme holomorphe sur une variété kählérienne compacte X est d-fermée.*

Preuve. Si u est une forme holomorphe de type $(p,0)$ alors $d''u = 0$. De plus $d''^{\star}u$ est de type $(p,-1)$, donc $d''^{\star}u = 0$. Par conséquent $\Delta u = 2\Delta'' u = 0$, ce qui implique $du = 0$. □

8.10. Exemple. Considérons le *groupe de Heisenberg* $G \subset \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$, défini comme le sous-groupe des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{C}^3.$$

Soit Γ le sous-groupe discret des matrices ayant leurs coefficients x, y, z dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ (ou plus généralement dans un anneau d'entiers quadratiques imaginaires). Alors $X = G/\Gamma$ est une variété complexe compacte de dimension 3, connue sous le nom de *variété d'Iwasawa*. L'égalité

$$M^{-1}dM = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz - x dy \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que dx, dy, $dz - x dy$ sont des 1-formes holomorphes invariantes à gauche sur G. Ces formes induisent des 1-formes holomorphes sur le quotient $X = G/\Gamma$. Puisque $dz - x dy$ n'est pas d-fermée, on voit que X ne peut pas être kählérienne.

8.11. Remarque. Nous avons travaillé ici avec des coefficients constants pour simplifier les notations, mais le lecteur pourra vérifier qu'on a des résultats tout à fait analogues pour la cohomologie à valeurs dans un système local de coefficients E (fibré hermitien plat), comme au § 4.C. Il suffit de remplacer partout dans les démonstrations l'opérateur $d = d' + d''$ par $D_E = D'_E + D''_E$, et d'observer qu'on a encore $\Delta'_E = \Delta''_E = \frac{1}{2}\Delta_E$ (preuve identique à celle du Cor. (6.15)). On en déduit alors l'existence d'isomorphismes

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,E) \longrightarrow H^{p,q}(X,E), \qquad \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,E) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,E)$$

et d'une décomposition canonique

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,E).$$

Dans ce contexte, la propriété de symétrie de Hodge devient

$$\overline{H^{p,q}(X,E)} \simeq H^{q,p}(X,E^\star),$$

via l'opérateur antilinéaire # considéré aux § 4 et § 7. Ces observations sont utiles pour l'étude des variations de structure de Hodge.

8.C. Décomposition primitive et théorème de Lefschetz difficile

Nous introduisons d'abord quelques notations standard. Les *nombres de Betti* et les *nombres de Hodge* de X sont par définition

(8.12) $$b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X,\mathbb{C}), \qquad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

D'après la décomposition de Hodge, ces nombres satisfont les relations

(8.13) $$b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}, \qquad h^{q,p} = h^{p,q}.$$

En conséquence, les nombres de Betti b_{2k+1} d'une variété kählérienne compacte sont pairs. Noter que le théorème de dualité de Serre donne la relation supplémentaire $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$, vraie dès que X est compacte. Comme on va le voir, l'existence de la décomposition primitive implique beaucoup d'autres propriétés caractéristiques intéressantes de l'algèbre de cohomologie d'une variété kählérienne compacte.

8.14. Lemme. *Si $u = \sum_{r\geqslant(k-n)_+} L^r u_r$ est la décomposition primitive d'une k-forme harmonique u, alors toutes les composantes u_r sont harmoniques.*

Preuve. Comme $[\Delta, L] = 0$, on obtient $0 = \Delta u = \sum_r L^r \Delta u_r$, donc $\Delta u_r = 0$ d'après l'unicité de la décomposition. □

Notons $\mathcal{H}^k_{\rm prim}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k}\mathcal{H}^{p,q}_{\rm prim}(X,\mathbb{C})$ l'espace des k-formes harmoniques primitives et soit $h^{p,q}_{\rm prim}$ la dimension de la composante de bidegré (p,q). Le lemme (8.14) donne

$$\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{r\geqslant(p+q-n)_+} L^r\mathcal{H}^{p-r,q-r}_{\rm prim}(X,\mathbb{C}), \tag{8.15}$$

$$h^{p,q} = \sum_{r\geqslant(p+q-n)_+} h^{p-r,q-r}_{\rm prim}. \tag{8.16}$$

La Formule (8.16) peut se récrire

$$\begin{cases} \text{if} \;\; p+q\leqslant n, & h^{p,q} = h^{p,q}_{\rm prim} + h^{p-1,q-1}_{\rm prim} + \cdots \\ \text{if} \;\; p+q\geqslant n, & h^{p,q} = h^{n-q,n-p}_{\rm prim} + h^{n-q-1,n-p-1}_{\rm prim} + \cdots. \end{cases} \tag{8.16$'$}$$

8.17. Corollaire. *Les nombres de Hodge et de Betti satisfont les inégalités suivantes.*

a) *Si $k=p+q\leqslant n$, alors* $h^{p,q}\geqslant h^{p-1,q-1}$, $b_k\geqslant b_{k-2}$,

b) *Si $k=p+q\geqslant n$, alors* $h^{p,q}\geqslant h^{p+1,q+1}$, $b_k\geqslant b_{k+2}$. □

Un autre résultat important de la théorie de Hodge (qui est en fait une conséquence directe du Cor. 6.23) est le

8.18. Théorème de Lefschetz difficile. *Les morphismes de cup produit*

$$\begin{array}{lll} L^{n-k} : & H^k(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-k}(X,\mathbb{C}), & k\leqslant n, \\ L^{n-p-q} : & H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C}), & p+q\leqslant n, \end{array}$$

sont des isomorphismes. □

Une autre manière d'énoncer le théorème de Lefschetz difficile est d'introduire la *forme bilinéaire de Hodge-Riemann* sur $H^k_{\rm DR}(X,\mathbb{C})$, définie par

$$Q(u,v) = (-1)^{k(k-1)/2}\int_X u\wedge v\wedge\omega^{n-k}. \tag{8.19}$$

Le théorème de Lefschetz difficile combiné avec la dualité de Poincaré nous dit que Q est non dégénérée. De plus Q est de parité $(-1)^k$ (symétrique si k est pair, alternée si k est impair). Lorsque ω est une *métrique de Hodge*, c'est-à-dire une métrique kählérienne telle que $\{\omega\}\in H^2(X,\mathbb{Z})$, il est clair que Q prend des valeurs entières sur le réseau $H^k(X,\mathbb{Z})/(\text{torsion})$. La forme bilinéaire de Hodge-Riemann satisfait les propriétés supplémentaires suivantes : pour $p+q=k$,

(8.20′) $\quad Q(H^{p,q},H^{p',q'})=0 \quad$ si $(p',q')\neq(q,p)$,

(8.20″) $\quad$ Si $0\neq u\in H^{p,q}_{\rm prim}(X,\mathbb{C})$, $\quad$ alors $\mathrm{i}^{p-q}Q(u,\overline{u}) = \|u\|^2>0$.

En fait (8.20′) est clair, et (8.20″) sera démontré si nous vérifions que toute (p,q)-forme primitive u satisfait

$$(-1)^{k(k-1)/2} \mathrm{i}^{p-q} \omega^{n-k} \wedge \overline{u} = \star \overline{u}.$$

Puisque $\mathrm{Prim}^{p,q} T_X^\star$ est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$, il suffit de vérifier la formule pour une (p,q)-forme u bien choisie. On peut prendre par exemple $u = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p \wedge d\overline{z}_{p+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{p+q}$ dans une base orthonormale pour ω. La vérification effective est laissée au lecteur à titre d'exercice.

8.D. Description du groupe de Picard

Un autre application importante de la théorie de Hodge est une description du *groupe de Picard* $H^1(X, \mathcal{O}^\star)$ d'une variété kählérienne compacte. Nous supposons ici que X est connexe. La suite exacte exponentielle $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\star \to 1$ donne (8.21)

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}),$$

si l'on tient compte du fait que l'application $\exp(2\pi i \bullet) : H^0(X,\mathcal{O}) = \mathbb{C} \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}^\star) = \mathbb{C}^\star$ est surjective. On a $H^1(X,\mathcal{O}) \simeq H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ par l'isomorphisme de Dolbeault. La dimension de ce groupe est appelée *irrégularité de X* et elle est habituellement notée

(8.22) $$q = q(X) = h^{0,1} = h^{1,0}.$$

Par conséquent nous avons $b_1 = 2q$ et

(8.23) $$H^1(X,\mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}^q, \qquad H^0(X,\Omega_X^1) = H^{1,0}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^q.$$

8.24. Lemme. *L'image de $H^1(X,\mathbb{Z})$ dans $H^1(X,\mathcal{O})$ est un réseau.*

Preuve. Considérons le morphisme

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$$

induit par les inclusions $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathcal{O}$. Comme les groupes de cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ peuvent se calculer par des recouvrements finis constitués d'ouverts difféomorphes à des ouverts convexes, de même que toutes leurs intersections mutuelles, il est clair que $H^1(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et que l'image de $H^1(X,\mathbb{Z})$ dans $H^1(X,\mathbb{R})$ est un réseau. Il suffit donc de vérifier que l'application $H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$ est un isomorphisme. Or, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^2 & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{0,0} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{0,1} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{0,2} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

montre que l'application $H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$ correspond, pour la cohomologie de De Rham et de Dolbeault, à l'application composée

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \subset H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C}).$$

Puisque $H^{1,0}(X,\mathbb{C})$ et $H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ sont des sous-espaces complexes conjugués dans le complexifié $H^1_{DR}(X,\mathbb{C})$ de $H^1_{DR}(X,\mathbb{R})$, nous en déduisons bien que $H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ est un isomorphisme. □

Comme conséquence de ce lemme, $H^1(X,\mathbb{Z})$ est de rang $2q$, i.e., $H^1(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2q}$. Le tore complexe de dimension q

$$\mathrm{Jac}(X) = H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z}) \tag{8.25}$$

est appelé *variété jacobienne de* X. Il est isomorphe au sous-groupe de $H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ correspondant aux fibrés en droites de première classe de Chern nulle. D'autre part, le noyau de la flèche

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) = H^{0,2}(X,\mathbb{C}),$$

qui est constitué par définition des classes de cohomologie entières de type $(1,1)$, est égal à l'image du morphisme $c_1(\bullet)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. Ce sous-groupe est appelé *groupe de Néron-Severi* de X, noté $NS(X)$; son rang $\rho(X)$ est appelé *nombre de Picard* de X.

La suite exacte (8.21) donne alors

$$0 \longrightarrow \mathrm{Jac}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^\star) \xrightarrow{c_1} NS(X) \longrightarrow 0. \tag{8.26}$$

Le groupe de Picard $H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ est donc une extension du tore complexe $\mathrm{Jac}(X)$ par le $\mathbb{Z}$-module de type fini $NS(X)$.

8.27. Corollaire. *Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^n$ est $H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}^\star) \simeq \mathbb{Z}$ avec $\mathcal{O}(1)$ comme générateur, i.e. tout fibré en droites sur $\mathbb{P}^n$ est isomorphe à l'un des fibrés en droites $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. Nous avons $H^k(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}) = H^{0,k}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = 0$ pour $k \geqslant 1$ grâce à la conséq. 8.8, donc $\mathrm{Jac}(\mathbb{P}^n) = 0$ et $NS(\mathbb{P}^n) = H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, $c_1\big(\mathcal{O}(1)\big)$ est un générateur de $H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. □

9. Suite spectrale de Hodge-Frölicher

Soit X une variété complexe quelconque (i.e. non nécessairement compacte) de dimension n. Nous considérons le complexe double $K^{p,q} = C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)$ avec sa différentielle totale $d = d' + d''$. La *suite spectrale de Hodge-Frölicher* (ou *suite spectrale de Hodge vers De Rham*) est par définition la suite spectrale associée à ce complexe double.

Rappelons d'abord la machinerie algébrique des suites spectrales, qui s'applique à un complexe double arbitraire $(K^{p,q}, d' + d'')$ de modules sur un anneau. Nous supposons ici pour simplifier que $K^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$. On associe d'abord à $K^{\bullet,\bullet}$ le complexe total $(K^\bullet, d)$ tel que $K^l = \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q}$, muni de la différentielle totale $d = d' + d''$. Alors $K^\bullet$ admet une filtration décroissante formée des sous-complexes $F^pK^\bullet$ tels que

$$F^pK^l = \bigoplus_{p\leqslant j\leqslant l} K^{j,l-j}. \tag{9.1}$$

On obtient une filtration induite sur les groupes de cohomologie $H^l(K^\bullet)$ du complexe total en posant

$$F^pH^l(K^\bullet) := \mathrm{Im}\,\big(H^l(F^pK^\bullet) \to H^l(K^\bullet)\big), \tag{9.2}$$

et on note $G^pH^l(K^\bullet) = F^pH^l(K^\bullet)/F^{p+1}H^l(K^\bullet)$ le module gradué associé. La théorie des suites spectrales (voir par exemple [God57]) nous dit qu'il existe une suite de complexes doubles $E_r^{\bullet,\bullet}$, $r \geqslant 1$, munis de différentielles $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ de bidegré $(r, -r+1)$, telle que $E_{r+1} = H^\bullet(E_r)$ se calcule par récurrence comme la cohomologie du complexe $(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$, et telle que la limite $E_\infty^{p,q} = \lim_{r\to+\infty} E_r^{p,q}$ s'identifie avec le module gradué $G^\bullet H^\bullet(K^\bullet)$, de façon précise $E_\infty^{p,q} = G^pH^{p+q}(K^\bullet)$. Les termes E_1 sont définis comme les groupes de cohomologie du complexe partiel $d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ par rapport à la deuxième différentielle, c'est-à-dire

$$E_1^{p,q} = H^q\big((K^{p,\bullet}, d'')\big), \tag{9.4}$$

et la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ est induite par la première différentielle d' :

$$d' : H^q\big((K^{p,\bullet}, d'')\big) \longrightarrow H^q\big((K^{p+1,\bullet}, d'')\big). \tag{9.5}$$

En fait, on a $E_r^{p,q} = 0$ sauf si $p, q \geqslant 0$, et la limite $E_\infty = \lim E_r$ est stationnaire, plus précisément

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q} \qquad \text{lorsque } r \geqslant \max(p+1, q+2),$$

comme on le voit en considérant les indices en lesquels d_r peut être non nulle. On dit que la suite spectrale *converge* vers le gradué du module filtré $H^\bullet(K^\bullet)$, et on symbolise habituellement cette situation par la notation

$$E_1^{p,q} \Rightarrow G^pH^{p+q}(K^\bullet).$$

Un examen soigneux des termes de petit degré conduit à la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1(K^\bullet) \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2(K^\bullet). \tag{9.6}$$

On dit que la suite spectrale *dégénère* en E_{r_0} si $d_r = 0$ pour tout $r \geqslant r_0$ et pour tout bidegré (p,q). On a alors bien sûr $E_{r_0}^{\bullet,\bullet} = E_{r_0+1}^{\bullet,\bullet} = \cdots = E_\infty^{\bullet,\bullet}$.

Dans le cas de la suite spectrale de Hodge-Frölicher, les termes E_1 sont les groupes de cohomologie de Dolbeault $E_1^{p,q} = H^{p,q}(X,\mathbb{C})$, et la cohomologie du complexe total n'est autre que la cohomologie de De Rham $H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$. On obtient donc une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \Rightarrow G^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \tag{9.7}$$

de la cohomologie de Dolbeault vers la cohomologie de De Rham. La filtration correspondnate $F^p H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ des groupes de cohomologie est appelée *filtration de Hodge* (*-Frölicher*).

Supposons maintenant *X compacte*. Tous les termes $E_r^{p,q}$ sont alors des espaces vectoriels de dimension finie. Puisque $E_{r+1} = H^\bullet(E_r)$, les dimensions $\dim E_r^{p,q}$ décroissent (ou stationnent) avec r, donc $\dim E_\infty^{p,q} \leqslant \dim E_r^{p,q}$, et l'égalité a lieu si et seulement si la suite spectrale dégénère en E_r. En particulier, les nombres de Betti $b_l = \dim H^l(X,\mathbb{C})$ et les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim E_1^{p,q}$ satisfont l'inégalité

$$b_l = \sum_{p+q=l} \dim E_\infty^{p,q} \leqslant \sum_{p+q=l} \dim E_1^{p,q} = \sum_{p+q=l} h^{p,q}, \tag{9.8}$$

et l'égalité équivaut à la dégénérescence de la suite spectrale en $E_1^\bullet$. Comme conséquence, nous avons le

9.9. Théorème. *Si X est une variété complexe compacte, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *La suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en* $E_1^\bullet$.

b) *On a l'égalité* $b_l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$ *pour tout* l.

c) *Il existe un isomorphisme* $G^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ *pour tous* p,q.

Si une de ces conditions est satisfaite, l'isomorphisme c) *est défini de manière canonique.*

Nous pouvons maintenant retraduire les résultats du §8.B comme suit.

9.10. Théorème. *Si X est une variété kählérienne compacte, la suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en* E_1 *et il y a une décomposition canonique*

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad H^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})}.$$

En termes de cette décomposition, la filtration $F^p H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ *est donnée par*

$$F^p H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{j\geqslant p} H^{j,l-j}(X,\mathbb{C}).$$

En particulier, la filtration conjuguée $\overline{F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}}$ *est opposée à la filtration* $F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}$*, i.e.,*

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = F^p H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{F^{l-p+1} H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})}.$$

9.11. Définition. *Si* X *est une variété complexe compacte, nous disons que* X *admet une décomposition de Hodge si la suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en* E_1 *et si la filtration conjuguée* $\overline{F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}}$ *est opposée à* $F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}$*, i.e.,* $H^l_{\mathrm{DR}} = F^p H^l_{\mathrm{DR}} \oplus \overline{F^{l-p+1} H^l_{\mathrm{DR}}}$ *pour tout* p*.*

Si X admet une décomposition de Hodge au sens de la déf. 9.11 et si $p+q=l$, on voit immédiatement à partir de l'égalité $H^l_{\mathrm{DR}} = F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \oplus \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}}$ que

$$F^p H^l_{\mathrm{DR}} = F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \oplus (F^p H^l_{\mathrm{DR}} \cap \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}}),$$

donc on obtient un isomorphisme canonique

$$H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq F^p H^l_{\mathrm{DR}} / F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \simeq F^p H^l_{\mathrm{DR}} \cap \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}} \subset H^l_{\mathrm{DR}}. \tag{9.12}$$

Nous déduisons de là qu'il y a bien des isomorphismes canoniques

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}(X), \qquad H^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})},$$

comme attendu. Notons que (9.12) fournit une autre démonstration du fait que la décomposition de Hodge d'une variété kählérienne compacte ne dépend pas de la métrique kählérienne choisie (tous les groupes et morphismes mis en jeu dans (9.12) sont intrinsèques). En fait, nous avons montré qu'une variété kählérienne compacte satisfait une propriété encore plus forte, qu'il sera commode d'appeler *décomposition de Hodge forte*, puisque celle-ci implique trivialement l'existence d'une décomposition de Hodge au sens de la Définition 9.11.

9.13. Définition. *Si* X *est une variété complexe compacte, nous disons que* X *admet une décomposition de Hodge forte si tous les morphismes*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

sont des isomorphismes.

9.14. Remarque. Deligne [Del68, 72] a donné un critère permettant de vérifier la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge dans un contexte plus algébrique, incluant le cas de situations relatives. Plus récemment, Deligne et Illusie [DeI87] ont donné une preuve de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge qui n'utilise pas les méthodes analytiques (leur idée est de travailler en caractéristique p et de relever le résultat en caractéristique 0). Il faut observer que la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-Frölicher *n'implique pas automatiquement* la propriété de symétrie de Hodge $H^{q,p}(X,\mathbb{C}) \simeq \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})}$ ni l'existence d'une décomposition canonique des groupes de De Rham. En fait, il n'est pas difficile de montrer que la suite spectrale de Hodge-Frölicher d'une surface complexe compacte dégénère toujours en E_1 ; cependant, si X n'est pas kählérienne, alors b_1 est impair, et on peut montrer en utilisant le théorème de l'indice de Hirzebruch que $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$ et $b_1 = 2h_{1,0} + 1$ (voir [BPV84]). On peut montrer que l'existence d'une décomposition de Hodge (resp. de Hodge forte) est préservée par des morphismes de contraction (remplacement de X par X', si $\mu : X \to X'$ est une modification) ; c'est une conséquence facile de l'existence d'un foncteur image directe $\mu_\star$ agissant sur tous les groupes de cohomologie mis en jeu, tel que $\mu_\star\mu^\star = \mathrm{Id}$; dans le contexte analytique, $\mu_\star$ se construit aisément en calculant la cohomologie à l'aide des courants, puisqu'on dispose sur ceux-ci d'un foncteur image directe naturel. Comme toute variété de Moishezon admet une modification algébrique projective, nous en déduisons que les variétés de Moishezon admettent également une décomposition de Hodge forte. Il serait intéressant de savoir s'il existe des exemples de variétés complexes compactes possédant une décomposition de Hodge sans avoir une décomposition de Hodge forte (il y a en effet des exemples immédiats de complexes doubles abstraits ayant cette propriété). □

En général, quand X n'est pas kählérienne, un certain nombre d'informations intéressantes peuvent se déduire de la suite spectrale. Par exemple, (9.6) implique

$$b_1 \geqslant \dim E_2^{1,0} + (\dim E_2^{0,1} - \dim E_2^{2,0})_+. \tag{9.15}$$

Par ailleurs, $E_2^{1,0}$ est le groupe de cohomologie défini par la suite

$$d_1 = d' : E_1^{0,0} \longrightarrow E_1^{1,0} \longrightarrow E_1^{2,0},$$

et comme $E_1^{0,0}$ est l'espace des fonctions holomorphes globales sur X, la première flèche d_1 est zéro (par le principe du maximum, les fonctions holomorphes sont constantes sur chaque composante connexe de X). Donc $\dim E_2^{1,0} \geqslant h^{1,0} - h^{2,0}$. De même, $E_2^{0,1}$ est le noyau d'une application $E_1^{0,1} \to E_1^{1,1}$, donc $\dim E_2^{0,1} \geqslant h^{0,1} - h^{1,1}$. De (9.15) nous déduisons

$$b_1 \geqslant (h^{1,0} - h^{2,0})_+ + (h^{0,1} - h^{1,1} - h^{2,0})_+. \tag{9.16}$$

Une autre relation intéressante concerne la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = b_0 - b_1 + \cdots - b_{2n-1} + b_{2n}.$$

Nous utiliserons le lemme simple suivant.

9.17. Lemme. *Soit $(C^\bullet, d)$ un complexe borné d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps. Alors, la caractéristique d'Euler*

$$\chi(C^\bullet) = \sum (-1)^q \dim C^q$$

est égale à la caractéristique d'Euler $\chi\big(H^\bullet(C^\bullet)\big)$ du module de cohomologie.

Preuve. Posons

$$c_q = \dim C^q, \quad z_q = \dim Z^q(C^\bullet), \quad b_q = \dim B^q(C^\bullet), \quad h_q = \dim H^q(C^\bullet).$$

Alors

$$c_q = z_q + b_{q+1}, \qquad h_q = z_q - b_q.$$

Par conséquent nous trouvons

$$\sum(-1)^q\, c_q = \sum(-1)^q\, z_q - \sum(-1)^q\, b_q = \sum(-1)^q\, h_q. \qquad \square$$

En particulier, si le terme $E_r^\bullet$ de la suite spectrale du complexe filtré $K^\bullet$ est un complexe borné de dimension finie, on a

$$\chi(E_r^\bullet) = \chi(E_{r+1}^\bullet) = \cdots = \chi(E_\infty^\bullet) = \chi\big(H^\bullet(K^\bullet)\big)$$

car $E_{r+1}^\bullet = H^\bullet(E_r^\bullet)$ et $\dim E_\infty^l = \dim H^l(K^\bullet)$. Dans la suite spectrale de Hodge-Frölicher on a par ailleurs $\dim E_1^l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$, donc :

9.18. Théorème. *Pour toute variété complexe compacte X, la caractéristique d'Euler topologique peut s'écrire*

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = \sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} (-1)^l b_l = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} (-1)^{p+q} h^{p,q}.$$

Nous allons maintenant réinterpréter la suite spectrale de Hodge-Frölicher en termes de la suite spectrale d'hypercohomologie associée au complexe de De Rham holomorphe. Expliquons d'abord brièvement en quoi consiste cette suite spectrale. Etant donné un complexe borné de faisceaux de groupes abéliens $\mathcal{A}^\bullet$ sur un espace topologique X, les *groupes d'hypercohomologie* de $\mathcal{A}^\bullet$ sont définis comme les groupes

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) := H^k(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)),$$

où $\mathcal{L}^\bullet$ est un complexe de faisceaux acycliques (faisceaux flasques ou faisceaux de $\mathcal{C}^\infty$ modules par exemple) choisi de sorte qu'on ait un quasi-isomorphisme $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ (morphisme de complexes de faisceaux induisant un isomorphisme $\mathcal{H}^k(\mathcal{A}^\bullet) \to \mathcal{H}^k(\mathcal{L}^\bullet)$ pour les faisceaux de cohomologie). Il est aisé de voir que l'hypercohomologie ne dépend pas à isomorphisme près du complexe de faisceaux acycliques $\mathcal{L}^\bullet$ choisi. L'hypercohomologie est un foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux de groupes abéliens vers la catégorie des groupes gradués ; par définition, si $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, alors $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) \to \mathbb{H}^k(X, \mathcal{B}^\bullet)$ est un isomorphisme ; de plus, l'hypercohomologie se réduit à la cohomologie usuelle $H^k(X, \mathcal{E})$ du faisceau $\mathcal{E}$ pour un complexe $\mathcal{A}^\bullet$ réduit à un seul terme $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$. Supposons qu'on ait pour chaque terme $\mathcal{A}^p$ du complexe

$\mathcal{A}^\bullet$ une résolution $\mathcal{A}^p \to \mathcal{L}^{p,\bullet}$ par des faisceaux $\mathcal{L}^{p,q}$ acycliques, donnant lieu à un complexe double de faisceaux $(\mathcal{L}^{p,q}, d' + d'')$. Alors le complexe total associé $(\mathcal{L}^\bullet, d)$ est un complexe acyclique quasi-isomorphe à $\mathcal{A}^\bullet$, et on a donc

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) = H^k(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)).$$

Mais par ailleurs, le complexe double $K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{L}^{p,q})$ définit une suite spectrale telle que

$$E_1^{p,q} = H^q(K^{p,\bullet}, d'') = H^q(X, \mathcal{A}^p),$$

convergeant vers le gradué associé à la cohomologie du complexe total $H^k(K^\bullet) = \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet)$. On obtient donc une suite spectrale dite *suite spectrale d'hypercohomologie*

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \mathcal{A}^p) \Rightarrow G^p\mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^\bullet). \tag{9.19}$$

La filtration F^p des groupes d'hypercohomologie est obtenue par définition en prenant l'image du morphisme

$$\mathbb{H}^k(X, F^p\mathcal{A}^\bullet) \to \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet),$$

où $F^p\mathcal{A}^\bullet$ désigne le complexe tronqué à gauche

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^N \cdots.$$

Considérons maintenant le cas où X est une variété complexe quelconque et où $\mathcal{A}^\bullet = \Omega_X^\bullet$ est le complexe de De Rham holomorphe (avec la différentielle extérieure usuelle). Le lemme de Poincaré holomorphe montre que $\Omega_X^\bullet$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$, i.e., on a un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux $\mathbb{C}_X \to \Omega_X^\bullet$, où $\mathbb{C}_X$ désigne le complexe réduit à un seul terme en degré 0. Par définition de l'hypercohomologie on a donc

$$H^k(X, \mathbb{C}_X) = \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet), \tag{9.20}$$

et la suite exacte d'hypercohomologie du complexe $\Omega_X^\bullet$ fournit une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow G^pH^{p+q}(X, \mathbb{C}_X). \tag{9.21}$$

Or les groupes $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet)$ peuvent être calculés en utilisant la résolution de $\Omega_X^\bullet$ par le complexe de Dolbeault $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q}T_X^\star)$ (ces faisceaux sont bien acycliques !). On voit alors que la suite spectrale d'hypercohomologie (9.21) n'est autre que la suite spectrale de Hodge-Frölicher précédemment définie.

10. Déformations et théorèmes de semi-continuité

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la dépendance des groupes $H^{p,q}(X_t, \mathbb{C})$ ou plus généralement des groupes de cohomologie $H^q(X_t, E_t)$, lorsque la paire (X_t, E_t) dépend holomorphiquement d'un paramètre t dans un certain espace complexe S. Nous aborderons ces résultats en adoptant le point de vue original de Kodaira-Spencer, tel qu'il est développé dans leurs travaux originaux sur la théorie des déformations (voir par exemple les Oeuvres Complètes de Kodaira [Kod75]). La méthode de Kodaira-Spencer exploite les propriétés de continuité ou de semi-continuité des espaces propres des Laplaciens en fonction du paramètre t. Une autre approche fournissant des résultats plus précis consiste à utiliser le théorème des images directes de Grauert [Gra60].

10.1. Définition. *Une déformation de variétés complexes compactes est par définition un morphisme analytique propre $\sigma : \mathcal{X} \to S$ d'espaces complexes connexes, dont toutes les fibres $X_t = \sigma^{-1}(t)$ sont des variétés lisses de même dimension n, et satisfaisant l'hypothèse locale suivante :*

(H) *Tout point $\zeta \in \mathcal{X}$ admet un voisinage $\mathcal{U}$ tel qu'il existe un biholomorphisme $\psi : U \times V \to \mathcal{U}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et V un voisinage de $t = \sigma(\zeta)$, vérifiant $\sigma \circ \psi = \mathrm{pr}_2 : U \times V \to V$ (seconde projection).*

On dit alors que $(X_t)_{t\in S}$ est une famille holomorphe de déformations de l'une quelconque des fibres X_{t_0}, et que S est la base de la déformation. Une famille holomorphe de fibrés vectoriels (resp. de faisceaux) $E_t \to X_t$ est par définition une famille de fibrés (resp. faisceaux) obtenus à partir d'un fibré (resp. faisceau) global $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$, par restriction aux différentes fibres X_t.

Si S est lisse, l'hypothèse (H) équivaut à supposer que σ est une submersion holomorphe, en vertu du théorème du rang constant. Il y a néanmoins des situations où l'on doit nécessairement considérer aussi le cas de bases S singulières (par exemple lorqu'on cherche à construire la “déformation universelle” d'une variété). Dans un cadre topologique (différentiable et lisse), nous avons le lemme suivant, connu sous le nom de lemme d'Ehresmann.

10.2. Lemme d'Ehresmann. *Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ une submersion différentiable propre et lisse.*

a) *Si S est contractile, alors pour tout $t_0 \in S$, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & X_{t_0} \times S \arrow[d, "\sigma"] \\ & S \end{tikzcd}$$

où Φ est un difféomorphisme.

b) *Pour une base S quelconque, $\mathcal{X} \to S$ est un fibré (différentiablement) localement trivial. En particulier, si S est connexe, les fibres sont toutes difféomorphes.*

Preuve. a) Soit $H : S\times[0,1]\to S$ une homotopie différentiable entre $H(\bullet,0)=\mathrm{Id}_S$ et $h(\bullet,1)=$ application constante $S\to\{t_0\}$. Le produit fibré

$$\widetilde{\mathcal{X}}=\{(x,s,t)\in\mathcal{X}\times S\times[0,1]\,;\,\sigma(x)=H(s,t)\}$$

muni de la projection $\widetilde{\sigma}=\mathrm{pr}_2\times\mathrm{pr}_3 : \widetilde{\mathcal{X}}\to S\times[0,1]$ est encore une submersion différentiable, comme on le vérifie aisément. On en déduit qu'il existe un champ de vecteurs ξ sur $\widetilde{X}$ qui relève le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $S\times[0,1]$, i.e. $\sigma_\star\xi=\frac{\partial}{\partial t}$ (il existe localement des relèvements par la propriété de submersivité, et on recolle ces relèvements au moyen d'une partition de l'unité). Soit φ_t le flot de ce relèvement : alors, si $(x,s,0)\in\widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{0\}}\simeq\mathcal{X}$, on a par construction $\varphi_t(x,s,0)=(?,s,t)$, donc $\Phi=\varphi_1$ définit un difféomorphisme de $\widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{0\}}\simeq\mathcal{X}$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{1\}}\simeq X_{t_0}\times S$, commutant avec la projection sur S.

b) se déduit immédiatement de a). □

Il résulte de b) que le fibré $t\mapsto H^k(X_t,\mathbb{C})$ est un fibré localement trivial en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a par ailleurs dans chaque fibre un sous-groupe abélien libre $\mathrm{Im}\,H^k(X_t,\mathbb{Z})\subset H^k(X_t,\mathbb{C})$ de rang b_k qui engendre $H^k(X_t,\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Les matrices de transition de ce système localement constant sont dans $\mathrm{SL}_{b_k}(\mathbb{Z})$. Comme les matrices de transition sont localement constantes, le fibré $t\mapsto H^k(X_t,\mathbb{C})$ peut être muni d'une connexion D telle que $D^2=0$: cette connexion est appelée *connexion de Gauss-Manin*. Le lemme suivant nous sera utile.

10.3. Lemme. *Soit $\sigma:\mathcal{X}\to S$ une submersion différentiable propre et lisse et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de classe C^∞ au dessus de $\mathcal{X}$. Considérons une famille d'opérateurs elliptiques*

$$P_t : C^\infty(X_t,E_t)\longrightarrow C^\infty(X_t,E_t)$$

de degré δ. On suppose que P_t est autoadjoint semipositif relativement à une métrique h_t sur E_t et à une forme volume dV_t sur X_t, et tel que les coefficients de P_t, h_t et dV_t sont de classe C^∞ sur $\mathcal{X}$. Alors les valeurs propres de P_t, comptées avec multiplicité, se rangent en une suite

$$\lambda_0(t)\leqslant\lambda_1(t)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k(t)\to+\infty,$$

où la k-ième valeur propre $\lambda_k(t)$ est une fonction continue de t. De plus, si λ n'est pas dans le spectre $\{\lambda_k(t_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de P_{t_0}, la somme directe $W_{\lambda,t}\subset C^\infty(X_t,E_t)$ des espaces propres de P_t de valeurs propres $\lambda_k(t)\leqslant\lambda$ définit un fibré vectoriel $t\mapsto W_{t,\lambda}$ de classe C^∞ dans un voisinage de t_0.

Preuve. Comme les résultats sont locaux au dessus de S, on peut supposer que $\mathcal{X}=X_{t_0}\times S$ et $\mathcal{E}=\mathrm{pr}_1^\star E_{t_0}$ ont leurs fibres X_t et E_t indépendantes de t (mais les formes dV_t sur X_t et les métriques h_t sur E_t vont en général dépendre de t). Soit $\Pi_{\lambda,t}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $W_{\lambda,t}$ dans

$L^2(X_t, E_t) \simeq L^2(X_{t_0}, E_{t_0})$. Si $\Gamma(0, \lambda)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon λ dans le plan complexe, la formule de Cauchy donne

$$\Pi_{\lambda,t} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma(0,\lambda)} (z\,\mathrm{Id} - P_t)^{-1} dz,$$

où l'intégrale est vue comme une intégrale à valeurs vectorielles dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(M_{t_0}, E_{t_0})$ (il suffit de vérifier la formule sur les vecteurs propres de P_t, ce qui est élémentaire). Les démonstrations faites au § 3 montrent qu'il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels Q_t d'ordre $-\delta$, dont le symbole dépend de manière C^∞ de t (et avec uniformité des estimations par dérivation en t), tels que $P_t Q_t = \mathrm{Id} + R_t$ pour des opérateurs régularisants R_t dont le noyau dépend aussi de manière C^∞ de t. Comme Q_t est une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(X_t, E_t)$ qui dépend de manière C^∞ de t, les valeurs propres de Q_t dépendent continûment de t. Quitte à changer Q_{t_0} sur un sous-espace de dimension finie, on peut supposer que Q_{t_0} est un isomorphisme de $L^2(X_{t_0}, E_{t_0})$ sur $W^\delta(X_{t_0}, E_{t_0})$. Il en sera alors de même pour Q_t dans un voisinage de t_0, et par suite $z\,\mathrm{Id} - P_t$ est inversible si et seulement si $(z\,\mathrm{Id} - P_t)Q_t = \mathrm{Id} + R_t + zQ_t$ est inversible. Si λ n'est pas dans le spectre de P_{t_0}, on voit donc que pour tout $z \in \Gamma(0, \lambda)$ l'inverse $(z\,\mathrm{Id} - P_t)^{-1} = Q_t(\mathrm{Id} + R_t + zQ_t)^{-1}$ dépend de façon C^∞ de t comme opérateur $L^2(X_t, E_t) \to W^\delta(X_t, E_t)$, par suite $t \mapsto \Pi_{\lambda,t}$ est C^∞ au voisinage de t. Ceci entraîne que $t \mapsto W_{t,\lambda}$ est une fibration localement triviale de classe C^∞ au voisinage de t_0. La continuité de la valeur propre $\lambda_k(t)$ de P_t résulte de la constance du rang de $W_{\lambda,t}$ au voisinage de t_0, pour $\lambda = \lambda_k(t_0) \pm \varepsilon$. □

10.4. Théorème de semi-continuité (Kodaira-Spencer)**.** *Si $\mathcal{X} \to S$ est un morphisme $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse et si $\mathcal{E}$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{X}$, les dimensions $h^q(t) = h^q(X_t, \mathcal{E}_t)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement. Plus précisément, les sommes alternées*

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t), \qquad 0 \leqslant q \leqslant n = \dim X_t$$

sont des fonctions semi-continues supérieurement.

Preuve. Soit E_t le fibré vectoriel holomorphe associé à $\mathcal{E}_t$. Munissons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{X}$ de métriques hermitiennes arbitraires. D'après l'isomorphisme de Hodge pour la d''-cohomologie, on peut interpréter $H^q(X_t, \mathcal{E}_t)$ comme l'espace des formes harmoniques pour le Laplacien $\Delta_t''^q$ agissant sur $C^\infty(X_t, \Lambda^{0,q} T^\star_{X_t} \otimes E_t)$. Fixons un point $t_0 \in S$ et un réel $\lambda > 0$ qui n'appartient pas au spectre des opérateurs $\Delta_{t_0}''^q$, $0 \leqslant q \leqslant n = \dim X_t$. Alors

$$W_t^q = W_{\lambda,t}^q = \text{somme directe des espaces propres de } \Delta_t''^q \text{ de valeurs propres} \leqslant \lambda$$

définit un fibré W^q de classe C^∞ au voisinage de t_0. De plus la différentielle d_t'' commute avec Δ_t'' et envoie donc les espaces propres de $\Delta_t''^q$ dans les espaces propres de $\Delta_t''^{q+1}$ associés aux mêmes valeurs propres. Ceci montre que $(W_t^\bullet, d_t'')$ est un sous-complexe de dimension finie du complexe de Dolbeault $\big(C^\infty(X_t, \Lambda^{0,q} T^\star_{X_t} \otimes E_t), d_t''\big)$.

La cohomologie de ce sous-complexe coïncide avec $H^q(X_t,E_t)$ puisque la relation $d''_t d''^\star_t + d''^\star_t d''_t = \Delta''_t$ montre que $\frac{1}{\lambda_k} d''^\star_t$ est un opérateur d'homotopie sur le sous-complexe formé des espaces propres de valeur propre λ_k lorsque $\lambda_k \neq 0$. Si Z^q_t désigne le noyau du morphisme $d''^q_t : W^q_t \to W^{q+1}_t$, alors $z^q(t) := \dim Z^q_t$ est une fonction semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski, comme on le voit aisément en regardant le rang des mineurs de la matrice définissant le morphisme $d''^q : W^q \to W^{q+1}$. Le complexe tronqué

$$0 \to W^0_t \to W^1_t \to \cdots \to W^{q-1}_t \to Z^q_t \to 0$$

ayant pour cohomologie les groupes $H^j(X_t,E_t)$ d'indices $0 \leqslant j \leqslant q$, on obtient

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t) = z^q(t) - w^{q-1} + w^{q-2} + \cdots + (-1)^q w^0,$$

où w^q désigne le rang de W^q. La semi-continuité supérieure du membre de gauche en résulte, et celle de $h^q(t)$ est alors immédiate par récurrence sur q. □

10.5. Invariance des nombres de Hodge. *Soit $\mathcal{X} \to S$ un morphisme $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse. On suppose que les fibres X_t sont des variétés kählériennes. Alors les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants. De plus, dans la décomposition*

$$H^k(X_t,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X_t,\mathbb{C}),$$

les fibrations $t \mapsto H^{p,q}(X_t,\mathbb{C})$ définissent des sous-fibrés de classe C^∞ (en général non holomorphes) de $t \mapsto H^k(X_t,\mathbb{C})$.

Preuve. Le lemme 10.2 entraîne que les nombres de Betti $b_k = \dim H^k(X_t,\mathbb{C})$ sont constants. Comme $h^{p,q}(X_t,\mathbb{C}) = h^q(X_t,\Omega^p_{X_t})$ est semi-continue supérieurement d'après le th. 10.4 et

$$h^{p,q}(X_t) = b_k - \sum_{r+s=k,\,(r,s)\neq(p,q)} h^{r,s}(X_t),$$

ces fonctions sont en fait aussi semi-continues inférieurement. Par suite elles sont continues et donc constantes. Un théorème de Kodaira [Kod75] montre que si une fibre X_{t_0} est kählérienne, alors les fibres voisines X_t sont kählériennes et les métriques kählériennes ω_t peuvent être choisies de sorte qu'elles dépendent de manière C^∞ de t. Les espaces de (p,q)-formes harmoniques dépendent alors de manière C^∞ de t d'après le le th. 10.4, et on en déduit que $t \mapsto H^{p,q}(X_t,\mathbb{C})$ est un sous-fibré de classe C^∞ de $H^k(X_t,\mathbb{C})$. □

On peut en fait obtenir des résultats plus précis et plus généraux au moyen du théorème des images directes de Grauert [Gra60]. Rappelons qu'étant donné une application continue $f : X \to Y$ entre espaces topologiques et un faisceau $\mathcal{E}$ de groupes abéliens sur X, on définit le faisceau image directe $R^k f_\star \mathcal{E}$ sur Y comme étant le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^k(f^{-1}(U),\mathcal{E})$, pour tout ouvert U de Y. Plus généralement, étant donné un complexe de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet$, nous avons des faisceaux images directes $\mathbb{R}^q f_\star \mathcal{A}^\bullet$, obtenus à partir des préfaisceaux d'hypercohomologie

$$U \mapsto \mathbb{H}^k(f^{-1}(U), \mathcal{A}^\bullet).$$

La démonstration du théorème des images directes proposée par [FoK71] et [KiV71] (voir aussi [DoV72]) fournit les résultats fondamentaux suivants que nous admettrons.

10.6. Théorème des images directes. *Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes et $\mathcal{A}^\bullet$ un complexe borné de faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules. Alors*

a) *Les faisceaux images directes $\mathbb{R}^k \sigma_\star \mathcal{A}^\star$ sont des faisceaux cohérents sur S.*

b) *Tout point de S admet un voisinage $U \subset S$ sur lequel il existe un complexe borné $\mathcal{W}^\bullet$ de faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres dont les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^k(\mathcal{W}^\bullet)$ sont isomorphes aux faisceaux $\mathbb{R}^k\sigma_\star\mathcal{A}^\bullet$.*

c) *Si σ est à fibres équidimensionnelles ("morphisme géométriquement plat"), l'hypercohomologie de la fibre $X_t = \sigma^{-1}(t)$ à valeurs dans $\mathcal{A}^\bullet_t = \mathcal{A}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_{X_t}$ (où $\mathcal{O}_{X_t} = \mathcal{O}_\mathcal{X}/\sigma^\star \mathfrak{m}_{S,t}$), est donnée par*

$$H^k(X_t, \mathcal{A}^\bullet_t) = H^k(W^\bullet_t),$$

où $(W^\bullet_t)$ est le complexe d'espaces de dimension finie $W^k_t = \mathcal{W}^k \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathcal{O}_{S,t}/\mathfrak{m}_{S,t}$.

d) *Sous l'hypothèse du* c), *si les espaces d'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X_t, \mathcal{A}^\bullet_t)$ des fibres sont de dimension constante, les faisceaux $\mathbb{R}^k\sigma_\star\mathcal{A}^\bullet$ sont localement libres sur S.*

Les mêmes résultats sont vrais en particulier pour les images directes $R^k\sigma_\star\mathcal{E}$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{X}$, et les groupes de cohomologie $H^k(X_t, \mathcal{E}_t)$ des fibres.

On notera que la propriété d) est en fait une conséquence formelle de c), car l'hypothèse garantit que les matrices holomorphes définissant les morphismes $\mathcal{W}^k \to \mathcal{W}^{k+1}$ sont de rang constant en chaque point $t \in S$. De (10.6 b) on déduit alors le résultat suivant dû à H. Flenner [Fle81], avec une démonstration identique à celle du th. 10.4.

10.7. Théorème de semi-continuité. *Si $\mathcal{X} \to S$ est un morphisme analytique propre à fibres équidimensionnelles et si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$, les sommes alternées*

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t),$$

des dimensions $h^k(t) = h^k(X_t, \mathcal{E}_t)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement de t dans la topologie de Zariski analytique (*topologie dont les fermés sont les ensembles analytiques*).

Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ une submersion $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse. On suppose que la suite spectrale de Hodge des fibres X_t dégénère en E_1 pour tour $t \in S$ (d'après

(10.7) c'est en fait une propriété ouverte pour la topologie de Zariski analytique sur S). Si $U \subset S$ est un ouvert contractile, alors $\sigma^{-1}(U) \simeq X_t \times U$ pour toute fibre au dessus de $t \in U$. Si $\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$, $\mathbb{C}_X$ désignent les faisceaux localement constants de base $\mathcal{X}$ et de fibres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, on obtient

$$\Gamma(U, R^k\sigma_\star\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}) = H^k(\sigma^{-1}(U), \mathbb{Z}) = H^k(X_t, \mathbb{Z}),$$
$$\Gamma(U, R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}) = H^k(\sigma^{-1}(U), \mathbb{C}) = H^k(X_t, \mathbb{C}),$$

de sorte que $R^k\sigma_\star\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$ et $R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}$ sont des faisceaux localement constants sur S, de fibres $H^k(X_t, \mathbb{Z})$ et $H^k(X_t, \mathbb{C})$. Le fibré $t \mapsto H^k(X_t, \mathbb{C})$, muni de sa connexion plate D (connexion de Gauss-Manin), possède une structure holomorphe canonique induite par la composante $D^{0,1}$ de la connexion de Gauss-Manin. Le fibré plat $\bigoplus_k H^k(X_t, \mathbb{C})$ est appelé *fibré de Hodge* de la fibration $\mathcal{X} \to S$.

Considérons maintenant le complexe de De Rham relatif $(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}, d_{\mathcal{X}/S})$ de la fibration $\mathcal{X} \to S$. Ce complexe fournit une résolution du faisceau $\sigma^{-1}\mathcal{O}_S$ (image inverse “purement faisceautique” de $\mathcal{O}_S$), par suite

$$\mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} = R^k\sigma_\star(\sigma^{-1}\mathcal{O}_S) = (R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S. \tag{10.8}$$

La dernière égalité s'obtient par un argument immédiat de $\mathcal{O}_S(U)$ linéarité pour la cohomologie calculée sur les ouverts $\sigma^{-1}(U)$ (la structure complexe de $\sigma^{-1}(U)$ n'intervenant pas ici). En d'autres termes, $\mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ est le $\mathcal{O}_S$-module localement libre associé au fibré plat $t \mapsto H^q(X_t, \mathbb{C})$. On a une suite spectrale d'hypercohomologie relative

$$E_1^{p,q} = R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S} \Rightarrow G^p\mathbb{R}^{p+q}\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} = G^pR^{p+q}\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}$$

(la suite spectrale relative est obtenue simplement en “faisceautisant” la suite spectrale d'hypercohomologie absolue (9.19) du complexe $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ sur les ouverts $\sigma^{-1}(U)$). Comme la cohomologie de $\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ sur les fibres X_t n'est autre que l'espace de rang constant $H^q(X_t, \Omega^p_{X_t})$, le th. 10.6 d) montre que les faisceaux images directes $R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ sont localement libres. Par ailleurs, la filtration $F^pH^k(X_t, \mathbb{C}) \subset H^k(X_t, \mathbb{C})$ est obtenue au niveau des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres associés en prenant l'image du morphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire

$$\mathbb{R}^k\sigma_\star F^p\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow \mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S},$$

c'est donc un sous-faisceau cohérent (et même un sous-faisceau localement libre, d'après la propriété de constance du rang sur les fibres X_t). De là et de (10.8) on déduit le

10.9. Théorème (holomorphie de la filtration de Hodge). *La filtration de Hodge $F^pH^k(X_t, \mathbb{C}) \subset H^k(X_t, \mathbb{C})$ est constituée de sous-fibrés vectoriels holomorphes relativement à la structure holomorphe définie par la connexion de Gauss-Manin.*

On voit qu'en général $H^{p,q}(X_t,\mathbb{C}) = F^pH^k(X_t,\mathbb{C}) \cap \overline{F^qH^k(X_t,\mathbb{C})}$ n'a aucune raison d'être un sous-fibré holomorphe de $H^k(X_t,\mathbb{C})$ pour $p+q=k$ quelconques, bien que $H^{p,q}(X_t,\mathbb{C})$ possède une structure naturelle de fibré holomorphe (obtenue à partir du faisceau cohérent $R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$, ou comme quotient des $F^pH^k(X_t,\mathbb{C})$). Autrement dit, c'est la *décomposition* de Hodge qui n'est pas holomorphe.

10.10. Exemple. Soit $S = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ le demi-plan supérieur, et $\mathcal{X} \to S$ la famille "universelle" des courbes elliptiques au-dessus de S, définie par $X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Les deux éléments de base du fibré de Hodge $H^1(X_\tau,\mathbb{C})$, duaux de la base $(1,\tau)$ du réseau des périodes, sont $\alpha = dx - \mathrm{Re}\,\tau/\,\mathrm{Im}\,\tau\, dy$ et $\beta = (\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}dy$ ($z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ désignant la coordonnée sur X_τ). Ces éléments vérifient donc $D\alpha = D\beta = 0$ et définissent la structure holomorphe du fibré de Hodge ; le sous-fibré $H^{1,0}(X_\tau,\mathbb{C})$ engendré par la 1-forme $dz = \alpha + \tau\beta$ est bien holomorphe (comme il se doit !), cependant on voit que les composantes $\beta^{1,0} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}dz$ et $\beta^{0,1} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}d\overline{z}$ ne sont pas holomorphes en τ.

Partie II : Estimations L^2 et théorèmes d'annulation

11. Concepts de pseudoconvexité et de positivité

Les énoncés et démonstrations des théorèmes d'annulation mettent en jeu plusieurs notions de pseudoconvexité et de positivité. Nous présentons d'abord un résumé synthétique des concepts de base qui nous seront nécessaires.

11.A. Fonctions plurisousharmoniques

Les fonctions plurisousharmoniques ont été introduites indépendamment par Lelong et Oka en 1942 en vue de l'étude de la convexité holomorphe. Nous renvoyons à [Lel67, 69] pour plus de détails.

11.1. Définition. *Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisousharmonique (psh en abrégé) si*

a) *u est semi-continue supérieurement ;*

b) *pour toute droite complexe $L \subset \mathbb{C}^n$, $u_{\restriction \Omega \cap L}$ est sous-harmonique sur $\Omega \cap L$, c'est-à-dire, pour tous $a \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{C}^n$ tels que $|\xi| < d(a, \complement\Omega)$, la fonction u satisfait l'inégalité de moyenne*

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\xi)\,d\theta.$$

L'ensemble des fonctions psh sur Ω sera noté $\mathrm{Psh}(\Omega)$.

Nous donnons ci-dessous une liste de quelques propriétés fondamentales satisfaites par les fonctions psh. Ces propriétés découlent toutes facilement de la définition.

11.2. Propriétés fondamentales.

a) Toute fonction $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ est sous-harmonique en ses $2n$ variables réelles, i.e. satisfait l'inégalité de valeur moyenne sur les boules (ou sphères) euclidiennes :

$$u(a) \leqslant \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \int_{B(a,r)} u(z)\,d\lambda(z)$$

pour tout $a \in \Omega$ et tout $r < d(a, \complement\Omega$. Dans ce cas, on a ou bien $u \equiv -\infty$ ou bien $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ sur tout composante connexe de Ω.

b) Pour toute suite décroissante de fonctions psh $u_k \in \mathrm{Psh}(\Omega)$, la limite $u = \lim u_k$ est psh sur Ω.

c) Soit $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ telle que $u \not\equiv -\infty$ sur toute composante connexe de Ω. Si (ρ_ε) est une famille de noyaux régularisants, alors $u \star \rho_\varepsilon$ est C^∞ et psh sur

$$\Omega_\varepsilon = \big\{x \in \Omega\,;\, d(x, \complement\Omega) > \varepsilon\big\},$$

la famille $(u \star \rho_\varepsilon)$ est croissante en ε et $\lim_{\varepsilon\to 0} u \star \rho_\varepsilon = u$.

d) Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ et $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\chi(t_1, \ldots, t_p)$ est croissante en chaque variable t_j. Alors $\chi(u_1, \ldots, u_p)$ est psh sur Ω. En particulier $u_1 + \cdots + u_p$, $\max\{u_1, \ldots, u_p\}$, $\log(\mathrm{e}^{u_1} + \cdots + \mathrm{e}^{u_p})$ sont psh sur Ω. □

11.3. Lemme. *Une fonction $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est psh sur Ω si et seulement si la forme hermitienne $Hu(a)(\xi) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \partial^2 u/\partial z_j \partial\overline{z}_k(a)\,\xi_j\overline{\xi}_k$ est semi-positive en tout point $a \in \Omega$.*

Preuve. C'est une conséquence facile de la formule standard suivante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\xi)\,d\theta - u(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{t}\int_{|\zeta|<t} Hu(a + \zeta\xi)(\xi)\,d\lambda(\zeta),$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Le lemme 11.3 suggère fortement que la plurisousharmonicité est l'analogue complexe naturel de la propriété de convexité linéaire dans le cas réel. □

Pour des fonctions non régulières, on obtient une caractérisation analogue de la plurisousharmonicité au moyen d'un procédé de régularisation.

11.4. Théorème. *Si $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ avec $u \not\equiv -\infty$ sur toute composante connexe de Ω, alors pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$*

$$Hu(\xi) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\,\xi_j\overline{\xi}_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est une mesure positive. Inversement, si $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que $Hv(\xi)$ est une mesure positive pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique fonction $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ qui soit localement intégrable sur Ω et telle que v est la distribution associée à u. □

En vue de dégager une meilleure compréhension géométrique de la notion de plurisousharmonicité, nous supposons plus généralement que la fonction u vit sur une variété complexe X de dimension n. Si $\Phi : X \to Y$ est une application holomorphe et si $v \in C^2(Y, \mathbb{R})$, nous avons $d'd''(v \circ \Phi) = \Phi^\star d'd''v$, donc

$$H(v \circ \Phi)(a, \xi) = Hv\big(\Phi(a), \Phi'(a).\xi\big).$$

En particulier Hu, vue comme forme hermitienne sur T_X, ne dépend pas du choix des coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$. Par conséquent, la notion de fonction psh a bien un sens sur toute variété complexe. Plus généralement, nous avons

11.5. Proposition. *Si $\Phi : X \to Y$ est une application holomorphe et $v \in \mathrm{Psh}(Y)$, alors $v \circ \Phi \in \mathrm{Psh}(X)$.* □

11.6. Exemple. Il est bien connu que $\log|z|$ est psh (i.e. sous-harmonique) sur $\mathbb{C}$. Donc $\log|f| \in \mathrm{Psh}(X)$ pour toute fonction holomorphe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Plus généralement

$$\log\big(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_q|^{\alpha_q}\big) \in \mathrm{Psh}(X)$$

pour tout choix de fonctions $f_j \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ et de réels $\alpha_j \geqslant 0$ (appliquer la propriété 11.2 d avec $u_j = \alpha_j \log|f_j|$). Nous nous intéresserons plus particulièrement aux singularités de cette fonction le long de la variété des zéros $f_1 = \cdots = f_q = 0$, lorsque les α_j sont des nombres rationnels. □

11.7. Définition. *On dira qu'une fonction psh $u \in \mathrm{Psh}(X)$ a des singularités analytiques* (*resp. algébriques*) *si u peut s'écrire localement sous la forme*

$$u = \frac{\alpha}{2}\log\big(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2\big) + v,$$

avec des fonctions holomorphes (*resp. algébriques*) *f_j, $\alpha \in \mathbb{R}_+$* (*resp. $\alpha \in \mathbb{Q}_+$*), *et où v est une fonction bornée.*

Nous introduisons alors l'idéal $\mathcal{J} = \mathcal{J}(u/\alpha)$ des germes de fonctions holomorphes h telles qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ pour laquelle $|h| \leqslant C\mathrm{e}^{u/\alpha}$, i.e.

$$|h| \leqslant C\big(|f_1| + \cdots + |f_N|\big).$$

On obtient ainsi un faisceau d'idéaux globalement défini sur X, égal localement à la clôture intégrale $\overline{\mathcal{I}}$ du faisceau d'idéaux $\mathcal{I} = (f_1, \ldots, f_N)$, par suite $\mathcal{J}$ est cohérent sur X. Si $(g_1, \ldots, g_{N'})$ sont des générateurs locaux de $\mathcal{J}$, nous avons encore

$$u = \frac{\alpha}{2}\log\big(|g_1|^2 + \cdots + |g_{N'}|^2\big) + O(1).$$

D'un point de vue algébrique, les singularités de u sont en correspondance bijective avec les "données algébriques" $(\mathcal{J}, \alpha)$. Nous verrons plus loin une autre méthode encore plus importante pour associer un faisceau d'idéaux à une fonction psh.

11.B. Courants positifs

La théorie des courants a été fondée par G. De Rham [DR55]. Nous rappelons ici seulement les définitions les plus fondamentales. Le lecteur pourra consulter [Fed69] pour un exposé beaucoup plus complet de cette théorie. Dans la situation complexe, la notion spécifique importante de courant positif a été dégagée et étudiée par P. Lelong [Lel57, 69].

Un *courant* de degré q sur une variété différentiable M n'est rien d'autre qu'une q-forme différentielle Θ à coefficients distributions. L'espace des courants de degré q sur M sera noté $\mathcal{D}'^q(M)$. Alternativement, on peut considérer les courants de degré q comme les éléments Θ du dual $\mathcal{D}'_p(M) := \big(\mathcal{D}^p(M)\big)'$ de l'espace $\mathcal{D}^p(M)$ des formes différentielles C^∞ de degré $p = \dim M - q$ à support compact ; l'accouplement de dualité est donné par

$$(11.8) \qquad \langle \Theta, \alpha \rangle = \int_M \Theta \wedge \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^p(M).$$

Un exemple fondamental est le *courant d'intégration* [S] sur une sous-variété S orientée et compacte (éventuellement à bord) de M :

$$(11.9) \qquad \langle [S], \alpha \rangle = \int_S \alpha, \qquad \deg\alpha = p = \dim_{\mathbb{R}} S.$$

Alors $[S]$ est un courant à coefficients mesures, et la formule de Stokes montre que $d[S] = (-1)^{q-1}[\partial S]$, en particulier $d[S] = 0$ si et seulement si S est une sous-variété sans bord. En raison de cet exemple, l'entier p est appelé dimension de $\Theta \in \mathcal{D}'_p(M)$. On dit que le courant Θ est *fermé* si $d\Theta = 0$.

Sur une variété complexe X, nous avons des notions analogues de bidegré et de bidimension ; comme dans le cas réel, nous notons

$$\mathcal{D}'^{p,q}(X) = \mathcal{D}'_{n-p,n-q}(X), \qquad n = \dim X,$$

l'espace des courants de bidegré (p,q) et bidimension $(n-p, n-q)$ sur X. Suivant [Lel57], un courant Θ de bidimension (p,p) est dit (*faiblement*) *positif* si pour tout choix de $(1,0)$-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de classe C^∞ sur X la distribution

$$(11.10) \qquad \Theta \wedge \mathrm{i}\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p \quad \text{est une mesure positive.}$$

11.11. Exercice. Si Θ est positif, montrer que les coefficients $\Theta_{I,J}$ de Θ sont des mesures complexes, et qu'ils sont majorés à des constantes près par la mesure trace

$$\sigma_\Theta = \Theta \wedge \frac{1}{p!}\beta^p = 2^{-p}\sum \Theta_{I,I}, \qquad \text{où} \quad \beta = \frac{\mathrm{i}}{2}d'd''|z|^2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j,$$

qui est une mesure positive.
Indication. Observer que $\sum \Theta_{I,I}$ est invariant par des changements de coordonnées unitaires et que les (p,p)-formes $\mathrm{i}\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$ engendrent $\Lambda^{p,p}T^\star_{\mathbb{C}^n}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. □

On voit facilement qu'un courant $\Theta = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \Theta_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ de bidegré $(1,1)$ est positif si et seulement si la mesure complexe $\sum \lambda_j \overline{\lambda}_k \Theta_{jk}$ est une mesure positive pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

11.12. Exemple. Si u est une fonction psh (non identiquement $-\infty$) sur X, on peut associer à u un courant positif fermé $\Theta = i\partial\overline{\partial}u$ de bidegré $(1,1)$. Inversement, tout courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ peut s'écrire sous cette forme sur tout sous-ensemble ouvert $\Omega \subset X$ tel que $H^2_{DR}(\Omega,\mathbb{R}) = H^1(\Omega,\mathcal{O}) = 0$, par exemple sur des ouverts de coordonnées biholomorphes à des boules (exercice pour le lecteur). $\square$

Il n'est pas difficile de montrer qu'un produit $\Theta_1 \wedge \cdots \wedge \Theta_q$ de courants positifs de bidegré $(1,1)$ est positif chaque fois que le produit est bien défini (c'est certainement le cas si tous Θ_j sauf un au plus sont de classe C^∞) ; d'autres conditions beaucoup plus fines existent, mais nous laisserons ce sujet de côté ici.

Nous discutons maintenant un autre exemple très important de courant positif fermé. A tout ensemble analytique A fermé dans X, de dimension pure p, on associe un courant d'intégration

$$\langle [A], \alpha\rangle = \int_{A_{\mathrm{reg}}} \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^{p,p}(X), \tag{11.13}$$

obtenu en intégrant α sur l'ensemble des points réguliers de A. En vue de montrer que (11.13) donne bien une définition légitime d'un courant sur X, il faut montrer que A_{reg} est localement d'aire finie dans un voisinage de tout point de A_{sing}. Ce résultat, dû à [Lel57] peut se montrer comme suit. Supposons (après translation des coordonnées) que $0 \in A_{\mathrm{sing}}$. Du théorème de paramétrisation locale pour les ensembles analytiques, on déduit qu'il existe un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ tel que toutes les projections

$$\pi_I : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})$$

définissent des revêtements ramifiés finis de l'intersection $A \cap \Delta_I$ de A avec un petit polydisque $\Delta_I = \Delta'_I \times \Delta''_I$ de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$, sur le polydisque Δ'_I de $\mathbb{C}^p$. Soit n_I le nombre de feuillets de chacun de ces revêtements. Alors, si $\Delta = \bigcap \Delta_I$, l'aire p-dimensionnelle de $A \cap \Delta$ est majorée par la somme des aires de ses projections comptées avec multiplicités, i.e.

$$\mathrm{Aire}(A \cap \Delta) \leqslant \sum n_I \mathrm{Vol}(\Delta'_I).$$

Le fait que $[A]$ soit positif est facile. En fait, en termes de coordonnées locales $(w_1, \ldots, w_p)$ sur A_{reg}, on a

$$i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p = |\det(\alpha_{jk})|^2\, iw_1 \wedge \overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge iw_p \wedge \overline{w}_p$$

si $\alpha_j = \sum \alpha_{jk} dw_k$. Ceci montre qu'un tel produit de formes est $\geqslant 0$ par rapport à l'orientation canonique définie par $iw_1 \wedge \overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge iw_p \wedge \overline{w}_p$. Un résultat plus profond, également démontré par P. Lelong [Lel57], est que $[A]$ est un courant d-fermé sur X, en d'autres termes, l'ensemble A_{sing} (qui est de dimension réelle $\leqslant 2p-2$)

ne fournit aucune contribution au courant bord $d[A]$. Finalement, en liaison avec l'exemple 11.12, nous avons l'importante

11.14. Équation de Lelong-Poincaré. *Soit* $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ *une fonction holomorphe non nulle,* $Z_f = \sum m_j Z_j$, $m_j \in \mathbb{N}$, *le diviseur des zéros de* f, *et* $[Z_f] = \sum m_j [Z_j]$ *le courant d'intégration associé. Alors*

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [Z_f].$$

Preuve (abrégée). Il est clair que $\mathrm{i}\,d'd''\log|f| = 0$ au voisinage de tout point $x \notin \mathrm{Supp}(Z_f) = \bigcup Z_j$, par suite il suffit de vérifier l'équation au voisinage de tout point de $\mathrm{Supp}(Z_f)$. Soit A l'ensemble des points singuliers de $\mathrm{Supp}(Z_f)$, i.e. la réunion des intersections $Z_j \cap Z_k$ et des lieux singuliers $Z_{j,\mathrm{sing}}$; nous avons alors $\dim A \leqslant n-2$. Au voisinage de tout point $x \in \mathrm{Supp}(Z_f) \smallsetminus A$ il existe des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ telles que $f(z) = z_1^{m_j}$, où m_j est la multiplicité de f le long de la composante Z_j qui contient x, et où $z_1 = 0$ est une équation locale de Z_j près de x. Comme $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z| =$ mesure de Dirac δ_0 dans $\mathbb{C}$, nous trouvons $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z_1| = [\text{hyperplan } z_1 = 0]$, donc

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|f| = m_j\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z_1| = m_j[Z_j]$$

au voisinage de x. Ceci montre que l'équation est bien vérifiée sur $X \smallsetminus A$. Par suite la différence $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|f| - [Z_f]$ est un courant fermé de degré 2 à coefficients mesures, dont le support est contenu dans A. Ce courant est nécessairement nul car A est de dimension trop petite pour pouvoir porter son support (A est stratifié en sous-variétés de codimension réelle $\geqslant 4$, alors que le courant lui-même est de codimension réelle 2). $\square$

Pour conclure ce paragraphe, nous abordons maintenant les notions de cohomologie de De Rham et de Dolbeault dans le contexte de la théorie des courants. Une observation de base est que les lemmes de Poincaré et de Dolbeault-Grothendieck sont encore valables pour les courants. De façon précise, si $(\mathcal{D}'^q, d)$ et $(\mathcal{D}'(F)^{p,q}, d'')$ désignent les complexes de faisceaux des courants de degré q (resp. des courants de bidegrés (p,q) à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe F), on a encore des résolutions de De Rham et de Dolbeault faisceautiques

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{D}'^\bullet, \qquad 0 \to \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(F) \to \mathcal{D}'(F)^{p,\bullet}.$$

De là il résulte des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} H^q_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R}) &= H^q\big((\Gamma(M,\mathcal{D}'^\bullet), d)\big), \\ H^{p,q}(X,F) &= H^q\big((\Gamma(X,\mathcal{D}'(F)^{p,\bullet}), d'')\big). \end{aligned} \tag{11.15}$$

En d'autres termes, on peut attacher une classe de cohomologie $\{\Theta\} \in H^q_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R})$ à tout courant fermé Θ de degré q, resp. une classe de cohomologie $\{\Theta\} \in$

$H^{p,q}(X,F)$ à tout courant d''-fermé de bidegré (p,q). En remplaçant si nécessaire les courants mis en jeu par des représentants C^∞ de même classe de cohomologie, on voit qu'il existe un accouplement de cup produit bien défini, donné par le produit extérieur des formes différentielles

$$\begin{aligned} H^{q_1}(M,\mathbb{R}) \times \cdots \times H^{q_m}(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow H^{q_1+\cdots+q_m}(M,\mathbb{R}),\\ (\{\Theta_1\},\,\ldots\,,\{\Theta_1\}) &\longmapsto \{\Theta_1\} \wedge \cdots \wedge \{\Theta_m\}. \end{aligned}$$

En particulier, si M est une variété compacte orientée et si $q_1+\cdots+q_m = \dim M$, on obtient un nombre d'intersection bien défini

$$\{\Theta_1\}\cdot\{\Theta_2\}\cdot\,\cdots\,\cdot\{\Theta_m\} = \int_M \{\Theta_1\}\wedge\cdots\wedge\{\Theta_m\}.$$

Notons cependant que le produit ponctuel $\Theta_1\wedge\cdots\wedge\Theta_m$ n'existe pas en général.

11.C. Fibrés vectoriels positifs

Soit (E,h) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété complexe X. Son tenseur de courbure de Chern

$$\Theta(E) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\,1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu} dz_j\wedge d\overline{z}_k\otimes e_\lambda^\star\otimes e_\mu.$$

peut s'identifier à une forme hermitienne sur $T_X\otimes E$, à savoir,

$$\widetilde{\Theta}(E)(\xi\otimes v) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\,1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_\lambda\overline{v}_\mu,\qquad \overline{c}_{jk\lambda\mu} = c_{kj\mu\lambda}. \tag{11.16}$$

Ceci conduit d'une manière naturelle aux concepts de positivité, en suivant des définitions introduites par Kodaira [Kod53], Nakano [Nak55] et Griffiths [Gri66].

11.17. Définition. *Le fibré vectoriel holomorphe hermitien E est dit*

a) *positif au sens de Nakano si :*
 $\widetilde{\Theta}(E)(\tau)>0$ *pour tout tenseur non nul* $\tau=\sum\tau_{j\lambda}\partial/\partial z_j\otimes e_\lambda\in T_X\otimes E$.

b) *positif au sens de Griffiths si :*
 $\widetilde{\Theta}(E)(\xi\otimes v)>0$ *pour tout tenseur décomposable non nul* $\xi\otimes v\in T_X\otimes E$;

Les concepts de semi-positivité correspondants sont définis en relâchant les inégalités strictes en des inégalités larges.

11.18. Cas particulier des fibrés de rang 1. Supposons que E soit un fibré en droites. La matrice hermitienne $H=(h_{11})$ associée à une trivialisation $\tau : E_{\restriction\Omega}\simeq\Omega\times\mathbb{C}$ est alors simplement une fonction positive, et il sera commode de la noter $\mathrm{e}^{-2\varphi}$, $\varphi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Dans ce cas, la forme de courbure $\Theta(E)$ peut s'identifier à la $(1,1)$-forme $2d'd''\varphi$, et

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E) = \frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\varphi = dd^c\varphi \qquad \text{où}\quad d^c = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}(d''-d')$$

est une $(1,1)$-forme réelle. Donc E est semi-positif (au sens de Nakano ou au sens de Griffiths) si et seulement si φ est psh, resp. positif si et seulement si φ est *strictement psh*. Dans ce contexte, l'équation de Lelong-Poincaré peut se généraliser comme suit : soit $\sigma \in H^0(X,E)$ une section holomorphe non nulle. Alors

$$dd^c \log \|\sigma\| = [Z_\sigma] - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E). \tag{11.19}$$

La Formule (11.19) est immédiate si on écrit $\|\sigma\| = |\tau(\sigma)|\mathrm{e}^{-\varphi}$ et si on applique l'équation de Lelong-Poincaré à la fonction holomorphe $f = \tau(\sigma)$. Comme nous le verrons plus tard, il est important pour les applications de considérer aussi le cas de métriques hermitiennes singulières (cf. [Dem90b]).

11.20. Définition. *Une métrique* (*hermitienne*) *singulière sur un fibré en droites E est une métrique donnée dans toute trivialisation $\tau : E_{\restriction\Omega} \xrightarrow{\simeq} \Omega\times\mathbb{C}$ par*

$$\|\xi\| = |\tau(\xi)|\,\mathrm{e}^{-\varphi(x)}, \qquad x\in\Omega,\ \xi\in E_x$$

où $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est une fonction arbitraire, appelée poids de la métrique par rapport à la trivialisation τ.

Si $\tau' : E_{\restriction\Omega'} \to \Omega'\times\mathbb{C}$ est une autre trivialisation, φ' le poids associé et $g \in \mathcal{O}^\star(\Omega\cap\Omega')$ la fonction de transition, alors $\tau'(\xi) = g(x)\,\tau(\xi)$ pour tout $\xi\in E_x$, donc $\varphi' = \varphi + \log|g|$ sur $\Omega\cap\Omega'$. La forme de courbure de E est alors donnée formellement par le courant de bidegré $(1,1)$ $\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta(E) = dd^c\varphi$ sur Ω ; l'hypothèse $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ garantit que $\Theta(E)$ existe au sens des distributions. Comme dans le cas C^∞, la forme $\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta(E)$ est globalement définie sur X et indépendante du choix des trivialisations, et sa classe de cohomologie de De Rham est l'image de la première classe de Chern $c_1(E)\in H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$. Avant d'aller plus loin, nous discutons deux exemples fondamentaux.

11.21. Exemple. Soit $D = \sum \alpha_j D_j$ un diviseur à coefficients $\alpha_j\in\mathbb{Z}$ et soit $E = \mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé, défini comme le faisceau des fonctions méromorphes u telles que $\mathrm{div}(u) + D \geqslant 0$; le fibré en droites correspondant peut alors être muni de la métrique singulière définie par $\|u\| = |u|$ (module de la fonction méromorphe u). Si g_j est un générateur de l'idéal de D_j sur un ouvert $\Omega\subset X$, alors $\tau(u) = u\prod g_j^{\alpha_j}$ définit une trivialisation de $\mathcal{O}(D)$ sur Ω, donc notre métrique singulière est associée au poids $\varphi = \sum\alpha_j\log|g_j|$. L'équation de Lelong-Poincaré implique

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta\big(\mathcal{O}(D)\big) = dd^c\varphi = [D],$$

où $[D] = \sum\alpha_j[D_j]$ désigne le courant d'intégration sur D. □

11.22. Exemple. Supposons que $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ soient des sections holomorphes non nulles de E. On peut alors définir un métrique hermitienne naturelle (éventuellement singulière) sur $E^\star$, en posant

$$\|\xi^\star\|^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \big|\xi^\star.\sigma_j(x)\big|^2 \qquad \text{pour} \quad \xi^\star \in E^\star_x.$$

La métrique duale de E est donnée par

$$\|\xi\|^2 = \frac{|\tau(\xi)|^2}{|\tau(\sigma_1(x))|^2 + \cdots + |\tau(\sigma_N(x))|^2}$$

par rapport à toute trivialisation locale τ. La fonction poids associée est donc donnée par $\varphi(x) = \log\big(\sum_{1\leqslant j\leqslant N} |\tau(\sigma_j(x))|^2\big)^{1/2}$. Dans ce cas φ est une fonction psh, donc $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ est un courant positif fermé. Notons Σ le système linéaire défini par $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ et $B_\Sigma = \bigcap \sigma_j^{-1}(0)$ son ensemble base. On a une application méromorphe

$$\Phi_\Sigma : X \smallsetminus B_\Sigma \to \mathbb{P}^{N-1}, \qquad x \mapsto [\sigma_1(x) : \sigma_2(x) : \cdots : \sigma_N(x)].$$

Avec ces notations, la courbure $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E)$ restreinte à $X \smallsetminus B_\Sigma$ s'identifie à l'image-inverse par Φ_Σ de la métrique de Fubini-Study $\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)$ sur $\mathbb{P}^{N-1}$. Elle est donc semi-positive. □

11.23. Fibrés en droites amples et très amples. *Un fibré en droites holomorphe E sur une variété complexe compacte X est dit*

a) *très ample si l'application $\Phi_{|E|} : X \to \mathbb{P}^{N-1}$ associée au système linéaire complet $|E| = \mathbb{P}(H^0(X,E))$ est un plongement régulier (ceci sous-entend en particulier que l'ensemble base est vide, i.e. $B_{|E|} = \emptyset$).*

b) *ample s'il existe un multiple mE, $m > 0$, qui soit très ample.*

Nous utilisons ici une notation additive pour $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^\star)$, le symbole mE désigne donc le fibré en droites $E^{\otimes m}$. Grâce à l'exemple 11.22, tout fibré en droites ample E a une métrique hermitienne de classe C^∞ ayant une forme de courbure définie positive ; en effet, si le système linéaire $|mE|$ donne un plongement dans l'espace projectif, alors on obtient une métrique hermitienne de classe C^∞ sur $E^{\otimes m}$, et la racine m-ième donne une métrique sur E telle que $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E) = \frac{1}{m}\Phi^\star_{|mE|}\omega_{\mathrm{FS}}$. Inversement, le théorème de plongement de Kodaira [Kod54] nous dit que tout fibré en droites positif E est ample (voir l'exercice 15.11 pour une preuve analytique directe de ce théorème fondamental).

12. Théorie de Hodge des variétés kählériennes complètes

Le but de cette section est essentiellement d'étendre au cas des variétés kählériennes complètes les résultats de théorie de Hodge déjà démontrés dans le cas compact.

12.A. Variétés riemanniennes complètes

Avant de traiter de la situation complexe, nous aurons besoin de quelques considérations générales sur la théorie de Hodge des variétés riemanniennes complètes. Rappelons qu'une variété riemannienne (M, g) est dite *complète* si la distance géodésique δ_g est complète, ou, ce qui revient au même (lemme de Hopf-Rinow ci-dessous), si les boules géodésiques fermées sont toutes compactes. Nous aurons besoin plus précisément de la caractérisation suivante.

12.1. Lemme (Hopf-Rinow)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *(M, g) est complète ;*

b) *les boules géodésiques fermées $\overline{B}_g(a, r)$ sont compactes ;*

c) *il existe une fonction exhaustive $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $|d\psi|_g \leqslant 1$;*

d) *il existe dans M une suite exhaustive $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de compacts et des fonctions $\theta_\nu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telles que*

$$\theta_\nu = 1 \quad \textit{sur un voisinage de } K_\nu, \qquad \mathrm{Supp}\ \theta_\nu \subset K^\circ_{\nu+1},$$
$$0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad |d\theta_\nu|_g \leqslant 2^{-\nu}.$$

Preuve. a) $\Longrightarrow$ b). Le point x étant fixé, on note $r_0 = r_0(x)$ le sup des réels $r > 0$ tels que $\overline{B}_g(a, r)$ soit compacte. Supposons $r_0 < +\infty$. Etant donné une suite de points (x_ν) dans $\overline{B}_g(a, r_0)$ et $\varepsilon > 0$, on choisit une suite de points $x_{\nu,\varepsilon} \in \overline{B}(a, r_0-\varepsilon)$ telle que $\delta_g(x_\nu, x_{\nu,\varepsilon}) < 2\varepsilon$. Par compacité de $\overline{B}_g(a, r_0-\varepsilon)$, on peut extraire de $(x_{\nu,\varepsilon}$ une sous-suite convergente pour chaque $\varepsilon > 0$. Grâce à un procédé diagonal, on voit facilement qu'on peut extraire de (x_ν) une sous-suite de Cauchy. Par conséquent cette suite converge et $\overline{B}_g(a, r_0)$ est compacte. La locale compacité de M implique que $\overline{B}_g(a, r_0 + \eta)$ est encore compacte pour $\eta > 0$ assez petit, ce qui est une contradiction si $r_0 < +\infty$.

b) $\Longrightarrow$ c). Supposons M connexe. Choisissons un point $x_0 \in M$ et posons $\psi_0(x) = \frac{1}{2}\delta(x_0, x)$. Alors ψ_0 est exhaustive, et c'est une fonction lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$, donc ψ_0 est différentiable presque partout sur M. On obtient la fonction ψ cherchée par régularisation.

c) $\Longrightarrow$ d). Soit ψ comme dans a) et soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\rho = 1$ sur $]-\infty, 1.1]$, $\rho = 0$ sur $[1.99, +\infty[$ and $0 \leqslant \rho' \leqslant 2$ sur $[1, 2]$. Alors

$$K_\nu = \{x \in M \ ;\ \psi(x) \leqslant 2^{\nu+1}\}, \qquad \theta_\nu(x) = \rho\big(2^{-\nu-1}\psi(x)\big)$$

vérifient les propriétés annoncées.

d) $\Longrightarrow$ c). Poser $\psi = \sum 2^{\nu-1}(1 - \theta_\nu)$.

c) $\Longrightarrow$ b). L'inégalité $|d\psi|_g \leqslant 1$ implique $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \delta_g(x, y)$ pour tous $x, y \in M$, donc la boule géodésique $\overline{B}_g(a, r) \subset \{x \in M\ ;\ \delta_g(x, a) \leqslant \psi(a) + r\}$ est relativement compacte.

b) $\Longrightarrow$ a). C'est évident ! $\square$

Soit (M,g) une variété riemannienne, non nécessairement complète pour l'instant, et E un fibré vectoriel hermitien sur M muni d'une connexion hermitienne D. On considére l'opérateur non borné entre espaces de Hilbert encore noté D

$$D : L^2(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) \longrightarrow L^2(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E),$$

dont le domaine $\mathrm{Dom}\, D$ est défini comme suit : une section $u \in L^2$ est dite être dans $\mathrm{Dom}\, D$ si Du calculé au sens des distributions est encore dans L^2. Le domaine ainsi défini est toujours dense dans L^2, car $\mathrm{Dom}\, D$ contient l'espace $\mathcal{D}(M, \Lambda^p T_M^\star E)$ des sections C^∞ à support compact, qui est lui-même dense dans L^2. De plus, l'opérateur D ainsi défini, bien que non borné, est *fermé*, c'est-à-dire que que son graphe est fermé ; cela résulte aussitôt du fait que les opérateurs différentiels sont continus pour la topologie faible des distributions. L'adjoint formel $D^\star$ admet de même une extension en un opérateur fermé

$$D^\star : L^2(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E) \longrightarrow L^2(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E).$$

Des résultats élémentaires bien connus de théorie spectrale dûs à Von Neumann garantissent par ailleurs l'existence d'un opérateur $D^\star_{\mathcal{H}}$ fermé à domaine dense, appelé adjoint hilbertien de D, défini comme suit : un élément $v \in L^2(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E)$ est dans $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}}$ si la forme linéaire $L^2 \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle$ est continue ; elle s'écrit alors $u \mapsto \langle\!\langle u, w\rangle\!\rangle$ pour un unique élément $w \in L^2(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$. On pose $D^\star_{\mathcal{H}} v = w$, de sorte que $D^\star_{\mathcal{H}}$ est défini par la relation habituelle d'adjonction

$$\langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, D^\star_{\mathcal{H}} v\rangle\!\rangle \qquad \forall u \in \mathrm{Dom}\, D.$$

(Noter que l'adjoint formel $D^\star$, lui, est défini en exigeant seulement la validité de cette relation pour $u \in \mathcal{D}(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$). Il est clair qu'on a toujours $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}} \subset \mathrm{Dom}\, D^\star$ et que $D^\star_{\mathcal{H}} = D^\star$ sur $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}}$; en général, néanmoins, les domaines sont distincts (c'est le cas par exemple si $M =]0,1[$, $g = dx^2$, $D = d/dx$!). Une observation fondamentale est que ce phénomène ne peut se produire si la métrique riemannienne g est *complète*.

12.2. Proposition. *Si la variété (M,g) est complète, alors :*

a) *L'espace $\mathcal{D}(M, \Lambda^\bullet T_M^\star E)$ est dense dans $\mathrm{Dom}\, D$, $\mathrm{Dom}\, D^\star$ et $\mathrm{Dom}\, D \cap \mathrm{Dom}\, D^\star$ respectivement, pour les normes des graphes*

$$u \mapsto \|u\| + \|Du\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|D^\star u\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|Du\| + \|D^\star u\|.$$

b) *$D^\star_{\mathcal{H}} = D^\star$ (i.e. les deux domaines coïncident), et $D^{\star\star}_{\mathcal{H}} = D^{\star\star} = D$.*

c) *Soit $\Delta = DD^\star + D^\star D$ le laplacien calculé au sens des distributions. Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\, \Delta \subset L^2(M, \Lambda^\bullet T_M^\star E)$, on a $\langle u, \Delta u\rangle = \|Du\|^2 + \|D^\star u\|^2$. En particulier*

$$\mathrm{Dom}\, \Delta \subset \mathrm{Dom}\, D \cap \mathrm{Dom}\, D^\star, \qquad \mathrm{Ker}\, \Delta = \mathrm{Ker}\, D \cap \mathrm{Ker}\, D^\star,$$

et Δ est auto-adjoint.

d) *Si $D^2 = 0$, il y a une décomposition orthogonale*

$$L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M E) = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D} \oplus \overline{\operatorname{Im} D^\star},$$
$$\operatorname{Ker} D = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D},$$

où $\mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) = \big\{u \in L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)\,;\ \Delta u = 0\big\}$ est l'espace des formes harmoniques L^2 sur M.

Preuve. a) Il faut montrer par exemple que tout élément $u \in \operatorname{Dom} D$ peut être approximé pour la norme du graphe de D par des formes C^∞ à support compact. Par hypothèse, u et Du sont dans L^2. Soit (θ_ν) une suite de fonctions tronquantes comme dans le lemme 12.1 d). Alors $\theta_\nu u \to u$ dans $L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)$ et $D(\theta_\nu u) = \theta_\nu Du + d\theta_\nu \wedge u$ où

$$|d\theta_\nu \wedge u| \leqslant |d\theta_\nu|\ |u| \leqslant 2^{-\nu}|u|.$$

Par suite $d\theta_\nu \wedge u \to 0$ et $D(\theta_\nu u) \to Du$. Après avoir remplacé u par $\theta_\nu u$, on peut supposer que u est à support compact, et à l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas où $\operatorname{Supp} u$ est contenu dans une carte de coordonnées de M sur laquelle E est trivial. Soit (ρ_ε) une famille de noyaux régularisants. Un lemme classique en théorie des EDP (lemme de Friedrichs), montre que pour tout opérateur différentiel P d'ordre 1 à coefficients de classe C^1 on a $\|P(\rho_\varepsilon \star u) - \rho_\varepsilon Pu\|_{L^2} \to 0$ lorsque ε tend vers 0 (u étant une section L^2 à support compact dans la carte considérée). En appliquant ce lemme à $P = D$, $P = D^\star$ respectivement, on déduit les propriétés de densité voulues.

b) est équivalent au fait que

$$\langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, D^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \forall u \in \operatorname{Dom} D, \quad \forall v \in \operatorname{Dom} D^\star.$$

Or, d'après a), on peut trouver $u_\nu,\ v_\nu \in \mathcal{D}(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)$ tels que

$$u_\nu \to u, \quad v_\nu \to v, \quad Du_\nu \to Du \quad \text{et} \quad D^\star v_\nu \to D^\star v \quad \text{dans} \quad L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E).$$

L'égalité cherchée est alors la limite des égalités $\langle\!\langle Du_\nu, v_\nu\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u_\nu, D^\star v_\nu\rangle\!\rangle$.

c) Soit $u \in \operatorname{Dom}\Delta$. Comme $\Delta u \in L^2$ et que Δ est un opérateur elliptique d'ordre 2, on obtient $u \in W^2_{\mathrm{loc}}$ grâce à la version locale de l'inégalité de Gårding. En particulier $Du,\ D^\star u \in W^1_{\mathrm{loc}} \subset L^2_{\mathrm{loc}}$ et nous pouvons effectuer toutes les intégrations par parties que nous voulons après avoir multiplié les formes mises en jeu par des fonctions C^∞ à support compact θ_ν. Des calculs simples donnent alors

$$\begin{aligned}
&\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 = \\
&= \langle\!\langle \theta_\nu^2 Du, Du\rangle\!\rangle + \langle\!\langle u, D(\theta_\nu^2 D^\star u)\rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle D(\theta_\nu^2 u), Du\rangle\!\rangle + \langle\!\langle u, \theta_\nu^2 DD^\star u\rangle\!\rangle - 2\langle\!\langle \theta_\nu d\theta_\nu \wedge u, Du\rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle u, \theta_\nu d\theta_\nu \wedge D^\star u\rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle - 2\langle\!\langle d\theta_\nu \wedge u, \theta_\nu Du\rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle u, d\theta_\nu \wedge (\theta_\nu D^\star u)\rangle\!\rangle \\
&\leqslant \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{-\nu}\big(2\|\theta_\nu Du\|\ \|u\| + 2\|\theta_\nu D^\star u\|\ \|u\|\big) \\
&\leqslant \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{-\nu}\big(\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 + 2\|u\|^2\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 \leqslant \frac{1}{1-2^{-\nu}}\big(\langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{1-\nu}\|u\|^2\big).$$

En faisant tendre ν vers $+\infty$, on obtient $\|Du\|^2+\|D^\star u\|^2 \leqslant \langle\!\langle u, \Delta u\rangle\!\rangle$, en particulier Du, $D^\star u$ sont dans L^2. Ceci implique

$$\langle\!\langle u, \Delta v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle Du, Dv\rangle\!\rangle + \langle\!\langle D^\star u, D^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \forall u, v \in \operatorname{Dom}\Delta,$$

parce que l'égalité a lieu pour $\theta_\nu u$ et v, et parce que nous avons $\theta_\nu u \to u$, $D(\theta_\nu u) \to Du$ et $D^\star(\theta_\nu u) \to D^\star u$ dans L^2. Il en résulte que Δ est auto-adjoint.

d) Si P est un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $\operatorname{Ker} P$ et fermé et $\operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Im} P)^\perp$. Par suite $(\operatorname{Ker} P^\star)^\perp = (\operatorname{Im} P)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} P}$. Comme $\operatorname{Ker} P^\star$ est lui aussi fermé il vient

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} P^\star \oplus (\operatorname{Ker} P^\star)^\perp = \operatorname{Ker} P^\star \oplus \overline{\operatorname{Im} P}.$$

Ce résultat appliqué à $P = \Delta$ donne

$$\mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M, E) = \operatorname{Ker}\Delta \oplus \overline{\operatorname{Im}\Delta},$$

et il est clair d'après (12.2 c) que $\overline{\operatorname{Im}\Delta} \subset \overline{\operatorname{Im} D} \oplus \overline{\operatorname{Im} D^\star}$. Mais par ailleurs, on voit facilement que $\operatorname{Ker}\Delta$, $\overline{\operatorname{Im} D}$ et $\overline{\operatorname{Im} D^\star}$ sont deux à deux orthogonaux en utilisant (12.2 a,c). La propriété d) s'ensuit comme dans le cas où M est compacte. □

12.3. Définition. *Etant donné une variété riemannienne (M, g) et un fibré hermitien E muni d'une connexion hermitienne plate D, on note $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)$ les groupes de cohomologie de De Rham L^2, à savoir les groupes de cohomologie du complexe $(K^\bullet, D)$ défini par*

$$K^p = \big\{u \in L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)\,;\, Du \in L^2\big\}.$$

En d'autres termes, on a $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E) = \operatorname{Ker} D/\operatorname{Im} D$ où D est l'extension L^2 de la connexion, calculée au sens des distributions. Comme $\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E) = \operatorname{Ker} D/\overline{\operatorname{Im} D}$ d'après (12.2 d), il s'ensuit :

12.4. Proposition. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E) \simeq H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)_{\mathrm{sep}}$$

entre $\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E)$ et l'espace séparé associé à la cohomologie de De Rham L^2.

En général l'espace $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)$ n'est pas toujours séparé, mais il l'est dans le cas important où la cohomologie L^2 est de dimension finie :

12.5. Corollaire. *Si (M,g) est complète et si $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M,E)$ est de dimension finie, alors cet espace est séparé et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^p_{L^2}(M,E) \simeq H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M,E).$$

Preuve. L'espace K^p peut être considéré comme un espace de Hilbert pour la norme $u \mapsto (\|u\|_{L^2} + \|Du\|_{L^2})^{1/2}$. Il s'agit de voir que $\operatorname{Im} D = D(K^{p-1})$ est fermé dans $\operatorname{Ker} D$, $\operatorname{Ker} D$ étant lui-même fermé dans K^p. Or $D : K^{p-1} \to \operatorname{Ker} D$ est continu et son image est de codimension finie par hypothèse. Le fait que l'image soit fermée est alors une conséquence directe du théorème de Banach. □

12.6. Remarque. Pour la cohomologie de De Rham L^2, on peut observer qu'on obtient des groupes de cohomologie identiques en travaillant avec le sous-complexe des formes C^∞ globalement L^2, c'est-à-dire

$$\widetilde{K}^p = \big\{u \in C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)\,;\, u \in L^2 \text{ et } Du \in L^2\big\} \subset K^p.$$

Pour cela, il suffit de construire un opérateur $\widetilde{K}^\bullet \to K^\bullet$ qui soit un inverse homotopique de l'inclusion ; ceci peut se faire en utilisant une régularisation par des flots de champs de vecteurs tendant vers 0 suffisamment vite à l'infini. □

12.B. Cas des variétés hermitiennes et kählériennes complètes

Les résultats précédents admettent bien entendu des analogues complexes, avec des démonstrations quasiment identiques (les détails seront donc laissés au lecteur). On dira qu'une variété hermitienne ou kählérienne (X,ω) est *complète* si la variété riemannienne sous-jacente est complète.

12.7. Proposition. *Soit (X,ω) une variété hermitienne complète et E un fibré holomorphe hermitien sur X. Il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E) \simeq H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}$$

entre l'espace des formes harmoniques L^2 et le groupe de cohomologie de Dolbeault L^2 séparé, ce dernier espace étant lui-même égal à $H^{p,q}_{L^2}(M,E)$ si la cohomologie de Dolbeault est de dimension finie.

12.8. Corollaire. *Soit (X,ω) une variété kählérienne et E un fibré hermitien plat sur X.*

a) *Sans autre hypothèse, on a pour tout k une décomposition orthogonale*

$$\mathcal{H}^k_{L^2}(M,E) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E), \qquad \overline{\mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E)} = \mathcal{H}^{q,p}_{L^2}(M,E^\star).$$

b) *Si de plus (X,ω) est complète, il y a des isomorphismes canoniques*

$$H^k_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}} \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}, \qquad \overline{H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}} \simeq H^{q,p}_{L^2}(M,E^\star)_{\mathrm{sep}}.$$

c) *Si (X,ω) est complète, et si les groupes de cohomologie de De Rham et de Dolbeault L^2 sont de dimension finie, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^k_{L^2}(M,E) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{L^2}(M,E), \qquad \overline{H^{p,q}_{L^2}(M,E)} \simeq H^{q,p}_{L^2}(M,E^\star).$$

12.C. Théorie de Hodge des variétés kählériennes faiblement pseudoconvexes

Les variétés kählériennes *faiblement pseudoconvexes* fournissent un exemple important de variétés kählériennes complètes.

12.9. Définition. *Une variété complexe X est dite faiblement pseudoconvexe s'il existe une fonction d'exhaustion psh ψ de classe C^∞ sur X (rappelons qu'une fonction ψ est dite exhaustive si pour tout $c > 0$ l'ensemble de sous-niveau $X_c = \psi^{-1}(c)$ est relativement compact, i.e. $\psi(z)$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers l'infini suivant le filtre des complémentaires de parties compactes de X).*

En particulier, les variétés complexes compactes X sont faiblement pseudoconvexes (prendre $\psi = 0$), de même que les variétés de Stein, par exemple les sous-variétés algébriques affines de $\mathbb{C}^N$ (prendre $\psi(z) = |z|^2$), les boules ouvertes $X = B(z_0,r)$ $\big($prendre $\psi(z) = 1/(r - |z-z_0|^2)\big)$, les ouverts convexes, etc. Une observation de base est la suivante :

12.10. Proposition. *Toute variété kählérienne (X,ω) faiblement pseudoconvexe possède une métrique kählérienne complète $\widehat{\omega}$.*

Preuve. Pour toute fonction convexe croissante $\chi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nous considérons $(1,1)$-forme fermée

$$\omega_\chi = \omega + \mathrm{i}\, d'd''(\chi\circ\psi) = \omega + \chi'(\psi)\,\mathrm{i}\, d'd''\psi + \chi''(\psi)\,\mathrm{i}\, d'\psi\wedge d''\psi.$$

Comme les trois termes sont positifs ou nuls, c'est une métrique kählérienne. La présence du troisième terme implique que la norme de $\chi''(\psi)^{1/2}d\psi$ par rapport à ω_χ est inférieure ou égale à 1, donc si ρ est une primitive de $(\chi'')^{1/2}$ nous avons $|d(\rho\circ\psi)|_{\omega_\chi} \leqslant 1$. D'après (12.1 c), ω_χ sera complète dès que $\rho\circ\psi$ est exhaustive, c'est-à-dire dès que $\lim_{+\infty}\rho(t) = +\infty$. On obtient donc la condition suffisante

$$\int_{t_0}^{+\infty} \chi''(t)^{1/2}dt = +\infty,$$

qui est réalisée par exemple pour le choix $\chi(t) = t^2$ ou $\chi(t) = t - \log t$, $t \geqslant 1$. $\square$

Nous allons maintenant établir un théorème de décomposition de Hodge pour des variétés kählériennes faiblement pseudoconvexes ayant "suffisamment de directions strictement pseudoconvexes". Suivant Andreotti-Grauert [AG62], nous introduisons la :

12.11. Définition. *Une variété complexe X sera dite ℓ-convexe (resp. absolument ℓ-convexe) si X possède une fonction d'exhaustion (resp. une fonction d'exhaustion psh) ψ qui est fortement ℓ-convexe sur le complémentaire $X \smallsetminus K$ d'une partie compacte, i.e. telle que $\mathrm{i}\, d'd''\psi$ a au moins $n-\ell+1$ valeurs propres positives en tout point de $X \smallsetminus K$, où $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.*

12.12. Exemple. Soit $\overline{X}$ une variété projective lisse telle qu'il existe un morphisme surjectif $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ sur une autre variété projective lisse $\overline{Y}$. Soit D un diviseur de $\overline{Y}$ et soient $X = \overline{X} \smallsetminus F^{-1}(D)$, $Y = \overline{Y} \smallsetminus D$. On suppose que F induit une submersion $\overline{X} \smallsetminus F^{-1}(D) \to \overline{Y} \smallsetminus D$ et que $\mathcal{O}(D)_{\restriction D}$ est ample. Alors X est absolument ℓ-convexe pour $\ell = \dim X - \dim Y + 1$. En effet, l'hypothèse d'amplitude de $\mathcal{O}(D)_{\restriction D}$ entraîne qu'il existe une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(D)$ dont la courbure est définie positive au voisinage de D, c'est-à-dire sur un ouvert de la forme $\overline{Y} \smallsetminus K'$ où K' est une partie compacte de $\overline{Y} \smallsetminus D$. Soit $\sigma \in H^0(\overline{Y}, \mathcal{O}(D))$ la section canonique de diviseur D. Alors $-\log|\sigma|^2$ est fortement psh sur $Y \smallsetminus K'$, par suite $\psi = -\log|\sigma \circ F|^2$ est psh et fortement ℓ-convexe sur $X \smallsetminus K$, où $K = F^{-1}(K')$. Par ailleurs, ψ définit clairement une exhaustion de X. On ne sait rien de ψ sur K, mais il suffit de tronquer ψ en prenant un maximum régularisé $\psi_C = \max_\varepsilon(\psi, C)$ avec une constante $C > \sup_K \psi$ pour obtenir une fonction ψ_C partout psh sur X. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition de Hodge pour les variétés absolument ℓ-convexes. Ce résultat est dû à T. Ohsawa [Ohs81, 87] ; nous en présentons ici une démonstration simplifiée décrite dans [Dem90a]. Une approche purement algébrique de ces résultats a été proposée par Bauer-Kosarew [BaKo89, 91] et [Kos91].

12.13. Théorème (Ohsawa [Ohs81, 87], [OT88])**.** *Soit (X, ω) une variété kählérienne et $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. On suppose que X est absolument ℓ-convexe. Alors, en des degrés convenables, il y a décomposition et symétrie de Hodge:*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}), \qquad \overline{H^{p,q}(X, \mathbb{C})} \simeq H^{q,p}(X, \mathbb{C}), \qquad k \geqslant n + \ell,$$

$$H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_c(X, \mathbb{C}), \qquad \overline{H^{p,q}_c(X, \mathbb{C})} \simeq H^{q,p}_c(X, \mathbb{C}), \qquad k \leqslant n - \ell,$$

tous ces groupes étant de dimension finie. ($H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X, \mathbb{C})$ et $H^{p,q}_c(X, \mathbb{C})$ désignent ici les groupes de cohomologie à support compact). De plus, on a un isomorphisme de Lefschetz

$$\omega^{n-p-q} \wedge \bullet \quad : \quad H^{p,q}_c(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X, \mathbb{C}), \qquad p + q \leqslant n - \ell.$$

Preuve. La finitude des groupes de cohomologie de De Rham mis en jeu s'obtient facilement au moyen de la théorie de Morse. Rappelons brièvement l'argument : une petite perturbation convenable d'une exhaustion fortement ℓ-convexe donne une fonction de Morse ψ qui est encore fortement ℓ-convexe sur le complémentaire $X \smallsetminus K$ d'un compact; le Hessien réel $D^2\psi$ de ψ en un point critique induit une forme hermitienne sur l'espace tangent complexifié $\mathbb{C} \otimes T_X$, et sa restriction à $T_X^{1,0}$ s'identifie au Hessien complexe $\mathrm{i}\,d'd''\psi$; comme le Hessien complexe a par hypothèse au moins $n-\ell+1$ valeurs propres positives sur $X \smallsetminus K$, il en résulte que $D^2\psi$ a au plus $2n-(n-\ell+1) = n+\ell-1$ valeurs propres négatives sur $X \smallsetminus K$, sans quoi les espaces propres positifs et négatifs de $D^2\psi$ auraient une intersection non triviale. Par suite tous les points critiques d'indice $\geqslant n+\ell$ sont situés dans K et leur nombre est fini. Ceci entraîne que les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ de degré $k \geqslant n+\ell$ sont de dimension finie. La finitude des groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,\mathbb{C}) = H^q(X,\Omega^p_X)$ résulte quant à elle du théorème d'Andreotti-Grauert [AG62] (*tous les groupes de cohomologie de degré supérieur à ℓ à valeurs dans un faisceau cohérent quelconque sont séparés et de dimension finie si la variété est ℓ-convexe*). On notera toutefois que la ℓ-convexité, bien que suffisante pour assurer la finitude des différents groupes mis en jeu, ne suffit pas à garantir l'existence d'une décomposition de Hodge, ni même la symétrie de Hodge; le lecteur trouvera un contre-exemple simple dans Grauert-Riemenschneider [GR70].

Soit maintenant ω une métrique kählérienne sur X et ψ une fonction d'exhaustion psh fortement ℓ-convexe sur $X \smallsetminus K$. Comme on va le voir, l'existence d'une décomposition de Hodge résulte directement du fait qu'on a une telle décomposition pour les formes harmoniques L^2. Le point-clé réside dans l'observation que toute forme L^2_{loc} de degré $k \geqslant n+\ell$ devient globalement L^2 pour un choix convenable de métrique $\omega_\chi = \omega + \mathrm{i}\,d'd''(\chi\circ\psi)$; les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ et $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ pourront alors être considérés comme des limites inductives de groupes de cohomologie L^2. Dans la suite, on désignera par des notations telles que $L^2_{\omega_\chi}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)$, $\mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$ les espaces de formes (resp. de formes harmoniques) L^2 relativement à ω_χ. Puisque ω_χ est kählérienne, on a

$$(12.14)\quad \mathcal{H}^k_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C}),\quad \overline{\mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C})} = \mathcal{H}^{q,p}_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C}),$$

avec un isomorphisme $\mathcal{H}^k_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C}) \simeq H^k_{L^2,\omega_\chi}(M,\mathbb{C})_{\mathrm{sep}}$ dès lors que ω_χ est complète. Dans la suite, on supposera toujours que ω_χ est complète, il suffit d'imposer par exemple $\chi''(t) \geqslant 1$ sur $[0,+\infty[$.

12.15. Lemme. *Soit u une forme de bidegré (p,q) à coefficients L^2_{loc} sur X. Si $p+q \geqslant n+\ell$, alors $u \in L^2_{\omega_\chi}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)$ dès que χ croît suffisamment vite à infini.*

Preuve. En un point $x \in X$ fixé, il existe une base orthogonale $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ de $T_{X,x}$ dans laquelle

$$\omega(x) = i\sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j,\qquad \omega_\chi(x) = i\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(x)\,dz_j\wedge d\overline{z}_j,$$

où $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres de ω_χ par rapport à ω. Alors les éléments de volume $dV_\omega = \omega^n/2^n n!$ et $dV_{\omega_\chi} = \omega_\chi^n/2^n n!$ sont liés par la relation

$$dV_{\omega_\chi} = \lambda_1\cdots\lambda_n\, dV_\omega$$

et pour une (p,q)-forme $u=\sum_{I,J}u_{I,J}dz_I\wedge d\overline{z}_J$ on trouve

$$|u|^2_{\omega_\chi}=\sum_{|I|=p,|J|=q}\Big(\prod_{k\in I}\lambda_k\prod_{k\in J}\lambda_k\Big)^{-1}|u_{I,J}|^2.$$

Il en résulte en particulier

$$|u|^2_{\omega_\chi}dV_{\omega_\chi}\leqslant\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\lambda_1\cdots\lambda_p\,\lambda_1\cdots\lambda_q}\,|u|^2_\omega dV_\omega=\frac{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}{\lambda_1\cdots\lambda_q}\,|u|^2_\omega dV_\omega.$$

D'autre part, on a des majorations

$$\lambda_j\leqslant 1+C_1\chi'(\psi),\quad 1\leqslant j\leqslant n-1,\qquad \lambda_n\leqslant 1+C_1\chi'(\psi)+C_2\chi''(\psi)$$

où $C_1(x)$ est la plus grande valeur propre de $\mathrm{i}\,d'd''\psi(x)$ et $C_2(x)=|\partial\psi(x)|^2$; pour obtenir les $n-1$ premières inégalités, on a seulement besoin d'appliquer le principe du minimax sur le noyau de $\partial\psi$. Comme $\mathrm{i}\,d'd''\psi$ a au plus $\ell-1$ valeurs propres nulles sur $X\smallsetminus K$, le principe du minimax donne aussi des minorations

$$\lambda_j\geqslant 1,\quad 1\leqslant j\leqslant\ell-1,\qquad \lambda_j\geqslant 1+c\,\chi'(\psi),\quad \ell\leqslant j\leqslant n,$$

où $c(x)\geqslant 0$ est la ℓ-ième valeur propre de $\mathrm{i}\,d'd''\psi(x)$ et $c(x)>0$ sur $X\smallsetminus K$. Si nous supposons $\chi'\geqslant 1$, nous en déduisons aisément

$$\begin{aligned}\frac{|u|^2_{\omega_\chi}dV_{\omega_\chi}}{|u|^2_\omega dV_\omega}&\leqslant\frac{\big(1+C_1\chi'(\psi)\big)^{n-p-1}\big(1+C_1\chi'(\psi)+C_2\chi''(\psi)\big)}{\big(1+c\chi'(\psi)\big)^{q-\ell+1}}\\&\leqslant C_3\big(\chi'(\psi)^{n+\ell-p-q-1}+\chi''(\psi)\chi'(\psi)^{n+\ell-p-q-2}\big)\quad\text{sur}\quad X\smallsetminus K.\end{aligned}$$

Pour $p+q\geqslant n+\ell$, ceci est inférieur ou égal à

$$C_3\big(\chi'(\psi)^{-1}+\chi''(\psi)\chi'(\psi)^{-2}\big),$$

et il est facile de montrer que cette quantité peut être rendue arbitrairement petite à l'infini sur X quand χ croît suffisamment vite à infini sur $\mathbb{R}$. □

Preuve du théorème (12.13), *fin.* Un résultat bien connu de Andreotti-Grauert [AG62] garantit que la topologie naturelle des groupes de cohomologie $H^q(X,\mathcal{F})$ d'un faisceau cohérent quelconque $\mathcal{F}$ sur une variété ℓ-convexe sont séparés pour $q\geqslant\ell$. Si $\mathcal{F}=\mathcal{O}(E)$ est le faisceau des sections d'un fibré vectoriel holomorphe, les groupes $H^q(X,\mathcal{O}(E))$ sont algébriquement et topologiquement isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe de Dolbeault des formes de type $(0,q)$ à coefficients L^2_{loc} dont la d''-differentielle est à coefficients L^2_{loc}, muni de la topologie de Fréchet définie par les semi-normes $u\mapsto\|u\|_{L^2(K)}+\|d''u\|_{L^2(K)}$. Pour le voir, on peut reprendre mot à mot la démonstration du théorème (1.3), en observant que le complexe L^2_{loc} fournit encore une résolution de $\mathcal{O}(E)$ par des faisceaux (acycliques) de $\mathcal{C}^\infty$-modules. Il résulte de ce qui précède que le morphisme

$$L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X) \supset \mathrm{Ker}\, D''_{\omega_\chi} \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}) = H^q(X,\Omega^p_X)$$

est continu et de noyau fermé. Par conséquent ce noyau contient l'adhérence $\overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}}$, et nous obtenons une factorisation

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ker}\, D''_{\omega_\chi}/\overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}} \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

La démonstration de la proposition (12.2) montre d'ailleurs que $\overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}}$ coïncide avec l'adhérence de $D''\big(\mathcal{D}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)\big)$ dans $L^2_{\omega_\chi}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)$. Considérons le morphisme limite

$$\varinjlim_{\chi} \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \tag{12.16}$$

où la limite inductive est étendue à l'ensemble des fonctions convexes croissantes χ de classe C^∞ telles que $\chi''(t) \geqslant 1$ sur $[0,+\infty[$, avec la relation d'ordre

$$\chi_1 \preccurlyeq \chi_2 \iff \chi_1 \leqslant \chi_2 \ \text{ et } \ L^2_{\omega_{\chi_1}}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X) \subset L^2_{\omega_{\chi_2}}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X) \ \text{ pour } \ k = p+q\,;$$

il est facile de voir que cet ordre est filtrant en reprenant les arguments utilisés pour le lemme (12.15). Il est bien connu par ailleurs que les groupes de cohomologie de De Rham sont toujours séparés pour la topologie induite par la topologie de Fréchet sur les espaces de formes, par suite on a un morphisme limite

$$\varinjlim_{\chi} \mathcal{H}^{k}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \tag{12.16$_{\mathrm{DR}}$}$$

analogue à (12.16). La formule de décomposition du théorème (12.13) se déduit maintenant de (12.14) et du lemme élémentaire suivant.

12.17. Lemme. *Les morphismes limites* (12.16), (12.16)$_{\mathrm{DR}}$ *sont bijectifs pour* $k = p+q \geqslant n+\ell$.

Preuve. Traitons par exemple le cas du morphisme (12.16). Soit u une forme L^2_{loc} d''-fermée de bidegré (p,q), $p+q \geqslant n+\ell$. Alors il existe un choix de χ pour lequel $u \in L^2_{\omega_\chi}$, donc $u \in \mathrm{Ker}\ D''_{\omega_\chi}$ et (12.16) est surjectif. Si une classe $\{u\} \in \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_{\chi_0}}(X,\mathbb{C})$ est envoyée sur zéro dans $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$, on peut écrire $u = d''v$ pour une certaine forme v à coefficients L^2_{loc} et de bidegré $(p,q-1)$. Dans le cas $p+q > n+\ell$, nous aurons $v \in L^2_{\omega_\chi}$ pour $\chi \succcurlyeq \chi_0$ assez grand, donc la classe de $u = D''_{\omega_\chi}v$ dans $H^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$ est nulle et (12.16) est injectif. Quand $p+q = n+\ell$, la forme v n'appartient plus nécessairement à un des espaces $L^2_{\omega_\chi}$, mais il suffit de montrer que $u = d''v$ est dans l'adhérence de Im D''_{ω_χ} pour χ assez grand. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

une fonction tronquante telle que $\theta(t) = 1$ pour $t \leqslant 1/2$, $\theta(t) = 0$ pour $t \geqslant 1$ et $|\theta'| \leqslant 3$. Alors

$$d''\big(\theta(\varepsilon\psi)v\big) = \theta(\varepsilon\psi)d''v + \varepsilon\theta'(\varepsilon\psi)d''\psi \wedge v.$$

D'après la preuve du lemme (12.15), il existe une fonction continue $C(x) > 0$ telle que $|v|^2_{\omega_\chi} dV_{\omega_\chi} \leqslant C\big(1+\chi''(\psi)/\chi'(\psi)\big)|v|^2_\omega dV_\omega$, alors que $|d''\psi|^2_{\omega_\chi} \leqslant 1/\chi''(\psi)$ d'après la définition même de ω_χ. Nous voyons donc que l'intégrale

$$\int_X |\theta'(\varepsilon\psi)d''\psi \wedge v|^2_{\omega_\chi} dV_{\omega_\chi} \leqslant \int_X C\big(1/\chi''(\psi) + 1/\chi'(\psi)\big)|v|^2 dV$$

est finie pour χ assez grand, et par convergence dominée $d''\big(\theta(\varepsilon\psi)v\big)$ converge vers $d''v = u$ dans $L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$. □

La dualité de Poincaré et de Serre montre que les espaces $H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X,\mathbb{C})$ et $H^{p,q}_c(X,\mathbb{C})$ à support compact sont duaux des espaces $H^{2n-k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ et $H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$ dès lors que ces derniers sont séparés de de dimension finie, ce qui est bien le cas si $k = p+q \leqslant n-\ell$. Nous obtenons donc une décomposition de Hodge duale

$$(12.18)\quad H^k_c(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}), \quad \overline{H^{p,q}_c(X,\mathbb{C})} \simeq H^{q,p}_c(X,\mathbb{C}), \quad k \leqslant n-\ell.$$

Il est par ailleurs facile de prouver que l'isomorphisme de Lefschetz

$$(12.19)\qquad \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet : \ \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$$

donne à la limite un isomorphisme entre la cohomologie à support compact et la cohomologie sans supports (ce résultat est dû à Ohsawa [Ohs81]). En effet, si $p+q \leqslant n-\ell$, le morphisme naturel

$$(12.20)\qquad H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} D''_{\mathcal{D}} / \operatorname{Im} D''_{\mathcal{D}} \longrightarrow \operatorname{Ker} D''_{\omega_\chi} / \overline{\operatorname{Im} D''_{\omega_\chi}} \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X)$$

est dual du morphisme $\mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$, qui est surjectif pour χ assez grand d'après le lemme (12.17) et la finitude du groupe $H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$. Donc (12.20) est injectif pour χ grand, et après composition avec l'isomorphisme de Lefschetz (12.19) nous obtenons une injection

$$\omega^{n-p-q} \wedge \bullet = \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet : \ H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}_{L^2,\,\omega_\chi}(X,\mathbb{C})_{\mathrm{sep}} \simeq \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$$

(l'égalité $\omega^{n-p-q} \wedge \bullet = \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet$ résulte du fait que ω_χ a même classe de cohomologie que ω). En prenant la limite inductive sur χ et en combinant avec l'isomorphisme limite (12.16), on obtient une application injective

$$(12.21)\qquad \omega^{n-p-q} \wedge \bullet \ : \ H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C}), \quad p+q \leqslant n-\ell.$$

Comme les deux membres ont la même dimension par le théorème de dualité de Serre et la symétrie de Hodge, cette application est nécessairement un isomorphisme. □

12.22. Remarque. Puisque l'isomorphisme de Lefschetz (12.21) peut se factoriser à travers $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ ou à travers $H_c^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C})$, on déduit de celui-ci que les morphismes naturels
$$H_c^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C})$$
sont injectifs pour $p+q \leqslant n-\ell$ et surjectifs pour $p+q \geqslant n+\ell$. Bien entendu, on a des propriétés entièrement analogues pour les groupes de cohomologie de De Rham.

13. Technique de Bochner et théorèmes d'annulation

Soit X une variété complexe munie d'une métrique kählérienne $\omega = \sum \omega_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$. Soit (E,h) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X. Nous notons $D = D' + D''$ sa connexion de Chern et $\Theta(E)$ le tenseur de courbure associé.

13.1. Relations de commutation de base. *Soit L l'opérateur $Lu = \omega \wedge u$ agissant sur les formes à valeurs vectorielles et soit $\Lambda = L^\star$ son adjoint. Alors*
$$[D''^\star, L] = \mathrm{i}\, d', \qquad [D'^\star, L] = -\mathrm{i}\, d'',$$
$$[\Lambda, D''] = -\mathrm{i}\, d'^\star, \qquad [\Lambda, D'] = \mathrm{i}\, d''^\star.$$

Preuve (abrégée). C'est une conséquence assez simple de la relation de commutation (6.14) déjà démontrée pour la connexion triviale $d = d' + d''$ sur $E = X \times \mathbb{C}$. En effet, pour tout point $x_0 \in X$, il existe un repère holomorphe local $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ de E tel que
$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} + O(|z|^2).$$
(La preuve est entièrement similaire à celle du théorème 5.8). Pour $s = \sum s_\lambda \otimes e_\lambda$ avec $s_\lambda \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^\star)$, nous obtenons
$$D''s = \sum d'' s_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|), \qquad D''^\star s = \sum d''^\star s_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|).$$
Les relations annoncées s'ensuivent aisément. □

13.2. Identité de Bochner-Kodaira-Nakano. *Si (X,ω) est une variété kählérienne, les laplaciens complexes Δ' et Δ'' agissant sur les formes à valeurs dans E satisfont l'identité*
$$\Delta'' = \Delta' + [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda].$$

Preuve. La dernière égalité (13.1) donne $D''^\star = -\mathrm{i}[\Lambda, D']$, donc
$$\Delta'' = [D'', D''^\star] = -\mathrm{i}[D'', [\Lambda, D']].$$

L'identité de Jacobi implique

$$\big[D'', [\Lambda, D']\big] = \big[\Lambda, [D', D'']\big] + \big[D', [D'', \Lambda]\big] = [\Lambda, \Theta(E)] + \mathrm{i}[D', D'^\star],$$

si l'on tient compte du fait que $[D', D''] = D^2 = \Theta(E)$. L'identité annoncée s'ensuit. □

Supposons que X soit *compacte* et soit $u \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E)$ une (p,q)-forme arbitraire. Une intégration par parties donne

$$\langle \Delta' u, u\rangle = \|D'u\|^2 + \|D'^\star u\|^2 \geqslant 0,$$

et on a une égalité analogue pour Δ''. De l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, on déduit l'inégalité a priori

$$\|D''u\|^2 + \|D''^\star u\|^2 \geqslant \int_X \langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle dV_\omega. \tag{13.3}$$

Cette inégalité est connue sous le nom *d'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano* (voir [Boc48], [Kod53], [Nak55]). Lorsque u est Δ''-harmonique, on obtient

$$\int_X \langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle\, dV \leqslant 0.$$

Si l'opérateur hermitien $[\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]$ est positif sur chaque fibre de $\Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E$, on voit que u est nécessairement nulle, donc

$$H^{p,q}(X,E) = \mathcal{H}^{p,q}(X,E) = 0$$

d'après la théorie de Hodge. Dans cette approche, le point essentiel est de savoir calculer la forme de courbure $\Theta(E)$ et de trouver des conditions suffisantes pour que l'opérateur $[\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]$ soit défini positif. Des calculs élémentaires (quelque peu pénibles) donnent la formule suivante : si la courbure de E est écrite sous la forme (11.16) et si

$$u = \sum u_{J,K,\lambda} dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\lambda, \qquad |J| = p,\ |K| = q,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant r$$

est une (p,q)-forme à valeurs dans E, alors

$$\begin{aligned}\langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle = &\sum_{j,k,\lambda,\mu,J,S} c_{jk\lambda\mu}\, u_{J,jS,\lambda}\, \overline{u_{J,kS,\mu}} \\ &+ \sum_{j,k,\lambda,\mu,R,K} c_{jk\lambda\mu}\, u_{kR,K,\lambda}\, \overline{u_{jR,K,\mu}} \\ &- \sum_{j,\lambda,\mu,J,K} c_{jj\lambda\mu}\, u_{J,K,\lambda}\, \overline{u_{J,K,\mu}},\end{aligned} \tag{13.4}$$

où les sommations sont étendues à tous les indices $1 \leqslant j,k \leqslant n$, $1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant r$ et tous les multi-indices $|J|=p$, $|K|=q$, $|R|=p-1$, $|S|=q-1$ (ici la notation $u_{JK\lambda}$ s'applique à des multi-indices non nécessairement croissants, on convient que le signe de ce coefficient est alterné sous l'action des permutations). Compte tenu de la complexité du terme de courbure (13.4), le signe de ce terme est en général difficile à élucider, sauf dans quelques cas très particuliers.

Le cas le plus simple est le cas $p=n$. Tous les termes de la deuxième sommation figurant dans (13.4) sont alors tels que $j=k$ et $R=\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{j\}$, par conséquent les deuxièmes et troisièmes sommations sont égales. Il s'ensuit que

$$\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle = \sum_{j,k,\lambda,\mu,J,S} c_{jk\lambda\mu}\, u_{J,jS,\lambda}\,\overline{u_{J,kS,\mu}}$$

est positive sur les (n,q)-formes, sous l'hypothèse que E est positif au sens de Nakano. Dans ce cas, X est automatiquement kählérienne puisque

$$\omega = \mathrm{Tr}_E(\mathrm{i}\,\Theta(E)) = \mathrm{i}\sum_{j,k,\lambda} c_{jk\lambda\lambda} dz_j\wedge d\overline{z}_k = \mathrm{i}\,\Theta(\det E)$$

définit alors une métrique kählérienne.

13.5. Théorème d'annulation de Nakano (1955)**.** *Soit X une variété complexe compacte et soit E un fibré vectoriel positif au sens de Nakano sur X. Alors*

$$H^{n,q}(X,E) = H^q(X,K_X\otimes E) = 0 \qquad \textit{pour tout } q\geqslant 1. \qquad \square$$

Un autre cas abordable est le cas où E est un fibré en droites ($r=1$). En effet, en chaque point $x\in X$, nous pouvons alors choisir un système de coordonnées qui diagonalise simultanément les formes hermitiennes $\omega(x)$ et $\Theta(E)(x)$, de telle manière que

$$\omega(x) = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j\wedge d\overline{z}_j, \qquad \Theta(E)(x) = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j dz_j\wedge d\overline{z}_j$$

avec $\gamma_1\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n$. Les valeurs propres de courbure $\gamma_j=\gamma_j(x)$ sont alors définies de manière unique et dépendent continûment de x. Dans les notations antérieures, nous avons $\gamma_j = c_{jj11}$ et tous les autres coefficients $c_{jk\lambda\mu}$ sont nuls. Pour toute (p,q)-forme $u=\sum u_{JK} dz_J\wedge d\overline{z}_K\otimes e_1$, ceci donne

$$\begin{aligned}\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle &= \sum_{|J|=p,\,|K|=q}\Big(\sum_{j\in J}\gamma_j+\sum_{j\in K}\gamma_j-\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j\Big)|u_{JK}|^2\\ &\geqslant(\gamma_1+\cdots+\gamma_q-\gamma_{n-p+1}-\cdots-\gamma_n)|u|^2.\end{aligned}\tag{13.6}$$

Supposons que $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ soit positive. Il est alors naturel de munir X de la métrique kählérienne particulière $\omega=\mathrm{i}\,\Theta(E)$. Alors $\gamma_j=1$ pour $j=1,2,\ldots,n$ et on obtient

$$\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle = (p+q-n)|u|^2.$$

Par conséquent :

13.7. Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano ([AN54]). *Si E est un fibré en droites positif sur une variété complexe compacte X, alors*

$$H^{p,q}(X,E) = H^q(X, \Omega_X^p \otimes E) = 0 \qquad \textit{pour} \ \ p+q \geqslant n+1. \qquad \square$$

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel positif au sens de Griffiths (ou ample), de rang $r \geqslant 1$, Le Potier [LP75] a démontré que $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+r$. La preuve n'est pas une conséquence directe de la technique de Bochner. Une preuve assez simple a été obtenue par M. Schneider [Sch74], en utilisant la suite spectrale de Leray associée à la projection sur X du fibré projectivisé $\mathbb{P}(E) \to X$.

13.8. Exercice. Il est important pour diverses applications de disposer de théorèmes d'annulation qui soient également valables dans le cas de fibrés en droites semi-positifs. On a par exemple le résultat suivant dû à J. Girbau [Gir76] : soit (X, ω) une variété kählérienne compacte; supposons que E soit un fibré en droites et que $\mathrm{i}\,\Theta(E) \geqslant 0$ ait au moins $n-k$ valeurs propres positives en chaque point, pour un certain entier $k \geqslant 0$; alors $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+k+1$.
Indication : utiliser la métrique kählérienne $\omega_\varepsilon = \mathrm{i}\,\Theta(E) + \varepsilon\omega$ avec $\varepsilon > 0$ petit.

Une version plus naturelle et plus puissante de ce résultat a été obtenue par A. Sommese [Som78, ShSo85] : suivant ces auteurs, on dira que E est k-ample si un certain multiple mE est tel que l'application canonique

$$\Phi_{|mE|} : X \smallsetminus B_{|mE|} \to \mathbb{P}^{N-1}$$

a toutes ses fibres de dimension $\leqslant k$ et $\dim B_{|mE|} \leqslant k$; si X est projective et si E est k-ample, alors $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+k+1$.
Indication : prouver le résultat dual, à savoir que $H^{p,q}(X, E^{-1}) = 0$ pour $p+q \leqslant n-k-1$, par récurrence sur k. Montrer d'abord que E est 0-ample si et seulement si E est positif; utiliser alors des sections hyperplanes $Y \subset X$ pour démontrer l'étape de récurrence, en considérant les suites exactes

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \Omega_X^p \otimes E^{-1} \otimes \mathcal{O}(-Y) \longrightarrow \Omega_X^p \otimes E^{-1} \longrightarrow \big(\Omega_X^p \otimes E^{-1}\big)_{\restriction Y} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \Omega_Y^{p-1} \otimes E^{-1}_{\restriction Y} \longrightarrow \big(\Omega_X^p \otimes E^{-1}\big)_{\restriction Y} \longrightarrow \Omega_Y^p \otimes E^{-1}_{\restriction Y} \longrightarrow 0. \end{gathered} \qquad \square$$

14. Estimations L^2 et théorèmes d'existence

Le point de départ est le théorème d'existence L^2 suivant, qui est dû essentiellement à Hörmander [Hör65, 66], et Andreotti-Vesentini [AV65]. Nous en esquisserons seulement les idées principales, en renvoyant par exemple à [Dem82] pour un exposé détaillé de la situation technique considérée ici.

14.1. Théorème. *Soit (X, ω) une variété kählérienne complète. Soit E un fibré vectoriel hermitien de rang r sur X, tel que l'opérateur de courbure $A = A^{p,q}_{E,\omega} = [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda_\omega]$ soit semi-positif sur toutes les fibres de $\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E$, $q \geqslant 1$. Soit $g \in L^2(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$ une forme telle que*

$$D''g = 0 \quad \textit{et} \qquad \int_X \langle A^{-1}g, g\rangle \, dV_\omega < +\infty$$

(aux points où A n'est pas défini positif, on suppose qu'un antécédent $A^{-1}g$ existe presque partout; on choisit alors l'antécédent $A^{-1}g$ de norme minimale, orthogonal à Ker A*). Alors il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X \otimes E)$ telle que*

$$D''f = g \quad \textit{et} \qquad \int_X |f|^2 \, dV_\omega \leqslant \int_X \langle A^{-1}g, g\rangle \, dV_\omega.$$

Preuve. Soit $u \in L^2(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$ une forme telle que $D''u \in L^2$ et $D''^\star u \in L^2$ au sens des distributions. Le lemme (12.2 a) montre (sous l'hypothèse indispensable que ω est complète) que u est limite d'une suite de formes u_ν de classe C^∞ et à support compact, de telle manière que $u_\nu \to u$, $D''u_\nu \to D''u$ et $D''^\star u_\nu \to D''^\star u$ dans L^2. Il s'ensuit que l'inégalité a priori (13.3) s'étend à des formes arbitraires u telles que $u,\ D''u,\ D''^\star u \in L^2$. Maintenant, comme $\operatorname{Ker} D''$ est faiblement (et donc fortement) fermé, on obtient une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$, à savoir

$$L^2(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E) = \operatorname{Ker} D'' \oplus (\operatorname{Ker} D'')^\perp.$$

Soit $v = v_1 + v_2$ la décomposition correspondante d'une forme $v \in \mathcal{D}^{p,q}(X, E)$ de classe C^∞ à support compact (en général, v_1, v_2 ne sont pas à support compact !). Puisque $(\operatorname{Ker} D'')^\perp = \overline{\operatorname{Im} D''^\star} \subset \operatorname{Ker} D''^\star$ par dualité et $g, v_1 \in \operatorname{Ker} D''$ par hypothèse, nous obtenons $D''^\star v_2 = 0$ et

$$|\langle g, v\rangle|^2 = |\langle g, v_1\rangle|^2 \leqslant \int_X \langle A^{-1}g, g\rangle \, dV_\omega \int_X \langle Av_1, v_1\rangle \, dV_\omega$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité a priori (13.3) appliquée à $u = v_1$ donne

$$\int_X \langle Av_1, v_1\rangle \, dV_\omega \leqslant \|D''v_1\|^2 + \|D''^\star v_1\|^2 = \|D''^\star v_1\|^2 = \|D''^\star v\|^2.$$

En combinant les deux inégalités, nous trouvons

$$|\langle g, v\rangle|^2 \leqslant \Big(\int_X \langle A^{-1}g, g\rangle \, dV_\omega\Big) \|D''^\star v\|^2$$

pour toute (p, q)-forme v de classe C^∞ à support compact. Ceci montre qu'on a une forme linéaire bien définie

$$w = D''^\star v \longmapsto \langle v, g\rangle, \qquad L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X \otimes E) \supset D''^\star(\mathcal{D}^{p,q}(E)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

sur l'image de $D''^\star$. Cette forme linéaire est continue par rapport à la norme L^2, et sa norme est $\leqslant C$ avec

$$C = \Big(\int_X \langle A^{-1}g, g\rangle\, dV_\omega\Big)^{1/2}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X \otimes E)$ tel que $||f|| \leqslant C$ et $\langle v, g\rangle = \langle D''^\star v, f\rangle$ pour tout v, par suite $D''f = g$ au sens des distributions. L'inégalité $||f|| \leqslant C$ est équivalente à la dernière estimation du théorème. □

Le théorème d'existence L^2 précédent peut être appliqué dans le contexte général des variétés kählériennes *faiblement pseudoconvexes* (voir définition (12.9)), et ce même si la métrique kählérienne considérée ω n'est pas complète. En effet, d'après la proposition (12.10), on obtient des métriques kählériennes complètes en posant

$$\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon\, \mathrm{i}\, d'd''\psi^2 = \omega + 2\varepsilon(2\mathrm{i}\, \psi d'd''\psi + \mathrm{i}\, d'\psi \wedge d''\psi)$$

avec une fonction d'exhaustion C^∞ psh $\psi \geqslant 0$. Par conséquent, le théorème d'existence L^2 (14.1) s'applique à chaque métrique kählérienne ω_ε. On vérifie par ailleurs (les calculs sont laissés au lecteur !) que les quantités $|g|^2_\omega\, dV_\omega$ et $\langle (A^{p,q}_{E,\omega})^{-1}g, g\rangle_\omega\, dV_\omega$ sont fonctions décroissantes de ω lorsque $p = n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Pour une forme D''-fermée g de bidegré (n, q) on obtient donc des solutions f_ε de l'équation $D''f_\varepsilon = g$ telles que

$$\int_X |f_\varepsilon|^2_{\omega_\varepsilon}\, dV_{\omega_\varepsilon} \leqslant \int_X \langle (A^{p,q}_{E,\omega_\varepsilon})^{-1}g, g\rangle_{\omega_\varepsilon}\, dV_{\omega_\varepsilon} \leqslant \int_X \langle (A^{p,q}_{E,\omega})^{-1}g, g\rangle_\omega\, dV_\omega.$$

Ces solutions f_ε étant bornées uniformément en norme L^2 sur tout compact, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans L^2. La limite f est solution de $D''f = g$ et satisfait l'estimation L^2 voulue relativement à la métrique ω initialement donnée (qui, répétons-le, n'est pas nécessairement complète). Un cas particulier important est le suivant :

14.2. Théorème. *Soit (X, ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de courbure (i.e. les valeurs propres de $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ par rapport à la métrique ω) en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positive, i.e. $\gamma_1 \geqslant 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$ telle que

$$D''g = 0 \quad et \qquad \int_X \langle (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega < +\infty,$$

(on suppose donc $g(x) = 0$ presque partout aux points où $\gamma_1(x) + \cdots + \gamma_q(x) = 0$), il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T_X^\star \otimes E)$ telle que

$$D''f = g \quad et \qquad 2\int_X |f|^2\, dV_\omega \leqslant \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega.$$

Preuve. En effet, pour $p = n$, la formule (13.6) montre que

$$\langle Au, u\rangle \geqslant (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)|u|^2,$$

donc $\langle A^{-1}u, u\rangle \geqslant (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|u|^2$. □

Une observation importante est que le théorème ci-dessus s'applique encore quand la métrique hermitienne de E est une métrique singulière à courbure positive au sens des courants. En effet, par les techniques standard de régularisation (convolution des fonctions psh par des noyaux régularisants), la métrique peut être rendue C^∞ et les solutions obtenues au moyen des théorèmes (14.1) ou (14.2) pour les métriques régularisées ont des limites satisfaisant les estimations désirées. En particulier, nous obtenons le corollaire suivant.

14.3. Corollaire. *Soit (X, ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique singulière dont le poids local est noté $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Supposons que*

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) = 2\mathrm{i}\, d'd''\varphi \geqslant \varepsilon\omega$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T_X^\star \otimes E)$ telle que $D''g = 0$, il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T_X^\star \otimes E)$ telle que $D''f = g$ et

$$\int_X |f|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}\, dV_\omega \leqslant \frac{1}{q\varepsilon}\int_X |g|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}\, dV_\omega. \qquad \square$$

Nous avons noté ici de façon quelque peu incorrecte la métrique sous la forme $|f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$, comme si le poids φ était globalement défini sur X (bien sûr, ceci n'est possible que si E est globalement trivial). Par abus d'écriture, nous utiliserons quand même cette notation car elle souligne clairement la dépendance de la norme L^2 en fonction du poids psh.

15. Théorèmes d'annulation de Nadel et Kawamata-Viehweg

Nous introduisons d'abord le concept de *faisceau d'idéaux multiplicateurs*, suivant A. Nadel [Nad89]. L'idée principale remonte en fait aux travaux fondamentaux de E. Bombieri [Bom70] et H. Skoda [Sko72].

15.1. Définition. *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset X$; on associe à φ le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_\Omega$, formé des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$ telles que $|f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans* *des coordonnées locales quelconques près de x. Ce faisceau sera appelé faisceau d'idéaux multiplicateurs associé au poids φ.*

La variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ est donc l'ensemble des points au voisinage desquels $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ est non intégrable. Bien entendu, de tel points ne peuvent apparaître que là où φ a des pôles logarithmiques. La formulation précise est la suivante.

15.2. Définition. *On dira qu'une fonction psh φ a un pôle logarithmique de coefficient γ en un point $x \in X$ si le nombre de Lelong*

$$\nu(\varphi, x) := \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|}$$

est non nul et si $\nu(\varphi, x) = \gamma$.

15.3. Lemme (Skoda [Sko72])**.** *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $x \in \Omega$.*

a) *Si $\nu(\varphi, x) < 1$, alors $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de x, en particulier $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_{\Omega,x}$.*

b) *Si $\nu(\varphi, x) \geqslant n + s$ pour un certain entier $s \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^{-2\varphi} \geqslant C|z-x|^{-2n-2s}$ au voisinage de x et $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$, où $\mathfrak{m}_{\Omega,x}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\Omega,x}$.*

Preuve. La démonstration repose sur des estimations classiques de théorie du potentiel complexe, voir H. Skoda [Sko72]. □

15.4. Proposition ([Nad89])**.** *Pour toute fonction psh φ sur $\Omega \subset X$, le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur Ω.*

Preuve. Puisque le résultat est local, nous pouvons supposons que Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}\, d\lambda < +\infty$. D'après la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents, l'ensemble $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Il est clair que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$; pour démontrer l'égalité, il suffit de vérifier que $\mathcal{J}_x + \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathcal{I}(\varphi)_x$ pour tout entier s, en vertu du lemme de Krull. Soit $f \in \mathcal{I}(\varphi)_x$ un germe défini sur un voisinage V de x et soit θ une fonction tronquante à support dans V, telle que $\theta = 1$ au voisinage de x. On résout l'équation $d''u = g := d''(\theta f)$ au moyen des estimations L^2 de Hörmander (14.3), où E est le fibré en droites trivial $\Omega \times \mathbb{C}$ muni du poids strictement psh

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + (n+s)\log|z-x| + |z|^2.$$

Nous obtenons une solution u telle que $\int_\Omega |u|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}|z-x|^{-2(n+s)} d\lambda < \infty$, donc $F = \theta f - u$ est holomorphe, $F \in \mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ et $f_x - F_x = u_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$. Ceci démontre notre affirmation. □

Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs satisfont la propriété essentielle suivante de fonctorialité, relativement aux images directes de faisceaux par des modifications.

15.5. Proposition. *Soit $\mu : X' \to X$ une modification de variétés complexes non singulières (i.e. une application holomorphe propre génériquement $1:1$), et soit φ une fonction psh sur X. Alors*

$$\mu_\star\big(\mathcal{O}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)\big) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi).$$

Preuve. Soit $n = \dim X = \dim X'$ et soit $S \subset X$ un sous-ensemble analytique tel que $\mu : X' \smallsetminus S' \to X \smallsetminus S$ soit un biholomorphisme. Par définition des faisceaux d'idéaux multiplicateurs, $\mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$ s'identifie au faisceau des n-formes holomorphes f sur un ouvert quelconque $U \subset X$, telles que $\mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Puisque φ est localement majorée, nous pouvons même considérer des formes f qui sont a priori définies seulement sur $U \smallsetminus S$, car f est dans $L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ et s'étend donc automatiquement à travers S. La formule de changement de variables donne

$$\int_U \mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} = \int_{\mu^{-1}(U)} \mathrm{i}^{n^2} \mu^\star f \wedge \overline{\mu^\star f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi\circ\mu},$$

donc $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi))$ si et seulement si $\mu^\star f \in \Gamma(\mu^{-1}(U), \mathcal{O}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi\circ\mu))$. La prop. 15.5 est démontrée. □

15.6. Remarque. Si φ a des singularités algébriques ou analytiques (cf. définition 11.7), le calcul de $\mathcal{I}(\varphi)$ se réduit à un problème purement algébrique.

Le première observation est que $\mathcal{I}(\varphi)$ se calcule aisément si $\varphi = \sum \alpha_j \log |g_j|$ où $D_j = g_j^{-1}(0)$ sont des diviseurs irréductible lisses à croisements normaux. Alors $\mathcal{I}(\varphi)$ est le faisceau des fonctions holomorphes h sur les ouverts $U \subset X$, telles que

$$\int_U |h|^2 \prod |g_j|^{-2\alpha_j}\, dV < +\infty.$$

Puisque les g_j peuvent être prises comme fonctions coordonnées dans des systèmes de coordonnées locales convenables $(z_1, \ldots, z_n)$, la condition d'intégrabilité est que h soit divisible par $\prod g_j^{m_j}$, où $m_j - \alpha_j > -1$ pour chaque j, i.e. $m_j \geqslant \lfloor \alpha_j \rfloor$ ($\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière). Par suite

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{O}(-\lfloor D \rfloor) = \mathcal{O}(-\sum \lfloor \alpha_j \rfloor D_j)$$

où $\lfloor D \rfloor$ est la partie entière du $\mathbb{Q}$-diviseur $D = \sum \alpha_j D_j$.

Maintenant, considérons le cas général de singularités algébriques ou analytiques, et supposons que

$$\varphi \sim \frac{\alpha}{2} \log\big(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2\big)$$

au voisinage des pôles. D'après la remarque énoncée après la déf. 11.7, nous pouvons supposer que les (f_j) sont des générateurs du faisceau d'idéaux intégralement clos $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\varphi/\alpha)$, défini comme le faisceau des fonctions holomorphes h telles que $|h| \leqslant C\exp(\varphi/\alpha)$. Dans ce cas, le calcul se fait comme suit.

Choisissons d'abord une modification lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ de X telle que $\mu^\star\mathcal{J}$ soit un faisceau inversible $\mathcal{O}(-D)$ associé à un diviseur à croisements normaux $D = \sum \lambda_j D_j$, où (D_j) sont les composantes du diviseur exceptionnel de $\widetilde{X}$ (considérer l'éclatement X' de X par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$, de sorte que l'image inverse de $\mathcal{J}$ sur X' devienne un faisceau inversible $\mathcal{O}(-D')$, puis éclater de nouveau X' de manière à rendre X' lisse et D' à croisements normaux, en invoquant Hironaka [Hi64]). Nous avons alors $K_{\widetilde{X}} = \mu^\star K_X + R$ où $R = \sum \rho_j D_j$ est le diviseur des zéros du jacobien J_μ de l'application d'éclatement. De la formule d'image directe 15.5, nous déduisons

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mu_\star\big(\mathcal{O}(K_{\widetilde{X}} - \mu^\star K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi\circ\mu)\big) = \mu_\star\big(\mathcal{O}(R) \otimes \mathcal{I}(\varphi\circ\mu)\big).$$

Maintenant, les $(f_j \circ \mu)$ sont des générateurs de l'idéal $\mathcal{O}(-D)$, donc

$$\varphi\circ\mu \sim \alpha \sum \lambda_j \log|g_j|$$

où les g_j sont des générateurs locaux de $\mathcal{O}(-D_j)$. Nous sommes donc ramenés à calculer le faisceau d'idéaux multiplicateurs dans le cas où les pôles sont donnés par un $\mathbb{Q}$-diviseur à croisements normaux $\sum \alpha\lambda_j D_j$. Nous obtenons $\mathcal{I}(\varphi\circ\mu) = \mathcal{O}(-\sum\lfloor\alpha\lambda_j\rfloor D_j)$, donc

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mu_\star \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\big(\sum(\rho_j - \lfloor\alpha\lambda_j\rfloor)D_j\big). \qquad \square$$

15.7. Exercice. Calculer le faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathcal{I}(\varphi)$ associé à la fonction psh $\varphi = \log(|z_1|^{\alpha_1} + \cdots + |z_p|^{\alpha_p})$, pour des nombres réels arbitraires $\alpha_j > 0$.
Indication : en utilisant la formule de Parseval et des coordonnées polaires $z_j = r_j e^{i\,\theta_j}$, montrer que le problème est équivalent à déterminer pour quels p-uplets $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{N}^p$ l'intégrale

$$\int_{[0,1]^p} \frac{r_1^{2\beta_1}\cdots r_p^{2\beta_p}\, r_1 dr_1 \cdots r_p dr_p}{r_1^{2\alpha_1} + \cdots + r_p^{2\alpha_p}} = \int_{[0,1]^p} \frac{t_1^{(\beta_1+1)/\alpha_1}\cdots t_p^{(\beta_p+1)/\alpha_p}}{t_1 + \cdots + t_p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{2\alpha_j}\frac{dt_j}{t_j}$$

est convergente. Déduire de là que $\mathcal{I}(\varphi)$ est engendré par les monômes $z_1^{\beta_1}\cdots z_p^{\beta_p}$ tels que $\sum(\beta_p+1)/\alpha_p > 1$. (Cet exercice montre que la définition analytique de $\mathcal{I}(\varphi)$ est parfois aussi très commode pour les calculs). $\square$

Soit E un fibré en droites sur X muni d'une métrique singulière h de courant de courbure $\Theta_h(E)$. Si φ est le poids représentant la métrique h sur un ouvert $\Omega \subset X$, le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi)$ est indépendant du choix de la trivialisation. Il est donc la restriction à Ω d'un faisceau cohérent global sur X que nous noterons indifféremment $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$ par abus de notation. Dans ce contexte, nous avons le théorème d'annulation fondamental suivant, qui est probablement un des résultats les plus centraux de la géométrie algébrique ou analytique (comme nous le verrons plus tard, ce théorème contient le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg comme cas particulier).

15.8. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b]). *Soit* (X, ω) *une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit* E *un fibré en droites holomorphe sur* X *muni d'une métrique hermitienne* h *singulière de poids* φ. *Supposons qu'il existe une fonction continue positive* ε *sur* X *telle que* $\mathrm{i}\,\Theta_h(E) \geqslant \varepsilon\omega$. *Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + E) \otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geqslant 1.$$

Preuve. Soit $\mathcal{L}^q$ le faisceau des germes de (n, q)-formes u à valeurs dans E et à coefficients mesurables, telles que à la fois $|u|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}$ et $|d''u|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}$ soient localement intégrables. L'opérateur d'' définit un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, d'')$ qui est une résolution du faisceau $\mathcal{O}(K_X+E)\otimes\mathcal{I}(\varphi)$: en effet, le noyau de d'' en degré 0 consiste en les germes de n-formes holomorphes à valeurs dans E qui satisfont la condition d'intégrabilité ; donc la fonction coefficient appartient à $\mathcal{I}(\varphi)$; l'exactitude en degré $q \geqslant 1$ découle du corollaire 14.3 appliqué à des boules arbitrairement petites. Comme chaque faisceau $\mathcal{L}^q$ est un $\mathcal{C}^\infty$-module, $\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution par des faisceaux acycliques. Soit ψ une fonction d'exhaustion psh de classe C^∞ sur X. Appliquons le corollaire 14.3 globalement sur X, avec la métrique initiale de E multipliée par le facteur $\mathrm{e}^{-\chi\circ\psi}$, où χ est une fonction convexe croissante de croissance arbitrairement rapide à l'infini. Ce facteur peut être utilisé pour assurer la convergence des intégrales à l'infini. Du corollaire 14.3, nous déduisons alors que $H^q\big(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)\big) = 0$ pour $q \geqslant 1$. Le théorème s'ensuit grâce à l'isomorphisme de De Rham-Weil (1.2). □

15.9. Corollaire. *Soit* (X, ω), E *et* φ *comme dans le théorème* 15.8 *et soient* $x_1, \ldots, x_N$ *des points isolés de la variété des zéros* $V(\mathcal{I}(\varphi))$. *Alors il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X + E)) \twoheadrightarrow \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant N} \mathcal{O}(K_X + E)_{x_j} \otimes \big(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi)\big)_{x_j}.$$

Preuve. Considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \mathcal{I}(\varphi) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi) \to 0$, tordue par $\mathcal{O}(K_X + E)$, et appliquons le théorème 15.8 pour obtenir l'annulation du premier groupe H^1. La propriété de surjectivité annoncée s'ensuit. □

15.10. Corollaire. *Soit* (X, ω), E *et* φ *comme dans le théorème* 15.8. *Supposons que la fonction poids* φ *soit telle que* $\nu(\varphi, x) \geqslant n + s$ *en un certain point* $x \in X$ *tel que* $\nu(\varphi, y) < 1$ *pour* $y \neq x$ *assez voisin de* x. *Alors* $H^0(X, K_X + E)$ *engendre tous les* s*-jets de sections au point* x.

Preuve. Le lemme de Skoda 15.3 b) montre que $e^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de tout point $y \neq x$ suffisamment proche de x, donc $\mathcal{I}(\varphi)_y = \mathcal{O}_{X,y}$, alors que $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$ d'après 15.3 a). Le corollaire 15.10 est donc un cas particulier de 15.9. □

La philosophie de ces résultats (qui peuvent être considérés comme des généralisations du théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda [Bom70], [Sko72, 75]) est que le problème de construire des sections holomorphes de $K_X + E$ peut se résoudre en construisant des métriques hermitiennes convenables sur E telles que le poids φ ait des pôles logarithmiques isolés en des points donnés x_j.

15.11. Exercice. Supposons que X soit compacte et que L soit un fibré en droites positif sur X. Soit $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un ensemble fini. Montrer qu'il existe des constantes $a, b \geqslant 0$ dépendant seulement de L et N telles que pour tout $s \in \mathbb{N}$ le groupe $H^0(X, \mathcal{O}(mL))$ engendre les jets d'ordre s en tout point x_j pour $m \geqslant as + b$.
Indication : Appliquer le corollaire 15.9 à $E = -K_X + mL$, avec une métrique singulière sur L de la forme $h = h_0 e^{-\varepsilon\psi}$, où h_0 est de classe C^∞ à courbure positive, $\varepsilon > 0$ petit, et $\psi(z) \sim \log|z - x_j|$ au voisinage de x_j. Déduire de là le théorème de plongement de Kodaira :

15.12. Théorème de plongement de Kodaira. *Si L est un fibré en droites sur une variété complexe compacte, L est ample si et seulement si L est positif.* □

Une façon équivalente d'énoncer le théorème de plongement de Kodaira est la suivante :

15.13. Critère de projectivité de Kodaira. *Une variété complexe compacte X est algébrique projective si et seulement si X possède une métrique de Hodge, c'est-à-dire une métrique kählérienne de classe de cohomologie entière.*

Preuve. Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est algébrique projective, alors la restriction de la métrique de Fubini-Study à X est une métrique de Hodge. Inversement, si X possède une métrique de Hodge ω, la classe de cohomologie représentant $\{\omega\}$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ définit un fibré en droites complexe topologique (i.e. de classe C^∞), soit L. Comme ω est de type $(1,1)$, la suite exacte exponentielle (8.20)

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\star) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}) = H^{0,2}(X, \mathbb{C})$$

montre qu'on peut représenter le fibré en droites L par un cocycle de $H^1(X, \mathcal{O}_X^\star)$, en d'autres termes, L peut être muni d'une structure holomorphe. De plus, il existe une métrique hermitienne h sur L telle que $\frac{i}{2\pi}\Theta_h(L) = \omega$. Par conséquent L est ample et X est projective. □

15.14. Exercice (conditions de Riemann caractérisant les variétés abéliennes)**.** Un tore complexe $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ est appelé *variété abélienne* si X est algébrique projective. Montrer en utilisant (15.13) qu'un tore X est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne définie positive H sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$\operatorname{Im} H(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}$ pour tous γ_1, γ_2 dans le réseau Γ.
Indication : utiliser un procédé de moyennisation pour réduire la démonstration au cas de métriques kählériennes invariantes par translations. Observer que les tores réels $\mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ définissent un système de générateurs du groupe d'homologie $H_2(X, \mathbb{Z})$ et que $\int_{\mathbb{Z}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_2} \omega = \omega(\gamma_1, \gamma_2)$.

15.15. Exercice (solution du problème de Levi)**.** Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

a) X est fortement pseudoconvexe, i.e. X admet une fonction d'exhaustion fortement psh.

b) X est de Stein, i.e. les fonctions holomorphes globales séparent les points, fournissent des systèmes de coordonnées locales en tout point, et X est holomorphiquement convexe (par définition, ceci signifie que pour toute suite discrète (z_ν) dans X il existe une fonction $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $|f(z_\nu)| \to \infty$). □

15.16. Remarque. Tant que l'on s'intéresse seulement au cas des formes de bidegré (n, q), $n = \dim X$, les estimations L^2 s'étendent aux espaces complexes possédant des singularités arbitraires. En effet, si X est un espace complexe et φ une fonction poids psh sur X, on peut encore définir un faisceau $K_X(\varphi)$ sur X, tel que les sections de $K_X(\varphi)$ sur un ouvert U sont les n-formes holomorphes f sur la partie régulière $U \cap X_{\mathrm{reg}}$, satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Dans ce contexte, la propriété de fonctorialité 15.5 s'écrit

$$\mu_\star\big(K_{X'}(\varphi \circ \mu)\big) = K_X(\varphi),$$

et elle est valable pour des espaces complexes X, X' arbitraires, $\mu : X' \to X$ étant une modification. Si X est non singulier, on a $K_X(\varphi) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$, cependant, si X est singulier, le symboles K_X et $\mathcal{I}(\varphi)$ ne doivent pas être dissociés. L'énoncé du théorème d'annulation de Nadel devient $H^q(X, \mathcal{O}(E) \otimes K_X(\varphi)) = 0$ pour $q \geqslant 1$, sous les mêmes hypothèses (X kählérien et faiblement pseudoconvexe, courbure de $E \geqslant \varepsilon\omega$). La preuve s'obtient en restreignant toute la situation à X_{reg}. Bien qu'en général X_{reg} ne soit pas faiblement pseudoconvexe (une condition nécessaire pour qu'il le soit est que $\operatorname{codim} X_{\mathrm{sing}} = 1$), X_{reg} est toujours kählérien complet (le complémentaire d'un sous-ensemble analytique dans un espace kählérien faiblement pseudoconvexe est kählérien complet, voir par exemple [Dem82]). Par conséquent, le théorème d'annulation de Nadel est essentiellement insensible à la présence de singularités. □

Nous déduisons maintenant une version algébrique du théorème d'annulation de Nadel obtenue indépendamment par Kawamata [Kaw82] et Viehweg [Vie82] (la preuve originale reposait sur une méthode différente, utilisant des revêtements cycliques pour ramener la situation au cas du théorème de Kodaira usuel). Avant d'énoncer le théorème, nous avons besoin d'une définition.

15.17. Définition. *Un fibré en droites L sur une variété complexe compacte est dit gros si sa dimension de Kodaira est égale à $n = \dim X$, c'est-à-dire, s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$H^0(X, \mathcal{O}(kL)) \geqslant c\, k^n, \qquad k \geqslant k_0.$$

15.18. Définition. *Un fibré en droites L sur une variété algébrique projective est dit numériquement effectif (nef en abrégé) si L satisfait l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent :*

a) *Pour toute courbe algébrique irréductible $C \subset X$, on a $L \cdot C = \int_C c_1(L) \geqslant 0$.*

b) *Si A est un fibré en droites ample, alors $kL + A$ est ample pour tout $k \geqslant 0$.*

c) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique hermitienne h_ε de classe C^∞ sur L telle que $\mathrm{i}\Theta_{h_\varepsilon}(L) \geqslant -\varepsilon\omega$, où ω est une métrique hermitienne fixée sur X.*

L'équivalence des propriétés 15.18 a) et b) est bien connue et nous l'admettrons ici (voir par exemple Hartshorne [Har70] pour la démonstration). Il est clair d'autre part que 15.18 c) implique 15.18 a), tandis que 15.18 b) implique 15.18 c) ; en effet si $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(A)$ est la courbure d'une métrique de A à courbure positive, et si h_k est une métrique sur L induisant une métrique à courbure positive sur $kL+A$, il vient $k\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(L) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(A) > 0$, d'où $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(L) \geqslant -\frac{1}{k}\omega$. Maintenant, si $D = \sum \alpha_j D_j \geqslant 0$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif, nous définissons le *faisceau d'idéaux multiplicateurs* $\mathcal{I}(D)$ comme étant le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ associé à la fonction psh $\varphi = \sum \alpha_j \log |g_j|$ définie par des générateurs g_j de $\mathcal{O}(-D_j)$; d'après la remarque 15.6, le calcul de $\mathcal{I}(D)$ peut se faire algébriquement en utilisant des désingularisations $\mu : \widetilde{X} \to X$ telles que $\mu^\star D$ devienne un diviseur à croisements normaux sur $\widetilde{X}$.

15.19. Théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. *Soit X une variété algébrique projective lisse et soit F un fibré en droites sur X tel que F possède un multiple mF s'écrivant sous la forme $mF = L + D$ où L est un fibré en droites nef et gros, et D un diviseur effectif. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + F) \otimes \mathcal{I}(m^{-1}D)\big) = 0 \quad \text{pour} \ \ q \geqslant 1.$$

15.20. Corollaire. *Si F est nef et gros, alors $H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + F)\big) = 0$ pour $q \geqslant 1$.*

Preuve. Soit A un diviseur très ample non singulier. On a une suite exacte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}(kL - A)) \to H^0(X, \mathcal{O}(kL)) \to H^0(A, \mathcal{O}(kL)_{\restriction A}),$$

et $\dim H^0(A, \mathcal{O}(kL)_{\restriction A}) \leqslant C\, k^{n-1}$ pour une certaine constante $C \geqslant 0$. Comme L est gros, il existe un entier $k_0 \gg 0$ tel que $\mathcal{O}(k_0 L - A)$ possède une section non triviale. Si E est le diviseur de cette section, on obtient $\mathcal{O}(k_0 L - A) \simeq \mathcal{O}(E)$, donc $\mathcal{O}(k_0 L) \simeq \mathcal{O}(A + E)$. Maintenant, pour $k \geqslant k_0$, il vient $\mathcal{O}(kL) = \mathcal{O}((k - k_0)L + A + E)$.

D'après 15.18 b), le fibré en droites $\mathcal{O}((k-k_0)L+A)$ est ample, donc il peut être muni d'une métrique hermitienne $h_k = e^{-\varphi_k}$ de classe C^∞ et de forme de courbure définie positive $\omega_k = \frac{i}{2\pi}\Theta((k-k_0)L+A)$. Soit $\varphi_D = \sum \alpha_j \log|g_j|$ le poids de la métrique singulière sur $\mathcal{O}(D)$ décrite dans l'exemple 11.21, telle que $\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(D)) = [D]$, et de façon analogue, soit φ_E le poids tel que $\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(E)) = [E]$. On définit une métrique singulière sur $\mathcal{O}(kL) = \mathcal{O}((k-k_0)L+A+E)$ au moyen du poids $\varphi_k+\varphi_E$, et on obtient alors une métrique singulière sur $\mathcal{O}(mF) = \mathcal{O}(L+D)$ en considérant le poids $\frac{1}{k}(\varphi_k+\varphi_E)+\varphi_D$. Finalement, on obtient une métrique sur F de poids

$$\varphi_F = \frac{1}{km}(\varphi_k+\varphi_E) + \frac{1}{m}\varphi_D.$$

La forme de courbure correspondante est

$$\frac{i}{2\pi}\Theta(F) = \frac{1}{km}(\omega_k+[E]) + \frac{1}{m}[D] \geqslant \frac{1}{km}\omega_k > 0.$$

De plus φ_F a des singularités algébriques, et en prenant k assez grand il vient

$$\mathcal{I}(\varphi_F) = \mathcal{I}\Big(\frac{1}{km}E + \frac{1}{m}D\Big) = \mathcal{I}\Big(\frac{1}{m}D\Big).$$

En effet, $\mathcal{I}(\varphi_F)$ se calcule en prenant la partie entière d'un $\mathbb{Q}$-diviseur à croisements normaux, obtenu au moyen d'une modification adéquate (comme il a été expliqué à la remarque 15.6). Le diviseur $\frac{1}{km}E + \frac{1}{m}D$ fournit donc la même partie entière que $\frac{1}{m}D$ lorsque k est grand. Le théorème de Nadel implique alors le résultat d'annulation désiré pour tout $q \geqslant 1$. □

16. Sur la conjecture de Fujita

Etant donné un fibré en droites L ample, une question fondamentale est de déterminer un entier effectif m_0 tel que mL soit très ample pour $m \geqslant m_0$. L'exemple où X est une courbe hyperelliptique de genre g et où $L = \mathcal{O}(p)$ est associé à un des $2g+2$ points de Weierstrass montre que m_0 doit être au moins égal à $2g+1$ (on vérifie par ailleurs assez facilement que $m_0 = 2g+1$ répond toujours à la question pour une courbe). Il en résulte que m_0 doit nécessairement dépendre de la géométrie de X, et ne peut pas dépendre seulement de la dimension de X. Cependant, lorsque mL est remplacé par le fibré en droites “adjoint” $K_X + mL$, une réponse universelle simple semble pouvoir se dégager.

16.1. Conjecture de Fujita ([Fuj87]). *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective de dimension n, alors*

i) $K_X + (n+1)L$ *est engendré par ses sections globales;*

ii) $K_X + (n+2)L$ *est très ample.*

Les bornes prédites par la conjecture sont optimales pour $(X,L) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, puisqu'on a alors $K_X = \mathcal{O}(-n-1)$. La conjecture est facile à vérifier dans le cas des courbes (exercice !), et I. Reider [Rei88] a résolu la conjecture par l'affirmative dans le cas $n = 2$. Ein-Lazarsfeld [EL93] et Fujita [Fuj93] sont parvenus à établir la partie i) en dimension 3, et un raffinement très poussé de leur technique a permis à Kawamata [Kaw95] d'atteindre aussi le cas de la dimension 4[1]. Les autres cas de la conjecture, à savoir i) pour $n \geqslant 5$ et ii) pour $n \geqslant 3$, restent pour l'instant non résolus. Le premier pas en direction de la conjecture pour la dimension n quelconque a été réalisé en 1991 (travail paru 2 ans plus tard dans [Dem93]), au moyen d'une méthode analytique reposant sur la résolution d'une équation de Monge-Ampère. D'autres résultats similaires ont été obtenus par Kollár [Kol92] par des méthodes entièrement algébriques ; nous renvoyons à [Laz93] pour un excellent article de synthèse consacré à ces développements, ainsi qu'à [Dem94] pour le versant analytique de la théorie.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de quelques résultats liés à la conjecture de Fujita en dimension arbitraire. Les idées principales mises en jeu ici sont inspirées d'un travail récent de Y.T. Siu [Siu96]. La méthode de Siu, qui est de nature algébrique et relativement élémentaire, consiste à combiner la formule de Riemann-Roch avec le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (il sera cependant beaucoup plus commode d'utiliser ce théorème dans la formulation de Nadel faisant intervenir le faisceau d'idéaux multiplicateurs). Dans toute la suite, X désigne une variété projective algébrique de dimension n. La première observation utile est la conséquence classique suivante de la formule de Riemann-Roch :

16.2. Cas particulier de la formule de Riemann-Roch. *Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X tel que la variété des zéros $V(\mathcal{J})$ soit de dimension d (avec éventuellement des composantes de dimension plus basse). Soit $Y = \sum \lambda_j Y_j$ le cycle algébrique effectif de dimension d associé aux composantes de dimension d de $V(\mathcal{J})$ (les multiplicités λ_j prennent en compte les multiplicités de l'idéal $\mathcal{J}$ le long de chaque composante). Alors, pour tout fibré en droites E, la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathcal{O}(E + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{O}(\mathcal{J}))$ est un polynôme $P(m)$ de degré d et de coefficient directeur $L^d \cdot Y/d!$* □

Le deuxième fait utile est un lemme élémentaire concernant les polynômes numériques (polynômes à coefficients rationnels, définissant une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$).

16.3. Lemme. *Soit $P(m)$ un polynôme numérique de degré $d > 0$ et de coefficient directeur $a_d/d!$, $a_d \in \mathbb{Z}$, $a_d > 0$. On suppose que $P(m) \geqslant 0$ pour tout $m \geqslant m_0$. Alors*

a) *Pour tout $N \geqslant 0$, il existe $m \in [m_0, m_0 + Nd]$ tel que $P(m) \geqslant N$.*

b) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in [m_0, m_0 + kd]$ tel que $P(m) \geqslant a_d k^d/2^{d-1}$.*

c) *Pour tout $N \geqslant 2d^2$, il existe $m \in [m_0, m_0 + N]$ tel que $P(m) \geqslant N$.*

[1] La technique de Fujita [Fuj93] et Kawamata [Kaw95] vient d'être considérablement simplifiée et clarifiée par S. Helmke [Hel96].

Preuve. a) Chacune des N équations $P(m) = 0$, $P(m) = 1$, ..., $P(m) = N - 1$ a au plus d racines, donc il y a nécessiarement un entier $m \in [m_0, m_0 + dN]$ qui n'est pas une racine de ces équations.

b) Grâce à la formule de Newton pour les différences itérées $\Delta P(m) = P(m+1) - P(m)$, nous obtenons

$$\Delta^d P(m) = \sum_{1\leqslant j\leqslant d} (-1)^j \binom{d}{j} P(m + d - j) = a_d, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Par suite, si $j \in \{0, 2, 4, \ldots, 2\lfloor d/2\rfloor\} \subset [0, d]$ est l'entier pair réalisant le maximum de $P(m_0 + d - j)$ sur cet ensemble fini, nous obtenons

$$2^{d-1} P(m_0 + d - j) = \left(\binom{d}{0} + \binom{d}{2} + \cdots\right) P(m_0 + d - j) \geqslant a_d,$$

d'où l'existence d'un entier $m \in [m_0, m_0 + d]$ avec $P(m) \geqslant a_d/2^{d-1}$. Le résultat est donc démontré pour $k = 1$. Dans le cas général, nous appliquons ce résultat particulier au polynôme $Q(m) = P(km - (k - 1)m_0)$, dont le coefficient directeur est $a_d k^d/d!$

c) Si $d = 1$, la partie a) donne déjà le résultat. Si $d = 2$, un coup d'oeil à la parabole montre que

$$\max_{m\in[m_0,m_0+N]} P(m) \geqslant \begin{cases} a_2N^2/8 & \text{si } N \text{ est pair,} \\ a_2(N^2 - 1)/8 & \text{si } N \text{ est impair ;} \end{cases}$$

donc $\max_{m\in[m_0,m_0+N]} P(m) \geqslant N$ chaque fois que $N \geqslant 8$. Si $d \geqslant 3$, nous appliquons b) avec k égal au plus petit entier tel que $k^d/2^{d-1} \geqslant N$, i.e. $k = \lceil 2(N/2)^{1/d}\rceil$, où $\lceil x\rceil \in \mathbb{Z}$ désigne l'entier arrondi par excès. Alors

$$kd \leqslant (2(N/2)^{1/d} + 1)d \leqslant N$$

dès que $N \geqslant 2d^2$, comme on le voit après un bref calcul. □

Nous appliquons maintenant le théorème d'annulation de Nadel d'une manière analogue à celle de Siu [Siu96], avec quelques simplifications dans la technique et quelques améliorations pour les bornes. Notre méthode donne simultanément une preuve simple d'un résultat fondamental classique dû à Fujita.

16.4. Théorème (Fujita)**.** *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective X de dimension n, alors $K_X + (n + 1)L$ est nef.*

En utilisant la théorie de Mori et le "*base point free theorem*" ([Mor82], [Kaw84]), on peut montrer en fait que $K_X + (n + 1)L$ est semi-ample, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif m tel que $m(K_X + (n + 1)L)$ soit engendré par ses sections (voir [Kaw85] et [Fuj87]). La preuve repose sur l'observation que $n+1$ est la longueur maximale des rayons extrêmaux de variétés projectives lisses de dimension n. Notre démonstration de (16.4) est différente et s'obtient en même temps que la démonstration du th. (16.5) ci-dessous.

16.5. Théorème. *Soit L un fibré en droites ample et soit G un fibré en droites nef sur une variété projective X de dimension n. On a alors les propriétés suivantes.*

a) *$2K_X + mL + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p \in \mathbb{N}$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$, i.e., il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(2K_X + mL + G)) \twoheadrightarrow \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant p} \mathcal{O}(2K_X + mL + G) \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1},$$

dès que $m \geqslant 2 + \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}$.

En particulier $2K_X + mL + G$ est très ample pour $m \geqslant 2 + \binom{3n+1}{n}$.

b) *$2K_X + (n+1)L + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$ dès que les nombres d'intersection $L^d \cdot Y$ de L sur tous les sous-ensembles algébriques Y de X de dimension d sont tels que*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Preuve. Les démonstrations de (16.4) et (16.5 a, b) sont tout à fait parallèles, c'est pourquoi nous les présenterons simultanément (dans le cas de (16.4), on convient simplement que $\{x_1, \ldots, x_p\} = \emptyset$). L'idée est de trouver un entier (ou un rationnel) m_0 et une métrique hermitienne singulière h_0 sur $K_X + m_0 L$ dont le courant de courbure est strictement positif, $\mathrm{i}\Theta_{h_0} \geqslant \varepsilon\omega$, telle que $V(\mathcal{I}(h_0))$ soit de dimension 0 et telle que le poids φ_0 de h_0 satisfasse $\nu(\varphi_0, x_j) \geqslant n + s_j$ pour tout j. Comme L et G sont nefs, 15.18 c) implique que $(m - m_0)L + G$ possède pour tout $m \geqslant m_0$ une métrique h' dont la courbure $\mathrm{i}\Theta_{h'}$ a une partie négative arbitrairement petite, disons $\mathrm{i}\Theta_{h'} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\omega$. Alors $\mathrm{i}\Theta_{h_0} + \mathrm{i}\Theta_{h'} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\omega$ est positive définie. Une application du Cor. 15.9 à $F = K_X + mL + G = (K_X + m_0 L) + ((m - m_0)L + G)$ muni de la métrique $h_0 \otimes h'$ garantit l'existence des sections de $K_X + F = 2K_X + mL + G$ réalisant les jets désirés pour $m \geqslant m_0$.

Fixons un plongement $\Phi_{|\mu L|} : X \to \mathbb{P}^N$, $\mu \gg 0$, donné par des sections $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in H^0(X, \mu L)$, et soit h_L la métrique associée sur L, de forme de courbure définie positive $\omega = \Theta(L)$. Pour obtenir la métrique désirée h_0 sur $K_X + m_0 L$, on fixe un entier $a \in \mathbb{N}^\star$ et on utilise une procédé de récurrence double pour construire des métriques singulières $(h_{k,\nu})_{\nu \geqslant 1}$ sur $aK_X + b_k L$, pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers positifs $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_k \geqslant \cdots$. Une telle suite est nécessairement stationnaire et m_0 sera précisément la limite stationnaire $m_0 = \lim b_k/a$. Les métriques $h_{k,\nu}$ sont choisies de sorte qu'elles satisfassent les propriétés suivantes :

α) $h_{k,\nu}$ est une métrique "algébrique" de la forme

$$\|\xi\|^2_{h_{k,\nu}} = \frac{|\tau_k(\xi)|^2}{\big(\sum_{1\leqslant i\leqslant\nu,\,0\leqslant j\leqslant N}\big|\tau_k^{(a+1)\mu}(\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i})\big|^2\big)^{1/(a+1)\mu}},$$

définie par des sections $\sigma_i \in H^0\big(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + m_iL)\big)$, $m_i < \frac{a+1}{a}b_k$, $1\leqslant i\leqslant \nu$, où $\xi\mapsto\tau_k(\xi)$ est une trivialisation locale arbitraire de $aK_X + b_kL$; notons que $\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i}$ est une section de

$$a\mu((a+1)K_X + m_iL) + ((a+1)b_k - am_i)\mu L = (a+1)\mu(aK_X + b_kL).$$

β) $\operatorname{ord}_{x_j}(\sigma_i) \geqslant (a+1)(n+s_j)$ pour tout i, j ;

γ) $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1}) \supset \mathcal{I}(h_{k,\nu})$ et $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1}) \neq \mathcal{I}(h_{k,\nu})$ tant que la variété des zéros $V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$ est de dimension positive.

Le poids $\varphi_{k,\nu} = \frac{1}{2(a+1)\mu}\log\sum\big|\tau_k^{(a+1)\mu}(\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i})\big|^2$ de $h_{k,\nu}$ est plurisousharmonique et la condition $m_i < \frac{a+1}{a}b_k$ implique $(a+1)b_k - am_i \geqslant 1$, donc la différence $\varphi_{k,\nu} - \frac{1}{2(a+1)\mu}\log\sum|\tau(\lambda_j)|^2$ est aussi plurisousharmonique. Par suite $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta_{h_{k,\nu}}(aK_X + b_kL) = \frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\varphi_{k,\nu} \geqslant \frac{1}{(a+1)}\omega$. De plus, la condition β) implique clairement $\nu(\varphi_{k,\nu}, x_j) \geqslant a(n+s_j)$. Finalement, la condition γ) combinée avec la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents garantit que la suite $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ va finalement produire un sous-schéma $V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$ de dimension 0. On convient que la suite $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ s'arrête à ce point, et on note $h_k = h_{k,\nu}$ la métrique finale ainsi atteinte, telle que $\dim V(\mathcal{I}(h_k)) = 0$.

Pour $k=1$, il est clair que les métriques désirées $(h_{1,\nu})_{\nu\geqslant1}$ existent si b_1 est choisi assez grand (disons tel que $(a+1)K_X + (b_1-1)L$ engendre les jets d'ordre $(a+1)(n+\max s_j)$ en tout point ; alors les sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ peuvent être choisie telles que $m_1 = \cdots = m_\nu = b_1 - 1$). Supposons que les métriques $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ et h_k aient déjà été construites et procédons à la construction de $(h_{k+1,\nu})_{\nu\geqslant1}$. On utilise de nouveau une récurrence sur ν, en supposant que $h_{k+1,\nu}$ est déjà construite et que $\dim V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) > 0$. Nous commencerons en fait la récurrence par $\nu = 0$, et convenons dans ce cas que $\mathcal{I}(h_{k+1,0}) = 0$ (ceci correspondrait à une métrique infinie de poids identiquement égal à $-\infty$). Grâce au théorème d'annulation de Nadel appliqué à $F_m = aK_X + mL = (aK_X + b_kL) + (m-b_k)L$ pour la métrique $h_k\otimes(h_L)^{\otimes m-b_k}$, nous obtenons

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL)\otimes\mathcal{I}(h_k)) = 0 \qquad \text{pour } q\geqslant1,\ m\geqslant b_k.$$

Comme $V(\mathcal{I}(h_k))$ est de dimension 0, le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k)$ est un faisceau gratte-ciel, et la suite exacte $0\to\mathcal{I}(h_k)\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k)\to0$ tordue par le faisceau inversible $\mathcal{O}((a+1)K_X + mL)$ montre que

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL)) = 0 \qquad \text{pour } q\geqslant1,\ m\geqslant b_k.$$

De manière analogue, nous trouvons

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_{k+1}$$

(c'est aussi vrai pour $\nu = 0$, puisque $\mathcal{I}(h_{k+1,0}) = 0$), et lorsque

$$m \geqslant \max(b_k, b_{k+1}) = b_k,$$

la suite exacte $0 \to \mathcal{I}(h_{k+1,\nu}) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1}, \nu) \to 0$ implique

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_k.$$

En particulier, puisque le groupe H^1 ci-dessus s'annule, toute section u' de $(a+1)K_X + mL$ sur le sous-schéma $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$ possède une extension u à X. Fixons une base $u'_1, \ldots, u'_N$ des sections de ce faisceau sur $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$ et prenons des extensions arbitraires $u_1, \ldots, u_N$ à X. Considérons l'application linéaire attribuant à chaque section u sur X la collection des jets d'ordre $(a+1)(n+s_j)-1$ aux points x_j, soit

$$u = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} a_j u_j \longmapsto \bigoplus J_{x_j}^{(a+1)(n+s_j)-1}(u).$$

Puisque le rang du fibré des s-jets est $\binom{n+s}{n}$, l'espace cible est de dimension

$$\delta = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{n + (a+1)(n+s_j) - 1}{n}.$$

Pour obtenir une section $\sigma_{\nu+1} = u$ satisfaisant la condition β) et ayant une restriction non triviale $\sigma'_{\nu+1}$ à $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$, nous avons besoin d'au moins $N = \delta + 1$ sections indépendantes $u'_1, \ldots, u'_N$. Cette condition va être réalisée en appliquant le lemme (16.3) au polynôme numérique

$$\begin{aligned} P(m) &= \chi(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) \\ &= h^0(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) \geqslant 0, \qquad m \geqslant b_k. \end{aligned}$$

Le polynôme P est de degré $d = \dim V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) > 0$. Nous obtenons donc l'existence d'un entier $m \in [b_k, b_k + \eta]$ tel que $N = P(m) \geqslant \delta + 1$, pour un certain entier explicite $\eta \in \mathbb{N}$ (par exemple $\eta = n(\delta+1)$ convient toujours d'après (16.3 a), mais il sera également important d'utiliser les autres possibilités pour optimiser les choix). Nous trouvons alors une section $\sigma_{\nu+1} \in H^0(X, (a+1)K_X + mL)$ ayant une restriction non triviale $\sigma'_{\nu+1}$ à $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$, s'annulant à un ordre $\geqslant (a+1)(n+s_j)$ en chaque point x_j. On pose alors $m_{\nu+1} = m$, et la condition $m_{\nu+1} < \frac{a+1}{a} b_{k+1}$ est réalisée si $b_k + \eta < \frac{a+1}{a} b_{k+1}$. Ceci montre qu'on peut choisir par récurrence

$$b_{k+1} = \left\lfloor \frac{a}{a+1}(b_k + \eta) \right\rfloor + 1.$$

Par définition, $h_{k+1,\nu+1} \leqslant h_{k+1,\nu}$, donc $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1}) \supset \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})$. On a nécessairement $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1}) \neq \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})$, car $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1})$ contient le faisceau d'idéaux associé au diviseur des zéros de $\sigma_{\nu+1}$, alors que $\sigma_{\nu+1}$ ne s'annule pas identiquement sur $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$. Maintenant, un calcul facile montre que la suite itérée $b_{k+1} = \lfloor \frac{a}{a+1}(b_k+\eta)\rfloor + 1$ stationne à la valeur limite $b_k = a(\eta+1)+1$, pour toute valeur initiale b_1 supérieure à cette limite. De cette manière, on obtient une métrique h_∞ à courbure définie positive sur $aK_X + (a(\eta+1)+1)L$, telle que $\dim V(\mathcal{I}(h_\infty)) = 0$ et $\nu(\varphi_\infty, x_j) \geqslant a(n+s_j)$ en chaque point x_j.

Preuve de (16.4). Dans ce cas, l'ensemble $\{x_j\}$ est pris égal à l'ensemble vide, donc $\delta = 0$. Grâce à (16.3 a), la condition $P(m) \geqslant 1$ est réalisée pour au moins un entier $m \in [b_k, b_k+n]$, donc on peut prendre $\eta = n$. Comme μL est très ample, μL possède une métrique ayant un pôle logarithmique isolé de nombre de Lelong 1 en tout point x_0 donné (par exemple, la métrique algébrique définie par les sections de μL s'annulant en x_0). Donc

$$F'_a = aK_X + (a(n+1)+1)L + n\mu L$$

possède une métrique h'_a tel que $V(\mathcal{I}(h'_a))$ soit de dimension zéro et contienne $\{x_0\}$. Grâce au Cor. (15.9), on conclut que

$$K_X + F'_a = (a+1)K_X + (a(n+1)+1+n\mu)L$$

est engendré par ses sections, en particulier $K_X + \frac{a(n+1)+1+n\mu}{a+1}L$ est nef. Lorsque a tend vers $+\infty$, on en déduit que $K_X + (n+1)L$ est nef. □

Preuve de (16.5 a). Il suffit ici de choisir $a = 1$. Alors

$$\delta = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \binom{3n+2s_j-1}{n}.$$

Si $\{x_j\} \neq \emptyset$, on a $\delta + 1 \geqslant \binom{3n-1}{n} + 1 \geqslant 2n^2$ pour $n \geqslant 2$. Le lemme (16.3 c) montre que $P(m) \geqslant \delta + 1$ pour au moins un $m \in [b_k, b_k+\eta]$ avec $\eta = \delta+1$. On peut commencer la procédure de récurrence $k \mapsto k+1$ avec $b_1 = \eta + 1 = \delta + 2$, parce que la seule propriété nécessaire pour l'étape de récurrence est la propriété d'annulation

$$H^q(X, 2K_X + mL) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_1,$$

qui est réalisée d'après le théorème d'annulation de Kodaira et la propriété d'amplitude de K_X+b_1L (on utilise ici le résultat de Fujita (16.4), en observant que $b_1 > n+1$). La formule récursive $b_{k+1} = \lfloor \frac{1}{2}(b_k+\eta)\rfloor + 1$ donne alors $b_k = \eta+1 = \delta+2$ pour tout k, et (16.5 a) s'ensuit. □

Preuve de (16.5 b). Tout à fait similaire à (16.5 a), sauf que nous choisissons $\eta = n$, $a = 1$ et $b_k = n+1$ pour tout k. Grâce au lemme (16.3 b), nous avons $P(m) \geqslant a_d k^d/2^{d-1}$ pour au moins un entier $m \in [m_0, m_0+kd]$, où

$a_d > 0$ est le coefficient de plus haut degré de P. Grâce au lemme (16.2), on a $a_d \geqslant \inf_{\dim Y=d} L^d \cdot Y$. Prenons $k = \lfloor n/d \rfloor$. La condition $P(m) \geqslant \delta + 1$ peut alors être réalisée pour un entier $m \in [m_0, m_0 + kd] \subset [m_0, m_0 + n]$, pourvu que

$$\inf_{\dim Y=d} L^d \cdot Y \; \lfloor n/d \rfloor^d / 2^{d-1} > \delta,$$

ce qui est équivalent à la condition donnée en (16.5 b). □

L'inconvénient de la technique décrite plus haut est qu'on doit nécessairement faire intervenir des multiples de L pour éviter les zéros du polynôme de Hilbert, en particulier il n'est pas possible d'obtenir directement un critère de grande amplitude pour $2K_X + L$ dans l'énoncé de (16.5 b). Un tel critère peut néanmoins être obtenu à l'aide du lemme élémentaire suivant.

16.6. Lemme. *Supposons qu'il existe un entier $\mu \in \mathbb{N}^\star$ tel que μF engendre simultanément tous les jets d'ordre $\mu(n + s_j) + 1$ en tout point x_j d'un sous-ensemble $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$. Alors $K_X + F$ engendre simultanément tous les jets d'ordre s_j aux points x_j.*

Preuve. Choisissons la métrique algébrique sur F définie par une base $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ de l'espace des sections de μF qui s'annuler à l'ordre $\mu(n + s_j) + 1$ en tout point x_j. Puisque nous sommes encore libres de choisir le terme homogène de degré $\mu(n+s_j)+1$ dans le développement de Taylor de ces sections aux points x_j, nous voyons que $x_1, \ldots, x_p$ sont des zéros isolés de $\bigcap \sigma_j^{-1}(0)$. Si φ est le poids de la métrique de F près de x_j, nous avons donc $\varphi(z) \sim (n + s_j + \frac{1}{\mu}) \log|z - x_j|$ dans des coordonnées convenables. Remplaçons φ au voisinage de x_j par

$$\varphi'(z) = \max\big(\varphi(z)\,,\, |z|^2 - C + (n + s_j)\log|z - x_j|\big)$$

et laissons φ inchangée partout ailleurs (c'est possible en prenant $C > 0$ suffisamment grand). Alors $\varphi'(z) = |z|^2 - C + (n + s_j)\log|z - x_j|$ au voisinage de x_j, en particulier φ' est strictement plurisousharmonique près de x_j. De cette manière, nous obtenons une métrique h' sur F à courbure semi-positive partout sur X, et à courbure définie positive sur un voisinage de $\{x_1, \ldots, x_p\}$. La conclusion résulte alors d'une application directe des estimations L^2 (14.2). □

16.7. Théorème. *Soient X une variété projective de dimension n et L un fibré en droites ample sur X. Alors $2K_X + L$ engendre simultanément les jets d'ordre $s_1, \ldots, s_p$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$ dès que les nombres d'intersection $L^d \cdot Y$ de L sur tous les sous-ensembles algébriques $Y \subset X$ de dimension d sont tels que*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{(n+1)(4n + 2s_j + 1) - 2}{n}, \qquad 1 \leqslant d \leqslant n.$$

Preuve. Le lemme (16.6) appliqué avec $F = K_X + L$ et $\mu = n + 1$ montre que la propriété désirée pour les jets de $2K_X + L$ a lieu si $(n+1)(K_X + L)$ engendre les jets d'ordre $(n+1)(n+s_j)+1$ aux points x_j. Le lemme (16.6) appliqué de nouveau avec $F = pK_X + (n+1)L$ et $\mu = 1$ montre par récurrence descendante sur p qu'il suffit que F engendre tous les jets d'ordre $(n+1)(n+s_j)+1+(n+1-p)(n+1)$ aux points x_j. En particulier, pour $2K_X+(n+1)L$ il suffit d'obtenir tous les jets d'ordre $(n+1)(2n+s_j-1)+1$. Le th. (16.5 b) donne alors la condition désirée. □

Mentionnons pour terminer quelques conséquences immédiates du th. 16.5, obtenues en prenant $L = \pm K_X$.

16.8. Corollaire. *Soit X une variété projective de type général, avec K_X ample et* $\dim X = n$*. Alors mK_X est très ample pour $m \geqslant m_0 = \binom{3n+1}{n} + 4$.*

16.9. Corollaire. *Soit X une variété de Fano (c'est-à-dire une variété projective telle que $-K_X$ soit ample), de dimension n. Alors $-mK_X$ est très ample pour $m \geqslant m_0 = \binom{3n+1}{n}$.*

17. Une version effective du grand théorème de Matsusaka

Nous abordons ici le problème de trouver un entier explicite m_0 tel que mL soit très ample pour $m \geqslant m_0$. L'existence d'une telle borne m_0 ne dépendant que de la dimension et des coefficients du polynôme de Hilbert de L a été démontrée dans un premier temps par Matsusaka [Mat72], puis Kollár et Matsusaka [KoM83] ont montré qu'on pouvait trouvait trouver une borne $m_0 = m_0(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ dépendant seulement de $n = \dim X$ et des deux premiers coefficients. Récemment, Siu [Siu93] a obtenu une version effective du même résultat fournissant une borne explicite m_0 "raisonnable" (bien que cette borne soit malheureusement encore loin d'être optimale). Nous nous proposons ici d'expliquer la méthode de Siu, à partir des simplifications et améliorations suggérées dans [Dem96]. Le point de départ est le lemme suivant.

17.1. Lemme. *Soient F et G des fibrés en droites nefs sur X. Si $F^n > n\,F^{n-1}\cdot G$, tout multiple positif $k(F-G)$ admet une section non triviale pour $k \geqslant k_0$ assez grand.*

Preuve. Le lemme peut se démontrer comme cas particulier des inégalités de Morse holomorphes (voir [Dem85], [Tra95], [Siu93], [Ang95]). Nous en donnons ici une preuve simple, suivant une suggestion de F. Catanese. On peut supposer que F et G sont très amples (sinon, il suffit de remplacer F et G par $F' = pF + A$ et $G' = pG + A$ avec A très ample et suffisamment positif pour entraîner la grande amplitude de toute somme avec un fibré nef, puis de choisir $p > 0$ assez grand pour que F' et G' satisfassent la même hypothèse numérique que F et G). Alors $\mathcal{O}(k(F-G)) \simeq \mathcal{O}(kF - G_1 - \cdots - G_k)$ pour des éléments arbitraires $G_1, \ldots, G_k$ du système linéaire $|G|$. Si on choisit de tels éléments G_j en position générale, le lemme résulte de la formule de Riemann-Roch appliquée au morphisme de restriction $H^0(X, \mathcal{O}(kF)) \to \bigoplus H^0(G_j, \mathcal{O}(kF_{\restriction G_j}))$. □

17.2. Corollaire. *Soient F et G des fibrés en droites nefs sur X. Si F est gros et si $m > n\,F^{n-1}\cdot G/F^n$, alors $\mathcal{O}(mF-G)$ peut être muni d'une métrique hermitienne*

h (peut être singulière), ayant une forme courbure définie positive, i.e. telle que $\Theta_h(mF - G) \geqslant \varepsilon\omega$, $\varepsilon > 0$, pour une métrique kählérienne ω.

Preuve. En fait, si A est ample et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ est assez petit, le lemme (17.1) implique qu'un certain multiple $k(mF - G - \varepsilon A)$ admet une section. Soit E le diviseur de cette section et soit $\omega = \Theta(A) \in c_1(A)$ une métrique kählérienne représentant la forme de courbure de A. Alors $mF - G \equiv \varepsilon A + \frac{1}{k}E$ peut être muni d'une métrique singulière h de forme de courbure $\Theta_h(mF - G) = \varepsilon\Theta(A) + \frac{1}{k}[E] \geqslant \varepsilon\omega$. □

Nous considérons maintenant le problème d'obtenir une section non triviale de mL. L'idée de [Siu93] est d'obtenir plus généralement un critère pour l'amplitude de $mL - B$ quand B est nef. De cette manière, on pourra soustraire de mL tout multiple non désiré de K_X qui se trouverait sinon ajouté à L par application du théorème d'annulation de Nadel (pour cela, on remplace simplement B par B plus un multiple de $K_X + (n+1)L$).

17.3. Proposition. *Soit L un fibré en droite ample sur une variété X projective de dimension n, et soit B un fibré en droites nef sur X. Alors $K_X + mL - B$ admet une section non nulle pour un entier m tel que*
$$m \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot B}{L^n} + n + 1.$$

Preuve. Soit m_0 le plus petit entier $> n\,\frac{L^{n-1}\cdot B}{L^n}$. Alors $m_0L - B$ peut être équipé d'une métrique hermitienne singulière h de courbure définie positive. Grâce au théorème d'annulation de Nadel, on obtient
$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B)\otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \qquad \text{for } q \geqslant 1,$$
donc $P(m) = h^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B)\otimes\mathcal{I}(h))$ est un polynôme pour $m \geqslant m_0$. Puisque P est un polynôme de degré n qui n'est pas identiquement nul, il existe un entier $m \in [m_0, m_0 + n]$ qui n'en est pas racine. Donc il existe une section non triviale de
$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B)) \supset H^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B)\otimes\mathcal{I}(h))$$
pour un certain $m \in [m_0, m_0 + n]$, comme annoncé. □

17.4. Corollaire. *Si L est ample et B est nef, $mL - B$ possède une section non nulle pour au moins un entier*
$$m \leqslant n\Big(\frac{L^{n-1}\cdot B + L^{n-1}\cdot K_X}{L^n} + n + 1\Big).$$

Preuve. D'après le résultat de Fujita (16.4), $K_X + (n+1)L$ est nef. Nous pouvons donc remplacer B par $B + K_X + (n+1)L$ dans le résultat de la prop. (17.3). Le corollaire (17.4) s'ensuit. □

17.5. Remarque. Nous ne savons pas si la borne obtenue dans le corollaire ci-dessus est optimale, mais elle n'est certainement pas très loin de l'être. En effet, même pour $B = 0$, le facteur multiplicatif n ne peut être remplacée par un nombre plus petit que $n/2$: pour le voir, prenons par exemple pour X un produit $C_1 \times \cdots \times C_n$ de courbes C_j de genre g_j assez grand, et $L = \mathcal{O}(a_1[p_1]) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(a_n[p_n])$, $B = 0$. Notre condition suffisante pour que $|mL| \neq \emptyset$ devient dans ce cas $m \leqslant \sum(2g_j - 2)/a_j + n(n+1)$, tandis que pour un choix générique des p_j le fibré mL n'admet de sections que si $ma_j \geqslant g_j$ pour tout j. L'imprécision de notre inégalité joue donc au plus sur un facteur multiplicatif 2 quand $a_1 = \cdots = a_n = 1$ et $g_1 \gg g_2 \gg \cdots \gg g_n \to +\infty$. D'autre part, la constante additive $n+1$ est déjà la meilleure possible lorsque $B = 0$ et $X = \mathbb{P}^n$. □

Jusqu'à ce point, la méthode n'était pas réellement sensible à la présence de singularités (le lemme (17.1) est encore vrai dans le cas singulier comme on le voit aisément en utilisant une désingularisation de X). De même, comme on l'a observé à la remarque (15.16), le théorème d'annulation de Nadel reste encore essentiellement valable. La prop. (17.3) peut alors être généralisée comme suit :

17.6. Proposition. *Soit L un fibré en droites ample sur une variété X projective de dimension n, et soit B un fibré en droites nef sur X. Pour tout sous-variété algébrique (réduite) Y de X de dimension p, il existe un entier*

$$m \leqslant p\frac{L^{p-1} \cdot B \cdot Y}{L^p \cdot Y} + p + 1$$

tel que le faisceau $\omega_Y \otimes \mathcal{O}_Y(mL - B)$ ait une section non nulle. □

Grâce à un procédé de récurrence adéquat reposant sur les résultats ci-dessus, nous pouvons maintenant améliorer la borne effective obtenue par Siu [Siu93] pour le grand théorème de Matsusaka. Notre énoncé dépendra du choix d'une constante λ_n telle que $m(K_X + (n+2)L) + G$ est très ample pour $m \geqslant \lambda_n$ et tout fibré en droites nef G. La méthode de preuve du théorème (16.5) donne assez aisément que $\lambda_n \leqslant \binom{3n+1}{n} - 2n$ (un argument plus élaboré mettant en jeu les résultats récents de Angehrn-Siu [AS94] permet en fait de voir que $\lambda_n \leqslant n^3 - n^2 - n - 1$ pour $n \geqslant 2$). Bien entendu, on s'attend à ce que $\lambda_n = 1$ pour tout n, si on veut bien croire à la conjecture de Fujita.

17.7. Version effective du grand théorème de Matsusaka. *Soient L et B des fibrés en droites nefs sur une variété X projective de dimension n. Supposons que L soit ample et soit $H = \lambda_n(K_X + (n+2)L)$. Alors $mL - B$ est très ample pour*

$$m \geqslant (2n)^{(3^{n-1}-1)/2} \frac{(L^{n-1} \cdot (B+H))^{(3^{n-1}+1)/2} (L^{n-1} \cdot H)^{3^{n-2}(n/2-3/4)-1/4}}{(L^n)^{3^{n-2}(n/2-1/4)+1/4}}.$$

En particulier mL est très ample pour

$$m \geqslant C_n \; (L^n)^{3^{n-2}} \left(n + 2 + \frac{L^{n-1} \cdot K_X}{L^n}\right)^{3^{n-2}(n/2+3/4)+1/4}$$

avec $C_n = (2n)^{(3^{n-1}-1)/2}(\lambda_n)^{3^{n-2}(n/2+3/4)+1/4}$.

Preuve. Nous utilisons le th. (3.1) et la prop. (17.6) pour construire par récurrence une suite de sous-variétés algébriques (non nécessairement irréductibles) $X = Y_n \supset Y_{n-1} \supset \cdots \supset Y_2 \supset Y_1$ telle que $Y_p = \bigcup_j Y_{p,j}$ est de dimension p, Y_{p-1} étant obtenu pour chaque $p \geqslant 2$ comme la réunion des ensembles de zéros des sections

$$\sigma_{p,j} \in H^0(Y_{p,j}, \mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B))$$

pour des entiers convenables $m_{p,j} \geqslant 1$. Nous procédons par récurrence sur les valeurs décroissantes de la dimension p, et cherchons à obtenir à chaque pas une borne supérieure m_p pour les entiers $m_{p,j}$.

Grâce au Cor. (17.4), on peut trouver un entier m_n tel que que $m_nL - B$ admettte une section σ_n non triviale pour

$$m_n \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot(B + K_X + (n+1)L)}{L^n} \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot(B+H)}{L^n}.$$

Maintenant supposons que les sections $\sigma_n, \ldots, \sigma_{p+1,j}$ aient déjà été construites. On obtient alors par récurrence un p-cycle $\widetilde{Y}_p = \sum \mu_{p,j}Y_{p,j}$ défini par $\widetilde{Y}_p =$ somme des diviseurs des zéros des sections $\sigma_{p+1,j}$ sur les composantes $\widetilde{Y}_{p+1,j}$, où la multiplicité $\mu_{p,j}$ de $Y_{p,j} \subset Y_{p+1,k}$ est obtenue en multipliant la multiplicité correspondante $\mu_{p+1,k}$ par l'ordre d'annulation de $\sigma_{p+1,k}$ le long de $Y_{p,j}$. On obtient l'égalité de classes de cohomologie

$$\widetilde{Y}_p \equiv \sum (m_{p+1,k}L - B)\cdot(\mu_{p+1,k}Y_{p+1,k}) \leqslant m_{p+1}L\cdot\widetilde{Y}_{p+1}.$$

Par récurrence, nous obtenons alors l'inégalité numérique

$$\widetilde{Y}_p \leqslant m_{p+1}\cdots m_n L^{n-p}.$$

Maintenant, pour chaque composante $Y_{p,j}$, la prop. (17.6) montre qu'il existe une section de $\omega_{Y_{p,j}} \otimes \mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B)$ pour un certain entier

$$m_{p,j} \leqslant p\frac{L^{p-1}\cdot B\cdot Y_{p,j}}{L^p\cdot Y_{p,j}} + p + 1 \leqslant pm_{p+1}\cdots m_n\,L^{n-1}\cdot B + p + 1.$$

Nous avons utilisé ici la minoration évidente $L^{p-1}\cdot Y_{p,j} \geqslant 1$ (cette minoration est d'ailleurs sans doute un des points faibles de la méthode...). Le degré de $Y_{p,j}$ par rapport à H admet la majoration

$$\delta_{p,j} := H^p\cdot Y_{p,j} \leqslant m_{p+1}\cdots m_n H^p\cdot L^{n-p}.$$

L'inégalité de concavité de Hovanski-Teissier donne

$$(L^{n-p}\cdot H^p)^{\frac{1}{p}}(L^n)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant L^{n-1}\cdot H$$

([Hov79], [Tei79, 82], voir aussi [Dem93]), ce qui permet d'exprimer nos bornes en termes des seuls nombres d'intersection L^n et $L^{n-1}\cdot H$. On obtient alors

$$\delta_{p,j}\leqslant m_{p+1}\cdots m_n\frac{(L^{n-1}\cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}.$$

Nous avons besoin du lemme suivant, qui sera démontré ultérieurement.

17.8. Lemme. *Soit H un fibré en droites très ample sur une variété algébrique projective X, et soit $Y\subset X$ une sous-variété algébrique irréductible de dimension p. Si $\delta=H^p\cdot Y$ est le degré de Y par rapport à H, le faisceau $\mathcal{H}om\big(\omega_Y,\mathcal{O}_Y((\delta-p-2)H)\big)$ possède une section non triviale.*

Grâce au lemme (17.8), il existe une section non triviale de

$$\mathcal{H}om\big(\omega_{Y_{p,j}},\mathcal{O}_{Y_{p,j}}((\delta_{p,j}-p-2)H)\big).$$

En combinant cette section avec la section de $\omega_{Y_{p,j}}\otimes\mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L-B)$ déjà construite, nous obtenons une section de $\mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L-B+(\delta_{p,j}-p-2)H)$ sur $Y_{p,j}$. On ne veut pas que H apparaisse à ce niveau, c'est pourquoi on va remplacer B par $B+(\delta_{p,j}-p-2)H$. On obtient alors une section $\sigma_{p,j}$ de $\mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L-B)$ pour un certain entier $m_{p,j}$ tel que

$$\begin{aligned}m_{p,j}&\leqslant pm_{p+1}\cdots m_n\,L^{n-1}\cdot(B+(\delta_{p,j}-p-2)H)+p+1\\&\leqslant p\,m_{p+1}\cdots m_n\,\delta_{p,j}\,L^{n-1}\cdot(B+H)\\&\leqslant p\,(m_{p+1}\cdots m_n)^2\frac{(L^{n-1}\cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}\,L^{n-1}\cdot(B+H).\end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $M=n\,L^{n-1}\cdot(B+H)$, on obtient la relation de récurrence descendante

$$m_p\leqslant M\,\frac{(L^{n-1}\cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}\,(m_{p+1}\cdots m_n)^2\qquad\text{pour } 2\leqslant p\leqslant n-1,$$

partant de la valeur initiale $m_n\leqslant M/L^n$. Soient $(\overline{m}_p)$ la suite des nombre obtenus par cette formule de récurrence en remplaçant les inégalités par des égalités. Il vient $m_p\leqslant\overline{m}_p$ avec $\overline{m}_{n-1}=M^3(L^{n-1}\cdot H)^{n-1}/(L^n)^n$ et

$$\overline{m}_p=\frac{L^n}{L^{n-1}\cdot H}\,\overline{m}_{p+1}^2\overline{m}_{p+1}$$

pour $2\leqslant p\leqslant n-2$. On trouve alors par récurrence

$$m_p\leqslant\overline{m}_p=M^{3^{n-p}}\frac{(L^{n-1}\cdot H)^{3^{n-p-1}(n-3/2)+1/2}}{(L^n)^{3^{n-p-1}(n-1/2)+1/2}}.$$

Montrons maintenant que $m_0L - B$ est nef pour

$$m_0 = \max\big(m_2\,,\, m_3,\, \ldots\,, m_n\,,\, m_2 \cdots m_n\, L^{n-1}\cdot B\big).$$

En effet, soit $C \subset X$ une courbe irréductible arbitraire. Ou bien $C = Y_{1,j}$ pour un certain j, ou bien il existe un entier $p = 2, \ldots, n$ tel que C soit contenu dans $Y_p \smallsetminus Y_{p-1}$. Si $C \subset Y_{p,j} \smallsetminus Y_{p-1}$, alors $\sigma_{p,j}$ ne s'annule pas identiquement sur C. Donc $(m_{p,j}L - B)_{\restriction C}$ est de degré positif ou nul et

$$(m_0L - B)\cdot C \geqslant (m_{p,j}L - B)\cdot C \geqslant 0.$$

D'autre part, si $C = Y_{1,j}$, alors

$$(m_0L - B)\cdot C \geqslant m_0 - B\cdot \widetilde{Y}_1 \geqslant m_0 - m_2 \cdots m_n\, L^{n-1}\cdot B \geqslant 0.$$

D'après la définition de λ_n (et la preuve qu'une telle constante existe, cf. Th. 16.5), $H+G$ est très ample pour tout fibré en droites nef G, en particulier $H+m_0L-B$ est très ample. On remplace de nouveau B par $B+H$. Cette substitution a pour effet de remplacer M par la nouvelle constante $M = n\big(L^{n-1}\cdot(B+2H)\big)$ et m_0 par

$$m_0 = \max\big(m_n\,,\, m_{n-1},\, \ldots\,, m_2\,,\, m_2 \cdots m_n\, L^{n-1}\cdot(B+H)\big).$$

Le dernier terme étant le plus grand, l'estimation de $\overline{m}_p$ implique

$$\begin{aligned} m_0 &\leqslant M^{(3^{n-1}-1)/2}\frac{(L^{n-1}\cdot H)^{(3^{n-2}-1)(n-3/2)/2+(n-2)/2}(L^{n-1}\cdot(B+H))}{(L^n)^{(3^{n-2}-1)(n-1/2)/2+(n-2)/2+1}} \\ &\leqslant (2n)^{(3^{n-1}-1)/2}\frac{(L^{n-1}\cdot(B+H))^{(3^{n-1}+1)/2}(L^{n-1}\cdot H)^{3^{n-2}(n/2-3/4)-1/4}}{(L^n)^{3^{n-2}(n/2-1/4)+1/4}} \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme (17.8). Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ le plongement donné par H, de sorte que $H = \mathcal{O}_X(1)$. Il existe une projection linéaire $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{p+1}$ dont la restriction $\pi : Y \to \mathbb{P}^{p+1}$ à Y est un morphisme fini et birationnel de Y sur une hypersurface algébrique Y' de degré δ dans $\mathbb{P}^{p+1}$. Soit $s \in H^0(\mathbb{P}^{p+1}, \mathcal{O}(\delta))$ le polynôme de degré δ définissant Y'. Nous affirmons que pour tout petit ouvert de Stein $W \subset \mathbb{P}^{p+1}$ et toute p-forme holomorphe L^2 u sur $Y' \cap W$, il existe une $(p+1)$-forme holomorphe L^2 $\widetilde{u}$ sur W, à valeurs dans $\mathcal{O}(\delta)$, telle que $\widetilde{u}_{\restriction Y'\cap W} = u \wedge ds$. En fait, c'est précisément lae conclusion du théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi [OT87], [Ohs88] (voir aussi [Man93] pour une version plus générale de ce résultat) ; on peut également invoquer des arguments standards d'algèbre locale (voir Hartshorne [Har77], th. III-7.11). Comme $K_{\mathbb{P}^{p+1}} = \mathcal{O}(-p-2)$, la forme $\widetilde{u}$ peut être considérée comme une section de $\mathcal{O}(\delta-p-2)$ sur W, par suite le morphisme de faisceaux $u \mapsto u\wedge ds$ s'étend en une section globale de $\mathcal{H}om\big(\omega_{Y'}, \mathcal{O}_{Y'}(\delta-p-2)\big)$. L'image inverse par $\pi^\star$ fournit une section de $\mathcal{H}om\big(\pi^\star\omega_{Y'}, \mathcal{O}_Y((\delta-p-2)H)\big)$.

Puisque π est fini et génériquement 1 : 1, il est facile de voir que $\pi^\star\omega_{Y'} = \omega_Y$. Le lemme s'ensuit. □

17.9. Remarque. Dans le cas des surfaces ($n = 2$), on peut prendre $\lambda_n = 1$ d'après le résultat de I. Reider [Rei88], et les arguments développés ci-dessus donnent mL très ample pour

$$m \geqslant 4\,\frac{(L\cdot(K_X+4L))^2}{L^2}.$$

Si on reprend en détail la démonstration avec plus de soin, on peut voir que le facteur multiplicatif 4 peut être remplacé par 2. En fait, Fernández del Busto a montré récemment que mL est très ample pour

$$m > \frac{1}{2}\left[\frac{(L\cdot(K_X+4L)+1)^2}{L^2}+3\right],$$

et un exemple de G. Xiao montre que cette borne est essentiellement optimale (voir [FdB94]).

Le grand théorème de Matsusaka entraîne un certain nombre d'autres résultats importants de finitude. Un des prototypes de ces résultats est l'énoncé suivant.

17.10. Corollaire. *Il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L) de dimension n, où L est un fibré en droites ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont fixés.*

Preuve. En effet, comme L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont fixés, il existe un entier m_0 effectivement calculable tel que m_0L soit très ample. On obtient alors un plongement $\Phi = \Phi_{|m_0L|} : X \to \mathbb{P}^N$ tel que $\Phi^\star\mathcal{O}(1) = \pm m_0L$. L'image $Y = \Phi(X)$ est de degré

$$\deg(Y) = \int_Y c_1\big(\mathcal{O}(1)\big)^n = \int_X c_1\big(\pm m_0L\big)^n = m_0^n\,L^n.$$

Ceci entraîne que Y est un point d'une des composantes du schéma de Chow des sous-variétés algébriques Y de dimension et de degré donnés dans $\mathbb{P}^N$ pour lesquelles $\mathcal{O}(1)_{\restriction Y}$ est divisible par m_0, plus précisément un point de l'ouvert correspondant aux sous-variétés non singulières. Comme l'ouvert en question est un ouvert de Zariski, il ne peut avoir qu'un nombre fini de composantes irréductibles, d'où le corollaire. □

On peut démontrer aussi à partir du théorème de Matsusaka (ou même directement à partir du Cor. (16.9)) qu'il n'existe qu'un nombre fini de familles de déformation de variétés de Fano de dimension n donnée. On utilise pour cela un résultat fondamental obtenu indépendamment par Kollár-Miyaoka-Mori [KoMM92] et Campana [Cam92], montrant que le discriminant K_X^n est borné par une constante C_n ne dépendant que de n. Les bornes effectives obtenues pour les fibrés très amples fournissent alors (au prix de quelques efforts !) une borne effective pour le nombre de familles de variétés de Fano.

Références

[AN54] Y. Akizuki and S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems,* Proc. Jap. Acad. **30** (1954) 266–272.

[AnG62] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962) 193–259.

[AS94] U. Angehrn and Y.T. Siu, *Effective freeness and point separation for adjoint bundles,* Preprint December 1994.

[Ang95] F. Angelini, *An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities,* Preprint UCLA, Duke University e-print alg-geom/9503005.

[AV65] A. Andreotti and E. Vesentini, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation in complex manifolds,* Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965) 81–130.

[BPV84] W. Barth, Ch. Peters, A. van de Ven, *Compact complex surfaces,* Ergebnisse der Math., Band 4, Springer-Verlag (1984).

[BaKo89] I. Bauer and S. Kosarew, *On the Hodge spectral sequence for some classes of non-complete algebraic manifolds,* Math. Ann. **284** (1989) 577-593.

[BaKo91] I. Bauer and S. Kosarew, *Some aspects of Hodge theory on noncomplete algebraic manifolds,* Prospects in Complex Geometry (Katata and Kyoto, 1989), Lecture Notes in Math., Vol. 1468, Springer, Berlin (1991) 281–316.

[BePe95] J. Bertin, Ch. Peters, *Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie Miroir,* Ce volume.

[Boc48] S. Bochner, *Curvature and Betti numbers (I) and (II),* Ann. of Math. **49** (1948) 379–390 ; **50** (1949) 77–93.

[Bom70] E. Bombieri, *Algebraic values of meromorphic maps,* Invent. Math. **10** (1970) 267–287 and Addendum, Invent. Math. **11** (1970) 163–166.

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1992) 539–545.

[Del68] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales,* Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1968) 107–126.

[Del72] P. Deligne, *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1972) 5–57.

[DeI87] P. Deligne and L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de De Rham,* Invent. Math. **89** (1987) 247–270.

[Dem82] J.-P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählerienne complète,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **15** (1982) 457–511.

[Dem89] J.-P. Demailly, *Transcendental proof of a generalized Kawamata-Viehweg vanishing theorem,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989) 123–126 and : Proceedings of the Conference "Geometrical and algebraical aspects in several complex variables" held at Cetraro, Univ. della Calabria, June 1989.

[Dem90a] J.-P. Demailly, *Cohomology of q-convex spaces in top degrees,* Math. Zeitschrift **203** (1990) 283–295.

[Dem90b] J.-P. Demailly, *Singular hermitian metrics on positive line bundles,* Proc. Conf. Complex algebraic varieties (Bayreuth, April 2–6, 1990), edited by K. Hulek, T. Peternell, M. Schneider, F. Schreyer, Lecture Notes in Math., Vol. 1507, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Dem93] J.-P. Demailly, *A numerical criterion for very ample line bundles,* J. Differential Geom. **37** (1993) 323–374.

[Dem94] J.-P. Demailly, *L^2 vanishing theorems and adjunction theory,* Lectures Notes of a CIME course on "Transcendental methods of algebraic geometry", ed. F. Catanese and C. Ciliberto, Cetraro, Italy, July 1994, 93 p, e-print alg-geom/9410022 on the Duke server.

[Dem96] J.-P. Demailly, *Effective bounds for very ample line bundles,* Inventiones Math. bf 124 (1996) 243–261.

[DR55] G. De Rham, *Variétés Différentiables,* Hermann, Paris (1955).

[DV72] A. Douady and J.-L. Verdier, *Séminaire de Géométrie analytique de l'Ecole Normale Supérieure, 1971-72,* Astérisque **16**, Soc. Math. France (1974).

[EL93] L. Ein and R. Lazarsfeld, *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds,* Jour. of Am. Math. Soc. **6** (1993) 875–903.

[EV86] H. Esnault and E. Viehweg, *Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems,* Invent. Math. **86** (1986) 161–194.

[EV92] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems,* DMV Seminar, Band **20**, Birkhäuser Verlag, 1992.

[Fed69] H. Federer, *Geometric measure theory,* Springer Verlag, Vol. 153, Berlin, Heidelberg, New-York (1969).

[FdB94] G. Fernández del Busto, *A Matsusaka-type theorem for surfaces,* Preprint Princeton University, July 1994, Duke e-print `alg-geom/9410018`.

[Fle81] H. Flenner, *Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität,* Math. Zeitschrift **178** (1981) 449–473.

[FoK71] O. Forster and K. Knorr, *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange,* Inventiones Math. **16** (1972) 113–160.

[Frö55] A. Frölicher, *Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955) 641–644.

[Fuj87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive,* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, North Holland, T. Oda (ed.), 1987, 167–178.

[Fuj88] T. Fujita, *Problem list,* Conference held at the Taniguchi Foundation, Katata, Japan, August 1988.

[Fuj93] T. Fujita, *Remarks on Ein-Lazarsfeld criterion of spannedness of adjoint bundles of polarized threefolds,* Preprint Tokyo Inst. of Technology, Ohokayama, Japan (1993).

[Gra60] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen,* Publ. Math. I.H.E.S. **5** (1960) 233–292.

[Gri69] P.A. Griffiths, *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles,* Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, 181–251.

[GH78] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley, New York (1978).

[Har70] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties,* Lecture Notes in Math., Vol. 156, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry,* Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin (1977).

[Hel96] S. Helmke, *On Fujita's conjecture,* Preprint Univ. Basel, Switzerland, 13p, February 19, 1996.

[Hod41] W.V.D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals,* Cambridge University Press (1941).

[Hör65] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator,* Acta Math. **113** (1965) 89–152.

[Hör66] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in several variables,* 1966, 3rd edition, North-Holland Math. Libr., vol.7, Amsterdam, London (1990).

[Ill] Illusie, L. : *Frobenius et dégénerescence de Hodge,* Ce volume.

[Kaw82] Y. Kawamata, *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem,* Math. Ann. **261** (1982) 43–46.

[Kaw84] Y. Kawamata, *The cone of curves of algebraic varieties,* Ann. of Math. **119** (1984) 603–633.

[Kaw85] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems of minimal algebraic varieties,* Invent. Math. **79** (1985) 567–588.

[Kaw95] Y. Kawamata, *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds,* Preprint Tokyo University, Duke University e-print alg-geom/9510004.

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, *Introduction to the minimal problem,* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, T. Oda (ed.), North Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.

[KiV71] R. Kiehl and J.-L. Verdier, *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert,* Math. Ann. **195** (1971) 24–50.

[Kod53] K. Kodaira, *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953) 1268–1273.

[Kod54] K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type,* Ann. of Math. **60** (1954) 28–48.

[Kod75] K. Kodaira, *Collected works, Vol. I, II, III,* Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press (1975).

[KoS57] K. Kodaira and D.C. Spencer, *On the variation of almost complex structure,* Alg. Geom. and Topology, Princeton Univ. Press, 139–150 (1957); Kodaira's Collected Works, Vol. 2, Iwanami Shoten Publishers, 760–771.

[Kol85] J. Kollár, *Vanishing theorems for cohomology groups,* Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46 (1987) 233–243.

[Kol92] J. Kollár, *Effective basepoint freeness,* Math. Ann. **296** (1993) 595–605.

[KoM83] J. Kollár and T. Matsusaka, *Riemann-Roch type inequalities,* Amer. J. of Math. **105** (1983) 229–252.

[KoMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds,* J. Differential Geom. **36** (1992) 765–779.

[Kos91] S. Kosarew, *The hard Lefschetz theorem for concave and convex algebraic manifolds,* Proceedings of the Internat. Workshop on Complex Analysis (Wuppertal, 1990), Aspects of Math., E17, Vieweg, Braunschweig (1991) 175–187.

[Laz93] R. Lazarsfeld, with the assistance of G. Fernández del Busto, *Lectures on linear series,* Park City, IAS Mathematics Series, Vol. 3, 1993.

[Lel57] P. Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe,* Bull. Soc. Math. France **85** (1957) 239–262.

[Lel69] P. Lelong, *Plurisubharmonic functions and positive differential forms,* Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris (1969).

[LP75] J. Le Potier, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe de rang quelconque,* Math. Ann. **218** (1975) 35–53.

[Man93] L. Manivel, *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré vectoriel,* Math. Zeitschrift. **212** (1993) 107–122.

[Mat72] T. Matsusaka, *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial,* Amer. J. of Math. **94** (1972) 1027–1077.

[Mor82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective,* Ann. of Math. **116** (1982) 133–176.

[Nad89] A.M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989) 7299–7300 and Annals of Math., **132** (1990) 549–596.

[Nak55] S. Nakano, *On complex analytic vector bundles,* J. Math. Soc. Japan **7** (1955) 1–12.

[Ohs81] T. Ohsawa, *A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds,* Invent. Math. **63** (1981) 335–354 and **66** (1982) 391–393.

[Ohs87] T. Ohsawa, *Hodge spectral sequence and symmetry on compact Kähler spaces,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 613–625.

[Ohs88] T. Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* II. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988) 265–275.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math. Zeitschrift **195** (1987) 197–204.

[OT88] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains,* Math. Zeitschrift **197** (1988) 1–12.

[Rei88] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces,* Ann. of Math. **127** (1988) 309–316.

[Sch74] M. Schneider, *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel,* Manuscripta Math. **11** (1974) 95–101.

[Ser55] J.-P. Serre, *Un théorème de dualité,* Comment. Math. **29** (1955) 9–26.

[Ser56] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1956) 1–42.

[ShSo85] B. Shiffman, A.J. Sommese, *Vanishing theorems on complex manifolds,* Progress in Math. no **56**, Birkhäuser (1985).

[Siu93] Y.T. Siu, *An effective Matsusaka big theorem,* Ann. Inst. Fourier **43** (1993) 1387–1405.

[Siu96] Y.T. Siu, *Effective Very Ampleness,* Inventiones Math. **124** (1996) 563–571.

[Sko72a] H. Skoda, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972) 353–408.

[Sko75] H. Skoda, *Estimations* L^2 *pour l'opérateur* $\overline{\partial}$ *et applications arithmétiques*, Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math., Vol. 538, Springer-Verlag, Berlin (1977) 314–323.

[Som78] A.J. Sommese, *Submanifolds of abelian varieties*, Math. Ann. **233** (1978) 229–256.

[Tra95] S. Trapani, *Numerical criteria for the positivity of the difference of ample divisors,* Math. Zeitschrift **219** (1995) 387–401.

[Vie82] E. Viehweg, *Vanishing theorems,* J. Reine Angew. Math. **335** (1982) 1–8.

[Wei57] A. Weil, *Variétés kählériennes,* Hermann, Paris (1957).

[Wel80] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds,* Graduate Texts in Math. **65**, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin (1980).

(version du 20 mars 1995, complétée le 24 avril 1996)

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I,
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, BP 74,
F-38402 Saint-Martin d'Hères, France
Adresse électronique : demailly@fourier.ujf-grenoble.fr

Frobenius et dégénérescence de Hodge

Luc Illusie

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Dans [D-I], le théorème de dégénérescence de Hodge et le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique nulle sont démontrés par des méthodes de géométrie algébrique de caractéristique $p > 0$. Les présentes notes se veulent une introduction à ce texte, à l'intention du non spécialiste (qui pourra consulter aussi l'exposé d'Oesterlé [O]). Nous ne supposerons donc connus du lecteur que quelques rudiments de la théorie des schémas (EGA I 1-4, [H2] II 2-3). Par contre, nous demanderons de lui une certaine familiarité avec l'algèbre homologique. Les résultats de [D-I] s'expriment simplement dans le langage des catégories dérivées. Bien qu'il soit possible d'y éviter le recours, voir par exemple [E-V], nous avons préféré nous placer dans ce cadre, qui nous paraît plus naturel. Toutefois, pour aider le débutant, nous rappelons au n° 4 les définitions de base et quelques points essentiels.

0. Introduction

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe. Par le lemme de Poincaré, le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$ des formes holomorphes sur $\mathcal{X}$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. L'augmentation $\mathbb{C} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$ définit donc, pour tout n, un isomorphisme

$$(0.1) \qquad H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = H^n(\mathcal{X}, \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}),$$

où le second membre, appelé *cohomologie de De Rham* de $\mathcal{X}$ (en degré n), est le n-ième groupe d'hypercohomologie de $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$. La cohomologie de De Rham de $\mathcal{X}$ est l'aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie

$$(0.2) \qquad E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}),$$

dite *suite spectrale de Hodge vers De Rham* (ou *de Hodge-Frölicher*) (cf. [De] n° 9). Supposons $\mathcal{X}$ *compacte*. Alors, par le théorème de finitude de Cartan-Serre, les $H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$, et donc tous les termes de la suite spectrale (0.2) sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si l'on pose

$$b_n = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \dim H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C})$$

(n-ième nombre de Betti de $\mathcal{X}$) et

$$h^{p\,q} = \dim H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$$

(nombre de Hodge), on a donc

$$b_n \leqslant \sum_{p+q=n} h^{p\,q}, \tag{0.3}$$

avec égalité pour tout n si et seulement si (0.2) dégénère en E_1. Supposons de plus $\mathcal{X}$ *kählérienne*. Alors, par la *théorie de Hodge*, la suite spectrale de Hodge de $\mathcal{X}$ dégénère en E_1 : c'est le *théorème de dégénérescence de Hodge* ([De] 9.9). Notons

$$0 = F^{n+1} \subset F^n \subset \cdots \subset F^p = F^p H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \subset \cdots \subset F^0 = H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$$

la filtration aboutissement de la suite spectrale de Hodge (*filtration de Hodge*) ; par la dégénérescence, on a donc un isomorphisme canonique

$$E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \simeq E_\infty^{p\,q} = F^p/F^{p+1}. \tag{0.4}$$

Posons

$$H^{p\,q} = F^p \cap \overline{F}^q,$$

où la barre désigne la conjugaison complexe sur $H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$, définie au moyen de (0.1) et de l'isomorphisme $H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^n(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$; on a donc

$$H^{p\,q} = \overline{H}^{q\,p}.$$

La théorie de Hodge fournit en outre les résultats suivants ([De] 9.10) :

(a) l'homomorphisme composé

$$H^{p\,q} \hookrightarrow F^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow F^p/F^{p+1}$$

est un isomorphisme (i.e. $H^{p\,q}$ est un supplémentaire de F^{p+1} dans F^p) ; d'où, par composition avec (0.4), un isomorphisme

$$H^{p\,q} \simeq H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \;; \tag{0.5}$$

(b) on a, pour tout n,

$$H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p\,q}, \tag{0.6}$$

(*décomposition de Hodge*). Ces résultats s'appliquent notamment à la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ associée à un schéma projectif lisse X sur $\mathbb{C}$. A la différence de (a) et (b), qui sont de nature transcendante, faisant intervenir de manière essentielle la conjugaison complexe, la dégénérescence de Hodge peut, dans ce cas, se formuler de manière purement algébrique. Le complexe de De Rham de $\mathcal{X}$ est en effet le complexe de faisceaux analytiques associé au complexe de De Rham algébrique $\Omega^\bullet_X$ de X sur $\mathbb{C}$ (un complexe de faisceaux pour la topologie de

Zariski, dont les composantes sont des faisceaux cohérents localement libres). Le morphisme canonique (d'espaces annelés) $\mathcal{X} \longrightarrow X$ induit des homomorphismes sur les cohomologies de Hodge et de De Rham

$$H^q(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}), \tag{0.7}$$

$$H^n_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}), \tag{0.8}$$

où $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = H^n(X, \Omega^\bullet_X)$. On dispose en fait d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham algébrique

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_X) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X), \tag{0.9}$$

et d'un morphisme de (0.9) dans (0.2) induisant (0.7) et (0.8) respectivement sur les termes initiaux et l'aboutissement. Par le théorème de comparaison de Serre [GAGA], (0.7) est un isomorphisme. Il en est donc de même de (0.8). Par suite, la dégénérescence en E_1 de (0.2) équivaut à celle de (0.9), en d'autres termes, si l'on pose

$$h^{p\,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega^p_X), \qquad h^n(X) = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(X),$$

le théorème de dégénérescence de Hodge pour $\mathcal{X}$ s'exprime par les relations (purement algébriques)

$$h^n(X) = \sum_{p+q=n} h^{p\,q}(X). \tag{0.10}$$

Plus généralement, si X est un schéma propre et lisse sur un corps k, on peut considérer le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/k}$ de X sur k, et l'on dispose encore d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X/k) \tag{0.11}$$

(où $H^n_{\mathrm{DR}}(X/k) = H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k})$), formée de k-espaces vectoriels de dimension finie. Si k est de caractéristique nulle, le théorème de dégénérescence de Hodge entraîne la dégénérescence de (0.11) en E_1 : des techniques standard (cf. n° 6) permettent en effet de se ramener d'abord à $k = \mathbb{C}$, puis à l'aide du lemme de Chow et de la résolution des singularités on réduit le cas propre au cas projectif ([D0]). On a longtemps cherché une démonstration purement algébrique de la dégénérescence de (0.11) en E_1 pour k de caractéristique nulle. Faltings [Fa1] fut le premier à en donner une preuve indépendante de la théorie de Hodge[1]. Une simplification de techniques cristallines dues à Ogus [Og1], Fontaine-Messing [F-M] et Kato [Ka1]

[1] Les puristes observent que cette preuve, qui repose sur l'existence d'une décomposition de Hodge-Tate pour la cohomologie étale p-adique d'une variété propre et lisse sur un corps local d'inégale caractéristique, n'est pas entièrement "algébrique", dans la mesure où elle utilise le théorème de comparaison d'Artin-Grothendieck entre cohomologie étale et cohomologie de Betti pour les variétés propres et lisses sur $\mathbb{C}$.

conduisit, peu de temps après, à la démonstration élémentaire présentée dans [D-I]. Nous renvoyons à l'introduction de [D-I] et à [O] pour un aperçu de ses grandes lignes. Indiquons seulement que la dégénérescence de (0.11) (pour k de caractéristique nulle) se prouve par réduction au cas où k est de caractéristique > 0, où, pourtant, il peut arriver que la dégénérescence soit en défaut ! Celle-ci vaut cependant moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur X (majoration de la dimension, relevabilité), qui suffisent (voir 5.6 pour un énoncé précis). Nous expliquons au n° 6 la technique bien connue permettant de remonter de la caractéristique > 0 à la caractéristique nulle. Le théorème de dégénérescence en caractéristique > 0 auquel nous venons de faire allusion résulte lui-même d'un théorème de décomposition (5.1), reposant sur des propriétés classiques du calcul différentiel en caractéristique > 0 (endomorphisme de Frobenius et isomorphisme de Cartier), que nous rappelons au n° 3, après avoir résumé, aux n° 1 et 2, le formalisme des différentielles et de la lissité sur les schémas. Le théorème de décomposition précédent fournit en même temps une démonstration algébrique du théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique nulle (6.10 et [De] 11.7). Les deux derniers numéros sont de nature plus technique : nous esquissons l'évolution du sujet depuis la parution de [D-I], et, en appendice, donnons quelques compléments relatifs à des résultats de Mehta-Srinivas [Me-Sr] et Nakkajima [Na].

1. Schémas : différentielles, complexe de De Rham

Nous rappelons ici les définitions et propriétés de base du calcul différentiel sur les schémas. Le lecteur trouvera un exposé complet dans (EGA IV 16.1-16.6) ; voir aussi [B-L-R] 2.1 et [H2] II 8 pour une introduction.

1.1. On dit qu'un morphisme de schémas $i : T_0 \longrightarrow T$ est un *épaississement d'ordre* 1 (ou, par abus, que T est un épaississement d'ordre 1 de T_0) si i est une immersion fermée définie par un idéal de $\mathcal{O}_T$ de carré nul. Si T et T_0 sont affines, d'anneaux A et A_0, un tel morphisme correspond à un homomorphisme surjectif $A \longrightarrow A_0$ dont le noyau est un idéal de carré nul. Les schémas T et T_0 ont même espace sous-jacent, et l'idéal $\mathfrak{a}$ de i, annulé par $\mathfrak{a}$, est un $\mathcal{O}_{T_0}$ ($= \mathcal{O}_T/\mathfrak{a}$)-module quasi-cohérent.

Soit $j : X \longrightarrow Z$ une immersion, d'idéal I (par définition, j est un isomorphisme de X sur un sous-schéma fermé $j(X)$ d'un plus grand ouvert U de Z, et I est le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de U définissant $j(X)$ dans U, (EGA I 4.1, 4.2)). Soit Z_1 le sous-schéma[2] de Z, de même espace sous-jacent que X, défini par l'idéal I^2. Alors j se factorise (de manière unique) en

$$X \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} Z$$

[2] On se permettra l'abus de confondre "immersion" (resp. "immersion fermée") et "sous-schéma" (resp. "sous-schéma fermé") ; cela revient ici à négliger l'isomorphisme de X sur $j(X)$.

où h_1 est une immersion, et j_1 est un épaississement d'ordre 1, d'idéal I/I^2 ; on dit que (j_1, h_1), ou plus simplement Z_1 , est le *premier voisinage infinitésimal* de j (ou de X dans Z). L'idéal I/I^2 (qui est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent) s'appelle le *faisceau conormal* de j (ou de X dans Z). On le note $\mathcal{N}_{X/Z}$.

1.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $\Delta : X \longrightarrow Z := X \times_Y X$ le morphisme diagonal. C'est une immersion (*fermée* si et seulement si X est *séparé sur* Y) (EGA I 5.3). Le faisceau conormal de Δ s'appelle faisceau des 1-*différentielles de Kähler* de f (ou de X sur Y) et se note $\Omega^1_{X/Y}$; on écrit parfois $\Omega^1_{X/A}$ au lieu de $\Omega^1_{X/Y}$ si Y est affine d'anneau A. C'est donc un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, défini par

$$\Omega^1_{X/Y} = I/I^2, \tag{1.2.1}$$

où I est l'idéal de Δ. Soit $X \xrightarrow{\Delta_1} Z_1 \longrightarrow Z$ le premier voisinage infinitésimal de Δ. Les deux projections de $Z = X \times_Y X$ sur X induisent, par composition avec $Z_1 \longrightarrow Z$, deux Y-morphismes $p_1, p_2 : Z_1 \longrightarrow X$, qui rétractent Δ_1. Le faisceau d'anneaux du schéma Z_1, qui a même espace sous-jacent que X, s'appelle *faisceau des parties principales d'ordre* 1 de X sur Y, et se note $\mathcal{P}^1_{X/Y}$. On a par construction une suite exacte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0, \tag{1.2.2}$$

scindée par chacun des homomorphismes d'anneaux $j_1, j_2 : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y}$ déduits de p_1, p_2. La différence $j_2 - j_1$ est un homomorphisme de faisceaux abéliens de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$, qu'on appelle *différentielle*, et qu'on note

$$d_{X/Y} \quad (\text{ou } d) : \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}. \tag{1.2.3}$$

Si M est un $\mathcal{O}_X$-module, on appelle Y-*dérivation* de $\mathcal{O}_X$ dans M tout homomorphisme de faisceaux de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules $D : \mathcal{O}_X \longrightarrow M$ (où f^{-1} désigne le foncteur image inverse pour les faisceaux abéliens) tel que

$$D(ab) = aDb + bDa$$

pour toutes sections locales a, b de $\mathcal{O}_X$. On note $\mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M)$ l'ensemble des Y-dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans M, qui est de manière naturelle un groupe abélien. La différentielle $d_{X/Y}$ est une Y-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$. On montre qu'elle est *universelle*, dans le sens que pour toute Y-dérivation D de $\mathcal{O}_X$ dans un $\mathcal{O}_X$-module M (non nécessairement quasi-cohérent), il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow M$ tel que $u \circ d_{X/Y} = D$, i.e. l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/Y}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M), \qquad u \longmapsto u \circ d_{X/Y} \tag{1.2.4}$$

est un isomorphisme. Le faisceau $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$ s'appelle *faisceau tangent* de f (ou de X sur Y), et se note

$$T_{X/Y} \tag{1.2.5}$$

(ou parfois $\Theta_{X/Y}$). Pour tout ouvert U de X, (1.2.4) donne un isomorphisme $\Gamma(U, T_{X/Y}) \simeq \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U)$. Rappelons qu'on appelle *Y-point* de X un Y-morphisme $T \longrightarrow X$. Par définition, $X \times_Y X$ "paramètre" l'ensemble des couples de Y-points de X (i.e. représente le foncteur correspondant sur la catégorie des Y-schémas). La signification géométrique du premier voisinage infinitésimal Z_1 de la diagonale de X sur Y est qu'*il paramètre les couples de Y-points de X voisins d'ordre* 1 (i.e. congrus modulo un idéal de carré nul) : plus précisément, si $i : T_0 \longrightarrow T$ est un épaississement d'ordre 1, d'idéal $\mathfrak{a}$, où T est un Y-schéma, et si $t_1, t_2 : T \longrightarrow X$ sont deux Y-points de X qui coïncident modulo $\mathfrak{a}$ (i.e. tels que $t_1 i = t_2 i = t_0 : T_0 \longrightarrow X$), alors il existe un unique Y-morphisme $h : T \longrightarrow Z_1$ tel que $p_1 h = t_1$ et $p_2 h = t_2$; de plus, si $t_1^*, t_2^* : \mathcal{O}_X \longrightarrow t_{0*}\mathcal{O}_T$ [3] sont les homomorphismes de faisceaux d'anneaux associés à t_1 et t_2, $t_2^* - t_1^*$ est une Y-dérivation de X à valeurs dans $t_{0*}\mathfrak{a}$, telle que

$$(t_2^* - t_1^*)(s) = h^*(ds) \tag{1.2.6}$$

pour toute section locale s de $\mathcal{O}_X$, où $h^* : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow t_0^*\mathfrak{a}$ est l'homomophisme de $\mathcal{O}_X$-modules induit par h (sur les faisceaux conormaux correspondants, de X dans Z_1 et T_0 dans T). Si f est un morphisme de schémas affines, correspondant à un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, alors $Z = \operatorname{Spec} B \otimes_A B, \Delta$ correspond à l'homomorphisme d'anneaux envoyant $b_1 \otimes b_2$ sur $b_1 b_2$, de noyau $J = \Gamma(Z, I)$. On a $\Gamma(X, \mathcal{P}^1_{X/Y}) = (B \otimes_A B)/J^2$, et l'on pose

$$\Gamma(X, \Omega^1_{X/Y}) = \Omega^1_{B/A}. \tag{1.2.7}$$

Le B-module $\Omega^1_{B/A} = J/J^2$, dont le faisceau quasi-cohérent associé est $\Omega^1_{X/Y}$, s'appelle *module des* 1*-différentielles de Kähler* de B sur A. L'application $d = d_{B/A} = \Gamma(X, d_{X/Y}) : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est une A-dérivation, vérifiant une propriété universelle qu'on laisse au lecteur le soin de formuler. Les homomorphismes $j_1, j_2 : B \longrightarrow (B \otimes_A B)/J^2$ de 1.1 sont donnés par $j_1 b =$ classe de $b \otimes 1$, $j_2 b =$ classe de $1 \otimes b$. Comme J est engendré par les $1 \otimes b - b \otimes 1$, $\Omega^1_{B/A}$ est engendré, comme B-module, par l'image de d. Il en résulte que si f est un morphisme de schémas quelconques, $\Omega^1_{X/Y}$ est engendré, comme $\mathcal{O}_X$-module, par l'image de d.

1.3. Tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \tag{1.3.1}$$

[3] rappelons que T et T_0 ont même espace sous-jacent

définit de façon naturelle un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$g^*\Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y'}, \tag{1.3.2}$$

dit canonique, envoyant $1 \otimes g^{-1}(d_{X/Y}s)$ sur $d_{X'/Y'}(1 \otimes g^{-1}(s))$ (si E est un $\mathcal{O}_X$-module, par définition $g^*E = \mathcal{O}_{X'} \otimes_{g^{-1}(\mathcal{O}_X)} g^{-1}(E)$). C'est un *isomorphisme* si le carré (1.3.1) est *cartésien*, i.e. si le morphisme $X' \longrightarrow Y' \times_Y X$ est un isomorphisme. En outre, dans ce cas, l'homomorphisme canonique

$$f'^*\Omega^1_{Y'/Y} \oplus g^*\Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y} \tag{1.3.3}$$

est un isomorphisme.

1.4. Soient

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} S$$

des morphismes de schémas. Alors la suite d'homorphismes canoniques

$$f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{1.4.1}$$

est exacte.

1.5. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif, où i est une immersion, d'idéal I. La différentielle $d_{Z/Y}$ induit un homomorphisme $d : \mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$, et la suite

$$\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{1.5.1}$$

est exacte.

1.6. Soit $X = \mathbb{A}^n_Y = Y[T_1, \ldots, T_n]$ l'espace affine de dimension n sur Y. Le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ est libre, de base les dT_i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Si Y est affine, d'anneau A, et si $s \in A[T_1, \ldots, T_n]$, $ds = \sum(\partial s/\partial T_i)dT_i$, où les $\partial s/\partial T_i$ sont les dérivées partielles usuelles.

Les propriétés 1.3 à 1.6, dont la vérification est du reste triviale, sont fondamentales. C'est grâce à elles qu'on peut "calculer" les modules de différentielles. Pour plus de détails, voir les références indiquées supra.

1.7. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note

$$\Omega^i_{X/Y} = \Lambda^i\Omega^1_{X/Y}$$

la i-ième puissance extérieure du $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ (on convient que $\Omega^0_{X/Y} = \mathcal{O}_X$). On montre qu'il existe une unique famille d'applications $d : \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \Omega^{i+1}_{X/Y}$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) d est une Y-anti-dérivation de l'algèbre extérieure $\bigoplus \Omega^i_{X/Y}$, i.e. d est $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-linéaire et $d(ab) = da \wedge b + (-1)^i a \wedge db$ pour a homogène de degré i,

(b) $d^2 = 0$,

(c) $da = d_{X/Y}(a)$ pour a de degré zéro.

Le complexe correspondant se nomme *complexe de De Rham* de X sur Y et se note

(1.7.1) $$\Omega^\bullet_{X/Y}$$

(ou $\Omega^\bullet_{X/A}$ si Y est affine d'anneau A). Il dépend fonctoriellement de f : un carré (1.3.1) donne un homomorphisme de complexes (qui est aussi un homomorphisme d'algèbres)

(1.7.2) $$\Omega^\bullet_{X/Y} \longrightarrow g_*\Omega^\bullet_{X'/Y'}.$$

Prendre garde cependant que, s'il est vrai que, pour chaque i, l'homomorphisme $\Omega^i_{X/Y} \longrightarrow g_*\Omega^i_{X'/Y'}$ est adjoint d'un homomorphisme $g^*\Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X'/Y'}$, on ne peut en général définir un *complexe* $g^*\Omega^\bullet_{X/Y}$ dont la différentielle soit une Y'-anti-dérivation compatible à celle de $\Omega^\bullet_{X'/Y'}$.

2. Lissité et relèvements

Il y a bien des façons d'exposer la théorie des morphismes lisses. Nous suivons (ou plutôt, résumons) ici la présentation des EGA, où la lissité est définie par l'existence locale de relèvements infinitésimaux (EGA IV 17). Outre son élégance, cette définition a l'avantage de se transposer à d'autres contextes, par exemple celui de la géométrie logarithmique (cf. [I6]). D'autres points de vue sont adoptés dans (SGA 1 II et III), où l'accent est mis sur la notion de morphisme étale, et [B-L-R] 2.2, où c'est le critère jacobien (cf. 2.8) qui est pris comme point de départ.

2.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est *localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) si, pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert affine U de x et un voisinage ouvert affine V de $y = f(x)$ tels que $f(U) \subset V$ et que l'homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ associé à $U \longrightarrow V$ fasse de B une A-algèbre de type fini (i.e. quotient d'une algèbre de polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$) (resp. de présentation finie (i.e. quotient d'une algèbre de polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$ par un idéal de type fini)). Si Y est localement noethérien, “localement de type fini” équivaut à “localement de présentation finie”, et s'il en est ainsi, X est alors localement noethérien.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est localement de type fini (resp. de présentation finie), le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ est de type fini (resp. de présentation finie).

2.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est *lisse* (resp. *net* (ou *non ramifié*), resp. *étale*) si f est localement de présentation finie et si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout diagramme commutatif

(2.2.1)
$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "f"] \\ T_0 \arrow[rru, "g_0"] \arrow[r, "i"] & T \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où i est un épaississement d'ordre 1 (1.1), il existe, localement pour la topologie de Zariski sur T, un (resp. au plus un, resp. un unique) Y-morphisme $g : T \longrightarrow X$ tel que $gi = g_0$. Il résulte aussitôt de la définition que le composé de deux morphismes lisses (resp. nets, resp. étales) est lisse (resp. net, resp. étale), et que si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse (resp. net, resp. étale), il en est de même du morphisme $f' : X' \longrightarrow Y'$ déduit par un changement de base $Y' \longrightarrow Y$. Si pour $i = 1, 2$, $f_i : X_i \longrightarrow Y$ est lisse (resp. net, resp. étale), le produit fibré $f = f_1 \times_Y f_2 : X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow Y$ est donc lisse (resp. net, resp. étale). Il est immédiat d'autre part que la projection de la droite affine $\mathbb{A}^1_Y = Y[t] \longrightarrow Y$ est lisse, et il en est donc de même de la projection de l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y \longrightarrow Y$.

Remarques 2.3. (a) A cause de l'unicité, qui permet un recollement, on peut, dans la définition d'*étale* omettre *localement pour la topologie de Zariski*. Par contre, on ne peut le faire dans la définition de *lisse* : il existe une obstruction cohomologique, qu'on précisera plus loin, à l'existence d'un prolongement global g de g_0.

(b) Si n est un entier $\geqslant 1$, on dit qu'un morphisme de schémas $i : T_0 \longrightarrow T$ est un *épaississement d'ordre* n si i est une immersion fermée définie par un idéal I tel que $I^{n+1} = 0$. Si T_m désigne le sous-schéma fermé de T défini par I^{m+1}, i se factorise en une suite d'épaississements d'ordre 1 :

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_m \longrightarrow T_{m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n.$$

Dans la définition 2.2, on peut donc remplacer *épaississement d'ordre* 1 par *épaississement d'ordre* n.

La proposition suivante résume les propriétés différentielles essentielles des morphismes lisses (resp. nets, resp. étales).

Proposition 2.4. (a) *si* $f : X \longrightarrow Y$ *est lisse* (*resp. net*), *le* $\mathcal{O}_X$-*module* $\Omega^1_{X/Y}$ *est localement libre de type fini* (*resp. nul*).

(b) *Dans la situation de* 1.4, *si* f *est lisse, la suite* (1.4.1) *prolongée par un zéro à gauche*

(2.4.1)
$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

est exacte et localement scindée. En particulier, si f est étale, l'homomorphisme canonique $f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ *est un isomorphisme.*

(c) *Dans la situation de* 1.5, *si f est lisse, la suite* (1.5.1) *prolongée par un zéro à gauche*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{2.4.2}$$

est exacte et localement scindée. En particulier, si f est étale, l'homomorphisme canonique $\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$ *est un isomorphisme.*

2.5. La vérification de 2.4 n'est pas difficile (EGA IV 17.2.3), mais malheureusement quelque peu éparpillée dans (EGA 0_{IV} 20). En voici une esquisse.

L'ingrédient clé est le suivant. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas et I un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, on appelle *Y-extension de X par I* un Y-morphisme $i : X \longrightarrow X'$ qui est un épaississement d'ordre 1 d'idéal I. Deux Y-extensions $i_1 : X \longrightarrow X_1$ et $i_2 : X \longrightarrow X_2$ de X par I sont dites *équivalentes* s'il existe un Y-isomorphisme g de X_1 sur X_2 tel que $gi_1 = i_2$ et que g induise l'identité sur I. Une construction analogue à celle de la "somme de Baer" pour les extensions de modules sur un anneau munit l'ensemble

$$\mathrm{Ext}_Y(X, I)$$

des classes d'équivalence de Y-extensions de X par I d'une structure de groupe abélien, d'élément neutre l'extension triviale définie par l'algèbre des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus I$.

L'assertion (c) découle immédiatement de la définition : la lissité de f implique en effet que le premier voisinage infinitésimal i_1 de i se rétracte localement sur X, et le choix d'une rétraction r permet de scinder (2.4.2) (par la dérivation associée à $\mathrm{Id}_{Z_1} - i_1 \circ r$, cf. (1.2.6)).

Supposons f lisse. Si I est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et $i : X \longrightarrow Z$ est une Y-extension de X par I, la suite (2.4.2) est donc une extension de $\mathcal{O}_X$-modules $e(i)$ de $\Omega^1_{X/Y}$ par I. On vérifie que $i \longmapsto e(i)$ donne un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_Y(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, I) \tag{2.5.1}$$

(cf. [I1] I, chap. II, 1.1.9 : on définit un inverse de (2.5.1) en associant à une extension M de $\Omega^1_{X/Y}$ par I la Y-extension Z de X définie de la manière suivante : identifions, grâce à j_1, le faisceau des parties principales $\mathcal{P}^1_{X/Y}$(1.2.2) à l'anneau des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_{X/Y}$, et notons $F = \mathcal{O}_X \oplus M$ l'anneau des nombres duaux sur M ; l'extension M fait de F une $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-extension de $\mathcal{P}^1_{X/Y}$ par I ; soit $E = F \times_{\mathcal{P}^1_{X/Y}} \mathcal{O}_X$ le "pull-back" de F par l'homomorphisme $j_2 = j_1 + d_{X/Y} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y}$; E est une $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-extension de $\mathcal{O}_X$ par I, qui définit la Y-extension Z). Comme f est lisse, toute Y-extension de X par

I est localement triviale, et donc, grâce à (2.5.1), il en résulte que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, I)$ (associé au préfaisceau $U \longmapsto \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_U}(\Omega^1_{U/Y}, I_{|U})$) est nul, et donc aussi que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_U}(\Omega^1_{U/Y}, J) = 0$ pour tout ouvert U de X et tout $\mathcal{O}_U$-module quasi-cohérent J. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est de type fini (2.1), il s'ensuit que $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, ce qui prouve la partie de (a) relative au cas lisse (la partie relative au cas net est immédiate : pour tout Y-schéma X, si $i : X \longrightarrow Z$ est la Y-extension triviale de X par un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I, l'ensemble des Y-rétractions de Z sur X s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/Y}, I)$ par $r \longmapsto r - r_0$, où r_0 correspond à l'injection naturelle de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X \oplus I$, cf. (1.2.6)). Il résulte notamment de (a) et (2.5.1) que, si X est un schéma affine et est lisse sur Y, on a $\mathrm{Ext}_Y(X, I) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I. On en déduit finalement (b), en utilisant, pour X, Y, S affines, et f quelconque, la suite exacte naturelle (EGA 0_{IV} 20.2.3)

$$\begin{aligned}(2.5.2)\qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, I) \longrightarrow \mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_X, I) \longrightarrow \mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_Y, f_*I) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_Y(X, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_S(X, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_S(Y, f_*I),\end{aligned}$$

où les flèches autres que ∂ sont les flèches de fonctorialité évidentes, et ∂ associe à une S-dérivation $D : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*I$ la Y-extension définie par l'anneau des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus I$ et l'homomorphisme $a \longmapsto f^*a + Da$ de $\mathcal{O}_Y$ dans $f_*(\mathcal{O}_X \oplus I)$.

Observons que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme localement de présentation finie de schémas affines (i.e. correspondant à un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ faisant de B une A-algèbre de présentation finie), alors, pour que f soit lisse, il faut et il suffit que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I, on ait $\mathrm{Ext}_Y(X, I) = 0$ (la suffisance découle de la définition, et la nécessité a déjà été notée plus haut).

Les assertions 2.4 (b) et (c) ont des réciproques, qui fournissent des critères de lissité très commodes. Leur vérification est facile à partir des considérations précédentes.

Proposition 2.6. (a) *Dans la situation de* 1.4, *supposons gf lisse. Alors, si la suite* (2.4.1) *est exacte et localement scindée, f est lisse. Si l'homomorphisme canonique $f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ est un isomorphisme, f est étale.*

(b) *Dans la situation de* 1.5, *supposons g lisse. Alors, si la suite* (2.4.2) *est exacte et localement scindée, f est lisse. Si l'homomorphisme canonique $\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$ est un isomorphisme, f est étale.*

2.7. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse, et soit x un point de X, notons $k(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soient $s_1, \ldots, s_n$ des sections de $\mathcal{O}_X$ au voisinage de x dont les différentielles forment une base de $\Omega^1_{X/Y}$ en x, i.e., au choix, telles que les images $(ds_i)_x$ des ds_i dans $\Omega^1_{X/Y,x}$ forment une base de ce module sur $\mathcal{O}_{X,x}$, ou telles que les images $(ds_i)(x)$ des ds_i dans $\Omega^1_{X/Y} \otimes k(x)$ forment une base de cet espace vectoriel sur $k(x)$. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, il existe un voisinage ouvert U de x tel que les s_i soient définies sur U et que les ds_i forment une base de $\Omega^1_{X/Y\,|U}$. Les s_i définissent alors un Y-morphisme de U dans l'espace affine de dimension n sur Y :

$$s = (s_1, \dots, s_n) : U \longrightarrow \mathbb{A}^n_Y = Y[t_1, \dots, t_n].$$

D'après 1.6 et 2.6 (a), s est *étale*. On dit que les s_i forment un *système de coordonnées locales* de X sur Y au-dessus de U (ou, si U n'est pas précisé, en x). Un morphisme lisse est donc localement composé d'un morphisme étale et de la projection d'un espace affine standard.

2.8. Plaçons-nous dans la situation de 1.5, en supposant g lisse, et soit x un point de X. D'après 2.4 (c) et 2.6 (b), pour que f soit lisse au voisinage de x, il faut et il suffit qu'il existe des sections $s_1, \dots, s_r$ de I au voisinage de x, engendrant I_x et telles que les $(ds_i)(x)$ soient linéairement indépendants dans $\Omega^1_{Z/Y}(x) = \Omega^1_{Z/Y} \otimes k(x)$ (où $k(x)$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{Z,x}$, qui est aussi celui de $\mathcal{O}_{X,x}$). Pour cette raison, 2.6 (b) porte le nom de *critère jacobien*.

Supposons f lisse au voisinage de x (ou en x, comme on dit parfois), et soient $s_1, \dots, s_r$ des sections de I engendrant I au voisinage de x. Alors, pour que les s_i définissent un système *minimal* de générateurs de I_x (i.e. induisent une base de $I \otimes k(x) = I_x/\mathfrak{m}_x I_x$, ou encore forment une base de $I/I^2 = \mathcal{N}_{X/Z}$ dans un voisinage de x), il faut et il suffit que les $(ds_i)(x)$ soient linéairement indépendants dans $\Omega^1_{Z/Y}(x)$[4]. Lorsqu'il en est ainsi, si l'on complète les s_i par des sections s_j $(r+1 \leqslant j \leqslant r+n)$ de $\mathcal{O}_Z$ au voisinage de x telles que les $(ds_i)(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant r+n)$ forment une base de $\Omega^1_{Z/Y}(x)$, alors les s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ définissent un Y-morphisme étale s d'un voisinage ouvert U de x dans Z dans l'espace affine $\mathbb{A}^{n+r}_Y$, tel que $U \cap X$ soit l'image inverse du sous-espace linéaire d'équations $t_1 = \cdots = t_r = 0$:

$$\begin{array}{ccc} U \cap X & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{A}^n_Y & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+r}_Y. \end{array}$$

En géométrie algébrique, cet énoncé joue le rôle d'un *théorème des fonctions implicites*.

2.9. Soit k un corps et soit $f : X \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} k$ un morphisme. Supposons f lisse ; alors X est *régulier* (i.e. pour tout point x de X, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, i.e. son idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ peut être engendré par une suite régulière de paramètres) ; de plus, si x est un point *fermé*, $k(x)$ est une extension *finie séparable* de k, et la dimension de $\mathcal{O}_{X,x}$ est égale à la dimension $\dim_x X$ de la composante irréductible de X contenant x et au rang de $\Omega^1_{X/Y}$ en x. Inversement, si k est parfait, et si X est régulier, f est lisse.

[4] ou encore que la suite (s_i) soit $\mathcal{O}_Z$-*régulière* en x, i.e. que le complexe de Koszul correspondant soit une résolution de $\mathcal{O}_X$ au voisinage de x (cf. (SGA 6 VII 1.4) et (EGA IV 17.12.1)).

Plus généralement, on a le critère suivant, de vérification facile à partir de 2.7 et 2.8 :

Proposition 2.10. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie* (2.1). *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *f est lisse;*

(ii) *f est plat et les fibres géométriques de f sont des schémas réguliers.*

(On dit que f est *plat* si, pour tout point x de X, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un module plat sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Une *fibre géométrique* de f est le schéma déduit d'une fibre $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ de f en un point y par une extension des scalaires à une clôture algébrique de $k(y)$.) Si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse, et x est un point de X, l'entier

$$\dim_x(f) := \dim_{k(x)} \Omega^1_{X/Y} \otimes k(x) = \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega^1_{X/Y,x}$$

s'appelle *dimension relative* de f en x. Par la théorie classique de la dimension (EGA IV 17.10.2), c'est la dimension de la composante irréductible de la fibre $X_{f(x)}$ contenant x. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, c'est une fonction localement constante de x. Elle est nulle si et seulement si f est étale, en d'autres termes, f est étale si et seulement si f est localement de présentation finie, plat et net (c'est ce critère qui est pris comme définition d'un morphisme étale dans (SGA 1 I)).

Si f est lisse et *purement de dimension relative* r, i.e. de dimension relative constante égale à l'entier r, alors le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ (1.7.1) est nul en degré $> r$, et $\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre de rang $\binom{r}{i}$; en particulier, $\Omega^r_{X/Y}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

Les morphismes lisses donnent lieu à une excellente théorie de déformations infinitésimales. Les deux propositions qui suivent la résument. Elles sont toutefois de nature plus technique que les énoncés précédents, et comme elles ne serviront que dans la démonstration de 5.1, nous conseillons au lecteur de ne s'y reporter qu'à ce moment-là.

Proposition 2.11. *Soit un diagramme* (2.2.1), *avec f lisse. Soit I l'idéal de i.*

(a) *Il existe une obstruction*

$$c(g_0) \in \operatorname{Ext}^1(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un Y-morphisme (global) $g : T \longrightarrow X$ prolongeant g_0 (i.e. tel que $gi = g_0$).

(b) *Si $c(g_0) = 0$, l'ensemble des prolongements g de g_0 est un espace affine sous* $\operatorname{Hom}(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$.

Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Ext}^1(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I) \simeq H^1(T_0, \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)) \tag{2.11.1}$$

(et $\mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I) \simeq g_0^* T_{X/Y} \otimes I$, où $T_{X/Y}$ est le faisceau tangent (1.2.5)). Posons $G = \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$. D'après (1.2.6), si U est un ouvert de T de trace U_0 sur T_0, deux prolongements de $g_{0|U_0}$ à U "diffèrent" par une section de G sur U_0 (et un prolongement étant donné, on peut le modifier en lui "ajoutant" une section de G). Comme g_0 se prolonge localement par définition de la lissité de f, on en conclut que le faisceau P sur T_0 associant à U_0 l'ensemble des prolongements de $g_0|U_0$ à U est un *torseur* sous G. Les assertions (a) et (b) en résultent : $c(g_0)$ est la classe de ce torseur. Plus concrètement, si $(U_i)_{i \in E}$ est un recouvrement ouvert de T et g_i un prolongement de g_0 sur U_i, alors, sur $U_i \cap U_j$, $g_i - g_j$ est une Y-dérivation D_{ij} de $\mathcal{O}_X$ à valeurs dans $g_{0\,*}(I_{|U_i \cap U_j})$, i.e. un homomorphisme de $\Omega^1_{X/Y}$ dans $g_{0\,*}(I_{|U_i \cap U_j})$, i.e. finalement une section de G sur $U_i \cap U_j$, et les (g_{ij}) forment un cocycle, dont la classe est $c(g_0)$.

Noter que si T (ou ce qui revient au même T_0) est affine, alors

$$H^1(T_0, \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)) = 0,$$

et par suite g_0 admet un prolongement global à T.

Proposition 2.12. *Soient $i : Y_0 \longrightarrow Y$ un épaississement d'ordre 1 d'idéal I, et $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme lisse.*

(a) *Il existe une obstruction*

$$\omega(f_0) \in \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un relèvement lisse de X_0 sur Y, i.e. par définition, d'un Y-schéma lisse X muni d'un Y_0-isomorphisme $Y_0 \times_Y X \simeq X_0$ [5].

(b) *Si $\omega(f_0) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de X_0 sur Y est un espace affine sous* $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I)$ *(où par définition, si X_1 et X_2 sont des relèvements de X_0, un isomorphisme de X_1 sur X_2 est un Y-isomorphisme de X_1 sur X_2 induisant l'identité sur X_0).*

(c) *Si X est un relèvement de X_0 sur Y, le groupe des automorphismes de X (i.e. des Y-automorphismes de X induisant l'identité sur X_0) s'identifie naturellement à* $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I)$.

Comme $\Omega^1_{X_0/Y_0}$ est localement libre de type fini, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I) \simeq H^i(X_0, \mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I)) \tag{2.12.1}$$

(et $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^* I) \simeq T_{X_0/Y_0} \otimes f_0^* I$). Si X_0 est affine, le second membre de (2.12.1) est nul pour $i \geqslant 1$, et par suite il existe un relèvement de X_0 sur Y, et deux tels relèvements sont isomorphes.

---

[5] Dans la suite, quand nous parlerons de *relèvement* d'un Y_0-schéma lisse, il sera sous-entendu, sauf mention du contraire, qu'il s'agit d'un relèvement *lisse*.

2.13. Voici une esquisse de démonstration de 2.12. La donnée d'un relèvement X équivaut à celle d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{j} & X \\ f_0\downarrow & & \downarrow f \\ Y_0 & \xrightarrow{i} & Y, \end{array}$$

avec f lisse. Soit J l'idéal de l'épaississement j. La platitude de f (2.10) implique que l'homomorphisme $f_0^*I \longrightarrow J$ déduit de ce carré est un isomorphisme (il est d'ailleurs facile de vérifier qu'inversement, si X est une Y-extension de X_0 par J telle que l'homomorphisme correspondant $f_0^*I \longrightarrow J$ soit un isomorphisme, alors X est automatiquement un relèvement de X_0). L'assertion (c) est donc cas particulier de 2.11 (b), l'identification consistant à associer à un automorphisme u de X la "dérivation" $u - \mathrm{Id}_X$. De même, si X_1 et X_2 sont deux relèvements de X_0, 2.11 (a) entraîne que X_1 et X_2 sont isomorphes si X_0 est affine, et que l'ensemble des isomorphismes de X_1 sur X_2 est alors un espace affine sous $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$. Les assertions (a) et (b) en découlent formellement. La vérification de (b) est analogue à celle de 2.11 : si X_1 et X_2 sont deux relèvements de X_0, la "différence" de leurs classes d'isomorphie est la classe du torseur sous $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$ des isomorphismes locaux de X_1 sur X_2 (on peut aussi observer que les classes des Y-extensions X_1 et X_2 de X_0 par f_0^*I diffèrent par une unique Y_0-extension de X_0 par f_0^*I et invoquer (2.5.1)). Enfin, indiquons rapidement la construction de l'obstruction $\omega(f_0)$, en supposant pour simplifier X_0 séparé. Tout d'abord, par le critère jacobien (2.8), l'existence d'un relèvement global est assurée dans le cas où X_0 et Y_0 sont affines, et f_0 associé à un homomorphisme d'anneaux $A_0 \longrightarrow B_0$, où B_0 est quotient d'une A_0-algèbre de polynômes $A_0[t_1, \ldots, t_n]$ par l'idéal engendré par une suite d'éléments $(g_1, \ldots, g_r)$ telle que les dg_i soient linéairement indépendants en tout point x de X_0 (relever arbitrairement les g_i). Comme (toujours d'après (2.8)) f_0 est localement de la forme précédente, on peut choisir un recouvrement ouvert affine $\mathfrak{U} = ((U_i)_0)_{i \in E}$ de X_0, et pour chaque i, un relèvement U_i de $(U_i)_0$ sur Y. Comme X_0 a été supposé séparé, chaque intersection $(U_{ij})_0 = (U_i)_0 \cap (U_j)_0$ est affine, et par suite, on peut choisir un isomorphisme de relèvements u_{ij} de $U_{i|(U_{ij})_0}$ sur $U_{j|(U_{ij})_0}$. Sur une intersection triple $(U_{ijk})_0 = (U_i)_0 \cap (U_j)_0 \cap (U_k)_0$, l'automorphisme $u_{ijk} = u_{ki}^{-1} u_{jk} u_{ij}$ de $U_{i|(U_{ijk})_0}$ diffère de l'identité par une section

$$c_{ijk} = u_{ijk}^* - \mathrm{Id}$$

du faisceau $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$. On vérifie que (c_{ijk}) est un 2-cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$, que la classe de ce cocycle dans

$$H^2(X_0, \mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I))$$

ne dépend pas des choix, et qu'elle s'annule si et seulement si l'on peut, sur un recouvrement plus fin, modifier les u_{ij} de manière à ce qu'ils se recollent sur les intersections triples, et définissent ainsi un relèvement global X de X_0. C'est l'obstruction annoncée.

Remarque 2.14. La théorie des *gerbes* [Gi] et celle du *complexe cotangent* [I1] permettent, l'une et l'autre, de se débarrasser de l'hypothèse de séparation faite plus haut, et surtout, de donner une démonstration plus conceptuelle de 2.12.

3. Frobenius et isomorphisme de Cartier

Les références générales pour ce numéro sont (SGA 5 XV 1) pour les définitions et propriétés de base des morphismes de Frobenius absolus et relatifs, et [K1] 7 pour l'isomorphisme de Cartier (cf. aussi [I2] 0 2 et [D-I] 1).

Dans ce numéro, p désigne un nombre premier fixé.

3.1. On dit qu'un schéma X est *de caractéristique* p si $p\mathcal{O}_X = 0$, i.e. si le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ se factorise (nécessairement de manière unique) à travers $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$. Si X est un schéma de caractéristique p, on appelle *endomorphisme de Frobenius absolu* de X (ou, simplement endomorphisme de Frobenius, s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'endomorphisme de X qui est l'identité sur l'espace sous-jacent à X et l'élévation à la puissance p-ième sur $\mathcal{O}_X$. On le note F_X. Si X est affine d'anneau A, F_X correspond à l'endomorphisme de Frobenius F_A de $A, a \longmapsto a^p$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{F_Y} & Y. \end{array} \tag{3.1.1}$$

Notons $X^{(p)}$ (ou X', s'il n'y a pas d'ambiguïté) le schéma $(Y, F_Y) \times_Y X$ déduit de X par le changement de base F_Y. Le morphisme F_X définit un unique Y-morphisme $F = F_{X/Y} : X \longrightarrow X'$, donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccccc} X & \xrightarrow{F} & X' & \longrightarrow & X \\ & f\searrow & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{F_Y} & Y, \end{array} \tag{3.1.2}$$

où le composé supérieur est F_X et le carré est cartésien. On dit que F est le *Frobenius relatif* de X sur Y. Les morphismes de la ligne supérieure induisent des homéomorphismes sur les espaces sous-jacents (F_Y est un "homéomorphisme universel", i.e un homéomorphisme et le reste après tout changement de base). Si Y

est affine d'anneau A, et X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y = \operatorname{Spec} B$, où $B = A[t_1, \ldots, t_n]$, alors $X' = \mathbb{A}^n_Y$[6], et les morphismes $F : X \longrightarrow X'$ et $X' \longrightarrow X$ correspondent respectivement aux homomorphismes $t_i \longmapsto t_i^p$ et $at_i \longmapsto a^p t_i$ $(a \in A)$.

Proposition 3.2. *Soient Y un schéma de caractéristique p, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse, purement de dimension relative n* (2.10). *Alors le Frobenius relatif $F : X \longrightarrow X'$ est un morphisme fini et plat, et la $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre $F_*\mathcal{O}_X$ est localement libre de rang p^n. En particulier, si f est étale, F est un isomorphisme, i.e. le carré* (3.1.1) *est cartésien.*

On traite d'abord le cas où $n = 0$, qui demande un peu d'algèbre commutative : le point est que F est étale, car, d'après 2.6 (a), un Y-morphisme entre Y-schémas étales est automatiquement étale, et qu'un morphisme qui est à la fois étale et radiciel[7] est une immersion ouverte ((SGA 1 I 5.1) ou (EGA IV 17.9.1)). Ensuite, le cas où X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y$ est immédiat : les monômes $\prod t_i^{m_i}$, avec $0 \leqslant m_i < p - 1$ forment une base de $F_*\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_{X'}$. Le cas général s'en déduit grâce à 2.7.

Remarques 3.3. (a) Comme, d'après 2.10, $\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_X$ de rang $\binom{n}{i}$, il résulte de 3.2 que $F_*\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X'}$ de rang $p^n\binom{n}{i}$.

(b) L'énoncé 3.2 relatif à $n = 0$ admet une réciproque : si Y est de caractéristique p et si X est un Y-schéma tel que le Frobenius relatif $F_{X/Y}$ soit un isomorphisme, alors X est étale sur Y (SGA 5 XV 1 Prop. 2). Quand Y est le spectre d'un corps, c'est le “critère de Mac Lane”.

3.4. Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Posons $d = d_{X/Y}$(1.2.3). Si s est une section locale de $\mathcal{O}_X$, on a $d(s^p) = ps^{p-1}ds = 0$. Comme $d(s^p) = F_X^*(ds) = F^*(1 \otimes ds)$, il s'ensuit que

(a) les homomorphismes canoniques (1.3.2) associés à (F_X, F_Y) et F,

$$F_X^*\Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}, \qquad F^*\Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}$$

sont nuls ;

(b) la différentielle du complexe $F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ est $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire ; en particulier, les faisceaux de cycles Z^i, de bords B^i et de cohomologie $\mathcal{H}^i = Z^i/B^i$ du complexe $F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ sont des $\mathcal{O}_{X'}$-modules, et le produit extérieur fait du $\mathcal{O}_{X'}$-module gradué $\bigoplus Z^i F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ (resp. $\bigoplus \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$) une algèbre graduée anti-commutative.

Ces faits sont à la source des miracles du calcul différentiel de caractéristique p. Le résultat principal est le théorème suivant, dû à Cartier [C] :

---

[6] Il n'est pas vrai en général que X et X' soient isomorphes en tant que Y-schémas, c'est le cas ici exceptionnellement.

[7] Un morphisme $g : T \longrightarrow S$ est dit radiciel si g est injectif et, pour tout point t de T, d'image s dans S, l'extension résiduelle $k(s) \longrightarrow k(t)$ est radicielle.

Théorème 3.5. *Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme.*

(a) *Il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées*

$$\gamma : \bigoplus \Omega^i_{X'/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/Y},$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) *pour $i = 0$, γ est donné par l'homomorphisme $F^* : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_* \mathcal{O}_X$;*

(ii) *pour $i = 1$, γ envoie $1 \otimes ds$ sur la classe de $s^{p-1}ds$ dans $\mathcal{H}^1 F_* \Omega^\bullet_{X/Y}$ (où $1 \otimes ds$ désigne l'image de la section ds de $\Omega^1_{X/Y}$ dans $\Omega^1_{X'/Y}$.*

(b) *Si f est lisse, γ est un isomorphisme.*

Dans le cas (b), γ s'appelle l'*isomorphisme de Cartier*, et se note C^{-1}. Son inverse, ou le composé

$$\bigoplus Z^i F_* \Omega^\bullet_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \Omega^i_{X'/Y}$$

de son inverse avec la projection de $\bigoplus Z^i$ sur $\bigoplus \mathcal{H}^i$, où Z^i désigne le faisceau des cycles de $F_* \Omega^\bullet_{X/Y}$ en degré i, se note C : c'est ce dernier homomorphisme qui a été initialement défini par Cartier, et qu'on appelle parfois *l'opération de Cartier*. La présentation adoptée dans 3.5 est due à Grothendieck (notes manuscrites), et détaillée dans [K1] 7.

Quand Y est un schéma parfait, i.e. tel que F_Y soit un automorphisme, par exemple si Y est le spectre d'un corps parfait, l'un des cas les plus importants pour les applications, alors si f est lisse, C^{-1} donne par composition avec l'isomorphisme

$$\bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus (F_Y)_{X\,*} \Omega^i_{X'/Y}$$

(où $(F_Y)_X : X' \longrightarrow X$ est l'isomorphisme déduit de F_Y par changement de base) un isomorphisme

$$C^{-1}_{\text{abs}} : \bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*} \Omega^\bullet_{X/Y}$$

qu'on appelle *isomorphisme de Cartier absolu*.

Corollaire 3.6. *Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse. Alors, pour tout i, les faisceaux de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $F_* \Omega^i_{X/Y}$, $Z^i F_* \Omega^\bullet_{X/Y}$, $B^i F_* \Omega^\bullet_{X/Y}$, $\mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/Y}$ sont localement libres de type fini* (*où Z^i resp. B^i désigne le faisceau de cycles resp. bords en degré i*).

Compte tenu de 3.3 (a) et de l'exactitude de F_*, il suffit d'appliquer 3.5 (b), en procédant par récurrence *descendante* sur i.

Indiquons rapidement la démonstration de 3.5, d'après [K1] 7. Pour (a), il revient au même, compte tenu de (1.3.2), de construire le composé de γ avec l'homomorphisme $\bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus (F_Y)_{X\,*}\Omega^i_{X'/Y}$, i.e. un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$\gamma_{\text{abs}} : \bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$$

vérifiant les conditions analogues à (i) et (ii), i.e. donné en degré zéro par F_X^*, et en degré 1 envoyant ds sur la classe de $s^{p-1}ds$. Or l'application de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{H}^1 F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$ envoyant une section locale s de $\mathcal{O}_X$ sur la classe de $s^{p-1}ds$ est une Y-dérivation (cela résulte de l'identité $p^{-1}((X+Y)^p - X^p - Y^p) = \sum_{0<i<p} p^{-1}\binom{p}{i} X^{p-i}Y^i$ dans $\mathbb{Z}[X,Y]$). Par (1.2.4), elle définit l'homomorphisme $(\gamma_{\text{abs}})^1$ désiré. Comme l'algèbre extérieure $\bigoplus \Omega^i_{X/Y}$ est strictement anti-commutative ("strictement" voulant dire que les éléments de degré impair sont de carré nul), il en est de même de son sous-quotient $\bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$, et par suite il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées γ_{abs} prolongeant les homomorphismes $(\gamma_{\text{abs}})^0 = F_X^*$ et $(\gamma_{\text{abs}})^1$. Pour (b), on peut supposer, d'après 2.7, que f se factorise en

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_Y \xrightarrow{h} Y,$$

où h est la projection canonique et g est *étale*. Le carré (3.1.1) relatif à g étant cartésien d'après 3.2, il en est de même du carré analogue avec les Frobenius relatifs à Y

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ g\downarrow & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow{F} & Z', \end{array} \tag{3.6.1}$$

où l'on a posé $\mathbb{A}^n_Y = Z$ pour abréger. D'après 2.4 (b), l'homomorphisme $g^*\Omega^i_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X/Y}$ est un isomorphisme. Le carré (3.6.1) étant cartésien et F fini, il fournit un isomorphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$g'^*F_*\Omega^\bullet_{Z/Y} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/Y}. \tag{3.6.2}$$

Comme g' est étale, donc plat, l'homomorphisme

$$g'^*\mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{Z/Y} \longrightarrow \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/Y} \tag{3.6.3}$$

déduit de (3.6.2) est un isomorphisme. Comme d'autre part $g'^*\Omega^i_{Z'/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X'/Y}$ est un isomorphisme (g' étant étale), il s'ensuit (par fonctorialité de γ) qu'il suffit de prouver (b) pour Z. Par des arguments analogues (extension des scalaires et Künneth) on se ramène facilement à $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p$ et $n = 1$, i.e. $Z = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[t]$. Alors $Z' = Z$, les monômes $1, t, \ldots, t^{p-1}$ forment une base de $F_*\mathcal{O}_Z$ sur $\mathcal{O}_Z$, et comme la différentielle $d : F_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow F_*\Omega^1_Z = (F_*\mathcal{O}_Z)dt$ envoie t^i sur $it^{i-1}dt$, on constate que $\mathcal{H}^0 F_*\Omega^\bullet_{Z/\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}^1 F_*\Omega^\bullet_{Z/\mathbb{F}_p}$) est libre sur $\mathcal{O}_Z$ de base 1 (resp. $t^{p-1}dt$), et donc que γ est un isomorphisme.

3.7. Il existe un lien étroit entre isomorphisme de Cartier et relèvements de Frobenius. Il était connu de Cartier, et lui a servi de motivation pour sa construction. C'est lui qui est à l'origine des théorèmes de décomposition et de dégénérescence de [D-I], voir n° 5. Voici en quoi il consiste.

Soient $i : T_0 \longrightarrow T$ un épaississement d'ordre 1 et $g_0 : S_0 \longrightarrow T_0$ un morphisme plat. Par *relèvement* du T_0-schéma S_0 sur T on entend un T-schéma *plat* S muni d'un T_0-isomorphisme $T_0 \times_T S \simeq S_0$, i.e. un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{j} & S \\ g_0\big\downarrow & & \big\downarrow g \\ T_0 & \xrightarrow{i} & T \end{array}$$

avec g plat. Si I (resp. J) est l'idéal de l' épaississement i (resp. j), la platitude de g implique que l'homomorphisme canonique $g_0^* I \longrightarrow J$ est un isomorphisme (cf. 2.13).

Prenons pour i l'épaississement $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, d'idéal engendré par p. Soit Y_0 un schéma de caractéristique p, et soit Y un relèvement de Y_0 sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. L'idéal de Y_0 dans Y est donc $p\mathcal{O}_Y$, et la platitude de Y sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ entraîne que la multiplication par p induit un isomorphisme

$$\boldsymbol{p} : \mathcal{O}_{Y_0} \xrightarrow{\sim} p\mathcal{O}_Y . \tag{3.7.1}$$

Soit maintenant $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme *lisse* de $\mathbb{F}_p$-schémas. Notons

$$F_0 : X_0 \longrightarrow X'_0$$

le Frobenius de X_0 relatif à Y_0. Supposons donné un relèvement (lisse) X (resp. X') de X_0 (resp. X'_0) sur Y et un Y-morphisme $F : X \longrightarrow X'$ relevant F_0, i.e. tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X \\ F_0\big\downarrow & & \big\downarrow F \\ X'_0 & \longrightarrow & X' \end{array}$$

commute. (On a vu qu'il existe des obstructions à l'existence de X, X', et F, cf. 2.11 et 2.12, et que ces objets, quand ils existent, ne sont pas uniques; nous y reviendrons plus loin.)

Proposition 3.8. *Soient $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ et $F : X \longrightarrow X'$ donnés comme en* 3.7. *Alors :*

(a) *la multiplication par p induit un isomorphisme*

$$\boldsymbol{p} : \Omega^1_{X_0/Y_0} \xrightarrow{\sim} p\Omega^1_{X/Y} ;$$

(b) *l'image de l'homomorphisme canonique*

$$F^* : \Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/Y}$$

est contenue dans $pF_*\Omega^1_{X/Y}$;

(c) *Notons*

$$\varphi_F : \Omega^1_{X'_0/Y_0} \longrightarrow F_{0\,*}\Omega^1_{X_0/Y_0}$$

l'homomorphisme "déduit de F^* *par division par* p*", i.e. l'unique homomorphisme rendant commutatif le carré*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_{X'/Y} & \xrightarrow{F^*} & p\,F_{0\,*}\Omega^1_{X/Y} \\ \downarrow & & \uparrow \boldsymbol{p} \\ \Omega^1_{X'_0/Y_0} & \longrightarrow & F_{0\,*}\Omega^1_{X_0/Y_0} \end{array} ;$$

alors l'image de φ_F *est contenue dans le noyau de la différentielle du complexe de De Rham, i.e. dans le faisceau de cycles* $Z^1 F_{0\,*}\Omega^\bullet_{X_0/Y_0}$*, et le composé de* φ_F *avec la projection sur* $\mathcal{H}^1 F_{0\,*}\Omega^\bullet_{X_0/Y_0}$ *est l'isomorphisme de Cartier* C^{-1} *en degré* 1 (*cf.* 3.5).

L'assertion (a) est triviale, (b) découle de 3.4 (a), et (c) est immédiat à partir de (a), (b) et la caractérisation de l'isomorphisme de Cartier : en effet, si a est une section locale de $\mathcal{O}_X$, de réduction a_0 modulo p, et a' relève dans $\mathcal{O}_{X'}$ l'image a'_0 de a_0 dans $\mathcal{O}_{X'_0}$, on a

$$F^*a' = a^p + pb$$

pour une section locale b de $\mathcal{O}_X$ (car la réduction modulo p de F^*a' est $F_0^*a'_0 = a_0^p$), et par suite

$$F^*(da') = pa^{p-1}da + pdb,$$

d'où

$$\varphi_F(da'_0) = a_0^{p-1}da_0 + db_0, \tag{3.8.1}$$

dont (c) résulte aussitôt.

3.9. Supposons – c'est, en pratique, l'un des cas les plus importants – que Y_0 soit le spectre d'un corps parfait k de caractéristique p. Alors le spectre Y de l'anneau $W_2(k)$ des vecteurs de Witt de longueur 2 sur k relève Y_0 sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ (c'est d'ailleurs, à isomorphisme près, l'unique relèvement (plat) de Y_0). Rappelons que $W_2(k)$ est l'ensemble des suites (a_1, a_2) d'éléments de k, muni de l'addition et de la multiplication données par

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, S_2(a, b)),$$
$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, P_2(a, b)),$$

où

$$S_2(a,b) = a_2 + b_2 + p^{-1}(a_1^{p-1} + b_1^{p-1} - (a_1+b_1)^p),$$
$$P_2(a,b) = b_1^p a_2 + b_2 a_1^p.$$

L'homomorphisme $W_2(k) \longrightarrow k$ est donné par $(a_1, a_2) \longmapsto a_1$. Si $k = \mathbb{F}_p$, alors $W_2(k) \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, l'isomorphisme étant donné par $(a_1, a_2) \longmapsto \tau(a_1) + p\,\tau(a_2)$, où τ désigne la section multiplicative de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$. (Pour un exposé d'ensemble de la théorie des vecteurs de Witt, voir [S] II 6, [D-G] V.)

Dans ce cas, si X_0 est un Y_0-schéma lisse (i.e. un k-schéma lisse), comme le Frobenius absolu de Y_0 est un automorphisme, relever X_0 sur $Y = \operatorname{Spec} W_2(k)$ équivaut à relever X'_0, et, d'après 2.12, l'obstruction à l'existence d'un tel relèvement se trouve dans $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq H^2(X_0, T_{X_0})$ [8]. Si cette obstruction est nulle, on peut choisir un relèvement X' de X'_0 et un relèvement X de X_0, et alors l'obstruction à un relèvement $F : X \longrightarrow X'$ du Frobenius relatif F_0 se trouve dans $\operatorname{Ext}^1(F_0^*\Omega^1_{X'_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_{X'_0}, F_{0\,*}\mathcal{O}_{X_0})$ (2.11)[9]. En tout cas, ces deux obstructions sont nulles localement, et même dès que X_0 est *affine*. Le choix d'un relèvement F fournit alors, d'après 3.8, une description relativement explicite de l'isomorphisme de Cartier en degré 1 (et donc en tout degré, par multiplicativité).

4. Catégories dérivées et suites spectrales

Il existe plusieurs textes de référence sur ce sujet, de divers niveaux. Le lecteur qui souhaiterait se mettre rapidement au courant pourra consulter [I3], qui peut servir d'introduction et contient une bibliographie étendue. Nous nous bornerons ici à rappeler quelques points fondamentaux dont nous ferons usage au numéro suivant.

4.1. Soit A une catégorie abélienne (en pratique, A sera la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules d'un schéma X). On désigne par $C(A)$ la catégorie des complexes de A, à différentielle de degré 1. On note $L^\bullet$ (ou L) un tel complexe

$$\cdots \longrightarrow L^i \xrightarrow{d} L^{i+1} \longrightarrow \cdots.$$

On dit que L est *à degrés bornés inférieurement* (resp. *supérieurement*, resp. *à degrés bornés*) si $L^i = 0$ pour i assez petit (resp. assez grand, resp. hors d'un

---

8 On omet ici, pour abréger, $/Y_0$ de la notation des différentielles.

9 On peut montrer ([Me-Sr] Appendix) que l'obstruction à un choix de (X, X', F) tel que X' soit l'image inverse de X par l'automorphisme de Frobenius de $W_2(k)$ se trouve dans $\operatorname{Ext}^1(\Omega^1_{X'_0}, B^1F_*\Omega^\bullet_{X_0})$; plus précisément, un tel triplet (X, X', F) existe si et seulement si la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow B^1F_*\Omega^\bullet_{X_0} \longrightarrow Z^1F_*\Omega^\bullet_{X_0} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'_0} \longrightarrow 0$$

(cas particulier $i = 1$ de l'isomorphisme de Cartier 3.5) est nulle. Voir [Sr] pour une application à une autre démonstration du théorème principal de [D-I].

intervalle borné de $\mathbb{Z}$). On note $Z^iL = \operatorname{Ker} d : L^i \longrightarrow L^{i+1}$, $B^iL = \operatorname{Im} d : L^{i-1} \longrightarrow L^i$, $H^iL = Z^iL/B^iL$ respectivement les objets de cycles, bords et cohomologie en degré i. Si A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules, on écrit $C(X)$ au lieu de $C(A)$, et souvent $\mathcal{H}^iL$ au lieu de H^iL pour un objet de $C(X)$ (afin d'indiquer qu'il s'agit du *faisceau* de cohomologie en degré i, et non du groupe de cohomologie global $H^i(X, L)$).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le *tronqué naïf* $L^{\leqslant n}$ (resp. $L^{\geqslant n}$) d'un complexe L est le quotient (resp. le sous-complexe) de L qui coïncide avec L en degré $\leqslant n$ (resp. $\geqslant n$) et est à composantes nulles ailleurs. Le *tronqué canonique* $\tau_{\leqslant n}L$ (resp. $\tau_{\geqslant n}L$) est le sous-complexe (resp. quotient) de L de composantes L^i pour $i < n$, Z^iL pour $i = n$ et 0 pour $i > n$ (resp. L^i pour $i > n$, L^i/B^iL pour $i = n$ et 0 pour $i < n$). On pose $\tau_{<n}L = \tau_{\leqslant n-1}L$. L'inclusion $\tau_{\leqslant n}L \hookrightarrow L$ induit un isomorphisme sur H^i pour $i \leqslant n$. La projection $L \twoheadrightarrow \tau_{\geqslant n}L$ induit un isomorphisme sur H^i pour $i \geqslant n$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le *translaté* $L[n]$ d'un complexe L est le complexe de composantes $L[n]^i = L^{n+i}$ et de différentielle $d_{L[n]} = (-1)^n d_L$. Un complexe L est dit *concentré en degré* r (resp. *dans l'intervalle* $[a, b]$) si $L^i = 0$ pour $i \neq r$ (resp. $i \notin [a, b]$). Un objet E de A est souvent considéré comme complexe concentré en degré zéro. Le complexe $E[-n]$ est alors concentré en degré n, de composante E en ce degré.

Un homomorphisme de complexes $u : L \longrightarrow M$ est appelé un *quasi-isomorphisme* si H^iu est un isomorphisme pour tout i. On dit qu'un complexe K est *acyclique* si $H^iK = 0$ pour tout i.

Si $u : L \longrightarrow M$ est un homomorphisme de complexes, le *cône* $N = C(u)$ de u est le complexe défini par $N^i = L^{i+1} \oplus M^i$, de différentielle $d(x, y) = (-d_Lx, ux + d_My)$. Pour que u soit un quasi-isomorphisme, il faut et il suffit que $C(u)$ soit acyclique.

4.2. Désignons par $K(A)$ la catégorie des complexes de A à homotopie près, i.e. la catégorie ayant mêmes objets que $C(A)$ mais dont l'ensemble des flèches de L dans M est l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de L dans M. La *catégorie dérivée* de A, notée $D(A)$, est la catégorie déduite de $K(A)$ en inversant formellement les (classes d'homotopie de) quasi-isomorphismes : les quasi-isomorphismes de $K(A)$ deviennent des isomorphismes dans $D(A)$ et $D(A)$ est universelle pour cette propriété. Quand A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur une espace annelé X, on écrit $D(X)$ au lieu de $D(A)$. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ sont des catégories additives, et l'on a des foncteurs additifs canoniques

$$C(A) \longrightarrow K(A) \longrightarrow D(A).$$

La catégorie $D(A)$ a *mêmes objets* que $C(A)$. Ses flèches se calculent “par fractions” à partir de celles de $K(A)$: une flèche $u : L \longrightarrow M$ de $D(A)$ est définie par un couple de flèches de $C(A)$ du type

$$L \xleftarrow{s} L' \xrightarrow{f} M \qquad \text{ou} \qquad L \xrightarrow{g} M' \xleftarrow{t} M,$$

où s et t sont des quasi-isomorphismes. Plus précisément, on montre que les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes de source M (resp. but L) forment une catégorie filtrante[10] (resp. l'opposé d'une catégorie filtrante) et que l'on a

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(L,M) = \varinjlim_{t : M \to M'} \mathrm{Hom}_{K(A)}(L,M') = \varinjlim_{s : L' \to L} \mathrm{Hom}_{K(A)}(L',M)$$

où t (resp. s) parcourt la catégorie précédente (resp. son opposée). Si L, M sont des complexes, on pose, pour $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(L,M) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(L,M[i]) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(L[-i],M).$$

Les foncteurs H^i et les foncteurs de *troncation canonique* $\tau_{\leqslant i}$, $\tau_{\geqslant i}$ sur $C(A)$ se prolongent naturellement à $D(A)$. Par contre, il n'en est pas de même des foncteurs de troncation naïve.

4.3. On désigne par $D^+(A)$ (resp. $D^-(A)$, resp. $D^b(A)$) la sous-catégorie pleine de $D(A)$ formée des complexes L *cohomologiquement bornés inférieurement* (resp. *supérieurement*, resp. *bornés*), i.e. tels que $H^iL = 0$ pour i assez petit (resp. assez grand, resp. hors d'un intervalle borné). Si A possède suffisamment d'injectifs (i.e. si tout objet de A se plonge dans un injectif), par exemple si A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma X, alors tout objet de $D^+(A)$ est isomorphe à un complexe, à degrés bornés inférieurement, formé d'injectifs, et la catégorie $D^+(A)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $K(A)$ formée de tels complexes.

4.4. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ ne sont pas abéliennes en général, mais possèdent une structure de *catégorie triangulée*, au sens de Verdier [V]. Cette structure est définie par la famille des *triangles distingués*. Un *triangle* est une suite de flèches $T = (L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L[1])$ de $K(A)$ (resp. $D(A)$). Un *morphisme* de T dans $T' = (L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow L'[1])$ est un triplet (u : $L \longrightarrow L'$, $v : M \longrightarrow M'$, $w : N \longrightarrow N'$) tel que les trois carrés formés avec u, v, w, $u[1]$ commutent. Un triangle est dit *distingué* s'il est isomorphe à un triangle de la forme

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{i} C(u) \xrightarrow{p} L[1],$$

où u est le cône d'un morphisme de complexes u, et i (resp. p) désigne l'inclusion (resp. l'*opposée* de la projection) évidente. Toute suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ définit un triangle distingué de $D(A)$, au moyen du quasi-isomorphisme naturel $C(u) \longrightarrow G$, et tout triangle distingué de $D(A)$ est isomorphe à un triangle distingué de ce type.

[10] Une catégorie I est dite *filtrante* si elle vérife les conditions (a) et (b) suivantes :
(a) pour tout couple de flèches $f, g : i \longrightarrow j$, il existe une flèche $h : j \longrightarrow k$ telle que $hf = hg$,
(b) quels que soient les objets i et j, il existe un objet k et des flèches $f : i \longrightarrow k$, $g : j \longrightarrow k$.

Tout triangle distingué $T = (L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L[1])$ de $D(A)$ donne naissance à des suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow H^iL \longrightarrow H^iM \longrightarrow H^iN \xrightarrow{d} H^{i+1}L \longrightarrow \cdots,$$

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E, L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(E, L) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(N, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(M, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(L, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(N, E) \longrightarrow \cdots,$$

pour $E \in \operatorname{ob} D(A)$. Si le triangle T est associé à une suite exacte courte comme expliqué ci-dessus, l'opérateur d de la première de ces suites est l'opérateur bord usuel (c'est la raison de la convention de signe dans la définition de p).

4.5. Soient L un complexe de A et $i \in \mathbb{Z}$. Le quotient $\tau_{\leqslant i}L/\tau_{\leqslant i-1}L$ s'envoie quasi-isomorphiquement sur $H^iL[-i]$. On a donc un triangle distingué canonique de $D(A)$
$$\tau_{\leqslant i-1}L \longrightarrow \tau_{\leqslant i}L \longrightarrow H^iL[-i] \longrightarrow \tau_{\leqslant i-1}L[1].$$
On définit de même un triangle distingué canonique

$$H^{i-1}L[-i+1] \longrightarrow \tau_{\geqslant i-1}L \longrightarrow \tau_{\geqslant i}L \longrightarrow H^{i-1}L[-i+2].$$

Enfin,

$$\tau_{[i-1,i]}L := \tau_{\geqslant i-1}\tau_{\leqslant i}L = \tau_{\leqslant i}\tau_{\geqslant i-1}L = (0 \longrightarrow L^{i-1}/B^iL \longrightarrow Z^iL \longrightarrow 0)$$

définit un triangle distingué

$$H^{i-1}L[-i+1] \longrightarrow \tau_{[i-1,i]}L \longrightarrow H^iL[-i] \longrightarrow,$$

qui fournit un élément canonique

$$c_i \in \operatorname{Ext}^2(H^iL, H^{i-1}L). \tag{4.5.1}$$

Le triplet $(H^{i-1}L,\ H^iL,\ c_i)$ est un invariant de L dans $D(A)$. Il permet sa reconstruction à isomorphisme près si L est cohomologiquement concentré en degré $i-1$ et i. On peut montrer que les c_i réalisent universellement les différentielles d_2 des suites spectrales de foncteurs dérivés appliqués à L (cf. la thèse de Verdier[11], ou [D3]).

4.6. Soit L un objet de $D^b(A)$. On dit que L est *décomposable* si L est isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe à différentielle nulle. Si L est décomposable, et si $u : L' \longrightarrow L$ est un isomorphisme de $D(A)$, avec L' à différentielle nulle, alors u induit des isomorphismes $L'^i \xrightarrow{\sim} H^iL$, en particulier L' est à degrés bornés et $L' = \bigoplus L'^i[-i]$ (dans $C(A)$) (4.1), donc

$$L \simeq \bigoplus H^iL[-i] \tag{4.6.1}$$

[11] qui devrait paraître prochainement dans *Astérisque*

(dans $D(A)$). Inversement, si L vérifie (4.6.1), L est trivialement décomposable. Si L est décomposable, on appelle *décomposition* de L le choix d'un isomorphisme (4.6.1) *induisant l'identité* sur H^i pour tout i. Il existe une suite finie d'obstructions à la décomposabilité de L : les premières sont les classes c_i (4.5.1) ; si les c_i sont nulles, il y a des obstructions secondaires dans $\mathrm{Ext}^3(H^iL, H^{i-2}L)$, etc. D'autre part, si L est décomposable, L admet en général plusieurs décompositions.

Au numéro suivant, on s'intéressera surtout au cas où L est concentré en degrés 0 et 1 : $L = (L^0 \longrightarrow L^1)$. Dans ce cas :

(a) la classe $c_1 \in \mathrm{Ext}^2(H^1L, H^0L)$ est l'obstruction à la décomposabilité de L ;

(b) la donnée d'une décomposition de L équivaut à celle d'un morphisme $H^1L[-1] \longrightarrow L$ induisant l'identité sur H^1 ;

(c) L'ensemble des décompositions de L est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1(H^1L, H^0L)$ ([D-I] 3.1).

4.7. Nous renvoyons par exemple à [H1], II pour la définition des foncteurs dérivés $\overset{L}{\otimes}$, $R\mathcal{H}om$ [12], $R\mathrm{Hom}$, Rf_*, Lf^*, $R\Gamma$ dans les catégories dérivées $D(X)$, où X est un schéma variable, et la description de certaines relations remarquables entre ces foncteurs. Rappelons seulement que ces foncteurs sont, par rapport à chaque argument, des foncteurs *exacts*, i.e. transforment triangles distingués en triangles distingués, et se "calculent" de la manière suivante :

(a) pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)$, $F \in \mathrm{ob}\, D^-(X)$, $E \overset{L}{\otimes} F \simeq E \otimes F'$ si $F \simeq F'$ dans $D(X)$, avec F' à degrés bornés supérieurement (4.1) et à composantes plates ; pour F donné, il existe un quasi-isomorphisme $F' \longrightarrow F$ avec F' du type précédent, les classes d'homotopie de tels quasi-isomorphismes forment d'ailleurs un système coinitial (dans la catégorie des classes de quasi-isomorphismes de but F, cf. 4.2) ;

(b) pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)$, $F \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, si $F \simeq F'$, avec F' à degrés bornés inférieurement et à composantes injectives, alors $R\mathcal{H}om(E, F) \simeq \mathcal{H}om^\bullet(E, F')$ et $R\mathrm{Hom}(E, F) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(E, F')$; pour F donné, il existe un quasi-isomorphisme $F \longrightarrow$ F' avec F' du type précédent (et les classes d'homotopie de tels quasi-isomorphismes forment un système cofinal) ;

(c) pour $f : X \longrightarrow Y$ et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, si $E \simeq E'$, avec E' à degrés bornés inférieurement et à composantes flasques (par exemple, injectives), alors $Rf_*E \simeq f_*E'$ et $R\Gamma(X, E) \simeq \Gamma(X, E')$; on écrit simplement $H^i(X, E)$ au lieu de $H^iR\Gamma(X, E)$; on définit plus généralement, de la même façon, Rf_* : $D^+(X, f^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \longrightarrow D^+(Y)$, où $D(X, f^{-1}(\mathcal{O}_Y))$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules (le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ est un tel complexe) ;

[12] Une erreur de signe s'est glissée dans la définition du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(L, M)$ dans [H1] p. 64 : pour $u \in \mathrm{Hom}(L^i, M^{i+n})$, il faut lire $du = d \circ u + (-1)^{n+1} u \circ d$.

(d) pour $f : X \longrightarrow Y$ et $F \in \operatorname{ob} D^-(Y)$, $Lf^*F \simeq f^*F'$ si $F \simeq F'$, avec F' à degrés bornés supérieurement et à composantes plates.

4.8. Les suites spectrales sont peut-être l'un des objets à la fois les plus effrayants et les plus utiles des mathématiques. Les catégories dérivées permettent parfois de s'en passer, mais elles restent indispensables. Il existe de nombreuses références, la plus ancienne ([C-E], XV) restant l'une des meilleures. Dans ces notes, nous nous intéresserons surtout à la *suite spectrale* dite *de Hodge vers De Rham*, dont nous allons rappeler la définition.

Soit $T : A \longrightarrow B$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que A possède suffisamment d'injectifs. Alors T admet un dérivé droit

$$RT : D^+(A) \longrightarrow D^+(B),$$

qui se calcule par $RT(K) \simeq T(K')$ si $K \longrightarrow K'$ est un quasi-isomorphisme avec K' à degrés bornés inférieurement et à composantes injectives. Les objets de cohomologie $H^i \circ RT : D^+(A) \longrightarrow B$ sont notés R^iT. Pour $K \in \operatorname{ob} D(A)$, à degrés bornés inférieurement, on a une suite spectrale

$$E_1^{i\,j} = R^jT(K^i) \Longrightarrow R^*T(K), \tag{4.8.1}$$

dite *première suite spectrale d'hypercohomologie* de T. Elle s'obtient de la façon suivante : on choisit une résolution $K \longrightarrow L$ de K par un bicomplexe L, telle que chaque colonne $L^{i\,\bullet}$ soit une résolution injective de K^i ; si $\boldsymbol{s}L$ désigne le complexe simple associé, l'homomorphisme de complexes $K \longrightarrow \boldsymbol{s}L$ qui s'en déduit est un quasi-isomorphisme, donc $RT(K) \simeq T(\boldsymbol{s}L) = \boldsymbol{s}T(L)$, $RT(K^i) \simeq T(L^{i\,\bullet})$, et la filtration de $\boldsymbol{s}T(L)$ par le *premier* degré de L donne naissance à (4.8.1).

Soient k un corps et X un k-schéma. Le groupe (cf. (1.7.1) et 4.7 (c))

$$H^i_{\mathrm{DR}}(X/k) = H^i(X, \Omega^\bullet_{X/k}) = \Gamma(\operatorname{Spec} k, R^if_*(\Omega^\bullet_{X/k})) \tag{4.8.2}$$

(où $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural) s'appelle i-ième groupe de *cohomologie de De Rham* de X/k. C'est un k-espace vectoriel. La suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur $\Gamma(X, \bullet)$ et au complexe $\Omega^\bullet_{X/k}$ s'appelle *suite spectrale de Hodge vers De Rham* de X/k :

$$E_1^{i\,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/k). \tag{4.8.3}$$

C'est une suite spectrale de k-espaces vectoriels. Les groupes $H^j(X, \Omega^i_{X/k})$ s'appellent *groupes de cohomologie de Hodge* de X sur k. Si X est *propre* sur k ([H2] II 4) (par exemple, projectif sur k, i.e. sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$), comme les $\Omega^i_{X/k}$ sont des faisceaux cohérents (2.1), le théorème de finitude de Serre-Grothendieck ([H2] III 5.2 dans le cas projectif, (EGA III 3) dans le cas général) implique que les groupes de cohomologie de Hodge de X sur k sont des k-espaces vectoriels *de dimension finie*. Par la suite spectrale (4.8.3), il en résulte que les groupes de cohomologie de de Rham $H^n_{\mathrm{DR}}(X/k)$ sont aussi de dimension finie sur k. De plus, pour chaque n, on a

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \geqslant \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(X/k), \tag{4.8.4}$$

avec égalité pour tout n si et seulement si la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X sur k dégénère en E_1, i.e. est de différentielle d_r nulle pour tout $r \geqslant 1$.

5. Théorèmes de décomposition, de dégénérescence et d'annulation en caractéristique $p > 0$

Dans ce numéro, comme au n° 3, p désigne un nombre premier fixé.

Le résultat principal est le théorème suivant ([D-I] 2.1, 3.7) :

Théorème 5.1. *Soit S un schéma de caractéristique p. Supposons donné un relèvement (plat) T de S sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$* (3.7). *Soit X un S-schéma lisse; notons, comme en* 3.1, *$F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif de X/S. Alors, si X' admet un relèvement (lisse) sur T, le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\tau_{<p} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$* (4.1) *est décomposable dans la catégorie dérivée $D(X')$ des $\mathcal{O}_{X'}$-modules* (4.6).

5.2. Avant d'aborder la démonstration, notons qu'une décomposition de $\tau_{<p} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ équivaut à la donnée d'une flèche de $D(X')$

$$\bigoplus_{i<p} \mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/S}[-i] \longrightarrow F_* \Omega^\bullet_{X/S}$$

induisant l'identité sur $\mathcal{H}^i$ pour tout $i < p$. D'après le théorème de Cartier (3.5), cette donnée équivaut encore à celle d'une flèche de $D(X')$

$$\varphi : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_* \Omega^\bullet_{X/S} \tag{5.2.1}$$

induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$ pour tout $i < p$. La démonstration consiste en fait à associer canoniquement une telle flèche φ à chaque relèvement de X' sur T. Elle comprend trois étapes.

Etape A. On commence par traiter le cas où F admet un relèvement global.

Proposition 5.3. *Sous les hypothèses de* 5.1, *supposons que $F : X \longrightarrow X'$ admette un relèvement global $G : Z \longrightarrow Z'$, où Z (resp. Z') relève X (resp. X') sur T. Soit*

$$\varphi_G : \bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_* \Omega^\bullet_{X/S} \tag{5.3.1}$$

l'homomorphisme de complexes, de i-ième composante φ^i_G, défini de la manière suivante:

$$\varphi^0_G = F^* : \mathcal{O}_X \longrightarrow F_* \mathcal{O}_X \,; \qquad \varphi^1_G : \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow F_* \Omega^1_{X/S}$$

est l'homomorphisme "G^*/p" défini en 3.8 (c)*; pour $i \geqslant 1$, φ^i_G est composé de $\Lambda^i \varphi^1_G$ et du produit $\Lambda^i F_* \Omega^1_{X/S} \longrightarrow F_* \Omega^i_{X/S}$. Alors φ_G est un quasi-isomorphisme, induisant l'isomorphisme de Cartier C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$ pour tout i.*

C'est immédiat.

Etape B. C'est l'étape principale. On montre que la donnée d'un relèvement Z' de X' sur T permet de définir une décomposition de $\tau_{\leqslant 1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$, i.e. un homomorphisme

$$\varphi^1_{Z'} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_* \Omega^\bullet_{X/S}$$

de $D(X')$ (et non $C(X')$) induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^1$. On a besoin, pour ce faire, de comparer les homomorphismes φ^1_G de (5.3.1) associés à divers relèvement de F de but Z'.

Lemme 5.4. *A tout couple $(G_1 : Z_1 \longrightarrow Z',\ G_2 : Z_2 \longrightarrow Z')$ de relèvements de F est associé canoniquement un homomorphisme*

$$h(G_1, G_2) : \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow F_* \mathcal{O}_X \tag{5.4.1}$$

tel que $\varphi^1_{G_2} - \varphi^1_{G_1} = dh(G_1, G_2)$. Si $G_3 : Z_3 \longrightarrow Z'$ est un troisième relèvement de F, on a

$$h(G_1, G_2) + h(G_2, G_3) = h(G_1, G_3). \tag{5.4.2}$$

Supposons d'abord que Z_1 et Z_2 soient isomorphes (au sens de 2.12 (b)). Choisissons un isomorphisme $u : Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_2$. Alors $G_2 u$ et G_1 relèvent F, i.e. prolongent à Z_1 le composé $X \xrightarrow{F} Z \hookrightarrow Z'$, donc, d'après 2.11 (b), diffèrent par un homomorphisme h_u de $F^* \Omega^1_{X'/S}$ dans $\mathcal{O}_X$, ou ce qui revient au même, de $\Omega^1_{X'/S}$ dans $F_* \mathcal{O}_X$. Si v est un second isomorphisme de Z_1 sur Z_2, alors, compte tenu de 3.4 (a), il résulte de 2.11 (b) que u et v diffèrent par un homomorphisme "$u - v$" : $\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \mathcal{O}_X$, donc $G_2 u$ et $G_2 v$ diffèrent par le composé de "$u - v$" et l'homomorphisme $F^* \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$, qui est nul, donc $G_2 u = G_2 v$. Donc h_u ne dépend pas du choix de u. Comme Z_1 et Z_2 sont localement isomorphes d'après 2.11 (a), on en déduit un homomorphisme (5.4.1) caractérisé par la propriété que si u est un isomorphisme de Z_1 sur Z_2 au dessus d'un ouvert U de X (rappelons encore que Z_1, Z_2 et X ont même espace sous-jacent), la restriction de $h(G_1, G_2)$ à U est l'homomorphisme h_u, "différence" entre G_1 et $G_2 u$. La formule $\varphi^1_{G_2} - \varphi^1_{G_1} = dh(G_1, G_2)$ résulte de la description explicite de φ^1_G donnée en (3.8.1), et la formule (5.4.2) est immédiate.

Fixons maintenant le relèvement Z' de X' sur T. D'après 2.11 (a) et 2.12 (a), on peut choisir un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X de telle manière qu'on ait, pour chaque i, un relèvement Z_i de U_i sur T et un relèvement $G_i : Z_i \longrightarrow Z'$ de $F_{|U_i}$. On dispose alors, pour chaque i, de l'homomorphisme de complexes

$$f_i = \varphi^1_{G_i} : \Omega^1_{X'/S\,|U_i}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S\,|U_i}$$ [13]

de (5.3.1), et pour chaque couple (i,j), de l'homomorphisme

$$h_{ij} = h(G_{i\,|U_{ij}}, G_{j\,|U_{ij}}) : \Omega^1_{X'/S\,|U_{ij}} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_{X\,|U_{ij}}$$

de (5.4.1), où $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Ces données sont reliées par

$$\begin{aligned} f_j - f_i &= dh_{ij} \quad (\text{sur } U_{ij}), \\ h_{ij} + h_{jk} &= h_{ik} \quad (\text{sur } U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned}$$

Elles permettent de définir un homomorphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S}),$$

où $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})$ est le complexe simple associé au bicomplexe de Čech du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. Ce complexe a pour composantes

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})^n = \bigoplus_{a+b=n} \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, F_*\Omega^a_{X/S})$$

et pour différentielle $d = d_1 + d_2$, où d_1 est induite par la différentielle du complexe de De Rham et d_2 est, en bidegré (a,b), égale à $(-1)^a(\sum(-1)^i\partial^i)$ (voir [G] 5.2 ou [H2] III 4.2). En particulier,

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})^1 = \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, F_*\mathcal{O}_X) \oplus \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, F_*\Omega^1_{X/S}).$$

Le morphisme $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ est défini comme ayant pour composantes (φ_1, φ_2) en degré 1, avec

$$(\varphi_1\omega)(i,j) = h_{ij}(\omega)_{|U_{ij}}, \qquad (\varphi_2\omega)(i) = f_i(\omega)_{|U_i}.$$

Utilisant le fait que les f_i sont des morphismes de complexes et les formules supra reliant les f_i et les h_{ij}, on vérifie que $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ ainsi défini est bien un morphisme de complexes. On dispose d'autre part de l'augmentation naturelle

$$\varepsilon : F_*\Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S}),$$

qui est un quasi-isomorphisme, car, pour tout a, le complexe $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^a_{X/S})$ est une résolution de $F_*\Omega^a_{X/S}$ (cf. [Go] ou [H2] loc. cit.). On définit alors

$$\varphi^1_{Z'} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

[13] On identifie les espaces sous-jacents à X et X' au moyen de F (3.1).

comme la flèche de $D(X')$ composée de $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ et de l'inverse de ε (4.2). Si $(\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I},\ (G_i)_{i\in I})$ et $(\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J},\ (G_j)_{j\in J})$ sont deux choix de systèmes de relèvements de Frobenius, la considération du recouvrement $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$, indexé par $I \amalg J$, formé des U_i et des V_j, montre que $\varphi^1_{Z'}$ ne dépend pas des choix (cf. [D-I] p. 253). De plus, $\varphi^1_{Z'}$ induit C^{-1} sur $\mathcal{H}^1$: la question est en effet locale, donc on peut supposer qu'on dispose d'un relèvement global de F, et l'on applique 5.3. Ceci achève l'étape B.

Etape C. On fixe à nouveau un relèvement Z' de X'. On montre comment prolonger la décomposition de $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ définie par $\varphi^i_{Z'}$ $(i = 0,1)$ en une décomposition de $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. On utilise pour cela la structure multiplicative du complexe de De Rham. De $\varphi^1_{Z'}$ on déduit, pour tout $i \geqslant 1$, une flèche de $D(X')$

$$(\varphi^1_{Z'})^{\overset{L}{\otimes} i} = \varphi^1_{Z'} \overset{L}{\otimes} \cdots \overset{L}{\otimes} \varphi^1_{Z'} : (\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\overset{L}{\otimes} i} \longrightarrow (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} i}.$$

Comme $\Omega^1_{X'/S}$ est localement libre de type fini, on a (4.7 (a))

$$(*) \qquad (\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\overset{L}{\otimes} i} \simeq (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i],$$

et de même, comme les $F_*\Omega^a_{X/S}$ sont localement libres de type fini (3.3 (a)),

$$(**) \qquad (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} i} \simeq (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i}.$$

On définit alors, pour $i < p$,

$$\varphi^i_{Z'} : \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

comme la composée (via $(*)$ et $(**)$) de la flèche d'antisymétrisation standard

$$\Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i], \qquad \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \longmapsto \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(i)}$$

(bien définie à cause de l'hypothèse $i < p$), de la flèche $(\varphi^1_{Z'})^{\overset{L}{\otimes} i}$, et de la flèche de produit $(F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. Comme la flèche d'antisymétrisation est une section de la projection de $(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}$ sur $\Omega^i_{X'/S}$, la propriété multiplicative de l'isomorphisme de Cartier entraîne que $\varphi^i_{Z'}$ induit C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$, et cela achève la démonstration du théorème.

Compte tenu de 3.9, on en déduit :

Corollaire 5.5. *Soit k un corps parfait de caractéristique p, et soit X un schéma lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$. Si X se relève sur $T = \operatorname{Spec} W_2(k)$, alors $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable dans $D(X')$. Si de plus X est de dimension $< p$, $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable.*

Remarque 5.5.1. D'après 5.3, si X est lisse sur $\operatorname{Spec} k$ et si X et F se relèvent sur $W_2(k)$, alors $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable (et ce sans hypothèse de dimension sur X). C'est le cas par exemple si X est *affine*. Par contre, si X est propre, il est rare que X admette un relèvement sur $W_2(k)$ où F se relève. On peut montrer que si X et F se relèvent, alors X est *ordinaire*, i.e. vérifie $H^j(X, B^i\Omega^\bullet_{X/S}) = 0$ pour tout (i,j) (cf. 8.6). La notion de variété ordinaire, qui n'a de sens qu'en caractéristique non nulle, a d'abord été introduite pour les courbes et les variétés abéliennes. Elle intervient dans d'assez nombreuses questions de géométrie arithmétique, voir [I4] pour une introduction et quelques références.

Corollaire 5.6. *Soit k un corps parfait de caractéristique p, et soit X un k-schéma propre et lisse, de dimension $< p$. Si X se relève sur $W_2(k)$, la suite spectrale de Hodge vers De Rham* (4.8.3) *de X sur k*

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/k)$$

dégénère en E_1.

Grâce à la compatibilité des Ω^i au changement de base (1.3.2), l'isomorphisme de Frobenius absolu $F_S : S \longrightarrow S$ (où $S = \operatorname{Spec} k$) induit, pour tout (i,j), un isomorphisme $F_S^* H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^j(X', \Omega^i_{X'/k})$, et en particulier, on a

$$\dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) = \dim_k H^j(X', \Omega^i_{X'/k}).$$

D'autre part, comme $F : X \longrightarrow X'$ est un homéomorphisme, on a canoniquement, pour tout n,

$$H^n(X', F_*\Omega^\bullet_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k}) = H^n_{\mathrm{DR}}(X/k).$$

Enfin, si X se relève sur $W_2(k)$, une décomposition $\varphi : \bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ de $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ dans $D(X')$ induit, pour tout n, un isomorphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} H^j(X', \Omega^i_{X'/k}) \xrightarrow{\sim} H^n(X', F_*\Omega^\bullet_{X/k}).$$

Il en résulte qu'on a, pour tout n,

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) = \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(X/k),$$

et, d'après 4.8, cela entraîne la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers De Rham.

5.7. Pour les rappels qui suivent, le lecteur pourra consulter [H2] II, III. Soient k un anneau et X un k-schéma *projectif*, i.e. admettant une k-immersion fermée i

dans un espace projectif standard $P = \mathbb{P}^r_k = \mathrm{Proj}_k[t_0, \ldots, t_n]$. Soit L un faisceau inversible sur X. Rappelons qu'on dit que :

(i) L est *très ample* si l'on a $L \simeq i^*\mathcal{O}_P(1)$ pour une telle immersion fermée i, ce qui signifie qu'il existe des sections globales $s_j \in \Gamma(X, L)(0 \leqslant j \leqslant r)$ définissant une immersion fermée $x \longmapsto (s_0(x), \ldots, s_r(x))$ de X dans P ;

(ii) L est *ample* s'il existe $n > 0$ tel que $L^{\otimes n}$ soit très ample.

Supposons L ample. Alors, d'après les *théorèmes de Serre* ([H2] II 5.17, III 5.2) :

(a) pour tout faisceau cohérent E sur X, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, E \otimes L^{\otimes n}$ soit engendré par un nombre fini de ses sections globales, i.e. quotient de $\mathcal{O}_X^N$ pour N convenable;

(a) pour tout faisceau cohérent E sur X, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $i \geqslant 1$, on ait

$$H^i(X, E \otimes L^{\otimes n}) = 0.$$

Le théorème qui suit est un analogue, en caractéristique p, du théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [KAN], [AkN] :

Théorème 5.8. *Soit k un corps de caractéristique p, et soit X un k-schéma projectif lisse. Soit L un faisceau inversible ample sur X. Alors, si X est purement de dimension $d < p$ (cf. 2.10) et se relève sur $W_2(k)$, on a*

$$H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0 \qquad \textit{pour } i + j > d, \tag{5.8.1}$$

$$H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0 \qquad \textit{pour } i + j < d. \tag{5.8.2}$$

C'est un corollaire de 5.5, dû à Raynaud. La démonstration est analogue à celle de 5.6 à partir de 5.5. Tout d'abord, par le théorème de dualité de Serre ([H2] III 7.7, 7.12), si M est un faisceau inversible sur X, et si $i + i' = d = j + j'$, alors les k-espaces vectoriels de dimension finie $H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k})$ et $H^{j'}(X, M^{\otimes -1} \otimes \Omega^{i'}_{X/k})$ sont canoniquement duaux. Les formules (5.8.1) et (5.8.2) sont donc équivalentes. Il sera plus commode de prouver (5.8.2). Par le théorème d'annulation de Serre (5.7 (b)), il existe $n \geqslant 0$ tel que $H^j(X, L^{\otimes p^n} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout $j > 0$ et tout i. Par dualité de Serre, il s'ensuit que $H^j(X, L^{\otimes -p^n} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout $j < d$ et tout i, et *en particulier pour tout* (i, j) tel que $i + j < d$. Procédant par récurrence descendante sur n, il suffit donc de prouver l'assertion suivante :

(∗) *si M est un faisceau inversible sur X tel que $H^j(X, M^{\otimes p} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i, j) tel que $i + j < d$, alors $H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i, j) tel que $i + j < d$.*

Notons, comme dans 5.1, X' le schéma déduit de X par le changement de base par le Frobenius absolu de $S = \mathrm{Spec}\, k$. Si F_X désigne le Frobenius absolu de X, on a un isomorphisme canonique $F_X^* M \simeq M^{\otimes p}$, induit par l'application $m \longmapsto m^{\otimes p}$, et donc un isomorphisme $F'^*M' \simeq M^{\otimes p}$, où $F : X \longrightarrow X'$ est le Frobenius relatif et M' est l'image inverse de M sur X'. On en déduit, pour tout i, des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$(**) \qquad M' \otimes F_*\Omega^i_{X/k} \simeq F_*(F^*M' \otimes \Omega^i_{X/k}) \simeq F_*(M^{\otimes p} \otimes \Omega^i_{X/k}).$$

Considérons la suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur $T = \Gamma(X', \bullet)$ et au complexe $K = M' \otimes F_*\Omega^\bullet_{X/k}$:

$$E_1^{ij} = H^j(X', M' \otimes F_*\Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*(X', M' \otimes F_*\Omega^\bullet_{X/k}).$$

L'hypothèse et $(**)$ impliquent que $E_1^{ij} = 0$ pour $i + j < d$. Donc

$$H^n(X', M' \otimes F_*\Omega^\bullet_{X/k}) = 0 \quad \text{pour } n < d.$$

Mais comme, d'après 5.5, $F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable, on a (dans $D(X')$)

$$F_*\Omega^\bullet_{X/k} \simeq \bigoplus \Omega^i_{X'/k}[-i],$$

donc

$$H^n(X', M' \otimes F_*\Omega^\bullet_{X/k}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k}),$$

et donc

$$H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k}) = 0 \quad \text{pour } i + j < d.$$

La conclusion de $(*)$ en découle, puisqu'on a

$$F_S^* H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k}) \simeq H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k})$$

(cf. la fin de la démonstration de 5.6).

Remarques 5.9. Le lecteur trouvera dans [D-I] de nombreux compléments aux résultats exposés ci-dessus. En voici quelques uns.

(1) Plaçons-nous sous les hypothèses de 5.1. Alors :

(a) X' se relève sur T si et seulement si $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable dans $D(X')$ (ou, ce qui revient au même, $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ l'est). Rappelons qu'il existe une obstruction $\omega \in \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X'/S}, \mathcal{O}_{X'})$ au relèvement de X' (2.12 (a) et (3.7.1)), et que, compte tenu de l'isomorphisme de Cartier, c'est dans ce même groupe que se trouve l'obstruction c_1 à la décomposabilité de $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$(4.6($a$)) : on montre qu'avec des conventions de signes convenables, $\omega = c_1$.

(b) Si X' se relève sur T, l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de X' est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X'/S}, \mathcal{O}_{X'})$(2.12 (b) et (3.7.1)), et (toujours compte tenu de l'isomorphisme de Cartier) l'ensemble des décompositions de

$\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est un espace affine sous le même groupe (4.6(c)) : on montre que l'application $Z' \longmapsto \varphi_{Z'}$ construite dans la démonstration de 5.1 est une bijection affine entre ces deux espaces.

(c) On donne en fait dans [D-I] 3.5 un énoncé coiffant (a) et (b), faisant appel à la théorie des *gerbes* de Giraud [Gi].

(2) Le théorème de dégénérescence 5.6 a une variante relative. Plaçons-nous sous les hypothèses de 5.1, notons $f : X \longrightarrow S$ le morphisme structural. On dispose alors de la suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur f_* et au complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$,

$$E_1^{i\,j} = R^j f_*\Omega^i_{X/S} \Longrightarrow R^* f_*(\Omega^\bullet_{X/S}),$$

qu'on appelle *suite spectrale de Hodge vers De Rham relative* (de X sur S). Alors, si X est propre et lisse de dimension relative $< p$, et si X' se relève sur T, cette suite spectrale dégénère en E_1 et les faisceaux $R^j f_*\Omega^i_{X/S}$ sont localement libres de type fini ([D-I] 4.1.5).

(3) La dernière assertion de 5.5 et les conclusions de 5.6 et 5.8 restent encore vraies si l'on suppose seulement X de dimension $\leqslant p$ ([D-I] 2.3). C'est une conséquence de la dualité de Grothendieck pour le morphisme F.

(4) Il existe de nombreux exemples de *surfaces propres et lisses* X sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p pour lesquelles la suite spectrale de Hodge vers De Rham ne dégénère pas en E_1 et qui ne vérifient pas la propriété d'annulation de type Kodaira-Akizuki-Nakano de 5.8 (compte tenu de (3) si $p = 2$, ou 5.6 et 5.8 si $p > 2$, ces surfaces ne se relèvent donc pas sur $W_2(k)$). Voir ([D-I] 2.6 et 2.10) pour une bibliographie sur ce sujet.

(5) Les formules (5.8.1) et (5.8.2) sont encore valables si $d = 2 \leqslant p$, X est relevable sur $W_2(k)$ et L est seulement supposé *numériquement positif*, i.e. vérifie $L \cdot L > 0$ et $L \cdot \mathcal{O}(D) \geqslant 0$ pour tout diviseur effectif D, voir [D-I] 2.

6. De la caractéristique $p > 0$ à la caractéristique nulle

6.0. Il existe une technique standard, en géométrie algébrique, qui permet de prouver certains énoncés, de nature géométrique[14], formulés sur un corps de base de caractéristique nulle, à partir d'énoncés analogues sur un corps de caractéristique $p > 0$, voire un corps fini. Elle consiste, grosso modo, à écrire, un peu brutalement, le corps de base K donné, qui est de caractéristique nulle, comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_i : les données sur K, pourvu qu'elles vérifient certaines conditions de finitude, proviennent, par extension des scalaires, de données analogues sur l'une des A_i, disons $A_{i_0} = B$; il suffit alors de résoudre le problème similaire sur $T = \operatorname{Spec} B$, ce qui est, en apparence, plus difficile ; l'avantage, cependant, est que les points fermés de T sont alors des

[14] i.e. stables par extension de la base, par opposition aux énoncés *de nature arithmétique*, où la base joue un rôle essentiel

spectres de corps finis, et qu'en un sens qu'on peut préciser, il y a beaucoup de tels points, de sorte qu'il suffit de vérifier l'énoncé posé sur T après spécialisation en suffisamment de ces points : on a alors affaire à un problème de caractéristique $p > 0$, où l'on dispose de la panoplie des méthodes correspondantes (Frobenius, isomorphisme de Cartier, etc.) ; on peut de plus exploiter le fait de pouvoir choisir la caractéristique assez grande.

Les deux ingrédients de la méthode sont : (a) des résultats de passage à la limite, exposée en grande généralité dans (EGA IV 8), permettant "d'étendre" [15] certaines données et propriétés sur K en des données et propriétés analogues sur B ; (b) des propriétés de densité des points fermés de schémas tels que les schémas de type fini sur un corps ou sur $\mathbb{Z}$ (EGA IV 10).

6.1. Soit $((A_i)_{i\in I},\ u_{ij} : A_i \longrightarrow A_j\ (i \leqslant j))$ un système inductif filtrant d'anneaux, de limite inductive A ; notons $u_i : A_i \longrightarrow A$ l'homomorphisme canonique. Les deux exemples les plus importants sont : (i) un anneau A écrit comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini ; (ii) le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau A en un idéal premier $\mathfrak{p}$ écrit comme limite inductive des localisés A_f ($= A[1/f]$) pour $f \notin \mathfrak{p}$.

Le prototype des problèmes et résultats du type (a) ci-dessus est le suivant. Soit $(E_i) = ((E_i)_{i\in I},\ v_{ij} : E_i \longrightarrow E_j)$ un système inductif de A_i-modules, ayant pour limite inductive le A-module E. Convenons de dire que (E_i) est *cartésien* si, pour tout $i \leqslant j$, v_{ij} (qui est un homomorphisme A_i-linéaire de E_i dans E_j considéré comme A_i-module via u_{ij}) induit, par adjonction, un isomorphisme (A_j-linéaire) de $u_{ij}^* E_i = A_j \otimes_{A_i} E_i$ dans E_j. Dans ce cas, l'homomorphisme canonique $v_i : E_i \longrightarrow E$ induit, pour tout i, un isomorphisme $u_i^* E_i$ ($= A \otimes_{A_i} E_i$) $\xrightarrow{\sim} E$. Soit $((F_i)_i \in I, w_{ij})$ un second système inductif de A_i-modules. Si (E_i) est cartésien, les $\mathrm{Hom}_{A_i}(E_i, F_i)$ forment un système inductif de A_i-modules : l'application de transition pour $i \leqslant j$ associe à $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ l'homomorphisme $E_j \longrightarrow F_j$ composé de l'inverse de l'isomorphisme de $A_j \otimes E_i$ dans E_j défini par v_{ij}, de $A_j \otimes f_i : A_j \otimes E_i \longrightarrow A_j \otimes F_i$, et de l'application de $A_j \otimes F_i$ dans F_j définie par w_{ij}. Si F désigne la limite inductive des F_i, on a des applications analogues de $\mathrm{Hom}_{A_i}(E_i, F_i)$ dans $\mathrm{Hom}_A(E, F)$, qui définissent un homomorphisme

$$\lim\operatorname{ind} \mathrm{Hom}_{A_i}(E_i, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E, F). \tag{6.1.1}$$

On peut alors se poser les deux questions suivantes :

(1) Etant donné un A-module E, existe-t-il $i_0 \in I$ et un A_{i_0}-module E_{i_0} tel que E se déduise de E_{i_0} par extension des scalaires de A_{i_0} à A (ou, ce qui revient au même, existe-t-il un système inductif cartésien (E_i), indexé par $\{i \in I | i \geqslant i_0\}$, dont la limite soit E) ?

(2) S'il existe i_0 tel que (E_i) et (F_i) soient cartésiens pour $i \geqslant i_0$, l'application (6.1.1) (où la limite inductive est prise pour $i \geqslant i_0$) est-elle un isomorphisme ?

[15] en anglais, "spreading out"

On a une réponse positive aux deux questions moyennant des hypothèses de présentation finie (rappelons qu'un module est dit de *présentation finie* s'il est conoyau d'un homomorphisme entre modules libres de type fini). Plus précisément, on a l'énoncé suivant, de vérification immédiate :

Lemme 6.1.2. *Avec les notations précédentes*:

(a) *si E est un A-module de présentation finie, il existe $i_0 \in I$ et un A_{i_0}-module de présentation finie E_{i_0} tel que $u_{i_0}^* E_{i_0} \simeq E$;*

(b) *Soient (E_i), (F_i) deux systèmes inductifs, cartésiens pour $i \geqslant i_0$, de limites inductives respectives E et F ; si E_{i_0} est de présentation finie, l'application* (6.1.1) *est un isomorphisme.*

Il en résulte que, si E est de présentation finie, le E_{i_0} dont il provient par extension des scalaires est essentiellement unique, en ce sens que si E_{i_1} est un autre choix (E_{i_0} et E_{i_1} étant tous deux de présentation finie), il existe i_2 avec $i_2 \geqslant i_1$ et $i_2 \geqslant i_0$ tel que E_{i_0} et E_{i_1} deviennent isomorphes par extension des scalaires à A_{i_2}.

Les $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ forment un système projectif de schémas dont $S = \operatorname{Spec} A$ est la limite projective. Si $(X_i, v_{ij} : X_j \longrightarrow X_i)$ est un système projectif de S_i-schémas, nous dirons que ce sytème est *cartésien* pour $i \geqslant i_0$ si, pour $i_0 \leqslant i \leqslant j$, la flèche de transition v_{ij} donne un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_j & \longrightarrow & S_i. \end{array}$$

Dans ce cas, le S-schéma déduit de X_{i_0} par extension des scalaires à S est la limite projective des X_i. Si (Y_i) est un second système projectif de S_i-schémas, cartésien pour $i \geqslant i_0$, de limite projective Y ($= S \times_{S_{i_0}} Y_{i_0}$), les $\operatorname{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i)$ forment un système projectif, et l'on a une application analogue à (6.1.1) :

$$\lim\operatorname{proj} \operatorname{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(X, Y). \tag{6.1.3}$$

On peut alors formuler des questions similaires à (1) et (2) ci-dessus. Elles ont des réponses analogues, à condition de remplacer les hypothèses de présentation finie pour les modules par des hypothèses de présentation finie pour les schémas (un morphisme de schémas $X \longrightarrow Y$ est dit de *présentation finie* s'il est localement de présentation finie (2.1) et "*quasi-compact et quasi-séparé*", ce qui signifie que X est réunion finie d'ouverts affines U_α au-dessus d'un ouvert affine V_α de Y et que les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ ont la même propriété ; si Y est noethérien, X est de présentation finie sur Y si et seulement si X est de type fini sur Y, i.e. localement de type fini sur Y (2.1) et noethérien) :

Proposition 6.2. *(a) Si X est un S-schéma de présentation finie, il existe $i_0 \in I$ et un S_{i_0}-schéma X_{i_0} de présentation finie dont X se déduit par changement de base.*

(b) *Si* (X_i), (Y_i) *sont deux systèmes projectifs de* S_i*-schémas, cartésiens pour* $i \geqslant i_0$, *et si* X_{i_0} *et* Y_{i_0} *sont de présentation finie sur* S_{i_0}, *alors l'application* (6.1.3) *est bijective.*

Comme précédemment, il en résulte que le X_{i_0} de 6.2 (a) est essentiellement unique (deux tels schémas deviennent S_i-isomorphes pour i assez grand). De plus, les propriétés usuelles d'un S-schéma de présentation finie (ou d'un morphisme entre tels) se lisent déjà, en quelque sorte, sur S_i pour i assez grand. En voici quelques unes, dont nous nous servirons (le lecteur en trouvera une longue liste dans (EGA IV 8, 11.2, 17.7)) :

Proposition 6.3. *Soit* X *un* S*-schéma de présentation finie. On suppose que* X *possède l'une des propriétés* $\mathcal{P}$ *suivantes : projectif, propre, lisse. Alors il existe* $i_0 \in I$ *et un* S_{i_0}*-schéma* X_{i_0} *de présentation finie, possédant la même propriété* $\mathcal{P}$, *dont* X *se déduit par changement de base.*

Le cas où $\mathcal{P}$ est "projectif" est facile : X est le sous-schéma fermé d'un espace projectif standard $P = \mathbb{P}^r_S$ défini par un idéal localement de type fini, il suffit de relever P, puis l'immersion fermée (i.e. le quotient de $\mathcal{O}_P$ correspondant, cf. 6.11). Le cas "propre" est moins immédiat mais, en gros, s'y ramène, par un résultat classique, qu'on appelle le *lemme de Chow* (cf. EGA IV 8.10.5). Le cas "lisse" est un peu plus difficile (on utilise le critère 2.10), voir (EGA IV 11.2.6 et 17.7.8). En ce qui concerne les propriétés de type (b) évoquées en 6.0, nous aurons seulement besoin du résultat suivant :

Proposition 6.4. *Soit* S *un schéma de type fini sur* $\mathbb{Z}$. *Alors :*

(a) *Si* x *est un point fermé de* S, *le corps résiduel* $k(x)$ *est un corps fini* ;

(b) *toute partie localement fermée non vide* Z *de* S *contient un point fermé de* S.

Nous renvoyons pour la démonstration à (EGA IV 10.4.6, 10.4.7), ou, dans le cas où S est affine, auquel on se ramène d'ailleurs aussitôt, à (Bourbaki, Alg. Com. V, par. 3, n° 4) (c'est une conséquence du théorème des zéros de Hilbert).

Nous aurons à appliquer 6.4 (b) au cas où Z est le lieu de lissité de S, S étant supposé intègre[16] :

Proposition 6.5. *Soit* S *un schéma intègre de type fini sur* $\mathbb{Z}$. *L'ensemble des points* x *de* S *en lesquels* S *est lisse sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *est un ouvert non vide de* S. *En particulier, si* A *est une* $\mathbb{Z}$*-algèbre de type fini, intègre, il existe* $s \in A$, $s \neq 0$, *tel que* $\operatorname{Spec} A_s$ *soit lisse sur* $\mathbb{Z}$.

L'ouverture de l'ensemble des points de lissité d'un morphisme localement de présentation finie est un fait général, qui résulte par exemple du critère jacobien 2.6 (a), cf. (EGA IV 12.1.6). Que dans le cas présent cet ouvert soit non vide découle d'une variante locale de 2.10 et du fait que la fibre générique de S est lisse sur $\mathbb{Q}$ en son point générique, $\mathbb{Q}$ étant parfait.

[16] Un schéma est dit *intègre* s'il est irréductible et réduit.

Nous aurons enfin à utiliser des résultats standard de compatibilité des images directes au changement de base (ou, comme on dit parfois, de *propreté cohomologique*). Pour ne pas alourdir l'exposition, nous ne les énoncerons que dans le cas où nous aurons à nous en servir, pour la cohomologie de Hodge et la cohomologie de De Rham.

Proposition 6.6. *Soient S un schéma affine*[17] *noethérien intègre et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse.*

(a) *Les faisceaux $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ et $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ sont cohérents. Il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour tout (i, j) et tout n, les restrictions à U de ces faisceaux soient localement libres de type fini.*

(b) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout morphisme $g : S' \longrightarrow S$, si f' : $X' \longrightarrow$ S' désigne le schéma déduit de X par le changement de base g, les flèches canoniques de $D(S')$ (dites de changement de base)*

$$Lg^* Rf_* \Omega^i_{X/S} \longrightarrow Rf'_* \Omega^i_{X'/S'} \tag{6.6.1}$$

$$Lg^* Rf_* \Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow Rf'_* \Omega^\bullet_{X'/S'} \tag{6.6.2}$$

sont des isomorphismes.

(c) *Fixons $i \in \mathbb{Z}$, et supposons que, pour tout j, le faisceau $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ soit localement libre sur S, de rang constant $h^{i\,j}$. Alors, pour tout j, la flèche de changement de base (déduite de (6.6.1))*

$$g^* R^j f_* \Omega^i_{X/S} \longrightarrow R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'} \tag{6.6.3}$$

est un isomorphisme. En particulier, $R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'}$ est localement libre de rang $h^{i\,j}$.

(d) *Supposons que, pour tout n, $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ soit localement libre de rang constant h^n. Alors, pour tout n, la flèche de changement de base (déduite de (6.6.2))*

$$g^* R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow R^n f'_* \Omega^\bullet_{X'/S'} \tag{6.6.4}$$

est un isomorphisme. En particulier, $R^n f'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$ est localement libre de rang h^n.

Indiquons rapidement la démonstration. Le fait que les $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ soient cohérents est un cas particulier du théorème de finitude de Grothendieck (EGA III 3) (ou [H2] III 8.8 dans le cas projectif). La cohérence des $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ en résulte par la suite spectrale de Hodge vers De Rham relative (5.9(2)). Pour la deuxième assertion de (a), notons A l'anneau (intègre) de S, K son corps des fractions, qui est donc l'anneau local de S en son point générique η. Posons

[17] L'hypothèse "affine" est inutile, nous ne la faisons que pour faciliter la preuve de (b).

pour abréger $R^j f_* \Omega^i_{X/S} = \mathcal{H}^{ij}, R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} = \mathcal{H}^n$. La fibre de $\mathcal{H}^{ij}$ (resp. $\mathcal{H}^n$) en η est libre de type fini (un K-espace vectoriel de dimension finie), et est la limite inductive des $\mathcal{H}^{ij}_{|D(s)}$ (resp. $\mathcal{H}^n_{|D(s)}$), pour s parcourant A, $D(s)$ désignant "l'ouvert d'inversibilité" de s, i.e. $\operatorname{Spec} A_s = X - V(s)$. Par 6.1.2 il en résulte qu'il existe s tel que $\mathcal{H}^{ij}_{|D(s)}$ (resp. $\mathcal{H}^n_{|D(s)}$) soit libre de type fini. Pour (b), choisissons un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines, notons $\mathcal{U}'$ le recouvrement ouvert de X' déduit de $\mathcal{U}$ par changement de base. Comme S est affine et que X est propre, donc séparé, sur S, les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}$ sont affines, et de même les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}'$ sont (relativement) affines[18] sur S'. Par suite (cf. [H2] III 8.7), $Rf_* \Omega^i_{X/S}$ (resp. $Rf'_* \Omega^i_{X'/S'}$) est représenté par $f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S})$ (resp. $f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^i_{X'/S'})$), où l'on désigne ici par $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \bullet)$ le complexe des cochaînes *alterné*. Par la compatibilité des Ω^i au changement de base, on a un isomorphisme canonique de complexes

$$g^* f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S}) \xrightarrow{\sim} f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^i_{X'/S'}).$$

Comme le complexe $f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S})$ est borné et à composantes plates, cet isomorphisme réalise l'isomorphisme (6.6.1). De même, $Rf_* \Omega^\bullet_{X/S}$ (resp. $Rf'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$)) est représenté par $f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$ (resp. $f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^\bullet_{X'/S'})$) (où $\check{\mathcal{C}}$ désigne cette fois le complexe simple associé au bicomplexe de Čech), et l'on a un isomorphisme canonique de complexes

$$g^* f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S}) \xrightarrow{\sim} f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^\bullet_{X'/S'}),$$

qui réalise l'isomorphisme (6.6.2). Les assertions (c) et (d) résultent de (b) et du lemme suivant, dont nous laissons la vérification au lecteur :

Lemme 6.7. *Soient A un anneau noethérien et E un complexe de A-modules tel que $H^i(E)$ soit projectif de type fini pour tout i et nul pour presque tout i. Alors :*

(a) *E est isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe borné à composantes projectives de type fini ;*

(b) *si E est borné et à composantes projectives de type fini, alors, pour toute A-algèbre B, et pour tout i, l'homomorphisme canonique*

$$B \otimes_A H^i(E) \longrightarrow H^i(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme.

Remarques 6.8. (a) Un complexe de A-modules isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe borné à composantes projectives de type fini est dit *parfait*. Prendre garde que, si E est parfait, il n'est pas vrai, en général, que les $H^i(E)$ soient projectifs de type fini. On peut montrer que, sous les hypothèses de 6.6, les

[18] Un morphisme de schémas est dit *affine* si l'image inverse de tout ouvert affine est affine.

complexes $Rf_*\Omega^i_{X/S}$ et $Rf_*\Omega^\bullet_{X/S}$ sont parfaits sur S (et non seulement sur U). La notion de complexe parfait joue un rôle important dans de nombreuses questions de géométrie algébrique.

(b) Dans les énoncés de 6.6 concernant $\Omega^i_{X/S}$, on peut remplacer $\Omega^i_{X/S}$ par n'importe quel $\mathcal{O}_X$-module F localement libre de type fini (voire cohérent et plat relativement à S) : les conclusions de (a), (b) et (c) sont encore valables, à condition de remplacer $\Omega^i_{X'/S'}$ par le faisceau F' image inverse de F sur X'. De même, le complexe Rf_*F est parfait sur S.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer l'application promise de 5.6 :

Théorème 6.9 (théorème de dégénérescence de Hodge)**.** *Soient K un corps de caractéristique nulle, et X un K-schéma propre et lisse. Alors la suite spectrale de Hodge de X sur K* (4.8.3)

$$E_1^{i\,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/K}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/K)$$

dégénère en E_1.

Posons $\dim_K H^j(X, \Omega^i_{X/K}) = h^{i\,j}$, $\dim H^n_{\mathrm{DR}}(X/K) = h^n$. Il s'agit de prouver que, pour tout n, $h^n = \sum_{i+j=n} h^{i\,j}$ (cf. (4.8.3)). Ecrivons K comme limite inductive de la famille $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini. D'après 6.3, il existe $\alpha \in L$ et un S_α-schéma propre et lisse X_α (où $S_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$) dont X se déduit par le changement de base $\operatorname{Spec} K \longrightarrow S_\alpha$. Quitte à remplacer A_α par $A_\alpha[t^{-1}]$ pour un $t \in A_\alpha$ non nul convenable, on peut supposer, d'après 6.5, que S_α est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Abrégeons A_α en A, S_α en S, X_α en $\mathcal{X}$, et notons $f : \mathcal{X} \longrightarrow S$ le morphisme structural. Quitte à nouveau à remplacer A par $A[t^{-1}]$, on peut, d'après 6.6 (a), supposer que les faisceaux $R^j f_*\Omega^i_{\mathcal{X}/S}$ (resp. $R^n f_*\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$) sont libres de rang constant, nécessairementégal alors à $h^{i\,j}$ (resp. h^n) d'après 6.6 (c) et (d). Comme la dimension relative de $\mathcal{X}$ sur S est une fonction localement constante et que X est quasi-compact, on peut d'autre part choisir un entier d qui majore cette dimension en tout point de X et donc la dimension des fibres de X sur S en tout point de S. Appliquant 6.4 (b) à $Z = \operatorname{Spec} A[1/N]$ pour N convenable (disons, le produit des nombres premiers $\leqslant d$), on peut choisir un point fermé s de S, dont le corps résiduel $k = k(s)$ (un corps fini) est de caractéristique $p > d$. Comme S est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, le morphisme canonique $\operatorname{Spec} k \longrightarrow S$ (une immersion fermée) se prolonge (par définition de la lissité (2.2)) en un morphisme $g : \operatorname{Spec} W_2(k) \longrightarrow S$, où $W_2(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur 2 sur k (3.9). Notons $Y = \mathcal{X}_s$ la fibre de $\mathcal{X}$ en $s = \operatorname{Spec} k$ et Y_1 le schéma sur $\operatorname{Spec} W_2(k)$ déduit de $\mathcal{X}$ par le changement de base g. On a donc des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longleftarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
s & \longrightarrow & \operatorname{Spec} W_2(k) & \xrightarrow{g} & S & \longleftarrow & \operatorname{Spec} K.
\end{array}$$

Par construction, Y est un k-schéma propre et lisse, de dimension $< p$, relevé sur $W_2(k)$. Donc, d'après 5.6, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de Y sur k dégénère en E_1. On a donc, pour tout n,

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) = \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(Y/k).$$

Mais d'après 6.6 (c) et (d), on a, pour tout (i,j) et pour tout n,

$$\dim_k H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) = h^{i\,j}, \qquad \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(Y/k) = h^n.$$

Donc $\sum_{i+j=n} h^{i\,j} = h^n$ pour tout n, ce qui achève la démonstration.

Théorème 6.10 (théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [KAN], [AkN])**.** *Soient K un corps de caractéristique nulle, X un K-schéma projectif et lisse, purement de dimension d, et L un faisceau inversible ample sur X. Alors on a :*

(6.10.1) $$H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/K}) = 0 \quad \textit{pour } i+j > d,$$

(6.10.2) $$H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/K}) = 0 \quad \textit{pour } i+j < d.$$

On déduit 6.10 de 5.8 comme 6.9 de 5.6. On a besoin pour cela d'un résultat de passage à la limite pour les modules, généralisant et précisant 6.1.2 (cf. (EGA IV 8.5, 8.10.5.2)) :

Proposition 6.11. *Soit, comme en* 6.1, *$(S_i)_{i \in I}$ un système projectif filtrant de schémas affines, de limite S. Soient $i_0 \in I$, X_{i_0} un S_{i_0}-schéma de présentation finie, et considérons le système projectif cartésien (X_i) qui s'en déduit pour $i \geqslant i_0$, de limite $X = S \times_{S_{i_0}} X_{i_0}$.*

(a) *Si E est un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, il existe $i \geqslant i_0$ et un $\mathcal{O}_{X_i}$-module E_i de présentation finie dont E se déduit par extension des scalaires. Si E est localement libre (resp. localement libre de rang r), il existe $j \geqslant i$ tel que $E_j = \mathcal{O}_{X_j} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} E_i$ soit localement libre (resp. localement libre de rang r). Si X est projectif sur S et E est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample (resp. très ample)* (5.7), *il existe $j \geqslant i$ tel que X_j soit projectif sur S_j et E_j soit inversible ample (resp. très ample).*

(b) *Soient E_{i_0}, F_{i_0} des $\mathcal{O}_{X_{i_0}}$-modules de présentation finie, et considérons les systèmes (E_i), (F_i) qui s'en déduisent par extension des scalaires sur les X_i pour $i \geqslant i_0$, ainsi que les modules E et F qui s'en déduisent par extension des scalaires sur X. On a alors une application naturelle*

$$\lim\mathrm{ind}_{i \geqslant i_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_i}}(E_i, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E, F),$$

qui est bijective.

La vérification de (b) puis des deux premières assertions de (a) se ramène à 6.1.2. Pour la dernière de (a), il suffit de traiter le cas où E est très ample, i.e. correspond à une immersion fermée $h : X \longrightarrow P = \mathbb{P}^r_S$ telle que $h^*\mathcal{O}_P(1) \simeq E$. Pour i assez grand, on relève h en un S_i-morphisme $h_i : X_i \longrightarrow P_i = \mathbb{P}^r_{S_i}$ et E en E_i inversible sur X_i. Quitte à agrandir i, h_i est une immersion fermée et l'isomorphisme $h^*\mathcal{O}_P(1) \simeq E$ provient d'un isomorphisme $h_i^*\mathcal{O}_{P_i}(1) \simeq E_i$, E_i est alors très ample.

Prouvons 6.10. Procédant comme dans la démonstration de 6.9, et appliquant en outre 6.11, on peut trouver un sous-anneau A de K de type fini et lisse sur $\mathbb{Z}$, un morphisme projectif et lisse $f : \mathcal{X} \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$, purement de dimension relative d, dont $X \longrightarrow \operatorname{Spec} K$ se déduit par changement de base, et un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathcal{L}$ dont L se déduit par extension des scalaires. Grâce à 6.6 et 6.8 (b), on peut de plus, quitte à remplacer A par $A[t^{-1}]$, supposer que les faisceaux $R^j f_*(\mathcal{M}\otimes\Omega^i_{\mathcal{X}}/S)$, où $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}^{\otimes -1}$), sont libres de type fini, de rang constant, nécessairement égal, d'après 6.8 (b), à $h^{i\,j}(L) = \dim_K H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/K})$ (resp. $h^{i\,j}(L^{\otimes -1}) = H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/K})$). Choisissons alors $g : \operatorname{Spec} W_2(k) \longrightarrow S$ comme dans la démonstration de 6.9. Le faisceau $\mathcal{L}_s$ image inverse de $\mathcal{L}$ sur $Y = X_s$ est ample. D'après 6.6 et 6.8 (b), on a $\dim_k H^j(Y, \mathcal{L}_s \otimes \Omega^i_{Y/k}) = h^{i\,j}(L)$, et $\dim_k H^j(Y, \mathcal{L}_s^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{Y/k}) = h^{i\,j}(L^{\otimes -1})$. La conclusion résulte alors de 5.8.

Remarque 6.12. De manière analogue, le théorème d'annulation de Ramanujam sur les surfaces [Ram] résulte de la variante de 5.8 relative aux faisceaux numériquement positifs (cf. 5.9 (5)).

7. Développements récents et problèmes ouverts

A. Diviseurs à croisements normaux, réduction semi-stable, et structures logarithmiques

7.1. Soient S un schéma, X un S-schéma lisse, et D un sous-schéma fermé de X. On dit que D est un *diviseur à croisements normaux relativement à* S (ou simplement, *relatif*) si, "localement pour la topologie étale sur X", le couple (X, D) est "isomorphe" au couple formé de l'espace affine standard $\mathbb{A}^n_S = S[t_1, \ldots, t_n]$ et du diviseur $V(t_1 \cdots t_r)$ d'équation $t_1 \cdots t_r = 0$, pour $0 \leqslant r \leqslant n$ (le cas $r = 0$ correspondant à $t_1 \cdots t_r = 1$ et $V(t_1 \cdots t_r) = \emptyset$). Cela signifie qu'il existe un recouvrement *étale* $(X_i)_{i\in I}$ de X (i.e. une famille de morphismes étales $X_i \longrightarrow X$ dont la réunion des images est X) tel que, si $D_i = X_i \times_X D$ est le sous-schéma fermé induit par D sur X_i, il existe un morphisme étale $X_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_S$ tel qu'on ait un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_i & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(t_1 \cdots t_r) & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_S \end{array}$$

(n et r dépendant de i), en d'autres termes, qu'il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur X_i au sens de 2.7 (définissant le morphisme étale $X_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_S$) tel que D_i soit le sous-schéma fermé d'équation $x_1 \cdots x_r = 0$. Cette définition est calquée sur la définition analogue en géométrie analytique complexe (cf. [D1]), où "localement pour la topologie étale" est remplacé par "localement pour la topologie classique", et "morphisme étale" par "isomorphisme local". Un exemple standard de diviseur à croisements normaux relativement à $S = \operatorname{Spec} k$, k un corps de caractéristique différente de 2, est la cubique à point double $D = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - x^2(x-1))$ dans le plan affine $X = \operatorname{Spec} k[x,y]$ (observer, dans cet exemple, qu'il n'existe pas de système de coordonnées (x_j) comme ci-dessus sur un recouvrement ouvert *de Zariski* de X, une extension étale (extraction d'une racine carrée de $x-1$) étant nécessaire pour faire apparaître un tel système au voisinage de l'origine).

La notion de diviseur à croisements normaux $D \hookrightarrow X$ relativement à S est stable par localisation étale sur X et par changement de base $S' \longrightarrow S$.

Si $D \hookrightarrow X$ est un diviseur à croisements normaux relatif, et si $j : U = X \smallsetminus D \hookrightarrow X$ est l'inclusion de l'ouvert complémentaire, on définit un sous-complexe

$$\Omega^\bullet_{X/S}(\log D) \tag{7.1.1}$$

de $j_*\Omega^\bullet_{U/S}$, dit *complexe de De Rham de X/S à pôles logarithmiques le long de D*, par la condition qu'une section locale ω de $j_*\Omega^i_{U/S}$ appartient à $\Omega^i_{X/S}(\log D)$ si et seulement si ω et $d\omega$ ont au plus un pôle simple le long de D (i.e. sont telles que, si f est une équation locale de D, $f\omega$ (resp. $f\,d\omega$) soit section de $\Omega^i_{X/S}$ (resp. $\Omega^{i+1}_{X/S}$) (NB. f est nécessairement non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_X$)). On voit facilement que les $\mathcal{O}_X$-modules $\Omega^i_{X/S}(\log D)$ sont localement libres de type fini, que $\Omega^i_{X/S}(\log D) = \Lambda^i\Omega^1_{X/S}(\log \mathrm{D})$, et que, si, comme plus haut, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées sur un X' étale sur X où D a pour équation $x_1 \cdots x_r = 0$, $\Omega^1_{X/S}(\log D)$ est libre de base $(dx_1/x_1, \ldots, dx_r/x_r, dx_{r+1}, \ldots, dx_n)$.

Il existe une variante naturelle, en géométrie analytique complexe, de la construction (7.1.1) (cf. [D1]). Si $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ et $D \subset X$ est un diviseur à croisements normaux (algébrique), le complexe de faisceaux analytiques associé à (7.1.1) sur l'espace analytique X^{an} associé à X,

$$\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}(\log D)^{\mathrm{an}} = \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D^{\mathrm{an}}),$$

calcule la cohomologie transcendante de U à valeurs dans $\mathbb{C}$: on a un isomorphisme canonique (dans la catégorie dérivée $D(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$)

$$Rj_*\mathbb{C} \simeq \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)^{\mathrm{an}}, \tag{7.1.2}$$

et par suite des isomorphismes

$$H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \simeq H^i(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)^{\mathrm{an}}) \tag{7.1.3}$$

(loc. cit.). Quand de plus X est propre sur $\mathbb{C}$, le théorème de comparaison de Serre [GAGA] permet de déduire de (7.1.3) des isomorphismes

$$H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \simeq H^i(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)). \tag{7.1.4}$$

En outre, la filtration F de $H^*(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$, aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans $\Omega^\bullet_{X/S}(\log \mathrm{D})$,

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/S}(\log D) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)) \tag{7.1.5}$$

est la *filtration de Hodge* de la *structure de Hodge mixte* naturelle de $H^*(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ définie par Deligne et la suite spectrale (7.1.5) dégénère en E_1 ([D2]).

Tout comme dans le cas où $D = \emptyset$ (6.9), cette dégénérescence peut se démontrer par réduction à la caractéristique $p > 0$. On a en effet le résultat suivant, qui généralise 5.1 et dont la preuve est analogue ([D-I] 4.2.3) :

Théorème 7.2. *Soient S un schéma de caractéristique $p > 0$, $S^\sim$ un relèvement plat de S sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, X un S-schéma lisse et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif. Notons $F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif de X/S. Si le couple (X', D') admet un relèvement $(X'^\sim, D'^\sim)$ sur $S^\sim$, où $X'^\sim$ est lisse et $D'^\sim \subset X'^\sim$ est un diviseur à croisements normaux relatif, le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\tau_{<p} F_* \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)$ est décomposable dans la catégorie dérivée $D(X')$.*

Le lecteur trouvera dans [D-I] divers compléments à 7.2 et dans [E-V] une autre présentation des mêmes résultats, et des applications à des théorèmes d'amplitude et d'annulation.

7.3. La théorie qui précède s'étend sans grands changements à une classe de morphismes qui ne sont plus lisses, mais n'en sont pas très éloignés, les morphismes dits “de réduction semi-stable”. Soit T un schéma. L'exemple type de tels morphismes est le morphisme

$$s : \mathbb{A}^n_T = T[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{A}^1_T = T[t], \qquad t \longmapsto x_1 \cdots x_n \quad (n \geqslant 1);$$

en d'autres termes, si $S = \mathbb{A}^1_T$, le schéma $\mathbb{A}^n_T$, considéré comme S-schéma par s, est le sous-S-schéma de $\mathbb{A}^n_S = S[x_1, \ldots, x_n] = T[x_1, \ldots, x_n, t]$ d'équation $x_1 \cdots x_n = t$. Le morphisme s est lisse hors de 0 et sa fibre en 0 est le diviseur D d'équation $(x_1 \cdots x_n = 0)$, un diviseur à croisements normaux relativement à T, mais non à S (un diviseur “vertical”). Plus généralement, si S est un T-schéma lisse de dimension relative 1 et $E \subset S$ un diviseur à croisement normaux relatif (si T est le spectre d'un corps algébriquement clos, E est donc simplement un ensemble fini de points rationnels de S), on dit qu'un S-schéma X a *réduction semi-stable le long de E* si, localement pour la topologie étale (sur X et sur S) le morphisme $X \longrightarrow S$ est de la forme $s \circ g$, avec g lisse, s étant le morphisme considéré ci-dessus. Le diviseur $D = X \times_S E \subset X$ est alors un diviseur à croisements normaux relativement à T (mais non à S)[19]. Un exemple élémentaire est fourni par la “famille de Legendre” $X = \operatorname{Spec} k[x,y,t]/(y^2 - x(x-1)(x-t))$ au-dessus de $S = \operatorname{Spec} k[t] = \operatorname{Spec} k$, k un corps de caractéristique $\neq 2$), qui a réduction semi-stable en $\{0\} \cup \{1\}$, la fibre en chacun de ces points étant isomorphe à la cubique à point double envisagée plus haut. L'intérêt de la notion de réduction semi-stable vient de la *conjecture de réduction semi-stable*, qui, en gros, affirme que localement, après ramification convenable de la base, un morphisme lisse peut se prolonger en un morphisme à réduction semi-stable, conjecture établie par Grothendieck-Deligne-Mumford et Artin-Winters ([G], [A-W], [D-M]) en caractéristique quelconque mais dimension relative 1, et Mumford ([M]) en caractéristique nulle et dimension relative quelconque.

Si $f : X \longrightarrow S$ a réduction semi-stable le long de E, on définit un complexe de De Rham à pôles logarithmiques relatif

$$\omega^\bullet_{X/S} = \Omega^\bullet_{X/S}(\log D/E), \tag{7.3.1}$$

de composantes $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i \omega^1_{X/S}$, où $\omega^1_{X/S}$ est le quotient de $\Omega^1_{X/T}(\log D)$ par l'image de $f^*\Omega^1_{S/T}(\log E)$ et la différentielle est déduite de celle de $\Omega^\bullet_{X/T}(\log D)$ par passage au quotient. Ce complexe est à composantes localement libres de type fini (dans le cas du morphisme s ci-dessus, $\omega^1_{X/S}$ est isomorphe à $(\bigoplus \mathcal{O}_X dx_i/x_i)/\mathcal{O}_X(\sum dx_i/x_i)$ (donc libre de base dx_i/x_i, $i \geqslant 2$)). Il induit sur l'ouvert de lissité U de X sur S le complexe de De Rham usuel $\Omega^\bullet_{U/S}$, et l'on peut montrer que c'est l'unique prolongement sur X de ce complexe qui soit à composantes localement libres de type fini. De plus, si l'on pose, pour abréger, $\omega^\bullet_{X/T} = \Omega^\bullet_{X/T}(\log D)$, $\omega^\bullet_{S/T} = \Omega^\bullet_{S/T}(\log E)$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega^1_{S/T} \otimes \omega^\bullet_{X/S}[-1] \longrightarrow \omega^\bullet_{X/T} \longrightarrow \omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow 0, \tag{7.3.2}$$

où la flèche de gauche est $a \otimes b \longmapsto f^*a \wedge b$. Cette suite exacte joue un rôle important dans le *théorème de régularité de la connexion de Gauss-Manin* (cf. [K2] et l'article de Bertin-Peters dans ce volume). Il existe aussi une variante, en géométrie analytique complexe, de ces constructions. Supposons que $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, que S soit une courbe lisse sur $\mathbb{C}, E \subset S$ le diviseur réduit à un point 0, et que $f : X \longrightarrow S$ soit un morphisme à réduction semi-stable en $\{0\}$, de fibre Y en 0 (Y est donc un diviseur à croisement normaux dans X relativement à $\mathbb{C}$). On peut alors considérer le complexe

$$\omega^\bullet_Y = \mathbb{C}_{\{0\}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega^\bullet_{X/S}, \tag{7.3.3}$$

de composantes les faisceaux localement libres de type fini $\omega^i_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^i_{X/S}$. Steenbrink [St] a montré que le complexe analogue $\omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}$ sur Y^{an} (qui est aussi

[19] On peut même définir une notion de réduction semi-stable le long de E sans hypothèse sur la dimension relative de S sur T, cf. [I5].

le complexe de faisceaux associé à $\omega_Y^\bullet$ sur Y^{an}) incarne le *complexe des cycles proches* $R\Psi(\mathbb{C})$ de f en 0, de sorte que, si de plus f est propre, $H^*(Y, \omega_Y^\bullet)$ "calcule" $H^*(X_t^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ pour t "assez voisin" de 0. Steenbrink montre en outre que (sous cette hypothèse supplémentaire) les suites spectrales

$$E_1^{pq} = R^q f_* \omega_{X/S}^p \Longrightarrow R^{p+q} f_* \omega_{X/S}^\bullet \tag{7.3.4}$$

et

$$E_1^{pq} = H^q(Y, \omega_Y^p) \Longrightarrow H^{p+q}(Y, \omega_Y^\bullet) \tag{7.3.5}$$

dégénèrent en E_1 et que les faisceaux $R^q f_* \omega_{X/S}^p$ sont localement libres de type fini et de formation compatible à tout changement de base. Ces résultats font partie de la construction d'une *structure de Hodge mixte limite* sur $H^*(X_t^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ pour t tendant vers 0 (loc. cit.). Ils peuvent, eux aussi, se démontrer par réduction à la caractéristique $p > 0$ ([I5]). Pour T de caractéristique $p > 0$, et $f : X \longrightarrow S$ à réduction semi-stable le long de $E \subset S$, les complexes $\omega_{X/S}^\bullet$ et

$$\omega_D^\bullet = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_{X/S}^\bullet \tag{7.3.6}$$

(où $D = E \times_S X$) donnent en effet lieu à des isomorphismes de Cartier (du type de 3.5), et, sous des hypothèses de relevabilité modulo p^2 convenables, $\tau_{<p} F_* \omega_{X/S}^\bullet$ et $\tau_{<p} F_* \omega_D^\bullet$ se décomposent (dans $D(X')$) (voir [I5] 2.2 pour un énoncé précis, qui généralise 7.2, et divers corollaires (énoncés de dégénérescence et d'annulation)).

7.4. Le complexe $\omega_D^\bullet$ ci-dessus ne dépend pas seulement de D, mais de X/S. Il n'en dépend toutefois que localement (au voisinage de D). En cherchant à élucider la structure supplémentaire sur D nécessaire pour le définir, J.-M. Fontaine et l'auteur ont été conduits à introduire la notion de *structure logarithmique*. Celle-ci a donné lieu à une théorie, la *géométrie logarithmique*, extension naturelle de la théorie des schémas. Largement développée par K. Kato et son école, elle permet d'unifier les diverses constructions de complexes à pôles logarithmiques envisagés ci-dessus et de considérer les variétés toriques de Mumford et al. et les morphismes à réduction semi-stable comme cas particuliers d'une nouvelle notion de lissité, voir [I6] pour une introduction. Les résultats de décomposition, de dégénérescence et d'annulation précédents admettent des généralisations dans ce cadre, voir [Ka2] et [Og2].

B. Dégénérescence mod p^n et cristaux

7.5. Le théorème de décomposition 5.1 a été obtenu initialement comme sous-produit des travaux d'Ogus [Og1], Fontaine-Messing [F-M] et Kato [Ka1] en cohomologie cristalline (voir [I4] pour un panorama de cette théorie). Le lien (un peu technique) entre 5.1 et le point de vue cristallin est expliqué dans [D-I] 2.2 (iv). Bornons-nous à énoncer un résultat de dégénérescence mod p^n ([F-M], [Ka1]) analogue à 5.6 :

Théorème 7.6. *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k, X un W-schéma propre et lisse de dimension relative $< p$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite spectrale de Hodge vers De Rham*

$$E_1^{ij} = H^j(X_n, \Omega^i_{X_n/W_n}) \Longrightarrow H^{i+j}_{\mathrm{DR}}(X_n/W_n) \tag{7.6.1}$$

dégénère en E_1, $W_n = W_n(k) = W/p^nW$ désignant l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur k et X_n le schéma sur W_n déduit de X par réduction modulo p^n (i.e. par extension des scalaires de W à W_n).

7.7. Pour $n = 1$, on a $W_n = k$ et l'on retrouve l'énoncé 5.6, à cela près que, dans 7.6, on suppose donné un relèvement de X sur W (plutôt que sur W_2)[20]. Sous les hypothèses de 7.6, il n'est pas vrai en général, pour $n \geqslant 2$, que le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ (qui est, a priori, seulement un complexe de faisceaux de W_n-modules sur X_n (ou X_1, X_n et X_1 ayant le même espace sous-jacent)) soit décomposable dans la catégorie dérivée correspondante $D(X_1, W_n)$. Toutefois, les résultats d'Ogus ([Og1] 8.20) impliquent que, si σ désigne l'automorphisme de Frobenius de W_n, $\sigma^*\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ est isomorphe, dans la catégorie dérivée $D(X_1, W_n)$ des faisceaux de W_n-modules sur X_1, au complexe $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}(p)$ déduit de $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ en multipliant la différentielle par p (NB. pour $n = 1$, on a $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}(p) = \bigoplus \Omega^i_{X_1/k}[-i]$). La conclusion de 7.6 en découle aisément, ainsi que diverses propriétés supplémentaires de $H^*_{\mathrm{DR}}(X_n/W_n)$ (structure dite "de Fontaine-Laffaille" – comprenant notamment le fait que la filtration de Hodge est formée de facteurs directs), voir [F-M] et [Ka1].

7.8. Les résultats de dégénérescence et de décomposition dont nous avons parlé jusqu' à présent portent sur des complexes de De Rham de schémas, éventuellement à pôles logarithmiques. On peut, plus généralement, considérer des complexes de De Rham à coefficients dans des modules à connexion intégrable. Plusieurs généralisations de ce type ont été obtenues : pour des coefficients de Gauss-Manin [I5], des faisceaux de modules de Fontaine-Laffaille [Fa2], des T-cristaux [Og2] (ces derniers objets fournissant d'ailleurs une généralisation commune des deux précédents).

C. Problèmes ouverts

7.9. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, X un k-schéma lisse, de dimension d, X' le schéma déduit de X par changement de base par l'automorphisme de Frobenius de k, $F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif (3.1). On a vu en 5.9 (1) (a) (avec $S = \operatorname{Spec} k$, $T = \operatorname{Spec} W_2(k)$) que les conditions suivantes sont équivalentes :

---

[20] En fait, Ogus a montré – mais c'est plus difficile – qu'étant donné $n \geqslant 1$ et Z propre et lisse sur W_n de dimension $< p$, alors, si Z admet un relèvement (propre et lisse) sur W_{n+1}, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de Z/W_n dégénère en E_1 ([Og2] 8.2.6) ; ce résultat généralise véritablement 5.6.

(i) X' – ou, ce qui revient au même ici, X – se relève (en un schéma propre et lisse) sur $W_2(k)$;

(ii) $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable dans $D(X')$ (4.6) ;

(iii) $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable dans $D(X')$.

Nous dirons que X est DR-*décomposable* si $F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable (dans $D(X')$). Comme on l'a observé en 5.2, cette condition équivaut, compte tenu de l'isomorphisme de Cartier (3.5), à l'existence d'un isomorphisme

$$\bigoplus \Omega^i_{X'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/k}$$

de $D(X')$ induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$. Les arguments de 5.6 et 5.8 montrent que :

(a) si X est propre sur k et DR-décomposable, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X/k dégénère en E_1 ;

(b) si X est projectif sur k, purement de dimension d, et DR-décomposable, et si L est un faisceau inversible ample sur X, on a les résultats d'annulation à la Kodaira-Akizuki-Nakano (5.8.1) et (5.8.2).

En vertu de l'équivalence entre les conditions (i) et (ii) ci-dessus, une condition nécessaire pour que X soit DR-décomposable est que X se relève sur $W_2(k)$. D'après [D-I], elle est suffisante si $d \leqslant p$ (5.5 et 5.9 (3)). On ignore si elle l'est en général :

Problème 7.10. *Soit X un k-schéma lisse de dimension $d > p$, relevable sur $W_2(k)$. Est-ce que X est DR-décomposable ?*

7.11. Rappelons (5.5.1) que si X et F se relèvent sur $W_2(k)$, X est DR-décomposable ; c'est le cas si X est affine, ou est un espace projectif sur k. Comme il est signalé dans [D-I] 2.6 (iv), si X est relevable sur $W_2(k)$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le morphisme de produit $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$ admet une section, X est DR-décomposable (voir 8.1 pour une démonstration) ; cette seconde condition est vérifiée notamment si X est *parallélisable*, i.e. si $\Omega^1_{X/k}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre (ou, ce qui revient au même, le fibré tangent $T_{X/k}$, dual de $\Omega^1_{X/k}$, est trivial), donc par exemple si X est une *variété abélienne*. Par un théorème de Grothendieck (cf. [Oo] et [I7] Appendice 1), toute variété abélienne sur k se relève sur $W_2(k)$ (et même sur $W(k)$). Donc toute variété abélienne sur k est DR-décomposable. Une autre classe intéressante de k-schémas relevables (sur $W(k)$) est formée des *intersections complètes* dans $\mathbb{P}^r_k$ (voir l'exposé de Deligne (SGA 7 XI) pour les définitions et propriétés de base de ces objets). Mais on ignore si celles-ci sont DR-décomposables. Le premier cas inconnu est celui d'une quadrique (lisse) de dimension 3 en caractéristique 2. On ignore également si les *grassmanniennes*, et plus généralement, les *variétés de drapeaux*, qui sont, elles aussi relevables sur $W(k)$, sont DR-décomposables (le seul exemple connu est l'espace projectif !).

Le problème 7.10, avec “relevable sur $W_2(k)$” remplacé par “relevable sur $W(k)$”, est tout aussi ouvert. Par contre, on ne peut remplacer “relevable sur $W(k)$” par “relevable sur A”, où A est une extension *totalement ramifiée* de $W(k)$ (= anneau de valuation discrète complet, fini et plat sur $W(k)$, de corps résiduel k, et de degré > 1 sur $W(k)$) : Lang [L] a en effet construit, en toute caractéristique $p > 0$, une k-surface projective lisse X relevable sur un tel anneau A de degré 2 sur $W(k)$ telle que la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X/k ne dégénère pas en E_1.

7.12. Les énoncés de décomposition auxquels on a fait allusion à la fin de 7.3 s'appliquent notamment à une *courbe lisse* S sur $T = \operatorname{Spec} k$ et à un schéma X sur S ayant réduction semi-stable le long d'un diviseur à croisements normaux $E \subset S$ (donc étale sur k), pourvu que certaines hypothèses de relevabilité modulo p^2 soient satisfaites. Plus précisément, si l'on suppose que :

(i) il existe un relèvement $(E^\sim \subset S^\sim)$ de $(E \subset S)$ sur $W_2 = W_2(k)$ (avec $S^\sim$ lisse et $E^\sim$ diviseur à croisements normaux relatif, i.e. étale sur W_2), admettant un relèvement $F^\sim : S^\sim \longrightarrow S^\sim$ du Frobenius (absolu) de S tel que $(F^\sim)^{-1}(E^\sim) = pE^\sim$ [21]

(ii) f se relève en $f^\sim : X^\sim \longrightarrow S^\sim$ ayant réduction semi-stable le long de $E^\sim$, alors $\tau_{<p} F_* \omega^\bullet_{X/S}$ et $\tau_{<p} F_* \omega^\bullet_D$ (où $D = E \times_S X$) sont décomposables, (et donc $F_* \omega^\bullet_{X/S}$ et $F_* \omega^\bullet_D$ le sont aussi si X est de dimension relative $< p$ sur S).

7.13. Le résultat relatif à $\omega^\bullet_D$ suggère le problème suivant en inégale caractéristique. Désignons maintenant par S le spectre de $W = W(k)$, et $E = \operatorname{Spec} k$ le point fermé de S. Soit X un S-schéma. Par analogie avec la définition donnée en 7.3, on dit que X a *réduction semi-stable* si, localement pour la topologie étale (sur X et sur S), X est lisse sur le sous-schéma de $\mathbb{A}^n_S = S[x_1, \ldots, x_n]$ d'équation $x_1 \cdots x_n = p$. Supposons que X ait réduction semi-stable. Alors X est un schéma régulier, sa fibre X_K au point générique $\operatorname{Spec} K$ de S ($K =$ le corps des fractions de W) est lisse, et sa fibre $D = E \times_S X$ au point fermé est un “diviseur à croisements normaux absolu” dans X. Dans cette situation, on définit un complexe $\omega^\bullet_{X/S}$ analogue à (7.3.1), qui est l'unique prolongement, à composantes localement libres de type fini, du complexe de De Rham de U sur S, où U est l'ouvert de lissité de X sur S ; si $X = S[x_1, \ldots, x_n]/(x_1 \cdots x_n - p)$, le $\mathcal{O}_X$-module $\omega^1_{X/S}$, considéré comme sous-faisceau de $\Omega^1_{X_K/K}$, s'identifie à $(\bigoplus \mathcal{O}_X dx_i/x_i)/\mathcal{O}_X(\sum dx_i/x_i)$. Le complexe $\omega^\bullet_D$, défini par la formule (7.3.6), est à composantes localement libres de type fini sur D, et coïncide avec le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{D/k}$ sur l'ouvert de lissité de D. On a $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i \omega^1_{X/S}$ et $\omega^i_D = \Lambda^i \omega^1_D$. D'après un résultat de Hyodo [Hy] (généralisé par Kato dans [Ka2]), le complexe $\omega^\bullet_D$ donne lieu à un isomorphisme de Cartier $C^{-1} : \omega^i_{D'} \simeq \mathcal{H}^i F_* \omega^\bullet_D$. Les complexes $\omega^\bullet_{X/S}$ et $\omega^\bullet_D$ jouent un rôle important dans

[21] Cette notation désigne le diviseur déduit de $E^\sim$ par élévation à la puissance p-ième de ses équations locales.

les développements récents de la théorie des périodes p-adiques (cf. [I4] pour un aperçu).

Problème 7.14. Avec les notations de 7.13, soit X un S-schéma semi-stable, de fibre D au point fermé de S. Est-ce que $\tau_{<p}F_*\omega_D^\bullet$ est décomposable (dans $D(D')$) ?

Noter que la décomposabilité de $\tau_{<p}F_*\omega_D^\bullet$ équivaut à celle de $\tau_{\leqslant 1}F_*\omega_D^\bullet$ (même argument que dans l'étape C de la démonstration de 5.1). La réponse est oui d'après 5.5 si X est *lisse* sur S (NB. ce qui était appelé X (resp. S) en 5.5 est ici D (resp. E)). La réponse est encore oui (pour des raisons de trivialité de cohomologie (cf. 4.6 (a))) si X est affine, ou si X est de dimension relative $\leqslant 1$. Mais le cas général est inconnu.

7.15. Enfin, en ce qui concerne les *théorèmes d'annulation*, signalons qu'on ne sait pas prouver, par des méthodes de caractéristique $p > 0$, les résultats classiques de Grauert-Riemenschneider ou Kawamata-Viehweg. On ne sait pas non plus généraliser 5.9 (5) en dimension > 2. Voir [E-V] pour une discussion de ces questions.

8. Appendice : parallélisabilité et ordinarité

Dans ce numéro, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W_n = W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur k. Nous commencerons par donner une démonstration du résultat mentionné en 7.11 :

Proposition 8.1. *Soit X un k-schéma lisse. Supposons que X se relève sur W_2 et que, pour tout $n \geqslant 1$, le morphisme produit $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$ admette une section. Alors X est DR-décomposable* (7.9).

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.2. *Soient S et T comme en* 5.1, *X un schéma lisse sur S, Z' un relèvement (lisse) de X' sur T. Notons*

$$\varphi^1 : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

l'homomorphisme $\varphi^1_{Z'}$ de $D(X')$ défini dans l'étape B de la démonstration de 5.1, *et, pour $n \geqslant 1$,*

$$\psi^n : (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n}[-n] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

l'homomorphisme composé $\pi \circ (\varphi^1)^{\overset{L}{\otimes} n}$, où $\pi : (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} n} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est l'homomorphisme produit. Notons également $\pi : (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X'/S}$ l'homomorphisme produit. Alors, pour toute section locale ω de $(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n}$, on a

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega) = C^{-1} \circ \pi(\omega),$$

où $C^{-1} : \Omega^n_{X'/S} \longrightarrow \mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est l'isomorphisme de Cartier.

Il suffit de le vérifier pour ω de la forme $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n$, où ω_i est une section locale de $\Omega^1_{X'/S}$. Par fonctorialité, en les $E_i \in D(X')$, du produit

$$\mathcal{H}^1 E_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^1 E_n \longrightarrow \mathcal{H}^n(E_1 \overset{L}{\otimes} \cdots \overset{L}{\otimes} E_n), \qquad a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \longmapsto a_1 \cdots a_n,$$

on a

$$\mathcal{H}^n((\varphi^1)^{\overset{L}{\otimes} n})(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = (\mathcal{H}^1\varphi^1)(\omega_1) \cdots (\mathcal{H}^1\varphi^1)(\omega_n)$$

dans $\mathcal{H}^n((F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} n})$. Comme $\mathcal{H}^1\varphi^1 = C^{-1}$, il s'ensuit que

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = C^{-1}(\omega_1) \wedge \cdots \wedge C^{-1}(\omega_n)$$

dans $\mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$, et donc que

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = C^{-1}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = C^{-1} \circ \pi(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n)$$

par la propriété multiplicative de l'isomorphisme de Cartier.

Prouvons maintenant 8.1. Choisissons, pour chaque n, une section s du produit $\pi : (\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$. Notons encore π et s les morphismes relatifs à X' qui s'en déduisent. Choisissons (*cf.* 3.9) un relèvement Z' de X' sur W_2, et définissons ψ^n comme en 8.2, avec $\varphi^1 = \varphi^1_{Z'}$. Notons

$$\varphi^n : \Omega^n_{X'/k}[-n] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

le morphisme composé $\psi^n \circ s$ (où s désigne encore, par abus, la section correspondante de $(\Omega^1_{X/k}[-1])^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}[-n]$). Il s'agit de vérifier que $\mathcal{H}^n\varphi^n = C^{-1}$. Or, d'après 8.2, si a est une section locale de $\Omega^n_{X'/k}$,

$$\mathcal{H}^n\varphi^n(a) = (\mathcal{H}^n\psi^n)(sa) = C^{-1}(\pi sa) = C^{-1}(a),$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 8.3. *Soit X un k-schéma lisse parallélisable, i.e. tel que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/k}$ soit libre (de type fini). Alors, pour que X soit DR-décomposable, il faut et il suffit que X se relève sur W_2.*

Il suffit de prouver la suffisance. On peut supposer k algébriquement clos. Choisissons un point rationnel x de X sur k et un *isomorphisme* $\alpha : \Omega^1_{X/k} \simeq f^*E$, où $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est la projection et E est le k-espace vectoriel $x^*(\Omega^1_{X/k})$. Via α, une section de l'homomorphisme surjectif $E^{\otimes n} \longrightarrow \Lambda^n E$ se prolonge en une section de $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$. On conclut grâce à 8.1.

Rappelons (5.5.1) la définition suivante :

Définition 8.4. *Soit X un k-schéma propre et lisse. On dit que X est ordinaire si, pour tout (i,j), on a $H^j(X, B\Omega^i_{X/k}) = 0$, où $B\Omega^i_{X/k} = d\Omega^{i-1}_{X/k}$ est le faisceau des bords, en degré i, du complexe de De Rham.*

Cette condition équivaut à $H^j(X', F_*B\Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i,j). Rappelons (3.6) que $F_*B\Omega^i_{X/k} = B^iF_*\Omega^\bullet_{X/k}$ et $F_*Z\Omega^i_{X/k} = Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/k}$ sont des $\mathcal{O}_{X'}$-modules localement libres de type fini.

8.5. Pour un k-schéma propre et lisse X donné, il existe un lien, mis en évidence par Mehta et Srinivas [Me-Sr], entre les propriétés d'être DR-décomposable, parallélisable, et ordinaire. Ce lien s'exprime par le biais d'une notion voisine de celle de DR-décomposabilité, introduite antérieurement par Mehta et Ramanathan [Me-Ra], qui est la suivante. On dit qu'un k-schéma lisse X est *Frobenius-décomposé* ("Frobenius-split") si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$ admet une rétraction, i.e. la suite exacte de $\mathcal{O}_{X'}$-modules (cf. 3.5)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} F_*B\Omega^1_{X/k} \longrightarrow 0 \tag{8.5.1}$$

est scindée. Observons d'abord que *si X est Frobenius-décomposé*, X est relevable sur W_2 (ou, ce qui revient au même (5.9 (1) (a)), $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable) : l'obstruction au relèvement, qui est la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} F_*Z\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow 0,$$

composée de (8.5.1) et de l'extension

$$0 \longrightarrow F_*B\Omega^1_{X/k} \longrightarrow F_*Z\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow 0, \tag{8.5.2}$$

est nulle. On ignore en général si "Frobenius-décomposé" entraîne "DR-décomposable". C'est le cas, d'après 8.3, si X est parallélisable. Mais la réciproque est fausse. On a en effet le résultat suivant ([Me-Sr] 1.1) : si X est un k-schéma propre et lisse, parallélisable, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est Frobenius décomposé ;

(b) l'extension (8.5.2) est scindée ;

(c) X est ordinaire ;

(d) (pour X purement de dimension d) l'homomorphisme $F^* : H^d(X', \mathcal{O}_{X'}) \longrightarrow H^d(X, \mathcal{O}_X)$ induit par Frobenius est un isomorphisme.

En particulier, si X est ordinaire et parallélisable, X se relève sur W_2 (Nori-Srinivas ([Me-Sr] Appendix) montrent en fait que, pour X projectif, X se relève en un schéma projectif lisse sur W). En outre – c'est le résultat principal de [Me-Sr] – si k est algébriquement clos et X connexe, il existe un revêtement étale galoisien $Y \longrightarrow X$ d'ordre une puissance de p tel que Y soit une variété abélienne.

Si X est projectif et lisse sur k, ordinaire et parallélisable, Nori-Srinivas (loc. cit.) montrent plus précisément qu'il existe un unique couple (Z, F_Z), où Z est un relèvement (projectif et lisse) de X sur W_2 (resp. W_n ($n \geqslant 2$ donné), resp. W) et $F_Z : Z \longrightarrow Z'$ un relèvement de $F : X \longrightarrow X'$, où Z' est l'image inverse de

Z par l'automorphisme de Frobenius de W_2 (resp. W_n, resp. W). L'existence et l'unicité de ce relèvement, dit *canonique*, avaient été établies pour la première fois par Serre-Tate [Se-Ta] dans le cas des variétés abéliennes. Comme on l'a signalé en 5.5.1, ce résultat admet une réciproque, sans hypothèse de parallélisabilité :

Proposition 8.6. *Soit X un k-schéma propre et lisse. On suppose qu'il existe des schémas Z et Z' relevant respectivement X et X' sur W_2 et un W_2-morphisme $G : Z \longrightarrow Z'$ relevant $F : X \longrightarrow X'$* [22]*. Alors X est ordinaire.*

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Nakkajima [Na].

8.7. Prouvons 8.6. Soient $G : Z \longrightarrow$ Z' un relèvement de F et $\varphi = \varphi_G : \bigoplus \Omega^i_{X'}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_X$ l'homomorphisme de complexes associé, défini en (5.3.1) (on omet $/k$ de la notation des différentielles). Cet homomorphisme envoie $\Omega^i_{X'}$ dans $F_*Z\Omega^i_X$ (notations de 8.4) et scinde la suite exacte (cf. 3.5)

$$0 \longrightarrow F_*B\Omega^i_X \longrightarrow F_*Z\Omega^i_X \xrightarrow{C} \Omega^i_{X'} \longrightarrow 0. \tag{8.7.1}$$

Prouvons, par récurrence descendante sur i, que $H^*(X, B\Omega^i_X) = 0$ (i.e. que $H^n(X, B\Omega^i_X) = 0$ pour tout n). Pour $i > \dim X$, $B\Omega^i_X = 0$. Fixons i, supposons prouvé $H^*(X, B\Omega^j_X) = 0$ pour $j \geqslant i$, et prouvons que $H^*(X, B\Omega^{i-1}_X) = 0$. Par la suite exacte de cohomologie de la suite exacte

$$0 \longrightarrow F_*Z\Omega^{i-1}_X \longrightarrow F_*\Omega^{i-1}_X \xrightarrow{d} F_*B\Omega^i_X \longrightarrow 0, \tag{8.7.2}$$

l'hypothèse de récurrence entraîne que, pour tout n, on a

$$H^n(X', F_*Z\Omega^{i-1}_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \Omega^{i-1}_X),$$

et donc

$$\dim H^n(X', F_*Z\Omega^{i-1}_X) = \dim H^n(X, \Omega^{i-1}_X) = \dim H^n(X', \Omega^{i-1}_{X'}). \tag{8.7.3}$$

La suite (8.7.1) (relative à $i-1$) étant scindée, la suite exacte de cohomologie donne des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^n(X', F_*B\Omega^{i-1}_X) \longrightarrow H^n(X', F_*Z\Omega^{i-1}_X) \xrightarrow{C} H^n(X', \Omega^{i-1}_{X'}) \longrightarrow 0.$$

L'égalité (8.7.3) entraîne que, dans celles-ci, C est un isomorphisme, et donc que $H^n(X', F_*B\Omega^{i-1}_X) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 8.8. Le lecteur familier avec les structures logarithmiques aura noté que 8.6 et sa démonstration s'étendent au cas où k est remplacé par un point logarithmique $\underline{k} = (k, M)$ de point sous-jacent k et X par un log schéma $\underline{X} = (X, L)$ log lisse et de type de Cartier sur $\underline{k}$ ([Ka2]), propre sur k ; si l'on suppose que $(\underline{X}, \underline{F})$ se relève sur $W_2(\underline{k})$ (cf. [Hy-Ka] 3.1), alors $\underline{X}$ est ordinaire, i.e. $H^j(X, B\omega^i_{\underline{X}}) = 0$ pour tout i et tout j.

[22] On ne suppose pas que Z' est l'image inverse de Z par le Frobenius de W_2.

Bibliographie

[AkN] Y. Akizuki, S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz's theorem,* Proc. Jap. Acad. Sc. A 30 (1954), 266-272.

[A-W] M. Artin and G. Winters, *Degenerate fibers and reduction of curves,* Topology **10** (1971), 373-383.

[Be-Pe] J. Bertin et C. Peters, *Variations de structure de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir,* ce volume.

[B-L-R] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models,* Ergebnisse der Math. Bd **21**, Springer-Verlag (1990).

[C] P. Cartier, *Une nouvelle opération sur les formes différentielles,* C. R. Ac. Sc. Paris, **244** (1957), 426-428.

[C-E] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra,* Princeton Univ. Press (1956).

[D0] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales,* Publ. Math. IHES **35** (1968), 107-126.

[D1] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers,* Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag (1970).

[D2] P. Deligne, *Théorie de Hodge II,* Pub. math. IHES **40** (1972), 5-57.

[D3] P. Deligne, *Décompositions dans la catégorie dérivée,* Proc. Symp. Pure Math. **55** Part I (1994), 115-128.

[D-G] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques,* tome I, Masson et North-Holland Pub. Comp. (1970).

[D-I] P. Deligne et L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de De Rham,* Inv. Math. **89** (1987), 247-270.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus,* Pub. IHES **36** (1969), 75-109.

[De] J.-P. Demailly, *Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation,* ce volume.

[E-V] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems,* DMV Seminar Band **20**, Birkhäuser Verlag (1992).

[Fa1] G. Faltings, *p-adic Hodge Theory,* Journal of the AMS **1** (1988), 255-299.

[Fa2] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations,* Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press 1989, 25-80.

[F-M] J.-M. Fontaine and W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology,* Contemp. Math. **67** (179-207), 1987.

[G] A. Grothendieck, *Modèles de Néron et monodromie,* Exp. IX in SGA 7, 313-523.

[GAGA] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1-42.

[Gi] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**, Springer-Verlag (1971).

[Go] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux,* Hermann (1958).

[H1] R. Hartshorne, *Residues and Duality,* Springer Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag (1966).

[H2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math. **20**, Springer-Verlag 1977.

[Hy] O. Hyodo, *A note on p-adic étale cohomology in the semi-stable reduction case,* Inv. Math. **91** (1988), 543-557.

[Hy-Ka] O. Hyodo and K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles,* in Périodes p-adiques (Séminaire de Bures, 1988 ; J.-M. Fontaine, ed.), 221-268, Astérisque **223** (1994).

[I1] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations, I et II,* Springer Lecture Notes in Math. **239** et **283**, Springer-Verlag (1971, 1972).

[I2] L. Illusie, *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline,* Ann. ENS **12** (1979), 501-661.

[I3] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité,* travaux de J.-L. Verdier, L'enseignement mathématique **36** (1990), 369-391.

[I4] L. Illusie, *Crystalline Cohomology,* Proc. Symp. Pure Math. **55** Part I (1994), 43-70.

[I5] L. Illusie, *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de De Rham à coefficients,* Duke math. J. **60** (1990), 139-185.

[I6] L. Illusie, *Logarithmic spaces (according to K. Kato),* in Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (V. Cristante and W. Messing, Eds.), Perspectives in Math. **15**, 183-203, Academic Press (1994).

[I7] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate,* in Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell (L. Szpiro, ed.), Astérisque **127**, SMF 1985, 151-198.

[K1] N. Katz, *Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem,* Pub. Math. IHES **39** (1970), 175-232.

[K2] N. Katz, *The regularity theorem in algebraic geometry,* Actes Cong. Int. Math. Nice (1970) I, 437-443, Gauthiers-Villars (1971).

[Ka1] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles (applications of ideas of Fontaine-Messing),* Advanced studies in Pure Math. **10** (1987), 207-251.

[Ka2] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie,* Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191-224.

[KAN] K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Ac. Sc. USA **39** (1953), 1268-1273.

[L] W. Lang, *Examples of Liftings of Surfaces and a Problem in de Rham Cohomology,* preprint (1994).

[M] D. Mumford, *Semi-stable reduction,* in Toroidal Embeddings I (G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat eds.), Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag 1973, 53-108.

[Me-Ra] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties,* Ann. Math. **122** (1985), 27-40.

[Me-Sr] V. B. Mehta and V. Srinivas, *Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle (with an appendix by M. V. Nori and V. Srinivas, Canonical liftings),* Compos. Math. **64** (1987), 191-212.

[Na] Y. Nakkajima, *Liftings of Frobenius over W_2 and ordinary logarithmic schemes,* preprint, Dept of Math. Sciences, Tokyo, 1994.

[O] J. Oesterlé, *Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham (d'après Deligne et Illusie),* Séminaire Bourbaki n° 673 (1986-87), Astérisque **152-153** (1987), 67-83.

[Og1] A. Ogus, *Frobenius and the Hodge filtration,* in Notes on Crystalline Cohomology (by P. Berthelot and A. Ogus), Math. Notes **21**, Princeton Univ. Press (1978).

[Og2] A. Ogus, *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition,* Astérisque **221**, SMF (1994).

[Oo] F. Oort, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems,* Proc. 5th Nordic Summer School, Walters-Noordhoff (1970), 223-254.

[Ram] C. P. Ramanujam, *Remarks on the Kodaira Vanishing theorem,* J. Indian Math. Soc. **36** (1972), 41-51 ; **38** (1974), 121-124.

[S] J.-P. Serre, *Corps locaux,* Hermann (1962).

[Se-Ta] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties,* Ann. Math. **88** (1968), 492-517.

[Sr] V. Srinivas, *Decomposition of the De Rham complex,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **100**, n° 2 (1990), 103-106.

[St] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures,* Inv. Math. **31** (1976), 229-257.

[V] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées, Etat 0,* dans SGA 4 1/2, Cohomologie étale, par P. Deligne, Springer Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag (1977).

EGA A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique, I, II, III, IV,* Pub. Math. IHES **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** et Grundlehren **166**, Springer-Verlag (1971).

SGA 1 A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental,* Springer Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag (1971).

SGA 5 A. Grothendieck et al., *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L,* Springer Lecture Notes in Math. **589**, Springer-Verlag (1977).

SGA 6 A. Grothendieck et al., *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch,* Springer Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag (1971).

SGA 7 A. Grothendieck et al., *Groupes de monodromie en géométrie algébrique,* Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967-69, dirigé par A. Grothendieck, I. Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag 1972, II. Lecture Notes in Math. **340**, Springer-Verlag 1973.

Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

José Bertin, Chris Peters

Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ces notes est de proposer une introduction assez détaillée à la partie la plus élémentaire de la théorie des variations de structures de Hodge avec des indications brèves sur les développements les plus récents. Pour motiver et illustrer cette étude, il nous a semblé pertinent d'exposer les grandes lignes d'un chapitre excitant et nouveau de géométrie algébrique : les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir, en mettant surtout l'accent sur les questions qui véritablement relèvent des structures de Hodge et leurs variations. Cette théorie issue des réflexions d'un groupe de physiciens, conduit entre autre choses à des prédictions remarquables sur le nombre de courbes rationnelles, et même de tout genre, tracées sur une classe de variétés de dimension trois.

Le texte s'adresse en priorité à des étudiants, ou mathématiciens non spécialistes, mais qui cependant ont une certaine familiarité avec les techniques usuelles de la géométrie algébrique ou analytique complexe. Cela est particulièrement clair dans le premier chapitre où le cadre retenu, assez général, est alternativement celui des schémas et des variétés analytiques. Le langage de base utilisé pour formuler et prouver les résultats est naturellement celui de l'algèbre homologique, à partir des notions de cohomologie et d'hypercohomologie des faisceaux. Le lecteur trouvera dans le texte ci-joint d'Illusie [Ill] un exposé succinct mais largement suffisant. Il doit être signalé au lecteur que plusieurs excellents textes existent dans la littérature qui proposent une introduction à un aspect ou à un autre de la théorie des variations de structure de Hodge, citons par exemple les plus classiques [Co-G], [G-S], [P-S] et, plus récemment [B-Z], avec tout naturellement l'article fondamental de Schmid [S]. Nous espérons cependant que parallèlement à ces textes, nos notes pourront à l'occasion rendre quelques services. Sur le thème de la seconde partie, beaucoup de textes traitant du sujet, écrits dans le "style de la physique" sont d'un accès malaisé pour un mathématicien. On peut souhaiter de même que nos notes apportent un complément utile aux textes récents de M. Kontsevich [K1], [K2], D. Morrison [Mor 1] et C. Voisin [V] qui traitent aussi des aspects mathématiques du sujet.

Le texte est divisé en deux parties non indépendantes. La partie I consacrée aux développements généraux sur les variations de structures de Hodge (chapitre 1 à 6) et la partie II qui poursuit sur les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir. Pour aider le lecteur nous avons fait débuter chaque chapitre par un court résumé. Situons maintenant le contenu de ces notes dans leur contexte. Les variations de structures de Hodge apparaissent naturellement lorsque, au lieu d'avoir une variété algébrique, par exemple donnée par une équation homogène (hypersurface) $\{f = 0\}$, on considère une famille de variétés algébriques, par exemple lorsque l'équation dépend de paramètres (variables additionnelles). Précisément, dans ces notes, une *famille* sera une application holomorphe $f : X \to S$ telle que $X \subset \mathbb{P}^n \times S$ et f, la restriction à X de la projection sur S, étant partout de rang maximal. Les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont des variétés projectives lisses, et on sait par le texte ci-joint de Demailly [Dem] que chaque espace vectoriel $H^w(X_s, \mathbb{C})$ porte une structure de Hodge de poids w, c'est le résultat fondamental de la théorie de Hodge. On sait aussi (loc. cit.§10) que $H^w(X_s, \mathbb{C})$ est la fibre d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{H}$ sur S ; il est donc naturel et fondamental d'étudier le comportement de la structure de Hodge définie sur $H^w(X_s, \mathbb{C})$, lorsque $s \in S$ varie, c'est-à-dire globalement sur S. D'une autre manière, si on pense à la classe $[\omega(s)]$ d'une forme différentielle fermée $\omega(s)$ comme dépendant du paramètre s, et si γ est un cycle de dimension (réelle) w dans une fibre X_{s_0}, qu'on peut voir comme un cycle sur toute fibre voisine X_s de X_{s_0} du fait de la trivialité locale topologique de la famille, il est alors possible de considérer la période de ω, c'est-à-dire la fonction $\int_\gamma \omega$. Pour étudier la variation des périodes par rapport à s, il est nécessaire de dériver : $\frac{d}{ds}\left(\int_\gamma \omega\right)$. Le cycle étant fixé, on veut dériver sous le signe somme. Cela sera justifié par l'existence d'une connexion, la connexion de Gauss-Manin qui conduira à la règle de dérivation :

$$\frac{d}{ds}\int_\gamma \omega(s) = \int_\gamma \nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$$

$\nabla_{\frac{d}{ds}}$ étant la dérivée covariante dans la direction de $\frac{d}{ds}$.

Dans le §10 de [Dem], il est prouvé aussi que le fibré $\mathcal{H}^w$ est le fibré associé au système localement constant $\bigcup_{s\in S} H^w(X_s, \mathbb{C})$, il est donc plat ; la connexion plate résultante est la *connexion de Gauss-Manin*. De plus, si au lieu des sous-espaces $H^{p,q}(X_s)$, on considère les sous-espaces $F^p H^w(S_s, \mathbb{C}) = \oplus_{r\geqslant p} H^{r,w-r}(X_s)$ de la filtration de Hodge, alors ces sous-espaces sont les fibres d'un sous-fibré holomorphe $\mathcal{F}^p$ de $\mathcal{H}^w$, définissant la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{H}^w$. Le fibré $\mathcal{H}^w$ équipé de cette *filtration de Hodge* et de la connexion de Gauss-Manin est l'exemple fondamental d'une *variation de structures de Hodge*, notion introduite par Griffiths dans [Grif1].

Ainsi, dans le paragraphe 1 nous donnons la construction détaillée des fibrés de Hodge, comme conséquence de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham (voir le texte ci-joint d'Illusie) dans le cadre général des variétés algébriques non nécessairement complexes.

Dans le §2 nous construisons la connexion de Gauss-Manin et nous prouvons la propriété de transversalité. L'exposition de ce paragraphe est assez détaillée car le théorème de transversalité de Griffiths est le point de départ central de toute la théorie, comme on pourra s'en convaincre en parcourant la seconde partie. Les manipulations sur les complexes de De Rham et leurs résolutions sont en fait proches de ce qui est fait dans [Ill]. Nous prouvons aussi que la connexion de Gauss-Manin est algébrique, suivant en cela les calculs de Katz et Oda [K-O]. C'est cet aspect qui est devenu extrêmement important dans les développements récents (§6).

Dans le §3, on introduit les *domaines de périodes de Griffiths* qui sont des espaces de paramètres pour les structures de Hodge polarisées de poids et nombres de Hodge fixés. Si $f : X \to S$ est une famille, on définit, quitte à se restreindre à la cohomologie primitive, l'application des périodes $p : S \to D$ (si S n'est pas simplement connexe il faut remplacer S par son revêtement universel) ; on traduit dans ce cadre la propriété de tranversalité. L'étude de la différentielle de l'application des périodes conduit naturellement à la notion de *variation infinitésimale de structures de Hodge* introduite dans [C-G-G-H] et traitée à la fin du §3. Cette notion est nécessaire pour justifier certains points fondamentaux du chapitre II.

Revenons à la situation considérée au début, celle d'une famille de variétés paramétrée par une base compacte. Dans cette situation on ne pourra éviter la présence de fibres singulières ; il est donc naturel d'étudier le comportement de la variation autour du lieu des fibres singulières. Pour simplifier on suppose que la base est le disque unité Δ, que $f : X \to \Delta$ est de rang maximal au dessus des points de $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. On dit que f est une *dégénérescence à un paramètre*. Tourner une fois autour de 0 induit l'action de *monodromie locale* $T : H^w(X_s) \to H^w(X_s)$, $s \in \Delta$. Cette action préserve la structure entière, la polarisation et la filtration de Hodge. Le théorème de la monodromie locale de [La] et [S] dit que T est quasi-unipotente, c'est-à-dire, pour $k, m \in \mathbb{N}$ convenables, $(T^k - \mathbb{1})^m = 0$. Un autre résultat important est le théorème local des cycles invariants de [Cl] qui dit qu'une classe $\alpha \in H^w(X_s)$ est T-invariante si et seulement si α est la restriction à X_s d'une classe définie sur X tout entier. La démonstration de ce théorème nécessite la construction d'une filtration de Hodge sur $H^w(X_s)$ différente de la filtration classique et qui est mieux adaptée au passage à la limite quand s tend vers zéro, la *filtration de Hodge limite*. L'opérateur de monodromie T, lui aussi induit une filtration, celle des poids, et jointe à la filtration limite on obtient une structure plus compliquée appelée : *structure de Hodge mixte* sur $H^w(X_s)$, ou encore la *structure limite*. Dans le §4 nous exposerons brièvement la notion de structure de Hodge mixte et les résultats fondamentaux de Deligne [Del4] et [Del5] sur l'existence d'une telle structure sur les variétés algébriques qui ne sont pas nécessairement compactes ni lisses. Ensuite nous donnerons une description de la structure limite en résumant quelques résultats importants qui se trouvent dans les articles [S] et [Cl]. Le §4 se termine par une description des faisceaux des cycles proches et évanescents qui est essentielle pour comprendre le travail de Saito [Sa1] sur les modules de Hodge, travail très partiellement esquissé dans le §6.

Dans le §5 nous résumons quelques résultats récents de Simpson sur les *fibrés* *de Higgs*, qui forment dans un certain sens une généralisation des variations de structures de Hodge et qui lui ont permis d'obtenir des conséquences surprenantes concernant les groupes *kählériens*, c'est-à-dire les groupes qui peuvent apparaître comme les groupes fondamentaux d'une variété kählérienne compacte.

La notion compliquée de *module de Hodge* joue un rôle central dans les développements récents de la théorie de Hodge. Elle nécessite l'introduction des $\mathcal{D}$-modules, faisceaux pervers et une compréhension de la correspondance de Riemann-Hilbert, qui décrit le lien entre ces deux notions. Dans le §6 nous décrivons brièvement ces notions ainsi qu'une application importante à la cohomologie d'intersection, introduite par Goresky et MacPherson dans [G-M] : le groupe de cohomologie d'intersection $IH^w(X)$ d'une variété algébrique complexe X porte une structure de Hodge pure de poids w.

Décrivons le contenu de la partie II. Comme dit au début, il y a peu de temps que les physiciens travaillant en physique quantique ont mis en évidence un nouveau phénomène de dualité. Les conséquences mathématiques, encore largement au stade des spéculations, sont fascinantes. Les exposés [F-G] et [P] décrivent en détail dans le langage de la physique ce cercle d'idées. Parmi les diverses manifestations de dualité, la symétrie miroir a attiré l'attention des géomètres algébristes, principalement à la suite du travail d'un groupe de physiciens [C-O-G-P], traduit partiellement en langage mathématique par D. Morrison [Mor1]. Le cadre de cette symétrie est celui *des variétés de Calabi-Yau* (§7). Une conséquence naïve (vérifiée par l'observation) est que ces variétés sont distribuées par paires, une paire étant formée de la variété miroir de l'autre, et que le tableau des nombres de Hodge de l'une se déduit du tableau de l'autre par une rotation d'un quart de tour. La symétrie prédit naturellement beaucoup plus, par exemple que les nombres de courbes rationnelles de "degré" fixé sur l'une est déductible d'informations fournies par la variation de la structure complexe de l'autre. Pour mettre en forme partiellement cette assertion, on étudie le comportement des périodes des 3-formes holomorphes lorsque la structure complexe varie. On détermine l'équation différentielle naturelle satisfaite par ses périodes, qui est *l'équation de Picard-Fuchs*. Cet aspect est traité en détail, avec au préalable la description donnée par Griffiths de la cohomologie d'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$. Les détails sont dans le §8, et suivent en partie l'exposé de [C-G]. Les calculs sont détaillés car c'est essentiellement ici qu'on peut tout calculer. Notons que le contexte géométrique (différentiel) a été formalisé par les physiciens sous le nom de "géométrie spéciale" [Str].

Dans les §9 et 10, on traite l'exemple célèbre depuis [C-O-G-P] de l'hypersurface quintique de $\mathbb{P}^4$ et de sa variété miroir. Les méthodes de la partie I interviennent lors de la discussion de l'accouplement de Yukawa. Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau de dimension 3, soit $\omega(s)$ une 3-forme holomorphe relative ($s \in \Delta$) et soit enfin $\nabla_{\frac{d}{ds}} : \mathcal{H}^3 \to \mathcal{H}^3$ la dérivée covariante induite par la connexion de Gauss-Manin. Il résulte de la propriété de transversalité que $\nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$ est une somme de termes de type $(3,0)$ et $(2,1)$ et donc $\int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s) = 0 = \int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla^2_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$.

Par contre reste la fonction non-nulle :

$$\kappa_{sss} = \int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla^3_{\frac{d}{ds}} \omega(s)$$

qui est *l'accouplement de Yukawa*.

Cette fonction satisfait à une équation différentielle liée à l'équation de Picard-Fuchs. L'analyse cruciale ici est celle du comportement de κ_{sss} lorsque s tend vers zéro. On verra pour justifier l'existence d'un paramètre canonique qu'il est nécessaire de s'appuyer sur l'existence d'une structure de Hodge limite, argument essentiellement dû à Morrison [Mor1]. Le paramètre canonique auquel on vient de faire allusion est de la forme $q = \exp(2\pi i \tau)$ où τ est le quotient de deux périodes convenables. Cela étant fait, on peut définir le q-développement de κ_{sss} pour $s \to 0$ et observer que ce développement fait apparaître des coefficients *entiers positifs*, qui selon le principe de symétrie conduisent aux nombres de courbes rationnelles de degré donné sur l'hypersurface quintique, nombres inabordables par la géométrie algébrique sauf en degré petit. Cet exemple montre clairement qu'en liaison avec le phénomène de symétrie miroir se posent à côté de nombreuses questions géométriques, et de très intéressants problèmes arithmétiques. Ces questions sont esquissées dans [L-Y].

Dans le paragraphe final (§11) nous discuterons, selon une idée de Deligne [Del6], une approche possible de la symétrie miroir en termes d'une dualité entre certaines variations de structures de Hodge.

Terminons cette introduction en donnant quelques indications bibliographiques qui peuvent aider le lecteur à pénétrer ce vaste domaine.

- L'article [Grif3] peut être considéré comme le premier article de synthèse. Il contient beaucoup d'exemples et des calculs concrets ; les problèmes énoncés dans cet article ont inspiré beaucoup de monde et bien que maintenant partiellement résolus, il reste encore "des choses à faire".
- Ensuite dans [G-S] on trouve entre autre une introduction relativement élémentaire à la théorie de Hodge mixte appliquée aux questions de dégénérescences.
- L'article [P-S] explique comment on peut utiliser les variations infinitésimales pour résoudre certains cas du *problème de Torelli* : une variété est-elle déterminée (à isomorphisme près) par la structure de Hodge sur la cohomologie (entière) ? On trouve, là aussi, une introduction aux domaines de périodes et aux espaces des modules.
- La monographie [Grif4] est une très bonne introduction au sujet, elle contient des articles assez détaillés sur les variations de structures de Hodge (aussi sur les VSH infinitésimales). Y figure aussi une discussion des propriétés de la courbure de la métrique naturelle d'un domaine de périodes, résultat qui est utilisé dans le §4. On notera que l'article fondamental [S] de Schmid contient des paragraphes pouvant servir d'introduction efficace à certains aspects de la théorie de Griffiths.

- L'article [B-Z] se veut une synthèse des travaux récents sur la théorie de Hodge. On y trouvera plus de détails sur les matières des §4–6. Les progrès récents sur le problème de Torelli (voir ci-dessus) par contre ne sont pas traités du tout. Pour les $\mathcal{D}$-modules le lecteur consultera les articles dans [Bo] et pour la cohomologie d'intersection et la relation avec les $\mathcal{D}$-modules on lira le joli livre [Ki].
- Comme indiqué plus haut, l'article [V] peut servir comme introduction au problème de symétrie miroir. On trouve ici non seulement un traitement du coté mathématique mais aussi une brève introduction à l'origine "physique" de la conjecture. Voir aussi l'article [F-V] et les livres [H] et [Y2] pour des indications sur les aspects physiques. Signalons pour terminer la référence [B-C-O-V] dans la littérature physique, que le lecteur pourra consulter pour des perspectives exaltantes.

Nous voudrions remercier tous ceux qui nous ont aidé pour rendre cet exposé plus lisible ; en particulier Jim Carlson, Eduardo Cattani, Bernard Malgrange et Joseph Steenbrink.

Partie I. Variations de structures de Hodge

1. Fibrés de Hodge

On reprend dans ce paragraphe la définition algébrique (et analytique) des faisceaux de cohomologie de De Rham de l'exposé d'Illusie [Ill]. La filtration naïve sur le complexe des formes différentielles relatives donne lieu à la suite spectrale de Hodge vers De Rham et définit la filtration de Hodge sur l'aboutissement, la cohomologie relative. Dans le cas d'une famille de variétés analytiques complexes, projectives et lisses on obtient la filtration de Hodge [Dem] qui est une filtration par des sous-fibrés holomorphes du fibré de cohomologie relative. Le language utilisé est celui de l'hypercohomologie [Ill].

Fixons les notations utilisées dans la suite : un schéma est un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique nulle. On peut supposer $k = \mathbb{C}$ si on veut. Pour les incidences du choix de la caractéristique positive, nous renvoyons à [Ill]. Lorsque $k = \mathbb{C}$, on passera sans explications précises de la structure de schéma à la structure d'espace analytique associée. De la même manière, si X est un schéma lisse, on aura à considérer la structure de variété C^∞ sous-jacente sans avoir à le signaler avec précision.

Un faisceau sera un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules ou bien un faisceau abélien si on ne retient que la structure C^∞. La cohomologie, outil indispensable lorsqu'on a à manipuler des familles, est la cohomologie à coefficients dans un faisceau (voir le livre [God] par exemple).

Nous utiliserons aussi le langage de *l'hypercohomologie*. Soit $\Omega^\bullet$ un complexe (borné inférieurement) et $\Omega^\bullet \to I^\bullet$ une "résolution" injective (ou flasque), c'est-à-dire qui est un isomorphisme si on passe aux faisceaux de cohomologie, alors $H^\bullet(X, \Omega^\bullet)$ est par définition l'objet gradué $h^\bullet(\Gamma(X, I^\bullet))$; de même si $f : X \to S$ est une application continue, un morphisme de schémas, etc., $\mathbb{R}^\bullet f_*(\Omega^\bullet) = h^\bullet(f_*(I^\bullet))$ est l'objet gradué formé des images directes supérieures à coefficients dans le complexe $\Omega^\bullet$.

Considérons par exemple la cohomologie d'une variété C^∞, à coefficients constants $\mathbb{C}$. C'est par définition $H^i(X, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ = faisceau constant. Le complexe de De Rham $\mathcal{A}^\bullet_X$ des formes différentielles C^∞ à coefficients complexes est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ (*lemme de Poincaré*), donc le fait classique :

$$H^i(X, \mathbb{C}) = H^i(X, \mathcal{A}^\bullet_X) = h^i(\Gamma(X, \mathcal{A}^\bullet_X)).$$

Si X est une variété analytique complexe, le faisceau Ω^p_X étant le faisceau des p-formes holomorphes, le complexe de De Rham holomorphe $\Omega^\bullet_X$ est une résolution de $\mathbb{C}$ (*lemme de Poincaré holomorphe*), d'où :

$$H^i(X, \mathbb{C}) = H^i(X, \Omega^\bullet_X) \qquad \text{(hypercohomologie).}$$

Si maintenant X est un schéma, supposé lisse (non singulier), on peut considérer le complexe $\Omega^\bullet_{X/k}$ des formes différentielles algébriques (de Kähler). Les espaces vectoriels $H^i(X, \Omega^\bullet_{X/k})$ sont par définition, la cohomologie de De Rham (algébrique) de X. Si $k = \mathbb{C}$, et si X est en plus projective, il résulte des théorèmes de comparaison algébrique-analytique (GAGA) [Se] que $H^i(X, \Omega^\bullet_X)$ est le même selon que $\Omega^\bullet_X$ est le complexe algébrique ou le complexe holomorphe. Donc si $k = \mathbb{C}$, la cohomologie de X pour la topologie transcendante se calcule à partir des formes différentielles algébriques.

Passons à la *situation relative*. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas ; on suppose f propre. On peut définir ([Ill]) le complexe des formes de Kähler relatif $\Omega^\bullet_{X/S}$, qui est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules de type fini (f est de type fini), et avec pour différentielle $d_{X/S}$, un opérateur $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ linéaire. La formation de $\Omega^\bullet_{X/S}$ est compatible aux changements de base. Si S, X et f sont lisses, et si $k = \mathbb{C}$, on a l'analogue analytique $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ (resp. C^∞, $\mathcal{A}^\bullet_{X/S}$) qui est compatible aux changements de base.

On définit les faisceaux de cohomologie de De Rham (algébrique) par ([Ill])

$$\boxed{\mathcal{H}^k(X/S) := \mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}).}$$

Intuitivement, la fibre en $s \in S$ de $\mathcal{H}^k(X/S)$ est $H^k(X_s, \Omega^\bullet_{X_s/k})$, si on note $X_s{=}f^{-1}(s)$. A côté des faisceaux de cohomologie de De Rham, il y a les *faisceaux de Hodge* : $R^q f_*(\Omega^p_{X/S})$, c'est-à-dire si S est réduit à un point, $H^q(X, \Omega^p_{X/k})$.

Si $k = \mathbb{C}$, et si on remplace les formes différentielles algébriques relatives $\Omega^\bullet_{X/S}$ par les formes holomorphes relatives $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ là encore les théorèmes de comparaison assurent que le résultat est le même.

Filtrons le complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$ (algébrique, holomorphe,...) par la *filtration de Hodge* (ou naïve)

$$F^p(\Omega^\bullet_{X/S}) = (\Omega^\bullet_{X/S})^{\geqslant p}$$

qui est le complexe qui a le même terme en degré $i \geqslant p$, et qui est nul en degré $< p$. Alors, la suite spectrale associée à cette filtration finie, et au foncteur f_*, est la suite spectrale de Hodge vers De Rham :

$$\text{(HDR)} \qquad \boxed{E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}(X/S) = \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega^\bullet_{X/S}).}$$

Il en découle une filtration sur l'aboutissement $F^p\mathcal{H}^k(X/S)$, la filtration de Hodge de la cohomologie de De Rham, et un objet gradué associé

$$E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^p\left(\mathcal{H}^{p+q}(X/S)\right).$$

L'hypothèse essentielle est :

1.1. Hypothèse. *La suite spectrale de Hodge vers De Rham (relative) dégénère au terme E_1.*

Cela signifie

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_\infty$$

en particulier

$$E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) = \frac{F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)}{F^{p+1}\mathcal{H}^{p+q}(X/S)}.$$

Cette hypothèse est discutée dans [Ill]. Contentons-nous de l'énoncé suivant qui indique les conséquences très importantes sur les faisceaux de Hodge (voir [Del3], th. 5.5 et [Dem] §10 pour le cas complexe).

1.2. Théorème. *Soit S un schéma de caractéristique 0; on suppose le morphisme $f : X \to S$ propre et lisse. Alors :*

(i) *Les faisceaux $R^p f_*(\Omega^p_{X/S})$ sont localement libres de type fini de formation compatible à tout changement de base.*

(ii) *La suite spectrale (HDR) dégénère au terme E_1.*

(iii) *Les faisceaux $F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)$ sont localement libres de rang fini et de formation compatible à tout changement de base.*

(iv) *La suite spectrale (HDR) a pour fibre en $s \in S$, la suite spectrale correspondante à X_s.*

1.3. Remarques.

Si S est lisse, connexe, la théorie transcendante [Dem] dit que les nombres de Hodge $h^{p,q}(s) = \dim H^{p,q}(X_s)$ sont constants. Alors on peut en déduire que $R^p f_*(\Omega^p_{X/S})_s = H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})$. Dans le cas général, la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge en un point $s \in S$ entraîne (i) à (iv) par des arguments généraux de Grothendieck ("lemme d'échange" [Del3], th. 5.5).

Supposons $k = \mathbb{C}$, et toujours $f : X \to S$ propre et lisse. Par le lemme de Poincaré holomorphe relatif, le complexe $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ est une résolution du faisceau $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ (image réciproque faisceautique). (Il suffit de se restreindre à la fibre $X_s = f^{-1}(s)$). Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(X/S) &= R^k f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S))\\ &\cong \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} R^k f_*\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Pour justifier cette identification, rappelons le théorème de changement de base en cohomologie (à supports propres) (voir Iversen [Iv]). Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

avec f propre, X, S, T, Y des espaces localement compacts. Pour tout faisceau abélien F sur X, on a un isomorphisme canonique :

$$p^* R^k f_* F \xrightarrow{\sim} R^k g_* q^* F.$$

Si on tient compte de la formule de projection (loc. cit.) on a l'identification ci-dessus. Ainsi on a un lien (si $k = \mathbb{C}$), entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie à coefficients constants, que nous préciserons dans le §2.A.

Dorénavant on utilise la convention suivante :

1.4. Définition. *Une famille de variétés algébriques projectives est la donnée d'un morphisme $f : X \to S$, lisse à fibres connexes tel que f factorise par $\mathbb{P}^N \times S$: il existe une immersion fermée $i : X \to \mathbb{P}^N \times S$, telle que $f = \mathrm{pr}_S \circ i$.*

Le morphisme f est donc propre. On se place dans l'hypothèse de dégénérescence de la suite spectrale de Hodge. La filtration décroissante $\mathcal{F}^p(\mathcal{H}^k(X/S))$, est rappelons-le, la *filtration de Hodge*. Les $\mathcal{F}^p$ sont des sous-fibrés vectoriels de $\mathcal{H}^k(X/S)$, et $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \cong R^q f_*(\Omega^p_{X/S})$.

2. Connexion de Gauss-Manin

Pour étudier la variation des classes de cohomologie de De Rham dans une famille, il est essentiel de pouvoir dériver ces classes par rapport aux coordonnées locales sur la base S. Le but de ce paragraphe est de donner un sens précis à cela en expliquant en détail les constructions de Katz et Oda ([Ka], [K-O]). La construction met en évidence une "connexion" sur une résolution du complexe de De Rham qui après passage à la cohomologie conduit à la connexion de Gauss-Manin. Le cadre de ce paragraphe est celui des schémas.

2.A. Systèmes locaux

Soit S un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{V}$ (d'ensembles, de groupes, d'espaces vectoriels etc.) localement constant est appelé un *système local*. Donc il y a un recouvrement ouvert de S tel que $\mathcal{V}$ soit constant sur les ouverts de ce recouvrement. On voit facilement qu'un faisceau localement constant est constant sur un espace simplement connexe et donc le relèvement de $\mathcal{V}$ au revêtement universel est constant de fibre V disons; alors on obtient $\mathcal{V}$ comme quotient de $\tilde{S} \times V$ par le groupe fondamental de S qui agit sur $\tilde{S} \times V$ de façon naturelle : $\gamma((\tilde{s}), f) = (\tilde{s} \cdot \gamma, \gamma^{-1} f)$, où $\gamma \in \pi_1(S)$ agit à droite sur $\tilde{S}$ et à gauche sur V. Cette action conduit à une représentation de $\pi_1(S)$ dans V, la *représentation de monodromie*.

On suppose maintenant que S est un schéma (resp. espace analytique, variété C^∞) avec faisceau structural $\mathcal{O}_S$. On appelle *faisceau associé* au système local $\mathcal{V}$, le faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$; il est localement libre, c'est-à-dire un fibré vectoriel sur S. Un tel fibré vectoriel est caractérisé par le fait qu'il existe un recouvrement ouvert trivialisant tel que sur l'intersection de deux de ces ouverts, la matrice de transition est à coefficients constants

Rappelons [Dem] qu'une *connexion* sur $\mathcal{F}$, est un opérateur k-linéaire $\nabla : \mathcal{F} \to \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ (resp. $\Omega^{1,\mathrm{an}}_S \otimes \mathcal{F}, \mathcal{A}^1_S \otimes \mathcal{F}$), qui satisfait à la règle de Leibniz :

$$\nabla(ae) = da \otimes e + a\nabla e.$$

On peut étendre ∇ en une application k-linéaire : $\nabla : \Omega^p_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \to \Omega^{p+q}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ en forçant la règle : $\nabla(\alpha \otimes e) = d\alpha \otimes e + (-1)^p \alpha \wedge \nabla e$ ($\alpha = p$-forme). Alors l'opérateur $R = \nabla\nabla$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire ; on a

$$R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \Omega^2_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) = \Omega^2_S(\mathrm{End}(\mathcal{F})),$$

on l'appelle *l'opérateur de courbure* de ∇. La connexion est dite *intégrable* (ou *plate*) si $R = 0$, donc si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_S \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla} \Omega^2_S \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \cdots$$

est un complexe. On l'appelle le *complexe de De Rham associé*, vu le cas particulier $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S$, $\nabla = d$.

Rappelons que pour tout champ v sur X (ou sur un ouvert de X), l'opérateur k-linéaire ∇_v (contraction de ∇ avec v) est appelé la dérivée covariante dans la direction de v. La condition d'intégrabilité équivaut à

$$\text{(plat)} \qquad [\nabla_v, \nabla_w] = \nabla_{[v,w]} \qquad (v,\ w \text{ champs sur } X),$$

$[v, w]$ étant le crochet des champs v et w.

Lorsque $k = \mathbb{C}$, si ∇ est une connexion intégrable sur le fibré vectoriel $\mathcal{F}$ (faisceau localement libre de rang n), le théorème d'existence locale des solutions des équations différentielles linéaires, ici l'équation $\nabla e = 0$, entraîne que $\mathcal{V} = \ker(\nabla) \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau localement constant et que $\mathcal{F} = \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ est le fibré associé à $\mathcal{V}$. Alors $\nabla = 1 \otimes d$, ce qui signifie que si on choisit localement une base $\{e_i\}$ de F, composée de sections plates (sections de $\mathcal{V}$) : $\nabla(\sum_i a_i \otimes e_i) = \sum_i da_i \otimes e_i$.

Inversement, pour un faisceau $\mathcal{V}$ localement constant sur S, $\mathcal{F} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_S$ le fibré associé, $\nabla = 1 \otimes d$ est une connexion plate avec $\ker \nabla = \mathcal{V}$. Donc, il y a une équivalence de catégories, entre les fibrés plats, i.e. les couples $(\mathcal{F}, \nabla)$ avec $R_\nabla = 0$) et les faisceaux localement constants de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels, les morphismes de fibrés étant les morphismes horizontaux.

Revenons à la situation géométrique avec $f : X \to S$, qui représente une famille de variétés algébriques projectives, lisses. On a vu [Dem §10], qu'une famille est localement triviale du point de vue C^∞ et donc que les faisceaux abéliens $R^k f_* \mathbb{C}$, $R^k f_* \mathbb{R}$, $R^k f_* \mathbb{Z}$ sont des systèmes locaux. Ainsi $\mathcal{H}^k(X/S) = R^k f_*(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$; on appelle *connexion de Gauss-Manin* sur le fibré de cohomologie $\mathcal{H}^k(X/S)$, l'unique connexion (holomorphe) qui a pour sections horizontales (ou plates), les sections de $R^k f_*(\mathbb{C})$, i.e. :

$$\nabla_{\mathrm{GM}}(e) = 0 \Longleftrightarrow e \in R^k f_*(\mathbb{C}).$$

2.B. L'application de Kodaira-Spencer

Maintenant k est arbitraire, et S est un schéma lisse de type fini sur k. Du fait de la lissité de f, on a une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_S) \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0\ .$$

Cette extension, qui en général est non triviale, est associée à une classe $c \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S))$, et comme $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre, on a la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) \cong H^1(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) \ ;$$

l'image de c par l'application canonique

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1 S))}) & \longrightarrow & H^0(X, R^1 f_*(T_{X/S} \otimes f^*(\Omega^1_S)) \\ = T_{X/S} \otimes f^*(\Omega^1_S) & & \| \\ & & H^0(X, \Omega^1_S \otimes R^1 f_*(T_{X/S})) \end{array}$$

est appelée la *classe de Kodaira-Spencer* de X/S ; on peut voir cette classe comme un morphisme, le *morphisme de Kodaira-Spencer* : $\rho_{X/S} : T_S \longrightarrow R^1 f_*(T_{X/S})$. La fibre $(\rho_{X/S})_s = \rho_s : T_{S,s} \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$ est *l'application de Kodaira-Spencer* en $s \in S$.

Rappelons ([Ill]) que si $c \in H^1(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ est la classe d'une extension $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$, le morphisme bord $\partial : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{G})$ s'identifie avec le cup-produit avec c.

L'application de Kodaira-Spencer en s mesure comment X_s se déforme dans la famille X/S au voisinage de s, du moins infinitésimalement

On reviendra à l'application de Kodaira-Spencer dans le §3.C.

2.C. Algébricité de la connexion de Gauss-Manin

Les faisceaux $\mathcal{H}^k(X/S)$, $\mathcal{F}^p\mathcal{H}^k$ ont une définition algébrique, via la cohomologie de De Rham algébrique ; on va voir qu'il en est de même pour la connexion de Gauss-Manin.

Passons au complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/k} = \Lambda^\bullet \Omega^1_{X/k}$; ce complexe n'est pas en général “multiplicatif” par rapport aux deux extrêmes. On introduit alors la filtration de Koszul de $\Omega^\bullet_{X/k}$ qui mesure cette déviation. La définition vaut pour toute extension $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$ (de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres). On pose :

$$F^p\Lambda^\bullet\mathcal{H} = \mathrm{image}\big(\Lambda^p\mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet\mathcal{F}[-p] \longrightarrow \Lambda^\bullet\mathcal{H}\big)$$

on a clairement $\mathrm{Gr}^p = F^p/F^{p+1} \cong \Lambda^p\mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet\mathcal{F}[-p]$, $[-p]$ signifie qu'il y a un décalage de $-p$ dans le degré. Considérons la suite exacte de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ & & \mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet\mathcal{F}[-1] & & & & \Lambda^\bullet\mathcal{F} & & \end{array}$$

qui en degré k, conduit à l'extension :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{F} \longrightarrow (F^0/F^2)^k \longrightarrow \Lambda^k\mathcal{F} \longrightarrow 0 \ .$$

Une vérification aisée montre que la classe $c_k \in H^1(X, \mathrm{Hom}(\Lambda^k \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{F})$ se déduit de c par l'application produit intérieur

$$I : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^k \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{F})$$

où $I(\lambda)(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \lambda(f_i) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_i \wedge \cdots \wedge f_p$.

Retournons à la situation géométrique. L'application de Kodaira-Spencer se déduit de la classe de l'extension (1) ; on va voir que la connexion de Gauss-Manin se déduit de la classe de l'extension de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\ (2) & & & \| & & & & \| & & \\ & & & f^*(\Omega^1_S) \otimes \Omega^\bullet_{X/S}[-1] & & & & \Omega^\bullet_{X/S} & & \end{array}$$

(se reporter à [Ill] pour une définition précise).

Considérons le morphisme bord en hypercohomologie

$$\partial : R^k f_*(\mathrm{Gr}^0) \longrightarrow R^{k+1} f_*(\mathrm{Gr}^1)$$

qui après identification est

$$\begin{array}{rcl} \partial : \mathcal{H}^k(X/S) & \longrightarrow & R^{k+1} f_*(f^*(\Omega^1_S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_{X/S}[-1]) \\ & & \| \\ & & \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}^k(X/S) \end{array}$$

on en vient au résultat principal :

2.1. Théorème.

1) *∂ est une connexion intégrable sur le fibré de cohomologie de De Rham $\mathcal{H}^k(X/S)$.*

2) *Le complexe de de Rham associé : $(\mathcal{H}^k(X/S) \otimes \Omega^\bullet_S, \partial)$ s'identifie au complexe $E_1^{\bullet,k}$ déduit de la suite spectrale de $\Omega^\bullet_X$ filtré par la filtration de Koszul, relativement au foncteur f_*.*

3) *Si $k = \mathbb{C}$, après identification des faisceaux, ∂ coïncide avec ∇.*

Avant de donner les détails de la preuve, indiquons que *1)* et *2)* s'obtiennent facilement si on tient compte de la compatibilité de la filtration de Koszul relativement au produit extérieur : $F^i \wedge F^j \subset F^{i+j}$. Cela permet de définir un accouplement dans la suite spectrale

$$E_1^{pq} \times E_1^{p'q'} \longrightarrow E_1^{p+p',q+q'}, \qquad (e, e') \longmapsto ee'$$

tel que $e'e = (-1)^{(p+q)(p'+q')}ee'$ et $d_1(ee') = (d_1e)e' + (-1)^{p+q}e \cdot d_1(e')$. Il est peut être plus convaincant de mettre sous forme explicite ∂, l'intégrabilité sera alors une conséquence facile du résultat. C'est la procédure que nous allons détailler en plusieurs étapes.

Étape 1

Le problème étant local sur S, on peut supposer S affine (de Stein, dans le cadre analytique). On suppose d'abord que $X = S \times T$ est un produit, sans supposer que T est projectif ; on peut de la même façon supposer que X est étale sur $\mathbb{A}^n \times S$. Avec cette hypothèse de trivialité de la famille, la suite exacte (1) est scindée, et $\Omega_X^\bullet = p_1^*(\Omega_S^\bullet) \otimes p_2^*(\Omega_T^\bullet)$ (produit tensoriel de complexes). On peut identifier $p_2^*(\Omega_T^\bullet)$ avec $\Omega_{X/S}^\bullet$, alors la différentielle totale d_X se décompose en $d_X = d_S + d_{X/S}$. On fera attention au fait que le produit tensoriel est sur $\mathcal{O}_X$, alors que la différentielle est seulement k-linéaire. Localement, on peut décrire la situation de la manière suivante : soit $S = \operatorname{Spec}(A)$, $T = \operatorname{Spec}(B)$, donc $X = \operatorname{Spec}(A \otimes_k B)$. Prenons $\Omega_S^\bullet = \Lambda^\bullet \Omega_{A/k}^1$, $\Omega_T^\bullet = \Lambda^\bullet \Omega_{B/k}^1$, qui sont des algèbres graduées sur A (resp. B). Alors on a $\Omega_{X/k}^1 = \Omega_S^1 \otimes_k B \oplus A \otimes_k \Omega_T^1$ et $\Omega_X^\bullet = \Omega_S^\bullet \otimes_k \Omega_T^\bullet$ avec la structure naturelle de $A \otimes_k B$ algèbre graduée. La différentielle est $d_X = d_S + d_T$, avec la signification usuelle : $d_X(\alpha \otimes \beta) = d_S(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes d_T(\beta)$, si $\alpha \in \Omega_S^p$, $\beta \in \Omega_T^q$. Notons que $\Omega_{X/S}^\bullet = A \otimes_k \Omega_T^\bullet$, $d_{X/S} = 1 \otimes d_T$. Le morphisme quotient $\pi : \Omega_X^\bullet \to \Omega_{X/S}^\bullet$ admet une section naturelle φ (de groupes), telle que, avec un abus d'écriture :

$$\varphi(h d_{X/S} f_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S} f_p) = h d_{X/S} f_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S} f_p$$

où à droite $d_{X/S}$ est la différentielle partielle issue de la décomposition $d_X = d_S + d_{X/S}$. On a

$$F^p = \bigoplus_{i \geqslant p} \Omega_S^i \otimes \Omega_T^j \qquad \text{et} \quad \Omega_X^\bullet = F^1 \bigoplus \Omega_{X/S}^\bullet.$$

2.2. Lemme. *Il existe une dérivation I (produit intérieur total) de l'algèbre $\Omega_X^\bullet$, donc $I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge I(\beta)$, telle que $I(dg) = d_S g$. De plus, on a pour toute forme $\omega \in \Omega_X^\bullet$:*

$$\varphi\pi(\omega) - \omega \equiv -I(\omega) \pmod{F^2 \Omega_X^\bullet}.$$

Preuve. Avec la description $\Omega_X^\bullet = \Omega_S^\bullet \otimes_k \Omega_T^\bullet$, on prend pour I, la “dérivation”,

$$d(\alpha \wedge \beta) = p\alpha \wedge \beta \qquad \text{si } \alpha \text{ est de degré } p\ .$$

Notons que I est $\mathcal{O}_X$ $(= A \otimes_k B)$ linéaire.

Pour la seconde assertion, on peut supposer $g = a \otimes b$, $(a \in A,\ b \in B)$, alors $d_X g = d_S a \otimes b + a \otimes d_T b$ avec $d_S g = d_S a \otimes b$ et $d_{X/S} g = a \otimes d_T b$. On a

$I(d_X g) = d_S a \otimes b = d_S g$. Ceci donne plus généralement $I(gdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_p) = \sum_{i=1}^{n} gdg_1 \wedge \cdots \wedge d_S g_i \wedge \cdots \wedge dg_p$.

Pour la dernière propriété, supposons $\omega = gdg_1 \wedge \cdots \wedge d_S g_i \wedge \cdots \wedge dg_p$, alors

$$\begin{aligned}\varphi\pi(\omega) &= gd_{X/S}g_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S}g_p \\ &= g(dg_1 - d_S g_1) \wedge \cdots \wedge (g_p - d_S g_p) \\ &= \omega - I(\omega) \pmod{F^2\Omega_X^\bullet} .\end{aligned}$$

□

Étape 2

On suppose S affine, et on choisit un recouvrement ouvert fini $X = \bigcup_{\alpha=1}^{m} U_\alpha$, où U_α est supposé étale sur $\mathbb{A}^n \times S$. Ainsi avec une telle trivialisation (se rapporter à l'appendice) on peut, comme indiqué dans l'étape 1, décomposer le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{U_\alpha/k}$ en un produit tensoriel $\Omega^\bullet_S \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_{U_\alpha/S}$, et décomposer la différentielle d_X sur U_α, en $d_{X/U_\alpha} = d^\alpha_S + d^\alpha_{X/S}$. Notons φ_α la section de $\pi : \Omega^\bullet_{U_\alpha} \to \Omega^\bullet_{U_\alpha/S}$ qui résulte de cette décomposition, et soit I_α le produit intérieur correspondant.

La connexion de Gauss-Manin, décrit, de manière cohomologique, cette décomposition (locale) de $\Omega^\bullet_X$ en un produit tensoriel $\Omega^\bullet_S \otimes \Omega^\bullet_{X/S}$. Considérons $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X)$ (resp. $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F^p)$, etc.), le complexe de Čech à coefficients dans $\Omega^\bullet_X$ (resp. ...) ([Ill]) on sait (loc. cit.) que le morphisme canonique $\Omega^\bullet_X \to \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X)$ est un quasi-isomorphisme. Notons aussi, que les ouverts U_α étant affines, alors le foncteur $K^\bullet \longmapsto \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, K^\bullet)$ est exact, par suite :

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathrm{Gr}^p(\Omega^\bullet_X)) = \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F^p)/\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^{p+1}).$$

La différentielle du complexe de Čech est notée $d + \delta$ où d est la différentielle au niveau des formes, et δ la différentielle "de Čech" :

$$(\delta\beta)(i_0, \dots, i_q) = (-1)^p \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \beta(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_q)$$

(si $\beta \in \mathcal{C}^{p,q} = \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_X)$).

Pour tout indice α, soit $h_\alpha = d^\alpha_S \circ \varphi_\alpha$ vu comme morphisme de complexes : $h_\alpha : \mathrm{Gr}^0(\Omega^\bullet_X)_{|U_\alpha} \longrightarrow \mathrm{Gr}^1(\Omega^\bullet_X)[1]_{|U_\alpha}$ (vérification immédiate), et soit $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta - \varphi_\alpha \pmod{F^2}$, donc

$$\psi_{\alpha\beta} : \mathrm{Gr}^0(\Omega^\bullet_X)_{|U_\alpha \cap U_\beta} \longrightarrow \mathrm{Gr}^1(\Omega^\bullet_X)_{|U_\alpha \cap U_\beta}.$$

On a $\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\gamma}$ (pour tout (α, β, γ)), et $(h_\beta - h_\alpha)_{|U_\alpha \cap U_\beta} = d\psi_{\alpha\beta}$, ce qui signifie

$$d^\alpha_S \varphi_\alpha - d^\beta_S \varphi_\beta = (d^\alpha_S + d^\alpha_{X/S})\varphi_\alpha - (d^\beta_S + d^\beta_{X/S})\varphi_\beta - (\varphi_\alpha - \varphi_\beta)d_{X/S}$$

on peut ainsi définir un morphisme de complexes

$$h : \mathrm{Gr}^0 \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathrm{Gr}^1[1])$$

qui induit (dans la catégorie dérivée) un morphisme

$$\nabla : \mathrm{Gr}^0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^1[1].$$

Le lecteur pourra comparer avec la démonstration du lemme (5.4) dans [Ill].

Si on passe à la cohomologie, ∇ induit la connexion de Gauss-Manin. On va faire une construction plus précise, et en déduire l'intégrabilité de la connexion.

Étape 3

Soit $\beta \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_X)$, posons :

$$\mathcal{L}(\beta)(i_0, \ldots, t_q) = d_S^{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_q)) \qquad \text{(dérivée de Lie totale)}$$

puis

$$I(\beta)(i_0, \ldots, i_{q+1}) = (-1)^p(I_{i_0} - I_{i_1})(\beta(i_1, \ldots, i_{q+1}) \qquad \text{(produit intérieur total)}$$

et

$$\varphi(\beta)(i_0, \ldots, i_p) = \varphi_{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_p)) \ .$$

Notons que $\mathcal{L}$ est de bidegré $(1,0)$, I de bidegré $(0,1)$.

Un calcul élémentaire conduit au

2.3. Lemme. $\nabla = \mathcal{L} + I$ *est un morphisme de complexes*

$$\mathcal{L} + I \in \operatorname{Hom}\big(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X), \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X[1])\big).$$

Notons que par construction, $\nabla(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^i)) \subseteq \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^{i+1})$. Pour s'assurer que sur la cohomologie, le morphisme induit par $\nabla = \mathcal{L} + I : \mathrm{Gr}^0 \to \mathrm{Gr}^1[1]$ est bien la connexion de Gauss-Manin, la propriété suivante est exactement ce qu'il faut :

2.4. Lemme.

$$(d_X + \delta)\varphi - \varphi(d_{X/S} + \delta) \equiv (\mathcal{L} + I) \circ \varphi \pmod{\check{\mathcal{C}}^\bullet(F^2)}.$$

Preuve. Soit $\beta \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_{X/S})$;

$$(d_X\varphi - \varphi d_{X/S})(\beta)(i_0, \ldots, i_q) = d_S^{i_0}\varphi_{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_q)) \ .$$

Un calcul aisé montre que

$$(\delta\varphi - \varphi\delta)(\beta)(i_0, \ldots, i_{q+1}) = (-1)^{p+1}(\varphi_{i_0} - \varphi_{i_1})(\beta(i_1, \ldots, i_{q+1})).$$

Il suffit alors de vérifier que

$$(-1)^{p+1}(\varphi_{i_0} - \varphi_{i_1})(\omega) \equiv (-1)^p I^{i_0} \varphi_{i_1}(\omega) \pmod{F^2}$$

pour toute forme $\omega \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \Omega_{X/S})$. Si on pose $\varphi_{i_1}(\omega) = \alpha$, cette congruence équivaut à $\varphi_{i_0}(\pi(\alpha)) - \alpha \equiv -I_{i_0}(\alpha) \pmod{F^2}$, qui découle alors du lemme 2. □

L'intégrabilité de la connexion de Gauss-Manin découle immédiatement de la formule du lemme 4. En effet, on en déduit

$$\nabla((d_X + \delta)\varphi - \varphi(d_{X/S} + \delta)) \equiv \nabla^2 \circ \varphi \pmod{\check{\mathcal{C}}^\bullet(F^3)}$$

car ∇ est de degré 1 pour la filtration de Koszul et comme ∇ et $d_X + \delta$ commutent,

$$(d_X + \delta)(\nabla \circ \varphi) - (\nabla \circ \varphi)(d_{X/S} + \delta) \equiv \nabla^2 \circ \varphi (\operatorname{mod} F^3).$$

Donc ∇^2 induit le morphisme nul (au sens des catégories dérivées) de Gr^0 dans $\mathrm{Gr}^2[2]$.

Avant de conclure, il est utile de souligner le point suivant. Ce qui a été construit dans les étapes 1 à 3 (lemme 2.3) est une connexion ("la connexion de Gauss-Manin") au niveau du complexe de De Rham (le complexe de Čech du complexe de De Rham). Cette connexion non nécessairement intégrable induit au niveau cohomologique la connexion (intégrable) de Gauss-Manin.

Pour terminer la preuve du théorème, reste à vérifier que la construction ci-dessus ne dépend pas du choix de $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, ce qui est complètement standard.

Si $k = \mathbb{C}$, il est aussi immédiat que la construction ci-dessus s'applique avec S de Stein, et les U_α de Stein, et que le résultat est identique. Pour se convaincre de l'identité entre cette construction de ∇ et la définition purement topologique, on observe que la propriété de décomposition locale du complexe de De Rham, qui est locale sur X dans le cas algébrique et analytique, devient locale sur S avec le complexe des formes C^∞. Donc on peut supposer que $X \to S$ est une filtration C^∞ triviale. Dans ce cas, on peut construire des morphismes ∇ au niveau des complexes de De Rham C^∞, soit $\nabla : \mathcal{A}_X^\bullet \to \mathcal{A}_X^\bullet[1]$, et $\nabla = d_S$ (relativement à une décomposition). Alors, il est à peu près évident que sur la cohomologie, ∇ induit $d_S \otimes 1$

$$\nabla = 1 \otimes d_S : \mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1} f_*(\mathrm{Gr}^1[1]) = \mathcal{A}_S^1 \otimes \mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet).$$

et $\mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet) = \mathbb{R}^q f_*(\Omega_{X/S}^{\bullet\mathrm{an}})$ est le faisceau constant $H^q(T, \mathbb{C})$ sur S (si $X = T \times S$). □

2.D. Propriété de transversalité de ∇

Pour tout complexe $\Omega^\bullet$, la filtration de Hodge de $\Omega^\bullet$ est la filtration naïve $\Omega^{\bullet\geqslant}$; on a relativement au décalage :

$$(\Omega^\bullet[n])^{\geqslant p} = (\Omega^{\bullet\geqslant p+n})[n].$$

Considérons la suite exacte de complexes (cf. (2))

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & \| & & \\
 & & f^*(\Omega^1_S)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^\bullet_{X/S}[-1] & & & & \Omega^\bullet_{X/S} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

passons au cran i de la filtration de Hodge, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_S)\otimes\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S}[-1] \longrightarrow (F^0/F^2)^{\geqslant i} \longrightarrow \Omega^{\bullet\geqslant i}_{X/S} \longrightarrow 0$$

et en passant à la cohomologie, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{R}^{k+1}f_*(\mathrm{Gr}^1[1]) = \Omega^1_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{R}^k f_*(\Omega^{\bullet\geqslant i}_{X/S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{R}^{k+1}f_*(\mathrm{Gr}^1[1]^{\geqslant i}) = \mathbb{R}^{k+1}f_*(f^*(\Omega^1_S)\otimes(\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S}[-1]) \cdot \\
 & & \| \\
 & & \Omega^1_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbb{R}^k f_*(\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S})
\end{array}$$

Les images des flèches verticales du diagramme sont respectivement $\mathcal{F}^i\mathcal{H}^k(X/S)$ et $\Omega^1_S\otimes\mathcal{F}^{i-1}\mathcal{H}^k(X/S)$, et de plus $\partial=\nabla$, donc on a la *propriété de transversalité* pour la connexion de Gauss-Manin.

$$\boxed{\nabla(\mathcal{F}^i\mathcal{H}^k(X/S)) \subseteq \Omega^1_S\otimes\mathcal{F}^{i-1}\mathcal{H}^k(X/S)\ .}$$

Supposons que la suite spectrale de Hodge vers De Rham dégénère (par ex. $k=\mathbb{C}$), alors $E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) = F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)/F^{p+1}\mathcal{H}^{p+q}(X/S)$.

De plus, il est clair que par passage du gradué associé à la filtration de Hodge sur $\mathcal{H}^k(X/S)$, ∇ induit une application $\mathcal{O}_S$-linéaire.

$$\overline{\nabla} : R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) \longrightarrow \Omega^1_S\otimes R^{q+1}f_*(\Omega^{p-1}_{X/S})\ .$$

Alors $\overline{\nabla}$ est le cup-produit avec l'application de Kodaira-Spencer

$$\rho_{X/S}\in H^0(S,\Omega^1_S\otimes\mathbb{R}^1 f_*(T_{X/S})).$$

D'où finalement :

2.5. Théorème. *Relativement à la filtration de Hodge $F^\bullet\mathcal{H}^k(X/S)$, la connexion de Gauss-Manin satisfait à la propriété de transversalité de Griffiths :*

$$\boxed{\nabla(F^i\mathcal{H}^k) \subseteq \Omega^1_S \otimes F^{i-1}(\mathcal{H}^k)\ .}$$

Si la suite spectrale de Hodge vers De Rham dégénère (par exemple si $k = \mathbb{C}$), l'application $\mathcal{O}_S$-linéaire induite sur le gradué associé, par la dérivation ∇, coïncide avec le cup-produit avec la classe de Kodaira-Spencer.

□

2.6. Notes.

1) Toute l'étude faite dans les §1 et §2, admet une transcription quasi-immédiate dans le cadre logarithmique. On suppose que $D \subset X$ est un diviseur qui est une réunion de diviseurs lisses relativement à la base S, et de sorte que D est à croisements normaux relativement à S. Dans ce contexte, on peut définir (voir [Ill] §7) le complexe $\Omega^\bullet_{X/S}(\log D)$ des *formes différentielles régulières sur $X - D$, à pôles logarithmiques le long de D*. Pour le cas le plus simple d'une hypersurface lisse voir le §8 et pour le cas général voir [Ka]. On obtient une suite spectrale de Hodge-vers-De Rham :

$$E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}(\log D)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$$

et la connexion de Gauss-Manin

$$\nabla : R^q f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D)) \longrightarrow \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{R}^q f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$$

qui satisfait à la propriété de transversalité de Griffiths, relativement à la filtration de Hodge $F^\bullet$, du moins si on suppose que la suite spectrale ci-dessus dégénère au terme E_1 ($k = \mathbb{C}$). Le lecteur consultera le travail fondamental de N. Katz [Ka] pour les détails.

2) Dans un travail récent [H-S], Hinich et Schechtman ont introduit une application de Kodaira-Spencer d'ordre supérieur, qui s'applique à des opérateurs différentiels et plus seulement à des dérivations.

Appendice : "Coordonnées locales" en géométrie algébrique.

Pour lever tout doute sur les calculs locaux du §2, rappelons comment on travaille avec des coordonnées locales en géométrie algébrique.

Soit X/k un schéma de type fini, lisse sur le corps k. Alors le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/h}$ est localement libre de rang fini $n = \dim X$; au voisinage de tout point $x \in X$, on peut trouver des sections régulières $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telles que $\{ds_1, \dots, ds_n\}$ soit une base de $\Omega^1_{X/h}$ sur U.

2.7. Définition. *On appelle $s_1, \dots, s_n$ un système de coordonnées uniformisantes (ou paramètres locaux) sur U.*

On peut alors définir la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial s_i}$ au moyen de la formule ($\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$)

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial s_i} ds_i \ .$$

La relation $d^2 = 0$ entraîne $\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2}{\partial s_j \partial s_i}$ ($\forall (i,j)$). Soit maintenant $f : X \to Y$ un morphisme étale. Alors le morphisme canonique $df : f^*(\Omega^1_{Y/k}) \to \Omega^1_{X/k}$ est un isomorphisme. Ainsi si $s_1, \ldots, s_n$ sont des coordonnées uniformisantes sur $V \subset Y$, $t_1 = f^*(s_1), \ldots, t_n = f^*(s_n)$ est un système de coordonnées uniformisantes sur $U = f^{-1}(V)$. On a par construction :

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f^*(\alpha)) = f^*\big(\frac{\partial \alpha}{\partial s_i}\big) \qquad (\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)) \ .$$

Si maintenant U est un ouvert du schéma X, et U est étale sur $\mathbb{A}^n \times S$, supposons que $s_1, \ldots, s_n$ sont les coordonnées naturelles sur $\mathbb{A}^n$. La restriction à U de ces $n+m$ coordonnées définit un système de coordonnées locales sur U.

3. Variations de structures de Hodge

Dans ce paragraphe nous introduisons les notions de variation de structures de Hodge, de domaine de périodes et de variation infinitésimale de structures de Hodge.

3.A. Introduction aux variations de structures de Hodge

Soit $X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ une variété projective lisse de dimension n, il y a sur $H_{\mathbb{R}} = H^k(X, \mathbb{R})$ la structure suivante, appelée *structure de Hodge réelle de poids k*.

1) Une décomposition (de Hodge)

$$H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

avec $H^{p,q} = \overline{H}^{q,p}$.

2) Une filtration de Hodge $F^p = \bigoplus_{i \geqslant p} H^{i,j}$, telle que $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$, $(p+q=k)$ et $H_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F}^{q+1}$.

(1 et 2 sont équivalentes).

Si H et H' sont des espaces vectoriels réels qui portent une structure de Hodge (réelle) de poids k, resp. k', alors il est aisé de voir que sur H^*, $H \otimes H'$ et $\mathrm{Hom}(H, H')$ il y a une structure de Hodge naturelle de poids $-k$, $k+k'$ et $k'-k$. En particulier $\mathrm{Hom}(H,H)$ a une structure de Hodge de poids 0, et

$$\mathrm{Hom}(H,H)^{(a,b)} = \big\{\lambda : H \to H,\ \lambda(H^{p,q}) \subseteq H^{p+a,q+b}\big\}.$$

On peut interpréter une structure de Hodge comme une représentation réelle du groupe algébrique réel :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}\big[x, y, (x^2+y^2)^{-1}\big]$$

(Restriction de Weil du groupe algébrique $\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$). Cela explique que l'on puisse effectuer des opérations de dualité et $\otimes$ sur les structures de Hodge.

Dans le cas géométrique, c'est-à-dire quand X est de Kähler, rappelons qu'il y a sur $H_{\mathbb{C}} = H^k(X, \mathbb{C})$, une forme bilinéaire de parité $(-1)^k$: la *forme de Hodge-Riemann* ([Dem])

$$\boxed{Q(\alpha, \beta) = (-1)^{k(k-1)/2} \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k}} \qquad (\dim X = n)$$

(Q est symétrique si k est pair, alternée si k est impair). Lorsque la forme $(1,1)$ réelle ω est entière, donc si X est algébrique projective, et ω provient de la classe d'une section hyperplane, Q est alors entière sur le réseau $H^k(X, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$. Rappelons les *relations bilinéaires de Hodge-Riemann* :

(R1) $$\boxed{Q(H^{p,q}, H^{p',q'}) = 0 \qquad \text{sauf si} \quad (p', q') = (q, p).}$$

Il est équivalent de dire que le Q-orthogonal de F^p est F^{k-p+1}. En effet, $F^p = \bigoplus_{i \geqslant p} H^{i,j}$, $F^{k-p+1} = \bigoplus_{i \geqslant k-p+1} H^{i,j}$, ainsi si $i \geqslant p$, on a $j = k - i \leqslant k - p$, d'où $Q(F^\ell, F^{k-p+1}) = 0$. Mais

$$\dim F^p = \sum_{i \geqslant p} h^{i,j} = \sum_{i \geqslant p} h^{j,i} = \sum_{j \leqslant k-p} h^{j,i} = \mathrm{codim}(F^{k-p+1})\ .$$

Donc $F^{k-p+1} = (F^p)^\perp$.

(R2) $$\boxed{\text{Si } 0 \neq \xi \in \mathrm{Prim}^{p,q}, \qquad \sqrt{-1}^{\,p-q} Q(\xi, \overline{\xi}) > 0\ .}$$

Si on introduit l'opérateur de Weil, qui est l'opérateur réel $C \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H_{\mathbb{C}})$, tel que $C_{\big| H^{p,q}} = \sqrt{-1}^{\,p-q}$, la forme $\langle \alpha, \beta \rangle := Q(C\alpha, \bar{\beta})$ est une forme hermitienne appelée *forme de Hodge*. La forme de Hodge est définie positive sur la partie primitive $\mathrm{Prim}^k(X, \mathbb{C})$ de $H^k(X, \mathbb{C})$.

Une structure de Hodge (pure) de poids k *polarisée* est la donnée d'une structure de Hodge réelle de poids k : $(H_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \oplus H^{p,q},\ H^{p,q} = \overline{H}^{q,p})$ et d'une *polarisation*; la polarisation est la donnée d'un réseau $H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{R}}$, puis une forme bilinéaire non dégénérée de parité $(-1)^k$ sur $H_{\mathbb{R}}$, qui est entière sur le réseau (mais pas forcément unimodulaire) :

$$Q(H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}}) \subseteq \mathbb{Z}.$$

On exige les deux conditions (R1) et (R2) de Riemann ; en particulier :

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = Q(C\alpha, \bar{\alpha}) > 0 \qquad (\alpha \neq 0)$$

avec $C =$ opérateur de Weil.

Un isomorphisme de structures de Hodge polarisée est un isomorphisme qui préserve les polarisations, i.e. les structures entières, et les formes bilinéaires.

Soit maintenant $f : X \to S$ une famille de variétés algébriques projectives lisses ; on suppose $X \subset \mathbb{P}^N \times S$ et f est la restriction à X de la projection sur S. Soit $X_s = f^{-1}(s) = X \cap \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \times \{s\}$. Comme il est expliqué dans [Dem], X_s porte sur chaque $H^k(X_s, \mathbb{C})$ une structure de Hodge réelle, et $\mathrm{Prim}^k(X_s, \mathbb{C})$ possède en plus une polarisation définie par la forme $\omega_s \in H^{1,1}(X_s, \mathbb{Z})$, déduite du plongement $X_s \subset \mathbb{P}^N$.

Ces structures de Hodge réelles (resp. polarisées) définissent une famille (ou variation) de structures de Hodge. On a en effet les objets suivants :

1) Un système local de groupes abéliens libres de rang fini (constant),

$$\mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} = R^k f_*(\mathbb{Z})/(\text{torsion}),$$

(idem avec $\mathcal{H}^k_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}$).

2) Un fibré vectoriel ($\mathcal{O}_S$ module localement libre) $\mathcal{H}^k = \mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$ ($\Omega^\bullet_{X/S} =$ formes algébriques, ou holomorphes).

3) Une filtration décroissante de $\mathcal{H}^k$ par des sous-fibrés holomorphes $\{\mathcal{F}^p\}_{p=0,\dots,k}$ (filtration de Hodge) (si on passe à la fibre en $s \in S$, $\mathcal{H}^k_s = H^k(X_s, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}^p_s$ est exactement la filtration de Hodge sur $H^k(X_s, \mathbb{C})$). On a $\mathcal{F}^p \cap \overline{\mathcal{F}}^{q+1} = 0$, $(p + q = k)$.

Soit $\omega \in H^0(S, R^2 f_*(\mathbb{Z}))$ l'image de la classe de la section hyperplane relative (section localement constante). La section ω induit en chaque $s \in S$, $\omega_s \in H^2(X_s, \mathbb{Z})$ qui est la forme entière $(1, 1)$ qui polarise X_s. On a ainsi :

4) Une forme bilinéaire non dégénérée localement constante, dite “forme de Hodge-Riemann”, $Q : \mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{H}^{2n}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

5) Une connexion (intégrable) $\nabla : \mathcal{H}^k \to \Omega^1_S \otimes \mathcal{H}^k$: la connexion de Gauss-Manin, telle que le système local des sections horizontales est $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}$.

6) Propriété de transversalité de Griffiths

$$\nabla(\mathcal{F}^p) \subseteq \Omega^1_S \otimes \mathcal{F}^{p-1}.$$

7) L'opérateur L de Lefschetz admet une forme globale : L est le cup-produit avec ω. Noter que L est un opérateur horizontal ; on définit $\mathcal{H}^k_{\mathrm{prim}}$ comme le noyau de

$$L^{n-k+1} : \mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{H}^{2n-k+2}.$$

La fibre en $s \in S$ de $\mathcal{H}^k_{\text{prim}}$ est $\text{Prim}^k(X_s, \mathbb{C})$.

On résume toutes ces données, par la définition suivante, d'une variation de structures de Hodge (polarisées) ("VHS" en abrégé).

La définition suivante a été formulée par Griffiths ([Grif1]).

3.1. Définition. *Une famille de structures de Hodge* (*réelles*) *de poids* k, *sur* S, *est la donnée de*

1) *Un faisceau localement constant d'espaces vectoriels réels* $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ *sur* S ;

2) *Une filtration finie* $\{\mathcal{F}^p\}$ *du fibré vectoriel* $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_S$ ($\mathcal{F}^p$ *est un sous-fibré holomorphe*) ;

avec les conditions :

(VHS-1) *La connexion naturelle* $\nabla = 1 \otimes d_S$ *sur* $\mathcal{H}$ *est telle que* $\nabla \mathcal{F}^p \subseteq \Omega^1_S \otimes \mathcal{F}^{p-1}$

(VHS-2) *En tout point* $s \in S$, $\{\mathcal{F}^p_s\}$ *définit sur* $\mathcal{H}_{\mathbb{R}})_s$ *une structure de Hodge* (*réelle*) *de poids* k.

Une polarisation est la donnée, en sus, d'un faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, *de* $\mathbb{Z}$*-modules libres de rang fini, avec* $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \equiv \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, *et une forme bilinéaire localement constante non dégénérée*

$$Q : \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui induit en tout $s \in S$ *une polarisation de* $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})_s$.

Nous ne considérons que des structures de Hodge polarisées.

3.2. Définition. *Soit* $\{H_{\mathbb{Z}}, \{\mathcal{F}^p\}, \nabla, Q\}$ *une variation de structures de Hodge polarisées sur* S. *Le groupe de monodromie du faisceau localement constant* $H_{\mathbb{Z}}$ *est appelé le groupe de monodromie de la variation (VHS).*

Pour définir ce groupe, on fixe $s_0 \in S$ et on considère selon la prescription de §2.A la représentation de monodromie

$$T : \pi_1(S, s_0) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}((H_{\mathbb{Z}})_{s_0}).$$

Du fait que la forme Q est (localement) constante, l'image de T (i.e. le groupe de monodromie) est incluse dans le groupe orthogonal $G_{\mathbb{Z}} := \text{Aut}_{\mathbb{Z}}((H_{\mathbb{Z}})_{s_0}, Q)$.

Rappelons que le faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ s'obtient par :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \widetilde{S} \times H_{\mathbb{Z}} / \pi_1(S, s_0) \qquad (H_{\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0})$$

où $\pi_1(S, s_0)$ agit par $\gamma(t, \alpha) = (t\gamma, T(\gamma)^{-1}\alpha)$. La représentation de monodromie décrit comment une section locale de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ se déforme par prolongement analytique le long d'un lacet. Comme on suppose S connexe, toutes les fibres de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes à $H_{\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0}$ mais non canoniquement.

3.B. Domaine des périodes de Griffiths

Il est naturel de vouloir décrire "l'ensemble des structures de Hodge" sur $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, polarisées par la forme Q sur $H_{\mathbb{Z}}$, avec des nombres de Hodge $h^{p,q}$ fixés. On fixe donc $H_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^n$ un groupe abélien, Q une forme (alternée ou symétrique selon la parité de k, le poids) entière et non dégénérée sur $H_{\mathbb{Z}}$. Les nombres de Hodge $h^{p,q}$ $(= h^{q,p})$, avec $\sum\limits_{p+q=k} h^{p,q} = n$, sont fixés; noter qu'alors $\dim F^p = \sum\limits_{i\geqslant p, i+j=k} h^{i,j}$ est fixé $(= f^p)$. On note $\mathrm{Gr}(k, H_{\mathbb{C}})$ la variété des sous-espaces de dimension k de $H_{\mathbb{C}}$. Rappelons les relations bilinéaires de Riemann :

1) Le Q-orthogonal de F^p (dans $H_{\mathbb{C}}$) est F^{k-p+1} et
2) Si C est l'opérateur de Weil tel que $C(\xi) = \sqrt{-1}^{p-q}\xi$ pour $\xi \in H^{p,q}$, on a $Q(C\xi, \bar{\xi}) > 0$ si $0 \neq \xi$.

3.3. Notations. On note

$$\begin{aligned}\check{D} = \big\{&\text{filtrations } F^\bullet = \{F^p\}_{p=0,\dots,h} \text{ de } H = H_{\mathbb{C}},\\ &\text{telles que } \dim F^p = f^p, \text{ et pour tout } p,\ Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0\big\}.\end{aligned}$$

(Alors F^{k-p+1} est le Q-orthogonal de F^p).

On appelle D le sous-ensemble de $\check{D}$ formé des structures de Hodge, c'est-à-dire avec la condition 2 ci-dessus.

On note $G_{\mathbb{R}}$ le groupe orthogonal de $(H_{\mathbb{R}}, Q)$ et $G_{\mathbb{C}}$ le complexifié, $G_{\mathbb{C}} = O(H_{\mathbb{C}}, Q)$.

3.4. Proposition.

1) *$\check{D}$ est une sous-variété non singulière de $\prod\limits_p \mathrm{Gr}(f^p, H)$, qui est en fait un espace homogène du groupe de Lie complexe $G_{\mathbb{C}}$.*

$$\check{D} = G_{\mathbb{C}}/B, \qquad (B \text{ sous-groupe parabolique})$$

2) *D est un ouvert de $\check{D}$, qui est une orbite du groupe de Lie réel $G_{\mathbb{R}}$:*

$$D = G_{\mathbb{R}}/B \qquad (V = G_{\mathbb{R}} \cap B).$$

Preuve. La preuve n'est pas très difficile, c'est un exercice d'algèbre linéaire (théorème de Witt par exemple). On note que D acquiert une structure de variété analytique complexe (ouvert de $\check{D}$). Il est souvent commode de fixer une structure de Hodge initiale, $\{H_0^{p,q}\}$, et alors d'identifier $\check{D}$ avec $G_{\mathbb{C}}/B$, où B est le stabilisateur de $\{F_0^p\}$, et V le stabilisateur de $\{H_0^{p,q}\}$ dans $G_{\mathbb{R}}$. □

Il est important de décrire le fibré tangent à $\check{D}$, ainsi que les sous-fibrés universels $\mathcal{F}^p$ du fibré trivial $H \otimes \mathcal{O}_{\check{D}}$, comme fibrés vectoriels homogènes sur ces espaces homogènes.

Rappelons que si $F \subset H$ est un sous-espace de dimension d, l'espace tangent de $\mathrm{Gr}(d, H)$ en $[F]$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}(F, H/F)$. à partir de là, un vecteur tangent à $\check{D}$ en $F^\bullet = \{F^p\}$, peut-être identifié à une collection d'applications linéaires

$$\xi_p : F^p \longrightarrow H/F^p$$

avec les compatibilités suivantes :

$$\begin{tikzcd} F^p \arrow[r, "\xi_p"] & H/F^p \\ F^{p+1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\xi_{p+1}"] & H/F^{p+1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est commutatif et

$$Q(\xi_p(\alpha), \beta) + Q(\alpha, \xi_{k-p+1}(\beta)) = 0 \qquad (\alpha \in F_p,\ \beta \in F_{k-p+1})$$

[version infinitésimale de la première relation bilinéaire].

Rappelons qu'on a choisi un point de base $\{H_0^{p,q}\} \in D$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \big\{X \in \mathrm{End}(H), Q(X(\alpha), \beta) + Q(\alpha, X(\beta)) = 0\big\}.$$

Il y a une structure de Hodge de poids 0 sur $\mathfrak{g}$, avec

$$\mathfrak{g}^{r,s} = \big\{X \in \mathfrak{g},\ X(H^{p,q}) \subseteq H^{p+q,q+s}\big\}.$$

Alors $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B) = \bigoplus_{r \geqslant 0} \mathfrak{g}^{r,-r}$, et le fibré tangent $T_{\check{D}}$ est le fibré homogène $G_{\mathbb{C}} \times_B \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, B agissant par la représentation adjointe.

Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$, alors $\mathfrak{v} = \mathrm{Lie}(V) = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^{0,0}$. Noter que $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, qui correspond au fait que l'ouvert $D \subset \check{D}$ est une orbite de $G_{\mathbb{R}}$.

3.5. Définition ([Grif1])**.** Le sous-fibré $G_{\mathbb{C}} \times_B \mathfrak{g}^{-1,1}/\mathfrak{b}$ de $T_{\check{D}}$ est appelé le sous-fibré horizontal (notation $T_{\mathrm{hor}}(\check{D})$). Un vecteur tangent $\xi = \{\xi_p\}$, est horizontal si $\xi_p(\mathcal{F}^p) \subseteq \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p$.

Si on veut décrire le fibré universel $\mathcal{F}^p \subset H \otimes \mathcal{O}_{\check{D}}$, en termes de fibrés associés à des fibrés principaux, on note que le fibré trivial $H \otimes \mathcal{O}_{\check{D}}$ (de fibre H, base $\check{D}$) est le fibré $G_{\mathbb{C}} \times_B H$, et $\mathcal{F}^p = G_{\mathbb{C}} \times_B \mathcal{F}_0^p$ (par définition B est le stabilisateur de la filtration $\{\mathcal{F}_0^p\}$.

3.6. Exemple (Demi-espace de Siegel)**.** On suppose $k = 1$ (poids 1). La filtration de Hodge se réduit à $H = F^0 \supset F^1 \supset 0$, avec $(F^1)^\perp = F^1$ (pour la forme alternée

Q). Alors $\check{D}$ est la grassmanienne lagrangienne de (H, Q), et $\check{D} = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{C})/B$ si $\dim H = 2g$. On vérifie classiquement que $D = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})/U(g, \mathbb{C})$ s'identifie au demi-espace de Siegel $\{\tau \in M_g(\mathbb{C}), {}^t\tau = \tau \text{ et } \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$.

Soit une VHS : $\{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^p, \nabla, Q\}$; cette donnée ne conduit pas directement à un morphisme $S \to D$, du fait que $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ est seulement localement constant. Par contre, localement sur un ouvert $\mathcal{U}$ de S, on peut trivialiser le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$, au moyen de sections plates (de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$), alors la filtration induite par les $\mathcal{F}^p$ donne lieu à un morphisme (holomorphe)

$$\Phi : \mathcal{U} \to D \subset \check{D}.$$

Globalement, on peut transporter la VHS au revêtement universel $\widetilde{S}$ de S, et le choix d'une trivialisation du système local $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ sur $\widetilde{S}$, conduit à un morphisme $\tilde{\Phi} : \widetilde{S} \to D \subset \check{D}$.

Il est immédiat de voir que le groupe de monodromie (global) Γ agit proprement discontinûment sur D, alors on obtient le *morphisme des périodes*, en passant au quotient par Γ :

$$\Phi : S \longrightarrow \Gamma\backslash D.$$

L'observation importante sur $\tilde{\Phi}$ (ou tout relèvement local) est la propriété d'horizontalité, traduction de la condition de transversalité de Griffiths sur ∇. Pour tout $s \in S$,

$$\text{(Trans)} \qquad \boxed{d\Phi_s(T_{s,0}) \subseteq T_{\mathrm{hor},\Phi(s)}(D).}$$

Pour rendre cette propriété claire, détaillons-la sur un voisinage de $s_0 \in S$. On trivialise le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$ au moyen de sections plates $\{\tau_i\}$. On peut supposer que $H_0^{p,q}$ $(= H^{p,q}(s_0))$ a pour base $(\tau_i)_{f_{p+1} < i \leqslant f_p}$, alors $\mathcal{F}_0^p$ a pour base $\{\tau_i\}_{i \leqslant f_p}$. On peut trouver une trivialisation locale $\{e_i(s)\}$ de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$ par des sections telles que $e_i(s_0) = \tau_i$, et localement, $(e_1, \ldots, e_{f_p})$ est une base de $\mathcal{F}^p$. Soit $e_i = \sum A_{ji}\tau_j$ la matrice de changement de repères (pour abréger on écrit $s_0 = 0$). Les τ_i étant plates, $\nabla e_i = \sum dA_{ji}\tau_j = \sum_k c_{ki}e_k$, avec $c = A^{-1}dA$. L'hypothèse de transversalité implique $c_{ji} = 0$ pour $i \leqslant f_p$, $j > f_{p+1}$. L'application linéaire ξ_α associée à $d\Phi_{s_0}(\partial/\partial s_\alpha)$ est telle que pour $i \leqslant f_p$:

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha(\tau_i) &= \frac{\partial e_i}{\partial s_\alpha}(0) \pmod{\mathcal{F}_0^p} \\
&= \sum_{f_{p+1} < j} \frac{\partial A_{ji}}{\partial s_\alpha}(0)\tau_j.
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial A_{ji}(0)}{\partial s_\alpha} = \big\langle c_{ji}(0), \frac{\partial}{\partial s_\alpha}\big\rangle,$$

on a bien (Trans).

Pour utilisation ultérieure, indiquons la propriété suivante, conséquence de la nullité de la courbure de ∇.

3.7. Proposition. *Si* $\partial_1, \partial_2 \in T_{S,s}$, $\xi_i = d\Phi_s(\partial_i) \in \mathfrak{g}^{-1,1}$, *alors* $[\xi_1, \xi_2] = 0$ (*crochet dans* $\mathfrak{g}$).

Preuve. Rappelons la formule (plat) du paragraphe 2. Elle implique qu'il suffit de montrer que $[\partial_1, \partial_2] = 0$ vu comme endomorphisme de $H_0^{p,q}$. Donc on peut supposer $\xi_1 = \partial/\partial s_\alpha$, $\xi_2 = \partial/\partial s_\beta$.

Posons $c_{ji}^\alpha = \langle c_{ji}, \partial/\partial s_\alpha \rangle$, alors $c_{ji}^\alpha(0) = \partial A_{ji}/\partial s_\alpha\big|_0$. Il suffit de montrer que $\partial c_{ji}^\alpha/\partial s_\beta - \partial c_{ji}^\beta/\partial s_\beta$ s'annule en 0 pour $f_{p+1} < i, j \leqslant f_p$.

On a vu que

$$c_{ji}^\alpha = \sum_k A_{jk}^{-1} \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\alpha} = 0 \qquad \text{si} \;\; i \leqslant f_p, \; j > f_{p+1} \; .$$

En dérivant par rapport à s_β, puis en évaluant en 0, on obtient pour i, j dans l'intervalle $]f_{p+1}, f_p]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{ji}}{\partial s_\beta \partial s_\alpha}(0) &= \sum_k \frac{\partial A_{jk}}{\partial s_\alpha}(0) \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\beta}(0) \\ &= \sum_k \frac{\partial A_{jk}}{\partial s_\beta}(0) \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\alpha}(0) \end{aligned}$$

qui donne le résultat. □

3.C. Déformations et IVHS (variations infinitésimales de structures de Hodge)

La question la plus naturelle à ce stade est de savoir si la variation de structure complexe est déterminée par sa variation de structure de Hodge (*problème de Torelli*). Il est clair que cela est faux en général : prendre la famille produit. Donc il faut se restreindre aux familles pour lesquelles la structure complexe varie vraiment au moins infinitésimalement. La variation infinitésimale étant mesurée par l'application de Kodaira-Spencer, on ne regarde que des familles ayant la propriété que l'application de Kodaira-Spencer est partout injective. Ce sont les *familles effectives*. La variation de structure de Hodge au niveau infinitésimal est décrite par la dérivée de l'application des périodes. Ainsi une version infinitésimale du problème de Torelli est de savoir si cette dérivée est injective pour des familles effectives. Voir [P-S] pour ce cercle d'idées.

Complètons la discussion en précisant ce qu'on entend par une *déformation universelle* ou *verselle*. Ici on fixe une variété X_o, on travaille avec des familles sur une base pointée (S, o), considérée comme germe, telle que la fibre au dessus de o est la variété fixée X_o. Ces types de familles sont appelés *déformations de* X_o. Une telle déformation $f : X \to S$ est *complète* si toute autre déformation $g : Y \to T$ de X_o se déduit de $f : X \to S$ par un changement de base (au niveau des germes)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

où $p : (T, o) \to (S, o)$, et le carré ci-dessus est cartésien. Si le morphisme p est unique, X/S est appelé *universelle*. En général ce n'est pas le cas, mais souvent sa différentielle $dp(o)$ est unique et dans ce cas la déformation X/S est dite *verselle*. Par exemple, si X/S est complète, pour obtenir une déformation verselle, on peut restreindre la famille à une sous-variété convenable qui passe par o. Attention : une déformation peut très bien être (uni)verselle en $o \in S$ mais pas en d'autres points de S.

Kodaira et Spencer ont montré [K-S2] que f est complète si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer est une surjection.

3.8. Conséquence. *$f : X \to S$ est verselle en o si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer*

$$\rho : T_{S,o} \to H^1(T_{X_o})$$

est un isomorphisme ($\dim S$ est alors considéré comme le nombre de paramètres pour la structure complexe).

Bien qu'amelioré par Kuranishi, le résultat de Kodaira suffit pour beaucoup d'exemples, notamment pour les hypersurfaces dans l'espace projectif, comme dans l'exemple suivant. Le résultat de Kuranishi dit qu'il y a toujours une famille verselle, pourvu qu'on accepte comme base S un espace analytique (il est essentiel d'accepter des éléments nilpotents dans le faisceau structural de S). Dans ce cadre une famille $f : X \to S$ est une application holomorphe et propre telle que, quitte à restreindre S, localement X est un produit $U_i \times S$ et $f|U_i \to S$ coincide avec la projection sur le second facteur. Voir [Ku] pour les détails.

3.9. Exemple. Si $f : X \to S$ est la famille tautologique des hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$, l'application de Kodaira-Spencer est une surjection si $n \geqslant 2$ ou $n = 2$ et $d \neq 4$. Pour obtenir une déformation verselle il faut restreindre cette famille à un petit disque transversal à une orbite par $\mathrm{PGL}(n + 1, \mathbb{C})$ d'une hypersurface fixée. Pour les détails voir [K-S §14(C)].

Retournons à la différentielle de l'application des périodes, pour une famille $f : X \to S$ verselle. On fixe $o \in S$, on regarde la fibre X_o au dessus du point o et la différentielle $\delta = d\Phi(o)$ en o. C'est une application linéaire

$$\delta : T_{S,o} \longrightarrow \mathfrak{g}^{-1,1} \subset \bigoplus_p \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

avec les propriétés suivantes (3.7) :

(1) *Pour tout vecteur tangent t en o,* $\delta(t) \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$.

(2) *Si $t_1, t_2 \in T_{S,o}$, les endomorphismes $\delta(t_1)$ et $\delta(t_2)$ commutent.*

3.9. Définition. Soit une structure de Hodge (réelle) sur H. Une donnée (d'algèbre linéaire) (T, H, δ, Q)

$$\delta : T \longrightarrow \mathfrak{g}^{-1,1}$$

qui satisfait à (1) et (2) est appelée par Griffiths et Harris [C-G-G-H], une variation infinitésimale de structures de Hodge (IVHS).

Dans une IVHS géométrique, l'application linéaire induite par

$$\delta(t) : H^{p,q} \to H^{p-1,q+1}$$

est le cup-produit avec l'image de t par l'application de Kodaira-Spencer $T_{S,o} \to H^1(X_0, T_{X_0})$ (cf. §2B et §2C).

Au départ d'une IVHS, on peut effectuer des opérations d'algèbre linéaire. Par exemple, si $t_1, \ldots, t_k \in T_{S,o} = T$, on peut composer les applications $\delta(t_1), \ldots, \delta(t_k)$, ce qui donne une application

$$H^{k,0} \xrightarrow{\delta(t_1)} H^{k-1,1} \xrightarrow{\delta(t_2)} H^{k-2,2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta(t_k)} H^{0,k}.$$

Notons $\delta(t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{Hom}(H^{k,0}, H^{0,k})$ le résultat. Rappelons que $H^{0,k}$ et $H^{k,0}$ sont en dualité par la forme Q. Alors les propriétés (1) et (2) conduisent aisément aux résultats suivants :

(i) $\delta(t_1, \ldots, t_k)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $H^{k,0}$

(ii) $\delta(t_1, \ldots, t_k)$ est symétrique en les arguments $t_1, \ldots, t_k$.

D'où une application linéaire :

$$\text{(iter)} \qquad \boxed{\delta : \mathrm{Sym}^k(T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}}(H^{k,0}, H^{0,k}) \cong \mathrm{Sym}^2(H^{k,0})}$$

qui, comme on peut s'y attendre, contient des informations significatives sur X_0.

4. Dégénérescence

Dans ce paragraphe on introduit la notion de structure de Hodge mixte. Ensuite on regarde les familles de base un disque épointé, déduites d'une morphisme propre de base le disque, en omettant la fibre au dessus de l'origine. On appelle une telle situation dégénérescence, car la fibre au dessus de l'origine peut être singulière. Dans cette situation, tourner une fois autour de l'origine induit sur la cohomologie l'application de Picard-Lefschetz ou de monodromie locale. La quasi-unipotence de cette application est une propriété fondamentale qui est discutée brièvement dans le §4.B. Finalement, dans le §4.C on définit les cycles proches et évanescents, notions indispensables pour comprendre les développements récents sur la monodromie locale.

4.A. Structures de Hodge mixtes

Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration croissante $W_\bullet$

$$\cdots W_k \subset W_{k+1} \subset W_{k+2} \cdots$$

On suppose qu'il y a une filtration décroissante $F^\bullet$

$$\cdots F^k \subset F^{k-1} \subset F^{k-2} \cdots$$

sur $H = H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$. On dit que ces deux filtration définissent *une structure de Hodge mixte* si la filtration induite par $F^\bullet$ sur $\mathrm{Gr}_\ell^W = W_\ell / W_{\ell-1}$ est une structure de Hodge pure de poids ℓ. La filtration induite est $F^p(\mathrm{Gr}_\ell^W) = W_\ell \cap F^p \big/ W_{\ell-1} \cap F^p$. Les *nombres de Hodge* sont les nombres de Hodge de Gr_ℓ^W. Donc $h^{p,q} = h^{q,p}$ mais en général il y a des nombres de Hodge non-nuls pour des valeurs de $p+q$ différentes.

Si on peut trouver une bigraduation $H = \oplus H^{p,q}$ telle que $W_\ell \otimes \mathbb{R} = \sum_{r+s\leqslant \ell} H^{r,s}$ et $F^p = \sum_{r\geqslant p} H^{r,s}$ on dit que la structure mixte est *scindée*. Deligne a trouvé (voir [C-K-S1]) un scindement canonique :

$$I^{a,b} = F^p \cap W_{a+b} \cap ((\bar{F}^b \cap W_{a+b}) + \overline{G}^{b-1}_{a+b-2}), \qquad \text{où } \; G^p_q := \sum_{j\geqslant 0} F^{p-j} \cap W_{q-j}$$

et donc

$$W_\ell = \bigoplus_{a+b\leqslant \ell} I^{a,b}, \qquad F^p = \bigoplus_{a\geqslant p} I^{a,b}.$$

Attention : bien que $h^{a,b} = \dim H^{a,b}$ en général on n'a pas $I^{b,a} = \overline{I}^{a,b}$, si c'est le cas on dit que le scindement est défini sur $\mathbb{R}$. On peut toujours "déformer" une structure mixte sur $\mathbb{R}$ (dans la définition de structure mixte on part d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) en une structure scindée sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas $I^{a,b} = F^a \cap \bar{F}^b \cap W_{a+b}$.

Dans l'exposé [Dem] il et prouvé que le groupe de cohomologie $H^w(X,\mathbb{Z})$ d'une variété compacte kählérienne X porte une structure de Hodge pure de poids w. En particulier cela s'applique aux variétés complexes projectives non-singulières.

Lorsque X est quasi projective, éventuellement singulière, en fait pour tout schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, Deligne a prouvé [Del 4], [Del5], que $H^w(X,\mathbb{Z})$ porte une structure de Hodge mixte qui dépend fonctoriellement de X. Les nombres de Hodge de cette structure ne peuvent être non nuls que pour $0 \leqslant p,q \leqslant w$, en fait $w-n \leqslant p,q \leqslant n$ si $w \geqslant n = \dim X$. Si X est lisse il n'y a que des poids $\geqslant w$ ($h^{p,q} = 0$ si $p+q < w$), par contre pour X propre il n'y a que des poids $\leqslant w$. Naturellement si X est projective lisse, la structure de Hodge mixte sur $H^w(X,\mathbb{Z})$ se réduit à la structure pure classique de poids w.

Pour rendre crédible la définition ci-dessus d'une structure de Hodge mixte, expliquons brièvement comment lorsque X est un $\mathbb{C}$-schéma lisse quasi projectif une telle structure émerge (voir [Del4] pour les détails). La première étape consiste à compactifier X, c'est-à-dire réaliser X comme le complémentaire $X = \overline{X} \setminus D$ d'un diviseur à croisements normaux ([Ill] §7). Une telle compactification existe ; pour simplifier la discussion, on suppose que D est une réunion de diviseurs lisses se coupant transversalement. On se place dans le cadre analytique ; les formes sont donc holomorphes. Le théorème de De Rham ordinaire, qui dit que $H^w(X,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(X,\Omega^\bullet_X)$ n'est pas suffisant. Si $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ est l'inclusion, on observe que $H^w(X,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(\overline{X}, j_*\Omega^\bullet_X)$. Soit le sous complexe $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ de $j_*\Omega^\bullet_X$, dont les sections sont les formes méromorphes sur $\overline{X}$, holomorphes sur X, à pôles logarithmiques sur D. Rappelons [Ill] qu'une section de $\Omega^1_{\overline{X}}(\log D)$ définie en $x \in D$, est une combinaison linéaire de $\{\frac{dz_1}{z_1},\ldots,\frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1},\ldots,dz_n\}$ si $(z_1,\ldots,z_n)$ est un système de coordonnées locales en x tel que $z_1 \cdot \ldots \cdot z_k = 0$ soit une équation locale de D. On pose $\Omega^p_{\overline{X}}(\log D) = \wedge^p\Omega^1_{\overline{X}}(\log D)$. On vérifie que $\Omega^\bullet_{\overline{X}}$ est le plus petit sous-complexe de $j_*\Omega^\bullet_X$ contenant $\Omega^\bullet_{\overline{X}}$ et les différentielles logarithmiques $\frac{df}{f}$ de toute section locale méromorphe le long de D. Le théorème de De Rham logarithmique dit alors que les deux complexes $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ et $j_*\Omega^\bullet_X$ sont quasi-isomorphes, donc :

$$H^w(X,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(\overline{X}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D).$$

Le lecteur trouvera dans le §8 une preuve lorsque D est une hypersurface lisse. Comme dans le §1, la filtration de Hodge $F^\bullet$ conduit à la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}(\log D)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C})$$

et à l'existence d'une filtration de Hodge $F^pH^w(X,\mathbb{C})$ sur l'aboutissement. Notons que les faisceaux algébriques cohérents $\Omega^p_{\overline{X}}(\log D)$ peuvent se substituer à leurs analogues analytiques ([Ill] §7).

Le complexe $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ admet une seconde filtration, la filtration par le poids $W_\bullet$ (filtration croissante) ; W_m est l'image de l'application produit extérieur :

$$\Omega^m_{\overline{X}}(\log D) \otimes \Omega^\bullet_X[-m] \longrightarrow \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D).$$

Si on pose $W^m = W_{-m}$ ($W^\bullet$ est une filtration croissante), on peut ainsi considérer la suite spectrale associée au complexe filtré $(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D), W^\bullet)$, soit

$$E_1^{-n,w+n} = \mathbb{H}^w(\overline{X}, \mathrm{Gr}^w_n(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D))) \Longrightarrow H^w(X,\mathbb{C}).$$

Supposons que $D_1,\ldots,D_r$ sont les composantes de D. Il n'est pas difficile de voir que l'opération "résidu" de Poincaré fournit un isomorphisme (voir §8) :

$$\mathrm{Gr}^W_n(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \Omega^\bullet_{\overline{X}} & \text{si } n = 0 \\ \oplus_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant r}\Omega^\bullet_{D_{i_1}\cap\cdots\cap D_{i_n}}[-n] & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Sur $H^w(X, \mathbb{C})$ il y a donc deux filtrations $W_\bullet$ et $F^\bullet$, il faut étudier comment ces filtrations cohabitent. Le terme E_1 de la suite spectrale est :

$$E_1^{-n,w+n} = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant r} H^{w-n}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_n}, \mathbb{C}).$$

Alors la filtration de Hodge induit sur ce terme une structure de Hodge pure de poids $w+n$, qui se déduit de celle de poids $w-n$ sur chaque $H^{w-n}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_n}, \mathbb{C})$ par un décalage. On prouve alors par une analyse assez délicate, et par récurrence, que la différentielle d_r est nulle pour $r \geqslant 2$, en particulier

$$E_2^{p,q} = \ldots = E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}_p^W(H^{p+q}(X, \mathbb{C})).$$

Il n'est pas difficile alors de conclure que la filtration $F^\bullet$ sur $W_n/W_{n-1} = \mathrm{Gr}_n^W(H^w(X, \mathbb{C}))$ donne une structure de Hodge pure de poids $w+n$. Alors, si on décale la filtration W, on a obtenu que $W_\bullet[w]$ et $F^\bullet$ définissent sur $H^w(X)$ une structure de Hodge mixte. Le lecteur trouvera dans [Del4] l'explication que $W_\bullet$ est en fait définie sur $\mathbb{Q}$, et aussi que le résultat est indépendant de la compactification.

Comme exemple regardons le cas d'une hypersurface lisse $D \subset \overline{X}$ et $X = \overline{X} \setminus D$. En tenant compte du décalage, la filtration par le poids sur $H^w(X, \mathbb{C})$ est $0 \subset W_w \subset W_{w+1} = H^w(X, \mathbb{C})$. On a $W_w = \mathrm{Im}[H^w(\overline{X}, \mathbb{C}) \to H^w(X, \mathbb{C})]$. Pour interpréter le quotient W_{w+1}/W_w, considérons la différentielle d_1 de la suite spectrale

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & E_1^{-1,w+1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{0,w+1} & \to & 0. \\ & & \| & & \| & & \\ & & H^{w-1}(D) & & H^{w+1}(\overline{X}) & & \end{array}$$

La dégénérescence au terme E_2 est ici un fait clair, on a

$$E_2^{-1,w+1} = \ker(d_1) = \ldots = E_\infty^{-1,w+1} = W_{w+1}/W_w.$$

On verra au §7 que la différentielle d_1 s'interprète aussi en terme de la suite exacte de Gysin :

$$\cdots H^w(\overline{X}) \to H^w(X) \to H^{w-1}(D) \xrightarrow{\partial} H^{w+1}(\overline{X}) \to \ldots$$

Ici $\partial = d_1$ étant de bidegré $(1,1)$ la preuve du théorème de Deligne est immédiate dans ce cas.

Particularisons encore plus cet exemple, en supposant que $\overline{X}$ est une courbe complète lisse de genre g et que D consiste en n points. La suite exacte de Gysin ci-dessus montre que $W_1 \cong H^1(\overline{X})$ possède une structure de Hodge pure de poids 1 et que $W_2/W_1 \cong \ker(H^0(D) \to H^2(\overline{X}))$ est de rang $n-1$ avec une structure de

Hodge pure de poids 2, limitée au seul terme de type $(1,1)$, comme pour $H^2(\overline{X})$, ce qui correspond bien au fait que $b_1(X) = g + n - 1$.

La méthode de Deligne donne aussi une structure mixte sur la cohomologie des variétés kählériennes admettant des compactifications kählériennes. Dans une autre direction, la cohomologie avec support compact ainsi que l'homologie de Borel-Moore (d'un schéma séparé sur $\mathbb{C}$ où d'une variété kählérienne admettant une compactification kählérienne) portent aussi des structures de Hodge mixtes.

4.B. Structures limites

Considérons la situation d'une dégénérescence : $f : X \to \Delta$, c'est-à-dire une application propre et holomorphe d'une variété complexe X dans le disque Δ telle que f soit lisse au dehors de l'origine. Soit

$$\mathfrak{h} \to \Delta^*, \quad \tau \mapsto s = \exp(2\pi \mathrm{i}\tau)$$

le revêtement universel du disque épointé et soit $\tilde{X} = X \times_{\Delta^*} \mathfrak{h}$ le produit fibré et $k : \tilde{X} \to X$ l'application naturelle. L'application $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$, $h(x,\tau) = (x, \tau+1)$ induit l'opération de monodromie T sur les groupes de cohomologie $H^k(X_s)$ ($s = \exp(2\pi\mathrm{i}\tau)$ et $X_s = f^{-1}(s)$). Dans le cas d'une VHS "géométrique", $H_{\mathbb{Z}} = R^k f_*(\mathbb{Z})_{s_0} = H^k(X_{s_0}, \mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$, T est l'*application de Picard-Lefschetz.* Une propriété fondamentale de T est la suivante :

4.1 Théorème. ([La]) *La transformation T est quasi-unipotente, c.à.d. $(T^\ell - \mathbb{1})$ est nilpotent pour $\ell \in \mathbb{C}$ convenable; en fait, l'indice de nilpotence est $\leqslant k+1$: $(T^\ell - \mathbb{1})^{k+1} = 0$* (Théorème de la monodromie locale)

Pour les variations abstraites ce théorème a été démontré par Schmid dans [S]. Le théorème de monodromie locale sans la borne sur l'indice de nilpotence découle (selon une idée de Borel) des propriétés de courbure du domaine des périodes. On esquisse l'argument donné en [S].

Rappelons la notion de *courbure sectionnelle* d'une métrique hermitienne h sur une variété complexe M. Soit F_h la courbure (voir [Dem, §1]) de la connexion métrique sur le fibré tangent holomorphe $T(M)$. La *courbure sectionnelle* est la fonction $\kappa : T(M) \setminus \{\text{zéro-section}\} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\kappa(v) = \frac{h\left(F_h(v,\overline{v})v, v\right)}{h(v,v)^2}.$$

4.2 Exemple. Supposons que $\dim M = 1$. Alors $F_h = \overline{\partial}\partial \log(h)$, où $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} h\, dz \wedge d\overline{z}$ est la forme associée à la métrique. On vérifie facilement que $\kappa(\partial/\partial z)$ est la courbure gaussienne $K_h = -h^{-1} \cdot \partial^2/\partial z \partial\overline{z}(\log h)$. Ce résultat peut s'écrire comme suit :

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\ \text{courbure de } h = -\ \text{courbure gaussienne de la métrique } h.$$

Cas particuliers :

i. Soit Δ le disque unité avec la métrique de Poincaré

$$h = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

On trouve

$$\kappa(\partial/\partial z) \equiv -1.$$

ii. Le demi-plan $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, avec la métrique

$$h = \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

La courbure gaussienne est égale à -1.

iii. Le disque épointé $\Delta^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1,\ \zeta \neq 0\}$ admet $\mathfrak{h}$ comme revêtement universel. La métrique de Poincaré est invariante par translation et donc induit une métrique sur Δ^*

$$\frac{1}{|\xi|^2(\log|\xi|^2)^2} d\xi \otimes d\overline{\xi}$$

à courbure gaussienne -1.

Lemme (d'Ahlfors-Schwarz). *Une application holomorphe $f : \Delta \to M$ du disque unité dans une variété complexe munie d'une métrique hermitienne h ayant la propriété que $f(\Delta)$ est tangente aux directions dans lesquelles la courbure κ satisfait $\kappa \leqslant -1$, alors, avec ω_h la forme associée à h et ω_Δ la forme associée à la métrique de Poincaré on a :*

$$f^*\omega_h \leqslant \omega_\Delta,$$

c'est-à-dire que f est décroissante.

Preuve. L'hypothèse du lemme dit que la courbure sectionnelle calculée dans la direction de $f(\Delta)$ est majorée par -1. On sait que la courbure décroît dans les sous-fibrés (voir [Grif4, Chapt. II]) et donc la courbure sectionnelle calculée avec la métrique induite par T_M est bornée par -1. Rappelons que la *forme de Ricci* d'une métrique de forme ω_N sur une variété N de dimension 1 est donnée par :

$$\operatorname{Ric}\omega_N = \frac{1}{2}\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\log h = -K\omega_N,$$

ou K dénote la courbure gaussienne. Donc $f^*\omega_h \leqslant \operatorname{Ric} f^*\omega_h$ et il suffit de montrer que $\operatorname{Ric} f^*\omega_h \leqslant \omega_\Delta$.

Considérons un disque plus petit de rayon r et soit

$$\eta_r = \frac{\mathrm{i}\cdot r^2 dz \wedge d\overline{z}}{(r^2-|z|^2)^2}$$

la métrique de Poincaré sur ce disque. Introduisons :

$$\Psi := f^* \omega_h = u \eta_r.$$

Puisque Ψ reste bornée sur chaque disque de rayon $r < 1$, tandis que η_r tend vers l'infini quand on approche le cercle $|z| = r$, la fonction u reste bornée sur ce disque et donc prend un maximum à l'intérieur, disons au point z_0.

En ce point on a :

$$0 \geqslant \mathrm{i}\partial\overline{\partial} \log u = \operatorname{Ric} \Psi - \operatorname{Ric} \eta_r.$$

La courbure gaussienne de η_r est égale à -1, d'où :

$$\operatorname{Ric} \Psi \leqslant \operatorname{Ric} \eta_r = \eta_r$$

et on obtient l'inégalité $u(z_0) \leqslant 1$. Mais u prend son maximum en z_0 et donc $\operatorname{Ric} \Psi \leqslant \eta_r$. Prenant la limite, on obtient bien $\operatorname{Ric} \Psi \leqslant \eta_\Delta$. $\square$

On peut voir le demi-plan comme un cas spécial d'un domaine de périodes. Ici la courbure est -1. Pour un domaine de périodes quelconque on n'aura pas en général que la courbure de la métrique invariante est négative, mais elle sera négative le long des directions horizontales. Plus précisément, la courbure sectionnelle holomorphe du sous-fibré horizontal $T_{\mathrm{hor}}(D)$ est bornée par une constante négative (uniforme)

$$\boxed{\kappa(\xi) \leqslant -1, \qquad \forall x \in T_{\mathrm{hor}}(D)}$$

(quitte à normaliser la métrique). Pour la démonstration originale voir [G-S1].

Soit maintenant une VHS de base Δ^*, avec transformation de monodromie T, comme indiqué. On relève l'application des périodes en

$$\tilde{\Phi} : \mathfrak{h} \to D \subset \check{D}.$$

Rappelons que l'application $\tilde{\Phi}$ est horizontale, alors le lemme de Ahlfors-Schwarz entraîne que $\tilde{\Phi}$ est décroissante au sens des métriques (sur h on met la métrique hyperbolique de courbure -1)

$$\tilde{\Phi}^*(ds_D^2) \leqslant ds_h^2$$

par suite, $\tilde{\Phi}$ est décroissante pour les distances riemanniennes associées :

$$d_D(\hat{\Phi}(p), \tilde{\Phi}(q)) \leqslant d_h(p, q) \ .$$

Notons que si $x, r \in \mathbb{R}_+$, $d(\mathrm{i}r, \mathrm{i}r + x) = \frac{x}{r}$. Alors du fait que $\tilde{\Phi}(\tau + 1) = T\tilde{\Phi}(\tau)$

$$d_D(\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n), T\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n)) \leqslant \frac{1}{n}.$$

On fixe un point de base $v \in D$, et on identifie D avec l'orbite $G_\mathbb{R}/V$ de v. L'application $G_\mathbb{R} \to D$ est propre car V est compact. Soit $\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n) = g_n v$ on a $d_D(g_n v, T g_n v) = d_D(v, g_n^{-1} T g_n v) \leqslant 1/n$ car d_D est $G_\mathbb{R}$-invariante. Donc $g_n^{-1} T g_n v \to v$. Quitte à considérer une sous-suite de $\{g_n\}$, on peut supposer que $g_n^{-1} T g_n$ converge vers un élément g de V. Du fait que V est compact (un sous-groupe d'un groupe unitaire), les valeurs propres de g, et donc de T sont des nombres complexes de module un. L'élément T est en fait dans $G_\mathbb{Z}$, alors si λ est une valeur propre de T, il en est de même pour tout complexe conjugué, et alors par un fait classique (Kronecker), λ doit être une racine de l'unité. □

Expliquons maintenant le résultat fondamental [S] de W. Schmid : “Le théorème de l'orbite nilpotente” pour une VHS de base Δ^*. Ici Δ est un disque avec paramètre s, et $\Delta^* = \Delta \smallsetminus \{0\}$. Rappelons que le revêtement universel de Δ^* est donné par

$$\mathfrak{h} \to \Delta^*, \quad \tau \mapsto s = \exp(2\pi\mathrm{i}\tau).$$

La monodromie du faisceau localement constant $\mathcal{H}_\mathbb{Z}$ est décrite par le prolongement analytique le long d'un cercle décrit en sens inverse des aiguilles d'une montre qui est donc un opérateur T sur $(\mathcal{H}_\mathbb{Z})_{s_0} = H_\mathbb{Z}$ (on fixe un point de base $s_0 \in \Delta^*$). Rappelons que cela signifie que l'image inverse de $\mathcal{H}_\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{h}$ est le faisceau constant $\mathfrak{h} \times H_\mathbb{Z}$, avec l'opération $\sigma : (\tau, \alpha) \to (\tau + 1, T^{-1}\alpha)$, et que $\mathcal{H}_\mathbb{Z} = \mathfrak{h} \times H_\mathbb{Z}/\{\sigma\}$.

Le fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\mathbb{Z} \otimes \mathcal{O}_{\Delta^*}$, sur Δ^* est trivial pour des raisons générales : un fibré holomorphe sur une surface de Riemann non-compacte est trivialisable ([Fo,§30]). On peut dans la situation présente choisir une trivialisation privilégiée, en utilisant le fait que la monodromie est quasi-unipotente.

On suppose que T est en fait un opérateur unipotent $(T-1)^m = 0$, pour simplifier un peu. Alors $N = \log(T) = (T-1) - \frac{1}{2}(T-1)^2 + \cdots + (-1)^{m-2}\frac{1}{m-1}(T-1)^{m-1}$ est défini, et $N \in \mathfrak{g}_\mathbb{Q}$, i.e. N est un élément rationnel de l'algèbre de Lie du groupe $G_\mathbb{C}$, le groupe des isométries de $(H_\mathbb{C}, Q)$. Noter que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\exp(tN) \in G_\mathbb{C}$.

Trivialiser le fibré vectoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X/S)$ sur Δ^* revient, suite à la description

$$\mathcal{H} = \mathfrak{h} \times H/\{\sigma\}$$

(ici H est muni de la topologie complexe, d'espace vectoriel) à trivialiser la classe $\{T\}$ dans $H^1(\mathbb{Z}, G_\mathbb{C})$.

Il suffit de constater que

$$\exp((\tau+1)\cdot N)\cdot \exp(\tau N)^{-1} = T\ .$$

En d'autres termes, si $\theta(\tau,\alpha) = (\tau, \exp(\tau N)\alpha)$ est un “changement de coordonnées” sur $\mathfrak{h} \times H$, l'action de $\pi_1(\Delta^*)$ devient sur les nouvelles coordonnées :

$$(\theta\sigma\theta^{-1})(\tau,\alpha) = (\tau+1,\alpha).$$

Ce qui conduit à une trivialisation privilégiée de $\mathcal{H}$ sur Δ^*. Dans cette trivialisation, les sections horizontales (celles qu'on étend en $s = 0$), sont les sections $\alpha(s) = (s, \alpha)$ sur les nouvelles coordonnées. Avec les anciennes, cela signifie que si $\alpha \in H = (\mathcal{H})_{s_0}$, le prolongement analytique de α définit une section multiforme du faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, et $s \mapsto \exp\big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\big)\alpha(s)$ définit une section holomorphe du fibré vectoriel, qui est horizontale relativement à la trivialisation privilégiée. Par définition, la section

$$\alpha^*(s) = \exp\Big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\Big)\alpha(s)$$

est définie en $s = 0$. Ce sont les sections horizontales du fibré vectoriel $\tilde{\mathcal{H}}(X/S)$, étendu à tout le disque Δ.

Le résultat fondamental de W. Schmid est le suivant [S] :

4.2. Théorème. *Les fibrés de Hodge $\mathcal{F}^p \subset \mathcal{H}(X/S)$, se prolongent en des sous-fibrés du fibré prolongé $\tilde{\mathcal{H}}(X/S)$. En particulier, on a en $s = 0$, une filtration limite $\mathcal{F}^\bullet(0) \in \check{D}$ (en général $\mathcal{F}^\bullet(0) \notin D$).*

Le théorème peut s'énoncer d'une autre manière : soit

$$\Phi : \mathfrak{h} \longrightarrow D \subset \check{D}\ .$$

Alors si $\widetilde{\psi}(\tau) = \exp(-\tau N)\widetilde{\Phi}(\tau)$, on a $\widetilde{\psi}(\tau + 1) = \widetilde{\psi}(\tau)$, par suite $\widetilde{\psi}$ définit une fonction holomorphe $\psi : \Delta^* \to \check{D}$ par $\psi(s) = \widetilde{\psi}\big(\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}}\big)$. Le résultat est que ψ se prolonge holomorphiquement en une application $\psi : \Delta \to \check{D}$. Rappelons que $H = H^k(X_{t_0}, \mathbb{Z})/\text{torsion}$. On considère $\psi(0)$ comme une filtration

$$0 \subset F^k_\infty \subset F^{k-1}_\infty \subset \cdots \subset F^0_\infty$$

sur $H \otimes \mathbb{C}$, *la filtration limite*.

Une seconde partie du théorème de Schmid que nous n'utiliserons pas est la suivante : soit "l'orbite nilpotente"

$$N(\tau) = \exp(\tau N)[\mathcal{F}^\bullet(0)]\ .$$

Alors pour $\operatorname{Im}\tau \gg 0$, $N(\tau) \in D$, et N est horizontale; donc $N(\tau)$ définit pour $\operatorname{Im}\tau$ assez grand une variation de structure de Hodge, dont on peut prouver qu'elle fournit une approximation de la variation initiale (en un sens à préciser).

Introduisons la *filtration par le poids* (de la monodromie). Elle découle de la construction suivante [S] : soit V un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique zéro, et $N \in \operatorname{End}(V)$, tel que $N^{k+1} = 0$. Alors il y a une filtration unique :

$$W_{-1} = \{0\} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{2k} = V$$

telle que : $N(W_\alpha) \subseteq W_{\alpha-2}$, et telle que N^ℓ induise un isomorphisme : $\mathrm{Gr}^W_{k+\ell} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^W_{k-\ell}$, où $\mathrm{Gr}^W_\alpha = W_\alpha/W_{\alpha-1}$. On a ainsi sur H, deux filtrations $F^\bullet_\infty$ et $W^\bullet$, la filtration par le poids $W_\bullet$ étant elle définie sur $\mathbb{Q}$. Très important est le résultat suivant, qui est en fait une partie du théorème de l'orbite nilpotente de Schmid.

4.3. Théorème ([S]). *Les filtrations $F_\infty^\bullet$ (filtration de Hodge limite) et $W_\bullet$ définissent une structure de Hodge mixte sur H.* (On oublie les polarisations !)

Il y a une généralisation qui est beaucoup plus délicate (théorème de l'orbite Sl(2) en n variables) avec des applications aux dégénérescences en n paramètres. Voir [C-K-S1].

Pour le cas d'une dégénérescence à un paramètre, Steenbrink [St1] et Clemens-Schmid [Cl] ont construit cette structure mixte d'une façon géométrique et en tirent des conséquences importantes, par exemple :

4.4. Théorème. *Une classe de $H^k(X_s, \mathbb{Q})$ est invariante si et seulement si elle est la restriction d'une classe globale sur $H^k(X, \mathbb{Q})$.* (le théorème du cycle local invariant)

Cette assertion, bien qu'intuitivement claire, est fausse dans le cadre non-kählérien !

4.C. Cycles proches et évanescents

Por aider le lecteur, il sera utile de rappeler ici les constructions des faisceaux des cycles proches et des cycles évanescents associés à une dégénérescence $f : X \to \Delta$ (ou plus généralement à une fonction $f : X \to \mathbb{C}$). Ces faisceaux ont un support contenu dans $X_0 = f^{-1}(0)$.

La construction utilise *la fibre de Milnor en $x \in X$* qui est l'intersection d'une petite sphère autour de x de dimension réelle maximale dans X avec X_t, t proche de 0. On peut montrer que le type d'homotopie de la fibre de Milnor est indépendant de t et du rayon de la sphère, pourvu que ceux-ci soient soigneusement choisis (voir [Mil]). On calcule les groupes de cohomologie resp. les groupes de cohomologie réduits. Pour x variable, ces groupes constituent des faisceaux et on peut construire deux complexes qui "calculent" ces deux groupes de cohomologie *le complexe des cycles proches* resp. *le complexe des cycles évanescents*. Ils sont définis comme suit : pour définir le complexe $\psi_f(\mathbb{C}_X)$ des cycles proches, on prend une résolution injective du faisceau constant sur $\tilde{X}$, ensuite on restreint l'image directe par $k : \tilde{X} \to X$ à X_0 (en d'autres termes $\psi_f(\mathbb{C}_X) = i^* Rk_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}$, l'image réciproque par $i : X_0 \to X$ de l'image directe dérivée par k du faisceau constant sur $\tilde{X}$). Le complexe des cycles évanescents $\phi_f(\mathbb{C}_X)$ est défini comme le cône du morphisme naturel $\mathbb{C}_{X_0} \to \psi_f(\mathbb{C}_X)$ provenant de $\mathbb{C}_X \to Rk_* k^* \mathbb{C}_X$.

Rappelons que le cône $C(f)^\bullet$ d'un morphisme $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ entre complexes est défini par : $C^p(f) = A^{p+1} \oplus B^p$ avec la dérivation donnée par $\begin{pmatrix} -d_A^{p+1} & 0 \\ f^p & d_B^p \end{pmatrix}$. On a une suite exacte courte $0 \to B^\bullet \to C(f)^\bullet \to A^\bullet[1] \to 0$ et en appliquant cette suite dans le cas considéré ici on trouve bien que pour $j > 0$, $\mathcal{H}^j(\phi_f(\mathbb{C}_X)) = \mathcal{H}^j(\psi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule le j-ième groupe de cohomologie des fibres de Milnor tandis que pour $j = 0$ il y a une différence : $\mathcal{H}^0(\phi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule la cohomologie mais $\mathcal{H}^0(\psi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule la cohomologie réduite.

L'avantage de cette description découle du fait que $H^w(X_t, \mathbb{Q}) = H^w(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = H^w(\psi_f^{\text{uni}}\mathbb{Q}_X)$ où l'ajout “uni” signifie qu'on prend le sous-complexe maximal de $\psi_f\mathbb{Q}_X$ sur lequel l'action naturelle de la monodromie est unipotente. Donc on pourra essayer de construire la structure de Hodge mixte au niveau de ce complexe. C'est que Steenbrink ([St1]) fait dans le cas où la monodromie agit de façon unipotente et X_0 est un diviseur à croisements normaux avec une structure de variété algébrique. Navarro-Aznar ([NA]) a généralisé ses constructions. Voir [St2] pour des applications aux singularités isolées. Voir aussi [D-S] où on trouve un joli supplément du théorème de monodromie dans le cas d'une singularité isolée : si T admet un bloc de Jordan de taille maximale $n = \dim X$ – et nécessairement pour une valeur propre différente de 1 –, alors il y aura aussi un bloc de taille $n-1$ avec la valeur propre 1.

Remarquons finalement que la description ci-dessus suggère en outre qu'on pourra remplacer $\mathbb{C}_{\tilde{X}} = k^*\mathbb{C}_X$ par un $k^*\mathcal{K}^\bullet$, où $\mathcal{K}^\bullet$ est un complexe de faisceaux borné sur X quelconque, extension qui joue un rôle important dans les travaux de Saito (voir dessous).

5. Fibrés de Higgs

Le but de ce paragraphe est de donner quelques détails sur les travaux de Simpson sur la construction de variations de structures de Hodge. En particulier nous expliquerons brièvement comment ses résultats conduisent à des restrictions sur la possibilité qu'un groupe donné soit le groupe fondamental d'une variété projective lisse (complexe). On trouvera ces résultats dans [Si3]. Ils reposent sur [Si1] et [Si4]. Le lecteur pourra aussi consulter [Si2]. Pour d'autres résultats sur les groupes fondamentaux qui portent sur la théorie des fibrés de Higgs, voir [A1],[A2], [Z1], [Z2].

Dans le §3 on a introduit la notion d'une *variation de structure de Hodge polarisée (VHS)* de poids w sur une variété de base S supposée complexe et lisse. Brièvement, une telle structure consiste en un quadruple $\{\mathcal{H}, \nabla, Q, \{\mathcal{H}^{r,s}\}\}$ où $\mathcal{H}$ est un fibré holomorphe (muni d'une structure réelle), ∇ une connexion plate, Q une forme bilinéaire, $(-1)^w$-symétrique et ∇-parallèle, $\mathcal{H} = \bigoplus_{r+s=w} \mathcal{H}^{r,s}$ une décomposition en sous-fibrés $\mathcal{H}^{r,s}$ différentiables avec la propriété que $\mathcal{H}^{r,s}$ est le conjugué complexe de $\mathcal{H}^{s,r}$ (une décomposition de Hodge). De plus, on exige que les fibrés de Hodge $\mathcal{F}^p = \bigoplus_{r \geqslant p} \mathcal{H}^{r,s}$ soient holomorphes et que ∇ envoie $\mathcal{F}^p$ en $\mathcal{F}^{p-1} \bigotimes \Omega_S^1$ (transversalité de Griffiths). Finalement on exige que la décomposition de Hodge soit h-orthogonale par rapport à la forme hermitienne et ∇-parallèle, définie par $h(x,y) = (-i)^w Q(x, \overline{y})$, et que $(-1)^r h$ soit positive sur $\mathcal{H}^{r,s}$. Donc on pourrait aussi partir de $\{\mathcal{H}, \nabla, h, \{\mathcal{H}^{r,s}\}\}$. Si on oublie la structure réelle, et donc si on doit laisser tomber la condition $\mathcal{H}^{r,s} = \overline{\mathcal{H}^{s,r}}$ on arrive à la notion d'une *variation complexe de structures de Hodge* (VCH), pourvu qu'on interprète la transversalité de Griffiths correctement : non seulement on exige que $\nabla : \mathcal{F}^p \to \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega_S^1$ mais aussi que les fibrés $\overline{\mathcal{F}^q} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{s \geqslant q} \mathcal{H}^{r,s}$ portent une structure anti-holomorphe telle que ∇ envoie $\overline{\mathcal{F}^q}$ en $\overline{\mathcal{F}^{q-1}} \bigotimes_{\overline{\mathcal{O}_S}} \overline{\Omega^1_S}$.

Une VCH donne un exemple particulier de *fibré de Higgs*, c'est-à-dire un fibré holomorphe $\mathcal{H}$ avec un homomorphisme $\theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega^1_S$ ayant la propriété d'intégrabilité $\theta \wedge \theta = 0$. En effet, ici on écrit $\mathcal{H} = \bigoplus_p \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$ et on prend pour θ la somme directe des homomorphismes $\mathcal{O}_S$-linéaires $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p \bigotimes \Omega^1_S$ induits par ∇.

Le fibré de Higgs provenant d'une VCH en outre est stable par l'action de $\mathbb{C}^*$ donnée par $t \cdot (\mathcal{H}, \theta) = (\mathcal{H}, t\theta)$. Plus précisément, $\phi_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ donnée par $\mathcal{H}^{r,s} \ni x \mapsto t^r x$ induit un isomorphisme $(\mathcal{H}, \theta) \to (\mathcal{H}, t\theta)$.

On peut montrer ([Si3], Theorem 4.2) que si S est une variété projective, chaque système local (d'espaces vectoriels complexes) donne un fibré de Higgs et si le système est semi-simple, le fibré de Higgs $(\mathcal{H}, \theta)$ provient d'une VCH si et seulement si la classe d'isomorphie de $(\mathcal{H}, \theta)$ est $\mathbb{C}^*$-invariante. Autrement dit : si on considère les représentations du groupe fondamental de S dans $\mathbb{C}^d$, celles qui portent une VCH sont les représentations semi-simples fixées par l'action de $\mathbb{C}^*$. Un autre théorème de Simpson ([Si3], Theorem 3) dit qu'on peut toujours déformer une représentation du groupe $\pi_1(S)$ en une telle représentation. En particulier la clôture de Zariski G du groupe de monodromie (dans le groupe $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$) doit être très spéciale, dite *du type Hodge*, c'est-à-dire le rang de G doit être égal au rang du sous-groupe compact maximal de G. Par exemple les groupes $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ pour $n \geqslant 3$ ne sont pas du type Hodge.

On déduit de ces résultats qu'un réseau Γ (sous-groupe discret à quotient de volume fini) dans $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ (par exemple $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$) ne peut pas figurer comme groupe fondamental d'une variété projective lisse.

Afin de donner une brève indication sur la démonstration, rappelons qu'une représentation $\rho : \pi \to \mathrm{Gl}(d, \mathbb{C})$ est dite rigide si l'orbite de ρ sous l'action de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{C})$ par conjugaison sur l'espace des représentations $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{Gl}(d, \mathbb{C}))$ est ouverte. Donc cette orbite est une composante connexe, car $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{C}))$ est réductif. Par le dernier théorème de Simpson cette composante contient une VCH et donc la clôture de Zariski du groupe de monodromie est du type Hodge.

D'autre part, un résultat de Margulis implique que la représentation naturelle du réseau Γ est rigide et donc, si Γ était le groupe fondamental d'une variété kählérienne, $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ serait du type Hodge, conduisant à une contradiction.

Le lecteur trouvera les détails, ainsi que beaucoup d'autres exemples dans [Si3].

6. Modules de Hodge

Le but de ce paragraphe est de donner une introduction aux travaux de Morihiko Saito sur les modules de Hodge. Une des principales applications est à la cohomologie d'intersection traitée brièvement dans le §6.A.

6.A. Cohomologie d'intersection et L^2-cohomologie

Récemment, les groupes de cohomologie d'intersection $IH^w(X)$ (pour X

complexe et quasi-projective) ont été introduits par Goresky et MacPherson ([G-M]). Cette cohomologie est mieux adaptée aux variétés singulières que la cohomologie ordinaire. Par exemple on a une version de la dualité de Poincaré et les théorèmes de Lefschetz “fort et faible” sont valables. Cheeger, Goresky et MacPherson ([C-G-M]) ont énoncé la conjecture que $IH^w(X)$ porte une structure de Hodge pure de poids w dans le cas où est X projective. Saito [Sa1,2] l'a démontrée avec sa théorie des Modules de Hodge (voir dessous).

On peut se demander s'il est possible de généraliser la théorie de Hodge classique (valable pour des variétés kählériennes compactes) par exemple à des variétés quasi-projectives en utilisant une métrique de Kähler convenable de telle sorte que la cohomologie d'intersection d'une variété projective soit calculable en termes de formes harmoniques sur la partie lisse. En effet, on peut démontrer un théorème de décomposition de Hodge pour des métriques de Kähler complètes en utilisant les formes localement L^2 par rapport à la métrique. Dans ce cas, comme dans le cas classique, la décomposition des formes harmoniques en composantes de bidegré pur conduit à une décomposition de Hodge pour les groupes de cohomologie $H_2^w(X,\mathbb{C})$ pourvu que ce groupe soit de rang fini. Voir [Dem], §12 et [B-Z], §3. Donc, si on avait une identification de $H_2^w(X,\mathbb{C})$ avec $IH^w(X,\mathbb{C})$, on en déduirait une structure de Hodge sur la cohomologie d'intersection. Il y a toujours une application naturelle $H_2^w(X,\mathbb{C}) \to IH^w(X,\mathbb{C})$ qui est conjecturalement un isomorphisme. Cette conjecture est vraie pour des espaces à singularités isolées (cf. [Ch1], [Ch2] pour le cas de singularités coniques, et [Ohs1] pour le cas général) ; en dépit des résultats annoncés dans [Ohs2], il semble que le cas de singularités quelconques soit toujours ouvert.

Il faut remarquer que la conjecture de Cheeger, Goresky et MacPherson est plus précise que la seule existence d'une structure de Hodge sur $IH^w(X)$: on demande que

1. $IH^w(X)$ soit canoniquement isomorphe au groupe $H_2^w(X \setminus \mathrm{Sing}X)$, le groupe de cohomologie calculé en utilisant des formes localement L^2 par rapport à la *métrique de Fubini-Study*,
2. la structure de Hodge soit induite par cet isomorphisme.

C'est cette conjecture plus fine qui a été démontrée dans le cas des singularités coniques isolées, mais elle n'a pas été démontrée en général. Voir [B-Z] § 3 pour une discussion détaillée.

Deligne a généralisé le théorème de décomposition de Hodge en remplaçant $\mathbb{C}$ par une variation de structures de Hodge H_X ayant pour base X une variété kählérienne compacte. Le même argument fonctionne dans le cadre L^2 avec X quasi-projective admettant une métrique kählérienne complète, pourvu que le groupe $H_2^w(X,H_X)$ soit de dimension finie. Il a montré dans ce cas que $H_2^w(X,H_X)$ admet une structure de Hodge pure de poids $w+v$ (voir [Zu]).

Ensuite, Cattani, Kaplan, Schmid [C-K-S2] et Kashiwara et Kawai [K-K] ont montré que si $\overline{X}$ est une compactification lisse de X telle que $\overline{X} \setminus X$ est un diviseur à croisements normaux, pour une métrique de type Poincaré au voisinage des croissements, $IH^w(\overline{X}, H_X)$ est isomorphe à $H_2^w(X, H_X)$ et donc porte une structure de Hodge de poids $w+v$.

6.B. Travaux de Saito

Soit S une variété complexe et H_S un système local d'espaces vectoriels réels. Le fibré holomorphe associé $\mathcal{H}_S = H_S \otimes \mathcal{O}_S$ admet une connexion plate $\nabla = 1 \otimes d$. Donc $\mathcal{D}_S$, le faisceau d'opérateurs différentiels sur S agit sur $\mathcal{H}_S$ (l'action d'un champs holomorphe ξ est donnée par $s \mapsto \nabla_\xi s$) munissant $\mathcal{H}_S$ d'une structure de $\mathcal{D}_S$- module. En effet, un tel $\mathcal{D}_S$-module est un $\mathcal{D}_S$-module *cohérent* et même *holonome*. Les définitions de ces notions peuvent être trouvées en [Bo], où on peut aussi trouver des détails de la discussion qui suit.

Dans le cadre de la géométrie algébrique, on rencontre classiquement la situation où S est un ouvert de Zariski d'une variété algébrique projective X et $D := X \setminus S$ est un diviseur. Dans ce cadre, on a la notion de connexion ayant des *singularités régulières* le long de D et on sait qu'ici ∇ admet de telles singularités. On peut même montrer que $(\mathcal{H}_S, \nabla) \mapsto H_S$ établit une équivalence entre la catégorie des fibrés holomorphes sur S munis d'une connexion ayant des singularités régulières (le long de D) et la catégorie des systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes (*correspondance de "Riemann-Hilbert"*).

On peut étendre la notion de régularité aux $\mathcal{D}_S$-modules holonomes et dans ce cadre il y a aussi une correspondance de "Riemann-Hilbert". Pour expliquer cela on a besoin de la notion de *faisceau pervers*. Remarquons d'abord que la structure de $\mathcal{D}_S$-module permet de définir un complexe, dit *complexe de De Rham* $\mathrm{DR}(\mathcal{M}) := \Omega_S^\bullet \otimes \mathcal{M}$. On regarde ensuite ce complexe dans une catégorie dérivée convenable où, rappelons-le, on identifie deux complexes lorsque un morphisme de l'un dans l'autre induit un isomorphisme entre les faisceaux de cohomologie [Ill]. On dit alors qu'ils sont *quasi-isomorphes*. Dans le cas d'un $\mathcal{D}_S$-module provenant d'un système local on a seulement un groupe de cohomologie en dimension zéro : le système local lui-même (lemme de Poincaré holomorphe). Et donc dans ce cas $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S)$ est quasi-isomorphe à H_S.

Une construction importante dans cette catégorie est celle de la *dualité de Verdier*. On ne donne pas les détails ici ; il suffit de savoir que le complexe dual au sens de Verdier à $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S)$ est représenté par le complexe $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S^\vee)$ et donc dans la catégorie dérivée le dual de H_S est $H_S^\vee$.

On dit qu'un complexe $\mathcal{K}^\bullet$ de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels est *pervers* si le faisceau de cohomologie en dimension j de $\mathcal{K}^\bullet$ ainsi que celui du dual de Verdier est constructible de support de dimension au plus égal à $-j$. Un mot d'explication : la convention est telle que le complexe de De Rham d'un $\mathcal{D}_S$-module commence en degré $-n$ et donc un système local H_S est pervers car le support de H_S et celui de son dual est S et donc de dimension n. Plus généralement, un système local H_S sur un ouvert dense de Zariski S d'une variété algébrique X s'étend de façon minimale en un faisceau pervers $IC(H_S)$ sur X. Dans ce cas, si X est compacte on a $IH^w(X, H_S) = H^w(X, IC(H_S))$.

On pourra ainsi regarder un faisceau pervers comme une généralisation d'un système local ; la correspondance qui associe à un $\mathcal{D}_S$-module holonome son complexe de De Rham induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_S$-modules holonomes à singularités régulières et la catégorie des faisceaux pervers de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (théorème de la correspondance de Riemann-Hilbert [Kas], [Me1, Me2]). Le lecteur pourra se convaincre que ce cadre nouveau est une généralisation conséquente du §2.

Maintenant on suppose, que le système local H_S porte une variation de structure de Hodge de poids w. La filtration de Hodge induit une filtration dite *bonne* $\mathcal{M}_p := \mathcal{F}^{-p}$, c'est-à-dire l'action des opérateurs d'ordre $\leqslant 1$ envoient $\mathcal{M}_p$ dans $\mathcal{M}_{p+1}$ (traduction de la transversalité de Griffiths). Un tel $\mathcal{D}_S$-module filtré est un exemple d'un *module de Hodge de poids* w. La définition de ces objets est très indirecte, comme on va le voir, et c'est un théorème difficile de prouver qu'une variation de structure de Hodge est un module de Hodge. Voir [Sa] pour une démonstration ainsi que pour des détails de la discussion qui suit.

Saito définit les modules de Hodge de façon récurrente. Il commence par ceux qui ont leur support dans un point $s \in S$: ce sont simplement les structures de Hodge (réelles) avec filtration de Hodge croissante ($F_p := F^{-p}$). En prenant l'image directe par l'inclusion $s \to S$ on obtient un faisceau constructible dans S considéré comme faisceau pervers et donc comme $\mathcal{D}_S$-module. La filtration de Hodge en en fait un $\mathcal{D}_S$-module filtré et on obtient un objet dans la catégorie $MF_h(\mathcal{D}_S)$ des $\mathcal{D}_S$-modules filtrés (pour obtenir une structure réelle, il faut prendre le produit fibré avec la catégorie des faisceaux pervers réels).

Dans le §4.C, on a rappelé la définition des *cycles proches* et *cycles évanescents* relatifs aux zéros d'une fonction holomorphe $g : S \to \mathbb{C}$ non-constante : $\psi_g(\mathbb{C}_S) = i^*Rk_*\mathbb{C}_{\tilde{S}} = i^*Rk_*k^*\mathbb{C}_S$ et $\phi_g(\mathbb{C}_S)$ étant le cône sur $\{\mathbb{C}_{S_0} = i^*\mathbb{C}_S \to i^*Rk_*k^*\mathbb{C}_S\}$. Si on remplace $\mathbb{C}_S$ par un complexe borné $\mathcal{K}^\bullet$ sur S, on arrive à $\psi_g(\mathcal{K}^\bullet)$ resp. $\phi_g(\mathcal{K}^\bullet)$. On a vu que la monodromie agit sur ces complexes et induit des filtrations par le poids.

Gabber (voir [Bry]) a montré que pour $\mathcal{K}^\bullet$ pervers, ces complexes (décalés par $[-1]$) sont des faisceaux pervers sur S_0 et Saito a proposé une construction des foncteurs ϕ et ψ au niveau des $\mathcal{D}_S$-modules holonomes filtrés. En particulier les modules "proches" et "évanescents" qui résultent admettent des filtrations par le poids $W_\bullet$. Saito maintenant complète la définition récurrente de ses modules de Hodge en deux étapes : d'abord il se restreint à une sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_S)$ telle que ses objets possèdent de bonnes propriétés par rapport aux foncteurs ϕ et ψ et ensuite, il demande qu'un module $\mathcal{M}$ dans cette sous-catégorie soit un module de Hodge si et seulement si c'est le cas pour les modules W-gradués de $\psi_g(\mathcal{M})$ et $\phi_g(\mathcal{M})$ (plus précisément : il faut restreindre au sous-module maximal sur lequel T agit de façon unipotente) pour n'importe quelle fonction $g : S \to \mathbb{C}$. Puisque ces modules on un support de dimension strictement plus petite et puisqu'on connaît les modules de Hodge à support de dimension 0, la définition récurrente est ainsi complète.

L'application la plus célèbre du fait qu'une variation de structure de Hodge

H_S de poids v paramétrée par une variété analytique complexe S est un module de Hodge de poids v est le théorème suivant qu'on a déjà annoncé : lorsque S est un ouvert de Zariski dans une variété kählérienne compacte X, le groupe $IH^w(X, H_S)$ porte une structure de Hodge polarisée de poids $v + w$. En effet, on a vu que $IH^w(X, H_S) = H^w(X, IC(H_S))$ et que H_S et donc aussi $IC(H_S)$ sont des modules de Hodge de poids v. Donc $H^w(X, IC(H_S))$ en tant que module de Hodge supporté dans un point, porte une structure de Hodge (de poids $v + w$).

En particulier, la structure polarisée sur $IH^w(X, \mathbb{Q})$ est un facteur direct de la structure pure sur $IH^w(\tilde{X}, \mathbb{Q})$ où $\tilde{X}$ est une résolution des singularités de X.

Partie II.
Symétrie miroir et variétés de Calabi-Yau

7. Introduction à la symétrie miroir

La symétrie miroir est un phénomène qui a une origine “physique”. Il n’y a pour l’instant que des définitions mathématiques conjecturales. Le but de ce paragraphe est de suggérer une définition très incomplète de ce phénomène et de mettre en évidence quelques implications mathématiques. Le cadre est la classe des variétés dites de Calabi-Yau ; nous décrivons ces variétés en détail.

7.A. Motivation de la symétrie miroir

La symétrie miroir est un phénomène d’origine “physique” qui n’a donc pas à ce jour une définition mathématique définitive. Rappelons pour exciter la curiosité du lecteur la définition qui apparaît dans la littérature physique [G-P], [C-O-G-P], [P]. Le phénomène symétrie miroir vient de l’étude des théories superconformes (2,2) avec charge centrale $c = 0$. Les propriétés des champs conformes de ces théories sont liées à la géométrie des modèles sigma non linéaires basés sur des variétés de Calabi-Yau. Une définition précise de ces variétés est reportée au paragraphe suivant. Disons seulement que ces variétés apparaissent pour assurer l’invariance conforme. Dans ce cadre assez hostile pour le mathématicien géomètre, les physiciens ont mis en évidence une correspondance remarquable entre les propriétés abstraites des champs conformes et les propriétés géométriques des réalisations en termes de modèles sigma. Cette correspondance conduit naturellement à déformer la structure complexe et (ou) une classe de Kähler sur une variété de Calabi-Yau. Ce sont les modèles A et B des physiciens [G-P]. L’asymétrie apparente qui n’est qu’une ambiguïté de signe, conduit à des modèles géométriques définitivement distincts réalisant une même théorie conforme des champs. Pour une variété de Calabi-Yau X, de fibré tangent holomorphe T_X, les objets liés à la même théorie $H^1(X, T_X)$ et $H^1(X, T_X^*) = H^1(X, \Omega_X^1)$ sont totalement différents du point de vue de la géométrie. En fait dans le §7.C on verra que $\dim H^1(X, T_X)$ est le nombre de paramètres pour la structure complexe, tandis que $\dim H^1(X, T_X^*) = h^{1,1}(X)$ est le nombre maximal de classes de Kähler indépendantes sur X.

Ceci conduit à postuler que les variétés de Calabi-Yau (on se limite à la dimension trois) doivent apparaître par paires, disons X et X^* qui réalisent ces deux modèles. On dit que X^* est *la variété miroir* de X (et vice-versa). Il y a peut-être une définition physique plus définitive mais non assimilable telle quelle mathématiquement, que l’on peut résumer en une identité

$$Z = Z^*$$

entre fonctions de partition (intégrales de Feynman). Les implications mathématiques les plus naïves sont au niveau des nombres de Hodge de X et X^*, la relation

de symétrie
$$h^{2,1}(X^*) = h^{1,1}(X); \quad h^{1,1}(X^*) = h^{2,1}(X).$$

Naturellement cette seule symétrie apparente n'est pas suffisante pour faire de X^* la variété miroir de X. Entre X et X^* existe une relation plus profonde qui relie l'espace des déformations de la structure complexe de X à l'espace des déformations de la classe de Kähler de X^* et vice-versa. Cette relation est à l'origine des applications conjecturales à des propriétés de géométrie énumérative sur X, comme esquissées dans le §10. Le lecteur trouvera dans le texte de C. Voisin [V] une explication plus détaillée. Dans la suite, on va s'attacher à préciser les aspects qui relèvent de la théorie de Hodge. Ces aspects sont au nombre de trois :

i) symétrie des nombres de Hodge,
ii) définition de l'accouplement de Yukawa,
iii) utilisation de la structure Hodge limite pour étudier le comportement asymptotique de l'accouplement de Yukawa.

Ces points sont traités dans les paragraphes qui suivent.

7.B. Construction des variétés de Calabi-Yau

Du point de vue de la géométrie algébrique, une variété de Calabi-Yau est une variété (algébrique) projective lisse (complexe) V, telle que le faisceau canonique K_V est trivial ($K_V = \Omega_V^n \cong \mathcal{O}_V$), et $h^{p,0} = 0$ pour $p = 1, \ldots, n-1$, ($n = \dim V$). On se limite au cas $n = 3$; noter que $h^{1,0} = 0$ implique $h^{2,0} = 0$, car par dualité de Serre $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ est le dual de $H^2(V, \mathcal{O}_V)$, vu que $K_V \cong \mathcal{O}_V$. On exige aussi que le groupe fondamental $\pi_1(V)$ soit fini, pour éviter des situations marginales. En géométrie différentielle ce sont les variétés kählériennes à courbure de Ricci nulle (se reporter à [Dem]), de groupe d'holonomie exactement $SU(3)$. Directement lié à ceci, il y a le résultat de classification suivant, dû à plusieurs auteurs (voir [Beau]) : Soit X une variété kählérienne compacte de première classe de Chern nulle. Il existe un revêtement fini non ramifié $\widetilde{X} \to X$ tel que $\widetilde{X}$ est isomorphe à un produit $T \times \big(\prod_i V_i\big) \times \big(\prod_j W_j\big)$, où T est un tore complexe, V_i est une variété de Calabi-Yau simplement connexe, et W_j est une variété symplectique (il existe une 2-forme holomorphe qui est non dégénérée en tout point).

Dans le contexte des variétés de Calabi-Yau, le très important théorème de Yau [Y1] (conjecture de Calabi) joue bien sûr un role clé :

Théorème. (Yau) *Soit X une variété de Calabi-Yau avec une métrique kählérienne g de forme de Kähler $\omega \in H^{1,1}(X)$. Il existe une unique métrique kählérienne g_Y à courbure de Ricci nulle (métrique de Yau) telle que ω_Y étant sa forme associée, on ait $[\omega] = [\omega_Y] \in H^{1,1}(X)$.*

Il est aisé de construire des exemples de variétés de Calabi-Yau. Soient $H_1, \ldots, H_r$ des hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ ($N = r+3$), de degré respectifs $d_1, \ldots, d_r$

avec $N+1=\sum_i d_i$. Si l'intersection $V=\bigcap_{i=1}^{r} H_i$ est transversale, V est alors lisse, et la formule d'adjonction montre que $K_V \cong \mathcal{O}_V$, donc V est de Calabi-Yau (on a ici $\pi_1(V)=0$).

Parmi les exemples, on peut prendre pour V une hypersurface de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$ (quintique), une intersection de deux hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^5$, de trois quadriques de $\mathbb{P}^6$ (voir le §10 pour ces exemples).

On peut plus généralement remplacer $\mathbb{P}^N$ par un produit $\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}$ ou toute autre variété, dont le faisceau anticanonique est ample (i.e. : K_V^{-1} est ample). Une hypersurface est alors spécifiée par son équation, i.e. une forme de multidegré $d_i=(d_{1i},\ldots,d_{si})$. On forme ainsi un tableau :

	H_1		H_r
n_1	d_{11}	$\cdots$	d_{1r}
n_2	d_{21}	$\cdots$	d_{2r}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n_s	d_{s1}	$\cdots$	d_{sr}

et V est l'intersection $V=H_1\cap\cdots\cap H_r$, avec $\dim V=3$ si $\sum_i n_i=r+3$. La condition $K_V\cong\mathcal{O}_V$ équivaut à $\sum_{j=1}^{r} d_{ij}=n_i+1$, $(i=1,\ldots,s)$.

7.1. Exemple. (variété de Tian-Yau)

	H_1	H_2	H_3
3	3	0	1
3	0	3	1

On peut prendre pour V l'intersection complète des hypersurfaces $\sum_{i=0}^{3} X_i^3=0$, $\sum_{i=0}^{3} Y_i^3=0$ et $\sum_{i=0}^{3} X_iY_i$ dans $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$, où (X_i), (Y_i) sont les coordonnées homogènes dans les deux exemplaires de $\mathbb{P}^3$. Noter que dans cet exemple, la permutation circulaire des coordonnées, fournit une action libre du groupe $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et $W=V/G$ est alors une variété de Calabi-Yau avec pour caractéristique d'Euler -6 (“modèle de nombre de génération 3” donc “physiquement acceptable”).

A ce stade, la question principale peut se résumer à : quelle construction géométrique, la variété de Calabi-Yau X étant donnée, va conduire à la variété miroir X^*, en fait à une “variété candidate”.

Des arguments issus de la physique laissent penser que dans beaucoup de cas, X^* s'obtiendra à partir de X en faisant un quotient par un groupe fini G d'automorphismes de X, le groupe G agissant trivialement sur $H^{3,0}(X)$, pour assurer à une désingularisation convenable de X/G le caractère Calabi-Yau ; c'est la méthode des orbifolds des physiciens. A ce stade des difficultés variées apparaissent ; elles sont liées aux singularités qui résultent de l'existence de points fixes, car l'action de G n'est pas nécessairement libre. Si $\hat{X}$ est une résolution des singularités de X/G, avec $K_{\hat{X}} \cong \mathcal{O}_{\hat{X}}$ (on peut prouver qu'une telle résolution existe dans essentiellement tous les cas [B-M]), se pose le problème du calcul des nombres de Hodge $H^{p,q}(\hat{X})$, disons à partir de ceux de X et des données liées à l'action de G sur X. Pour la caractéristique d'Euler $\chi = \sum(-1)^{p+q}h^{p,q}$ on a la formule de Dixon-Vafa-Witten

$$\chi(\hat{X}) = \frac{1}{|G|} \sum_{gh=hg} \chi(X^g \cap X^h)$$

où la somme porte sur les couples g, h d'éléments de G qui commutent ($gh = hg$) et $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, la variété des point fixes de g. Noter que si $\hat{X}$ est le miroir de X, $\chi(\hat{X}) = -\chi(X)$.

Assez remarquablement, pour une formule analogue a été proposée par Batyrev et Zaslow [Za] pour les nombres de Hodge. Cette formule conjecturale est :

$$h^{p,q}(\hat{X}) = \sum_{\{g\}} \dim\left(H^{p-f_g, q-f_g}(X^g)^{C(g)}\right)$$

où $C(g)$ est le commutant de g dans G, et $\{g\}$ la classe de conjugaison de g. Pour définir l'entier f_g on regarde l'action de l'automorphisme g_x induit sur l'espace tangent T_xX à $x \in X^g$. Du fait que g induit l'identité sur $H^{3,0}$, le déterminant de g_x est 1 et donc, si $e^{-2\pi i\lambda_j}$, $0 < \lambda_j < 1$ sont les valeurs propres de g_x sur l'espace T_xX/T_xX^g normal à X^g (ces valeurs sont indépendantes du choix du point $x \in X^g$), la somme $f_g = \sum_j \lambda_j$ est bien un entier.

Il n'est pas difficile de vérifier que la structure du diamant de Hodge d'une variété de Calabi-Yau est préservée et donc que les $h^{p,q}(\hat{X})$ sont spéculativement les nombres de Hodge d'une variété de Calabi-Yau. Cela a été vérifié pour la construction de la variété miroir par la méthode des polyèdres de Batyrev.

Pour avoir assez d'arguments objectifs validant la distribution des variétés de Calabi-Yau en paires (avec peut-être des exceptions), il est nécessaire d'élargir le procédé de construction des variétés de Calabi-Yau, car si X est une hypersurface de $\mathbb{P}^4$, il y a peu de chances que $\hat{X}$ soit aussi une hypersurface. Naturellement on est amené à remplacer $\mathbb{P}^n$ ou $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ dans la construction du début par un espace projectif avec poids, ou un produit de tels espaces. Considérons un espace projectif avec poids $\mathbb{P}^r(k_1, \ldots, k_s)$, qui est la variété algébrique ayant pour points les $(r+1)$-uples $(z_1, \ldots, z_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\}$, modulo la relation d'équivalence

$$(z_1, \ldots, z_r) \sim (\lambda^{k_1} z_1, \ldots, \lambda^{k_{r+1}} z_{r+1}) \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*).$$

On vérifie que la construction de l'espace projectif $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}^r(1, \ldots, 1)$ se généralise à cette situation, qui peut cependant conduire à une variété singulière. Une hypersurface de degré d est le lieu des zéros d'un polynôme quasi-homogène $P(z) = \sum_{i_1k_1+\cdots i_{r+1}k_{r+1}=d} c_{i_1\cdots i_{r+1}} z_1^{i_1}\cdots z_{r+1}^{i_{r+1}}$. Si $\{P = dP = 0\}$ entraîne $z = 0$ dans $\mathbb{C}^{r+1}$ on dit que P est *transverse*. Un tel polynôme définit un hypersurface lisse et si $d = \sum k_i$ conduit à une hypersurface de Calabi-Yau ; on supposera $r = 4$, pour obtenir une hypersurface de dimension 3. L'expérience montre que dans la liste des poids $\{k_i\}$ tels qu'il existe un polynôme quasi-homogène transverse de degré $d = \sum k_i$, la distribution des nombres de Hodge $(h^{1,1}, h^{2,1})$ est essentiellement symétrique, c'est-à-dire que dans 90% des cas, la paire $(h^{2,1}, h^{1,1})$ apparaît. La meilleure façon d'expliquer l'absence de symétrie complète est d'invoquer la construction de la symétrie miroir par des méthodes toriques proposée par Batyrev [Ba]. Brièvement la dualité naïve $X \leftrightarrow X^*$ coïncide dans les construction ci-dessus avec la dualité combinatoire des polyèdres convexes qui ont la propriété de reflexivité (loc. cit.), le polyèdre étant le polyèdre de Newton du polynôme P. Il y a alors des formules pour obtenir de manière purement combinatoire les nombres de Hodge. L'exemple de l'hypersurface quintique peut être traité par par ce procédé (voir le §10).

Le lecteur consultera l'article [H-K-S-Y] pour une discussion détaillée sur l'utilisation des méthodes toriques.

7.C. Déformations

Les nombres de Hodge d'une variété de Calabi-Yau sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

On a $h^{2,1} = \dim H^1(\Omega^1_X) = \dim H^1(X, T_X)$ car $T_X = T_X \otimes \Omega^3_X \cong \Omega^1_X$. Dans le paragraphe 3.C. (voir 3.8) on a vu que ce nombre donne le nombre de paramètres pour la structure complexe, s'il existe une déformation verselle (avec une base non-singulière).

On s'intéresse à la structure de Hodge sur $H^3(X, \mathbb{R})$ polarisée par la forme d'intersection (alternée et unimodulaire). On a

$$H^3(X, \mathbb{C}) = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3}$$

et

$$F^3 = H^{3,0},\ F^2 = H^{3,0} \oplus H^{2,1},\ F^1 = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2}.$$

Posons $b = h^{2,1}$. Alors F^2 est un sous-espace totalement isotrope de $H^3(X, \mathbb{C})$, pour la forme alternée Q (cup-produit), et $F^1 = (F^3)^\perp$. Le domaine des périodes pour les structures de Hodge de ce type est de la forme $D(b) = \mathrm{Sp}(2b+2, \mathbb{R})/U(1) \times U(b)$. C'est un domaine de dimension $\frac{1}{2}(b+1)(b+2)$.

Dans le §3.C on a brièvement traité les déformations et on a vu qu'on ne peut pas attendre en général qu'il existe une déformation verselle avec une base non-singulière. Mais pour les variétés de Calabi-Yau c'est effectivement le cas comme le montre le théorème de Tian, Todorov et Bogomolov (voir [T]) :

7.2. Théorème. *Une variété de Calabi-Yau possède une déformation locale universelle de base S lisse.*
[Il suffit que la variété soit kählérienne avec une première classe de Chern nulle.]

Donc ici $h^{2,1}$ est réellement le nombre de paramètres effectifs pour décrire les variations de la structure complexe [C-O].

On suppose maintenant que la base S est simplement connexe. Alors l'application de périodes est une application holomorphe $p : S \to D(b)$. Elle se factorise en $q : S \to \mathbb{P}^{2b+1}$, ou $\mathbb{P}^{2b+1}$ est l'espace projectif des droites $H^{3,0}(X_s) \subset H^3(X_s, \mathbb{C})$ car p décrit la position de $H^{3,0}(X_s) \oplus H^{2,1}(X_s)$ dans le groupe de cohomologie $H^3(X_s)$ tandis que q décrit la position de $H^{3,0}(X_s)$.

Maintenant nous voulons expliquer le théorème de Bryant et Griffiths de [B-G]. On peut trivialiser localement le système local $\{H_3(X_s, \mathbb{Z})\}$, au moyen d'une base symplectique, donc une base de 3 cycles $\{\gamma_i, \delta_j\}_{i,j=0,\ldots,b}$, avec relativement au produit d'intersection :

$$(\gamma_i, \delta_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad (\gamma_i, \gamma_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0.$$

La base Poincaré duale $\{\alpha_i, \beta_j)_{i,j=0,\ldots,b}$ fournit une trivialisation du système local $\mathbb{R}^3 f_*(\mathbb{Z})$. Soit ω une section locale de $F^3 = f_*(\omega^3_{X/S})$ qui trivialise ce fibré. On considère les périodes de ω :

$$\zeta_i(s) = \int_{\gamma_i} \omega(s), \qquad \xi_j(s) = \int_{\delta_j} \omega(s)$$

c'est-à-dire :

(per) $$\omega = \sum_i \zeta_i \alpha_i + \sum_j \xi_j \beta_j.$$

L'application des périodes "partielle" $q : S \to \mathbb{P}^{2b+1}$ se décrit comme

$$s \mapsto (\zeta_0(s), \ldots, \zeta_b(s), \xi_0(s), \ldots, \xi_b(s))$$

et on peut regarder "la moitié" $q' : S \to \mathbb{P}^b$ donnée par les γ-périodes $s \mapsto (\zeta_0(s), \ldots, \zeta_b(s))$

7.3. Théorème (Bryant-Griffiths). *L'application q' est une immersion de sorte que les γ-périodes $(\zeta_0, \ldots, \zeta_b)$ servent comme paramètres "homogènes" sur S et les δ-périodes ξ_b sont des fonctions holomorphes de $\zeta_0, \ldots, \zeta_b$.*

Indication sur la preuve : Elle est basée sur une réinterprétation de l'application des périodes q comme une immersion de Legendre. Pour être précis, une variété de contact est une paire $(M, \mathcal{L})$ avec M une variété complexe de dimension impaire $2m+1$ et $\mathcal{L} \subset \Omega^1$ un sous fibré en droites du fibré cotangent qui est non-dégénéré, ce qui veut dire que pour toute section locale $\omega \neq 0$ de $\mathcal{L}$,

$$\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0.$$

Une variété de Legendre associée à $(M, \mathcal{L})$ est une immersion $f : S \to M$ avec $\dim S = m$ telle que $f^*\omega = 0$ pour toute section locale ω de $\mathcal{L}$.

Si $H = H^3(X, \mathbb{C})$, la forme d'intersection sur H définit une structure de contact sur $\mathbb{P}(H)$ (X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, et $m = h^{2,1}$). En fait, on peut supposer qu'on a choisi une base symplectique de H. Soit $\{p_1, \dots, p_{m+1}, q_1, \dots, q_{m+1}\}$ le système de coordonnées correspondant. Il suffit de spécifier une 1-forme ω sur les ouverts standards de $\mathbb{P}(H)$, disons sur $U_i = \{p_i \neq 0\}$:

$$\omega_i = -dq_i + \sum_{j\neq i}(q_j dp_j - p_j dq_j).$$

On vérifie facilement que ω_i est une base locale sur U_i d'un sous-faisceau de $\Omega^1_{\mathbb{P}(H)}$ de rang un, localement libre et isomorphe à $\mathcal{O}(-2)$ (comparer ω_j et ω_k sur $U_j \cap U_k$). On a clairement $\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0$ et donc on obtient une structure de contact sur $\mathbb{P}(H)$.

Il s'agit de prouver que l'application des périodes est une immersion de Legendre. C'est d'abord une immersion (différentielle injective en tout point), par le fait que la différentielle dq, c'est-à-dire δ (§3.C) est injective. Le lecteur le vérifiera facilement en tenant compte de la trivialité de la classe canonique. La propriété de Legendre est une reformulation des propriétés infinitésimales de l'application des périodes développées au §3.C (se reporter au §10.A). Pour conclure on utilise les théorèmes de structure des variétés de contact détaillés dans [B-G]. $\square$

La différentielle dq étant injective, les dérivées $\partial q/\partial\zeta_i$, $i = 0, \dots, b$ sont indépendantes, et donc les $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\zeta_i}}\omega(s) \in F^2(X_s)$ forment une base.

On peut maintenant explicitement décrire l'application des périodes $p : S \to D(b)$ comme donnée par la matrice

$$\varpi = \Big(\int_{\gamma_k} \frac{\partial\omega(s)}{\partial\zeta_i}, \int_{\delta_k} \frac{\partial\omega(s)}{\partial\zeta_i}\Big),$$

matrice de type $(b+1) \times (2b+2)$ qui décrit la position de $F^2(X_s)$ dans $H^3(X_s)$. De la relation (per) ci-dessus on tire que $\varpi = [\mathbb{1}, \tau]$, avec τ_{ij} symétrique. Du fait que la forme $-\mathrm{i}\omega \wedge \bar{\omega}$ ainsi que les formes $\mathrm{i}\alpha \wedge \bar{\alpha}$ pour $\alpha \in H^{2,1}$ sont positives, on obtient que $\operatorname{Im}\tau$ est de signature $(1, b)$. On peut aussi contrôler qu'un changement de base symplectique transforme τ en :

$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2b+2, \mathbb{Z})$$

comme dans le demi-espace de Siegel (§3.B).

8. Cohomologie d'une hypersurface

On considère d'abord une variété projective lisse P de dimension $n+1$ et une hypersurface $X \subset P$ lisse. Nous voulons relier les groupes de cohomologie de $P \smallsetminus X$ et les groupes de cohomologie primitive de X. Ensuite on applique cette construction à $\mathbb{P}^{n+1}$ où on utilise les formes rationnelles ayant des pôles le long de X. Cela donne la description de Griffiths ([Grif2] de la cohomologie primitive d'une hypersurface. Cette description a été généralisée par Dimca [Dim] et par d'autres au cas d'une intersection complète.

8.A. Cohomologie du complémentaire

Rappelons d'abord le théorème de Lefschetz "faible" qui implique que la cohomologie X diffère de celle de P seulement en rang n :

8.1. Théorème (Lefschetz). *Soit X très ample et soit $i : X \to P$ l'injection. On a :*

$$i^* : H^m(P,\mathbb{C}) \to H^m(X,\mathbb{C}) \quad \textit{est} \begin{cases} \textit{un isomorphisme si} & m \leqslant n-1 \\ \textit{injectif si} & m = n \end{cases}$$

On aura besoin de la conséquence suivante :

8.2. Corollaire. *Soit X un diviseur très ample. Soit*

$$i_* : H^n(X,\mathbb{C}) \to H^{n+2}(P,\mathbb{C})$$

l'adjoint de $i^* : H^n(P,\mathbb{C}) \to H^n(X,\mathbb{C})$ par rapport au cup-produit. Alors i_* est surjectif et le noyau est contenu dans la cohomologie primitive $\mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{C})$ *et on a* $\ker i_* = \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{C})$ *si* $\mathrm{Prim}^n(P,\mathbb{C}) = 0$.

Preuve. La première assertion est évidente. Le noyau consiste en les classes $[\alpha]$ telles que $\int_P \partial^n \alpha \wedge \beta = \int_P \alpha \wedge i^*\beta = 0$ quel que soit $[\beta] \in H^n(P,\mathbb{C})$. En particulier on peut prendre $[\beta]$ de la forme (classe de Kähler ω) $\wedge\, i^*$ (classe d'une $n-2$-forme sur P). Mais $i^* : H^{n-2}(P,\mathbb{C}) \to H^{n-2}(X,P)$ est un isomorphisme (théorème de Lefschetz de nouveau) et donc $[\alpha] \wedge \omega = 0$, c'est-à-dire $[\alpha]$ est primitive. □

L'application i_* apparaît dans la suite exacte de Gysin :

$$\cdots \to H^{m-2}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^m(P,\mathbb{Z}) \to H^m(P \smallsetminus X,\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\partial} H^{m-1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^{m+1}(P,\mathbb{Z}) \ \cdots,$$

obtenue comme suit. Soit $T \subset P$ un voisinage tubulaire de X dans P. Comme X est un rétracte de T on a un isomorphisme $H^k(T,\mathbb{Z}) \to H^k(X,\mathbb{Z})$ tandis que $H^k(T, T \smallsetminus X, \mathbb{Z}$ est isomoprhe à $H^{k-2}(X,\mathbb{Z})$ ('isomorphisme de Thom'). Aussi, l'inclusion $(T, T \smallsetminus X) \to (P, P \smallsetminus X)$ est une excision et donc $H^k(P, P \smallsetminus X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $H^k(T, T \smallsetminus X, \mathbb{Z})$. La suite longue du couple $(P, P \smallsetminus X)$ donne alors la suite de Gysin.

Il suffit donc de calculer la partie "pertinente" de la cohomologie de $P \smallsetminus X$. Ce calcul se fait en utilisant des complexes de formes rationnelles ayant seulement des pôles le long de X.

Rappelons d'abord le lemme de Poincaré holomorphe (voir le §1) :

$$\forall p \geqslant 1,\, d\alpha = 0,\, \alpha \in \Omega_P^p \quad \Longrightarrow \quad \alpha = d\beta,\, \beta \in \Omega_P^{p-1}.$$

Cette assertion est équivalente à l'exactitude du complexe $\Omega_P^\bullet$. Ce complexe donne une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$. Le groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^m(\Omega_P^\bullet)$ est donc égal à $H^m(P, \mathbb{C})$. De manière analogue $\Omega_{P \smallsetminus X}^\bullet$ calcule la cohomologie de $P \smallsetminus X$.

On passera aux formes ayant des pôles et on pose :

$$\begin{aligned}
\Omega_P^p(k) &:= \Omega_P^p \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(kX) \quad \text{(faisceau de p-formes méromorphes} \\
&\qquad \text{ayant au plus un pôle d'ordre k le long de X)} \\
\mathcal{Z}_P^p(k) &:= \{\omega \in \Omega_P^p(k) \mid d\omega = 0\} \\
\Omega_P^p(*) &:= \text{faisceau de p-formes méromorphes} \\
&\qquad \text{ayant des pôles seulement le long de X.}
\end{aligned}$$

L'observation simple mais néanmoins centrale est :

8.3. Calcul. *Soit $\alpha \in \mathcal{Z}_P^p(k), k \geqslant 2$. Alors, si $f = 0$ est une équation locale de X, on a :*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{df \wedge \beta}{f^k} + \frac{\gamma}{f^{k-1}}, \qquad \text{avec } \beta,\, \gamma \text{ holomorphes sans } df \\
&= -\frac{1}{k-1} d\left(\frac{\beta}{f^{k-1}}\right) + \frac{\gamma + \frac{1}{k-1} d\beta}{f^{k-1}}.
\end{aligned}$$

En d'autre termes, si l'ordre du pôle est $\geqslant 2$ on peut, localement, baisser l'ordre modulo des formes exactes.

Finalement, on arrive à une décomposition

$$\alpha = \beta \wedge \frac{df}{f} + \gamma,$$

avec β et γ holomorphes. Le *résidu* de α est la forme $\operatorname{res}(\alpha) = \beta | X$, définissant une flèche

$$\operatorname{res} : \mathcal{Z}_P^p(1) \to \Omega_X^{p-1}.$$

L'idée est d'utiliser ces calculs en cohomologie de De Rham, utilisant des formes C^∞ et des partitions de l'unité pour globaliser. On commence par une forme rationnelle sur P de type $(n+1, 0)$ et avec au plus un pôle le long de X d'ordre disons $\leqslant n+1-p$. On la regarde comme forme C^∞ sur $P \smallsetminus X$ et on baisse l'ordre du pôle utilisant le calcul précédent. On obtient une forme C^∞ fermée de type $(n+1, 0) + (n, 1)$ à cause de $d\beta$ (β et γ ne restent pas nécessairement holomorphes quand on globalise avec des partitions d'unité). Après $n-p$ étapes on arrive à une forme fermée de type $(n+1,0)+\cdots+(p+1,n-p)$ ayant un pôle d'ordre $\leqslant 1$. Prenant son résidu on trouve une forme C^∞ sur X de type $(n,0)+\cdots+(p,n-p)$ qui est fermée. Cette forme répresente une classe dans $F^pH^n(X,\mathbb{C})$. On peut vérifier que cette construction est bien définie au niveau des classes de cohomologie et que la flèche :

$$\Gamma(\Omega_P^{n+1}(n-p+1)/d\Gamma(\Omega_P^n(n-p)) \to F^pH^n(X,\mathbb{C})$$

est injective et s'envoie surjectivement sur la partie primitive, au moins dans des cas favorables comme $P=\mathbb{P}^{n+1}$. On va donner une autre démonstration de cette identification qui reste dans le cadre de la géométrie algébrique.

On a d'abord besoin du lemme de Poincaré dans le cadre des formes avec pôles :

8.4. Lemme.

i) On suppose $p \geqslant 1$. Le complexe (commençant en degré p) :

$$\mathcal{P}_P^p := \left\{\Omega_P^p(1) \xrightarrow{d} \Omega_P^{p+1}(2) \xrightarrow{d} \cdots \Omega_P^{n+1}(n-p+2) \to 0\right\}$$

est exact et donne donc une résolution de $\mathcal{Z}_P^p(1)$. Par conséquent

$$H^q(M,\mathcal{Z}^p(1)) = \mathbb{H}^{p+q}(M,\mathcal{P}_P^p).$$

ii) Les groupes $H^q(\Omega^\bullet(*))$ de cohomologie du complexe

$$\Omega^\bullet(*) = \{\mathcal{O}_P(*) \to \Omega^1(*) \to \Omega^2(*) \to \dots\}$$

sont nuls pour $q \geqslant 2$ tandis que $H^0(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_P$ et $H^1(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_X$.

Preuve. Le complexe $\Omega_P^\bullet(*)$ coïncide avec $\Omega_P^\bullet$ hors de X et alors est exacte au dessus de $P \smallsetminus X$. Prenons un point $x \in X$ et un système de coordonnées $f, x_1, \dots, x_n$ centré en x tel que X soit donnée par $f=0$. Soit $\alpha \in \Omega_P^p(k)$ avec $k \geqslant 2$. Dans les coordonnées choisies on écrit localement

$$\alpha = \frac{df \wedge \beta + \gamma}{f^k}, \quad \beta, \gamma \quad \text{holomorphe et sans } df$$

Le calcul central montre que $\alpha \in \Omega^p(1)$ modulo $d\Omega^{p-1}(k-1)$. Un tel élément s'écrit

$$\alpha = \frac{df \wedge \beta}{f} + \gamma, \quad \beta, \gamma \quad \text{holomorphes et sans}\, df.$$

La condition $d\alpha = 0$ implique que $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$. En utilisant le lemme de Poincaré, on peut alors écrire $\beta = d\sigma$, $\gamma = d\tau$ et donc

$$d\alpha = d\left(\frac{\sigma}{f}\right) + d\tau.$$

Ceci montre i) et la majeure partie de ii). Il reste à vérifier que $H^0(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_P$ et $H^1(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_X$. La première assertion est immédiate. On montre la dernière assertion par un calcul local analogue au précédent que nous omettons. $\square$

On a besoin du sous-complexe $\Omega_P^\bullet(\log X)$ de $\Omega^\bullet(*)$ formé par les formes différentielles ayant des pôles logarithmiques le long de X ([Ill, §7]). On va prouver qu'il est quasi-isomorphe au complexe plein (et donc aussi calcule les groupes de cohomologie de $P \smallsetminus X$). Dans le cas actuel on pourra prendre comme définition (loc. cit.) :

$$\Omega_P^p(\log X) := \{\omega \in \Omega_P^p(1) |\, d\omega \in \Omega_P^{p+1}(1)\}.$$

L'application *résidu*

$$\mathrm{res} : \Omega_P^p(\log X) \to \Omega_X^{p-1}$$

est définie comme précédemment. Localement, on utilise un choix de coordonnées $\{f, z_1, \ldots, z_n\}$ telles que X soit donnée par $f = 0$, on écrit $\alpha = d\log f \wedge \beta$ et on pose $\mathrm{res}(\alpha) = \beta|_X$. On vérifie que cette définition en effet ne dépend pas du choix des coordonnées et de l'équation locale, $f = 0$ de X. Donc cette application est bien définie. La flèche qu'on vient de définir apparaît dans une suite exacte de complexes :

(res) $$0 \to \Omega_P^\bullet \to \Omega_P^\bullet(\log X) \xrightarrow{\mathrm{res}} \Omega_X^\bullet[-1] \to 0.$$

Cette suite exacte montre par exemple que

$$\begin{aligned} &H^0(\Omega^\bullet(\log X)) = \mathbb{C}_Y = H^0(\Omega^\bullet(*X)),\\ &H^1(\Omega^\bullet(\log X)) = \mathbb{C}_X = H^1(\Omega^\bullet(*X)),\\ &H^q(\Omega^\bullet(\log X)) = 0 = H^q(\Omega^\bullet(*X)) \quad \text{pour } q \geqslant 2, \end{aligned}$$

et donc $\Omega_P^\bullet(\log X)$ et $\Omega_P^\bullet(*)$ sont quasi-isomorphes :

$$\mathbb{H}^p(P, \Omega_P^\bullet(*)) = \mathbb{H}^p(\Omega_P^\bullet(\log X)) := \mathbb{H}^p$$

La suite exacte longue en hypercohomologie donne

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^{m-2}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H^m(P, \mathbb{C}) \to \mathbb{H}^m \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{m-1}(X, \mathbb{C})\\ \xrightarrow{\partial^m} H^{m+1}(P, \mathbb{C}) \to \cdots \end{aligned}$$

où $\mathrm{Res} = \mathrm{res}^*$ est induite par l'application "résidu". On va montrer que cette suite "est" la suite de Gysin.

D'abord il faut relier ∂^m et i_*. Un calcul en coordonnées locales qu'on néglige montre que :

(gys) $$\partial^m : H^{m-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{m+1}(P, \mathbb{C})$$

est l'adjoint (par rapport au cup-produit) de

$$i^* : H^{2n-m+1}(P,\mathbb{C}) \to H^{2n-m+1}(X,\mathbb{C}).$$

Ensuite, on note qu'il y a une application naturelle :

$$j : \mathbb{H}^m = \mathbb{H}^m(\Omega_P^\bullet(\log X)) \to \mathbb{H}^m(\Omega_{P\smallsetminus X}^\bullet) = H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C})$$

qui commute avec les deux flèches de restrictions $H^m(P,\mathbb{C}) \to \mathbb{H}^m(\Omega_P^\bullet(\log X))$ et $H^m(P,\mathbb{C}) \to H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C})$.

Donc, dans l'échelle avec lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{m-2}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H^m(P,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{H}^m \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "j"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^{m-2}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "i_*"] & H^m(P,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^{m-1}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial^m"] \arrow[d, equal] & H^{m+1}(P,\mathbb{C}) \cdots \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial"] & H^{m-1}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "i_*"] & H^{m+1}(P,\mathbb{C}) \cdots \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

les deux premiers carrés commutent ainsi que le dernier. Alors j est injectif et donc un isomorphisme. Pour expliciter j on regarde la suite spectrale $E_1^{p,q} = H^q(\Omega_P^p(*X)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}$. On a $E_2^{m,0}$ = m-formes fermées modulo formes exactes et utilisant la flèche naturelle $E_2^{m,0} \to \mathbb{H}^m$ on regarde une m-forme fermée comme un représentant d'une classe de cohomologie sur $P\smallsetminus X$. On vérifie facilement que

$$\partial : H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \to H^{m-1}(X,\mathbb{Q})$$

est la transposée de l'application "tube" :

$$\tau : H_{m-1}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_{m+1}(T, T\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} H_m(T\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \to H_m(P\smallsetminus X,\mathbb{Q}).$$

(Intuitivement, l'application en homologie associe à un cycle le tube au dessus de ce cycle dans le complément de X en P). Ensuite, pour $\gamma \in H_m(X,\mathbb{Z})$, $\omega \in H^{m+1}(P\smallsetminus X,\mathbb{C})$ on a ('formule du résidu') :

$$\text{(tube)} \qquad \int_\gamma \mathrm{res}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau(\gamma)} \omega$$

et donc res $= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\partial$: le troisième carré du diagramme commute (à multiplication avec $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}$ près).

Nous appliquerons cette discussion dans le cas où X est une hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}$. Les conditions de la proposition suivante seront vérifiées.

8.5. Proposition. *Soit X un diviseur très ample. Alors,* Res : $H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) \to H^n(X, \mathbb{C})$ *est toujours injectif. Si* $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$, *alors l'image est la partie primitive de $H^n(X, \mathbb{C})$.*

Preuve. Par le théorème de Lefschetz,

$$i^* : H^{n+1}(P, \mathbb{C}) \to H^{n+1}(X, P)$$

est un isomorphisme et par conséquent l'adjoint

$$\partial^{n-1} : H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{n+1}(P, \mathbb{C})$$

est aussi un isomorphisme et donc $\mathrm{Res}^n : H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) \to H^n(X, \mathbb{C})$ est injectif. L'image de cet application, par (gys), s'identifie avec le noyau de $i_* : H^n(X, \mathbb{C}) \to H^{n+2}(P, \mathbb{C})$ qui (sous l'hypothèse $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$) est lui aussi formé de classes primitives (par le Corollaire 2). $\square$

Si on fixe un degré dans (Res), la suite longue en cohomologie s'écrit :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^{q-1}(\Omega^{p-1}(X)) &\xrightarrow{\partial^{q-1,p-1}} H^q(\Omega_P^p) \longrightarrow H^q(\Omega_P^p(\log X)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^q(\Omega_X^{p-1}) &\xrightarrow{\partial^{p,q-1}} H^{q+1}(\Omega_P^p) \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

L'application i^* préserve la décomposition de Hodge et de là on tire que l'adjoint i_* est un homomorphisme de degré $(1,1)$. Donc par le Corollaire 3 et la Proposition 5, $\partial^{q-1,p-1}$ est un isomorphisme et $\partial^{p,q-1}$ est surjectif quel que soient p, q avec $p+q = n+1$. Le même argument que dans la preuve du Corollaire 3 alors montre :

8.6. Corollaire. *Sous les hypothèses de la Proposition on a une décomposition*

$$H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n+1} H^q(\Omega_P^p(\log X))$$

et l'application résidu induit un isomorphisme

$$H^q(\Omega_P^p(\log X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Prim}^{p-1,q}(X).$$

8B. Filtration par l'ordre du pôle et filtration de Hodge

Comme dans le cas compact (§1 ou [Dem],§9) on introduit la filtration "naïve" F sur les complexes $\Omega^\bullet(*)$ et $\mathcal{P}^k_P$. La filtration induite sur l'hypercohomologie sera aussi notée F. La suite spectrale d'hypercohomologie s'écrit dans ce cas :

$$H^q(P, \Omega^p_P(*)) \Longrightarrow H^{p+q}(P \smallsetminus X, \mathbb{C})$$

mais cette suite ne dégénère pas en général.

La filtration F de Hodge sera calculée dans cette situation en utilisant le sous-complexe $\Omega^p_P(\log X)$ de $\Omega^\bullet(*)$.

On voit directement que

$$\ker(d : \Omega^p(\log X) \to \Omega^{p+1}(\log X)) = \ker(d : \Omega^p_P(1) \to \Omega^{p+1}_P(2))$$

et donc

$$\begin{aligned} F^p H^{p+q}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) &= F^p \mathbb{H}^{p+q}(\Omega^\bullet(\log X)) \\ &= i^p_* \mathbb{H}^{p+q}(F^p(\Omega^\bullet(\log X))) = i^p_* H^q(P, \mathcal{Z}^p(1)). \end{aligned}$$

8.7. Lemme. *Si $H^a(P, \Omega^b_P(c)) = 0$ quels que soient $a, b, c > 0$, on a pour $p + q = n + 1$ que $H^q(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = \Gamma(P, \Omega^{n+1}_P(q+2))/d\Gamma(\Omega^n_P(q+1))$.*

Preuve. Comme dans la preuve classique faisceautique (voir [God]) du théorème de De Rham, les conditions du lemme impliquent que

$$H^q(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = H^q(\Gamma(P, \mathcal{P}^\bullet)),$$

où on regarde le complexe $\Gamma(P, \mathcal{P}^\bullet))$ comme un complexe commençant en degré zéro. □

8.8. Corollaire. *Dans les conditions du lemme précédent, on a*

$$F^{p+1} H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = H^{n-p}(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = \Gamma(\Omega^{n+1}_P(n-p+1))/d\Gamma(\Omega^n_P(n-p))$$

On combine ce résultat avec le Corollaire 5 et on obtient :

8.9. Théorème. *Soit P une variété projective lisse de dimension $n+1$ et soit $X \subset P$ une hypersurface lisse. On suppose que X est très ample, que $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$ et que $H^a(\Omega^b_P(c)) = 0$ quels que soient $a, b, c > 0$. Alors l'application "Résidu" induit un isomorphisme*

$$F^{p+1} H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = \Gamma(\Omega^{n+1}_P(n-p+1))/d\Gamma(\Omega^n_P(n-p)) \to F^p\, \mathrm{Prim}^n(X, \mathbb{C}).$$

Maintenant, soit $X_f \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse donnée par un polynôme homogène f de degré d en coordonnées homogènes $Z_0, \ldots, Z_{n+1}$ de $\mathbb{P}^{n+1}$. Le seul groupe de cohomologie de $\mathbb{P}^{n+1} \setminus X_f$ intéressant est le groupe en dimension $n+1$. Les conditions du théorème sont vérifiées (théorème d'annulation de Bott, [Bott]) et le théorème dans ce cas donne un résultat de Griffiths :

8.10. Théorème ([Grif2]). *L'application "résidu" induit un isomorphisme du sous-espace du groupe de De Rham $H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n \setminus X_f)$ formée des classes provenant des formes ayant un pôle d'ordre $\leqslant n-p+1$ sur la p-ième partie F^p de la filtration de Hodge de* $\mathrm{Prim}^n(X_f)$.

En particulier on voit que chaque $n+1$-forme rationnelle avec au plus un pôle le long de X_f doit être cohomologue à une forme ayant un pôle d'ordre au plus $n+1$, car $F^0 = H^n(X_f)$. En effet Griffiths donne une formule pour abaisser l'ordre du pôle modulo les formes exactes. Pour expliquer cela on a besoin de savoir comment s'écrivent les $n+1$-formes rationnelles sur $\mathbb{P}^{n+1}$ ayant au plus un pôle d'ordre k. Par un calcul direct en coordonnées affines on trouve qu'un telle forme s'écrit :

$$\frac{A}{f^k}\Omega,$$

où

$$\Omega = \sum_j (-1)^j Z_j dZ_0 \wedge \ldots \widehat{dZ_j} \ldots\ldots \wedge dZ_{n+1} \quad \text{et où} \quad \deg A + n + 2 = kd.$$

Aussi, une n-forme rationnelle avec pôle le long de X_f s'écrit

$$\varphi = \frac{1}{f^{k-1}} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [Z_i A_j - Z_j A_i] dZ_0 \wedge \ldots \widehat{dZ_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{dZ_j} \wedge \ldots \wedge dZ_{n+1}$$

et donc :

8.11. Lemme. *Soient $A_0, \ldots, A_{n+1}$ des polynômes d'ordre $(k-1)d-n-1$. On a*

$$\text{(Réd)} \qquad \frac{(k-1)\sum_{j=0}^{n+1} A_j \frac{\partial f}{\partial Z_j}}{f^k}\Omega \equiv \frac{\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial A_j}{\partial Z_j}}{f^{k-1}}\Omega + d\varphi$$

8.12. Corollaire. *Soit $J_f \subset \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_{n+1}]$ l'idéal de Jacobi de f c'est-à-dire l'idéal engendré par les $\partial f/\partial Z_j$, $j = 0, \ldots, n+1$. L'application résidu induit un isomorphisme*

$$(\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_{n+1}]/J_f)^{d(n+1-p)-(n+2)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Prim}^{p,n-p}(X_f).$$

Preuve. Le Théorème 10 implique qu'on a une surjection

$$(\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_{n+1}])^{d(n+1-p)-(n+2)} \to F^p/F^{p+1} = \mathrm{Prim}^{p,n-p}(X_f)$$

avec noyau consistant en les polynômes A provenant des formes de type $d\varphi+$ (forme ayant ordre de pôle $\leqslant n-p$) et à cause du Lemme ce sont exactement les polynômes de la forme $A' + fB$ où $A' \in J_f$. L'équation d'Euler $\sum_j Z_j \frac{\partial f}{\partial Z_j} = \deg(f) f$ montre que $f \in J_f$ et donc le Corollaire. □

9. Équations de Picard-Fuchs

Le but de ce paragraphe est de définir l'équation de Picard-Fuchs, et pour une famille de variétés projectives à un paramètre expliquer le lien avec la connexion de Gauss-Manin. On détermine cette équation dans quelques exemples. Le dernier exemple sera utilisé dans le §10 pour trouver le q-développement lié à la symétrie miroir. On explique aussi comment calculer la monodromie locale sur cet exemple.

On suppose désormais que S est une courbe algébrique complexe lisse, $S = \overline{S} \smallsetminus T$, où $\overline{S}$ est une courbe lisse compacte et T est un nombre fini de points.

Soit $\underline{V}_S$ un système local sur S soit ∇ la connexion plate de Gauss-Manin sur le fibré associé $\mathcal{V} = \underline{V}_S \otimes \mathcal{O}_S$ définie par (voir le §2) :

$$\nabla(v \otimes f) = v \otimes df.$$

Sur $\mathcal{V}^\vee$, le dual de $\mathcal{V}$ on a la connexion naturelle $\nabla^\vee$ définie par

$$d\langle \nu, v\rangle = \langle \nabla^\vee \nu, v\rangle + \langle \nu, \nabla v\rangle,$$

où v est une section holomorphe locale de $\mathcal{V}$ et ν une section locale de $\mathcal{V}^\vee$ (voir [Dem]).

Soit $S_o \subset \overline{S}$ un ouvert de Zariski affine tel qu'on ait une trivialisation :

$$\mathcal{V}^\vee|S_o \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{S_o}^{\oplus r} \qquad (r = \operatorname{rang} \underline{V}_S).$$

Une coordonnée affine s induit un champ vectoriel d/ds sur S_o et en composant la connexion $\nabla^\vee$ sur $\mathcal{V}^\vee|S_o$ et la contraction avec d/ds on obtient l'endomorphisme

$$D : \mathcal{V}^\vee|S_o \to \mathcal{V}^\vee|S_o.$$

Si α est une section méromorphe de $\mathcal{V}^\vee$ sans pôles au dessus de S_o, en utilisant la trivialisation, on peut regarder les sections $\alpha, D\alpha, D^2\alpha, \ldots, D^r\alpha$ comme contenues dans $\mathbb{C}(S)^r \supset \Gamma(S_o, \mathcal{O}^{\oplus r})$ sont dépendantes sur $\mathbb{C}(S)$; il y a une valeur minimale p tel que $\alpha, D\alpha, \ldots, D^p\alpha$ soient dépendantes et, en remplaçant D par d/ds, on obtient une équation différentielle : (normalisée par le fait que le coefficient de $(\frac{d}{dt})^p$ est 1)

$$(d/dt)^p + A_{p-1}(s)(d/dt)^{p-1} + \cdots + A_0(s) = 0.$$

Les solutions forment le système local $\mathrm{Sol}(D)$ et pour chaque section plate v de $\underline{V}_S$ le fonction $\langle \alpha, v\rangle$ est une solution de $D = 0$. En fait, $d\langle \alpha, v\rangle = \langle \nabla^\vee \alpha, v\rangle$ entraîne que $\big((d/dt)^p + A_{p-1}(s)(d/dt)^{p-1} + \cdots + A_0(s)\big)\langle \alpha, v\rangle = \langle (\nabla^\vee)^p\alpha + A_{p-1}(s)(\nabla^\vee)^{p-1}\alpha + \cdots + A_0(s)\alpha, v\rangle = 0$.

On obtient alors un homomorphisme surjectif de systèmes locaux :

$$\underline{V}_S \to \mathrm{Sol}(D)$$

qui est un isomorphisme quand $p = r$. Dans ce cas on dit que α est une *section cyclique*.

9.1. Exemple. Le système local provenant de l'homologie des fibres d'une famille algébrique $f : X \to S$. Pour $\underline{V}_S$ on prend le système local dont la fibre au dessus de $s \in S$ est le groupe d'homologie $H_n(X_s, \mathbb{C})$ de la fibre $X_s = f^{-1}(s)$ en dimension $n = \dim X_s$.

L'accouplement donné par l'intégration sur les n-cycles

$$\begin{aligned} \underline{V}_S \times R^n f_* \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (\gamma, [\omega]) &\mapsto \int_\gamma \omega \end{aligned}$$

met en dualité $\underline{V}_S$ et $R^n f_* \mathbb{C}$, le système local qui a pour fibre au dessus de s le groupe de cohomologie $H^n(X_s, \mathbb{C})$ (voir le §1).

On sait que le fibré $\mathcal{V}^\vee = R^n f_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_S$ supporte une variation de structure de Hodge et le sous-fibré $\mathcal{F}^n$ est le sous-fibré des classes de n-formes relatives. Sur chaque fibre celles-ci donnent des n-formes holomorphes. Une section $\omega(s)$ méromorphe de $\mathcal{V}^\vee$ holomorphe sur S appartenant à $\mathcal{F}^n$ est la même chose qu'une famille de formes holomorphes dépendant de façon méromorphe de s. Dans ce cas, l'équation différentielle associée à *la classe de cohomologie* $[\omega(s)]$ est appelée *équation de Picard-Fuchs*. La discussion précédente entraîne que les solutions sont données par des périodes $\int_\gamma \omega(s)$, $\gamma \in H_n(X_s, \mathbb{C})$ pourvu que l'on considère γ comme section plate (multiforme) du système local $R_n f_* \mathbb{C}$.

9.2. Remarque. La section $[\omega(s)]$ n'est pas nécessairement cyclique. Par contre, elle sera cyclique pour le sous-système local $\underline{V}_S^\vee$ de $R^n f_* \mathbb{C}$ engendré par $[\omega(s)]$. La monodromie (classique) de cette équation différentielle coïncide avec la monodromie de ce sous-système. En fait, $V_{S,s}$ est l'orthogonal (par rapport à l'intersection entre n-cycles) de l'annulateur de $\underline{V}_{S,s}^\vee$, le plus petit sous-espace de $H^n(X_s, \mathbb{C})$ contenant $[\omega]$ et stable par la monodromie. En particulier $\int_\gamma \omega = 0$ pour $\gamma \in V_{S,s}$ implique que $\gamma = 0$. Autrement dit, par prolongement analytique des solutions locales $\int_\gamma \omega$, on obtient des solutions de la forme $\int_{\gamma'} \omega$ (monodromie classique) où γ' se déduit de γ par la monodromie du système V_S.

Maintenant soit s une coordonnée autour de l'un des points $t \in T$. On introduit

$$\Theta := s \frac{d}{ds}$$

et on réécrit l'équation de Picard-Fuchs :

$$(\mathrm{PF}_{\mathrm{pol}}) \qquad [\Theta^p + B_{p-1}(s)\Theta^{p-1} + \cdots + B_0(s)]\phi = 0.$$

La connexion ∇ s'étend en une connexion à pôles logarithmiques sur T :

$$\overline{\nabla} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \Omega^1(\log T)$$

Voir le §8 suite au Lemme 8.4 pour la définition du faisceau $\Omega^1(\log T)$. On remarque que ici, dans le cas de la dimension 1 on a que $\Omega^1(\log T) = \Omega^1(T)$ est, localement autour d'un point de T, engendré par ds/s. L'opérateur Θ correspond à $\overline{\nabla}_{s\frac{d}{ds}}$ et une traduction du fait que $\overline{\nabla}$ existe est de dire que :

9.3. Lemme-Définition ([Del1]). *Les fonctions $B_j(s)$ sont holomorphes autour de t. On dit que t est un point singulier régulier.*

L'équation ($\mathrm{PF}_{\mathrm{pol}}$) est équivalente à un système

$$\Theta X(s) = A(s)X(s)$$

où ($\varphi(s)$ étant une solution recherchée de l'équation) :

$$X(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \Theta\varphi(s) \\ \vdots \\ \Theta^{p-1}\varphi(s) \end{pmatrix}$$

et

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \\ -B_0(s) & \cdots & -B_{p-1}(s) & & -B_p(s) \end{pmatrix}$$

La matrice $A(0)$ est appelée le *résidu* de la connexion et elle est notée :

$$\mathrm{Res}(\nabla) := A(0).$$

9.4. Lemme ([C-L]). *Si on suppose que pour toutes les valeurs propres distinctes λ et μ de $\mathrm{Res}(\nabla)$, $\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}$; alors la monodromie autour de t est donnée par $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(\nabla)}$.*

En particulier on en déduit :

9.5. Corollaire. *Si $B_j(0) = 0$, $j = 0, \ldots, p-1$ la monodromie locale autour de t est $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}N}$ où N est la matrice nilpotente*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer ce corollaire dans la situation d'une famille d'hypersurfaces $X_{f(s)}$ d'équation $f(s)(Z_0, \ldots, Z_{n+1}) = 0$ dans $\mathbb{P}^{n+1}$, complétons la discussion du paragraphe précédent. On suppose $\dim(S) = 1$. Soit s un paramètre local sur S et soit $\Omega(s) = h(s)\Omega$ une $n+1$-forme rationnelle sur $\mathbb{P}^{n+1}$ qui dépend holomorphiquement de s. L'effet de la connexion plate de Gauss-Manin se décrit par :

$$\text{(GM)} \qquad \operatorname{Res}_{X_{f(s)}}\left[\frac{d^k}{ds^k}\Omega(s)\right] = \left[\nabla^k_{d/ds}\operatorname{res}_{X_{f(s)}}\Omega(s)\right],$$

où $[\alpha]$ désigne la classe de cohomologie d'une forme α. Cette formule est facilement déductible de la formule §8(tub).

9.6. Exemple. Soit la famille de courbes elliptiques (famille de Hesse) :

$$f(u) := Z_0^3 + Z_1^3 + Z_2^3 - 3uZ_0Z_1Z_2$$

au dessus de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{\infty, 1, \rho, \rho^2\}$ où $\rho = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$. Pour $u = \infty$ la courbe dégénère en trois droites et on va étudier la situation autour de ce point. On va d'abord déterminer l'équation différentielle associée aux formes holomorphes $\omega(u)$ sur la famille $f(u) = 0$.

On écrit pour cela :

$$(\mathrm{Rat})_\ell \qquad \Omega_\ell(u) := \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!\, u^\ell \left(\prod Z_j^{\ell-1}\right)}{f(u)^\ell}\Omega, \quad \ell = 1, \ldots.$$

On note que $\operatorname{res}(\Omega_1(u)) = \omega(u)$ est une forme holomorphe sur $X_{f(s)}$ et grâce à la formule (GM) on a

$$(\mathrm{GM})_{\mathrm{bis}} \qquad \Omega_k(u) = \left(u\frac{d}{du}\right)^k \Omega_1(u) = \nabla^k_{u\frac{d}{du}}\omega(u) \quad \text{mod les formes exactes.}$$

Les calculs donnent

$$(Z_0Z_1Z_2)^2(1-u^3) = \sum_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial f}{\partial Z_k}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3}uZ_0Z_1^3 \\ A_1 &= \frac{1}{3}u^2Z_0Z_1^2Z_2 \\ A_2 &= \frac{1}{3}Z_0^2Z_1^2. \end{aligned}$$

Utilisant la formule (Réd) (voir le Lemme 8.11) on trouve que $\Omega_3(u) \equiv P\Omega$ modulo les formes exactes, où

$$P = \frac{u^3}{1-u^3} \cdot \frac{\frac{1}{3}uZ_1^3 + \frac{2}{3}u^2Z_0Z_1Z_2}{f^2}.$$

Puisque $P\Omega$ et $\Omega_2(u)$ ont un pôle d'ordre 2, le Corollaire 8.12 entraîne qu'il existe une fonction $\varphi(u)$ tel que $P\Omega - \varphi(u)\Omega_2(u) = \frac{q}{f^2}\Omega$ avec $q \in J_f$. On trouve en effet que

$$\frac{u^3}{1-u^3} \cdot (\frac{1}{3}uZ_1^3 + \frac{2}{3}u^2 Z_0 Z_1 Z_2) + \frac{u^3}{1-u^3}(-u^2 Z_0 Z_1 Z_2) = \frac{1}{9}\frac{u^3}{1-u^3} u Z_1 \frac{\partial f}{\partial Z_1} \in J_f$$

et une nouvelle application de (Réd) donne que

$$\Omega_3(u) + \frac{u^3}{1-u^3}\Omega_2(u) - \frac{1}{9}\frac{u^3}{1-u^3}\Omega_1(u) = 0 \quad \text{mod les formes exactes.}$$

On note maintenant que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur la famille par : $\rho \cdot (Z_0, Z_1, Z_2, u) = (Z_0, Z_1, \rho Z_2, \rho^2 u)$ et donc les fibres au dessus de u, ρu et $\rho^2 u$ sont isomorphes. Il est donc naturel de prendre pour paramètre

$$s = u^{-3}.$$

Alors

$$\Theta = -\frac{1}{3}u\frac{d}{du} = s\frac{d}{ds}$$

et on trouve que (toujours modulo les formes exactes) :

$$[\Theta^2 + B_1\Theta + B_0]\Omega_1(u) = 0$$

où

$$B_0 = \frac{2}{9}\frac{s}{s-1}$$
$$B_1 = \frac{s}{s-1}.$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\Theta \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Theta\Omega_1 \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Theta\Omega_1 \end{pmatrix}$$

où

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B_0 & -B_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule $(\mathrm{GM})_{\mathrm{bis}}$ on trouve que la famille des 1-formes $\omega(s)$ sur la famille des courbes elliptiques satisfait au même système d'équations. Ce système est équivalent à l'équation de Picard-Fuchs.

Le Corollaire 5 nous donne : $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors l'opérateur de monodromie locale est $\begin{pmatrix} 1 & 2\pi \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.7. Exemple. Dans cet exemple on considère une famille de variétés de Calabi-Yau (Voir [Mor2] pour détails)

$$f(s) = Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 - 5uZ_0Z_1Z_2Z_3Z_4, \quad s = u^{-5}.$$

Par un calcul identique à celui de l'exemple précédent, on trouve avec $\Theta = s\frac{d}{ds}$:

$$[\Theta^4 + B_3\Theta^3 + B_2\Theta^2 + B_1\Theta + B_0]\varphi = 0$$

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{24}{625} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_1 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_2 &= \frac{7}{5} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_3 &= 2 \cdot \frac{s}{s-1}. \end{aligned}$$

et la matrice $A(s)$ de Θ par rapport à $\{\Omega_1, \Theta\Omega_1, \Theta^2\Omega_1, \Theta^3\Omega_1\}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B_0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \end{pmatrix}$$

Ici la monodromie locale est $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} N}$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour la suite on a besoin d'une solution holomorphe autour du point $s = 0$. Pour l'obtenir on remarque qu'on peut réécrire l'équation différentielle comme :

$$[\Theta^4 - s(\Theta + 5^{-1})(\Theta + 2 \cdot 5^{-1})(\Theta + 3 \cdot 5^{-1})(\Theta + 4 \cdot 5^{-1})]\varphi = 0$$

(en multipliant par $(1 - s)$) et alors la relation de récurrence pour les coefficients

$$(n+1)^4 a_{n+1} = (n + 5^{-1})(n + 2 \cdot 5^{-1})(n + 3 \cdot 5^{-1})(n + 4 \cdot 5^{-1})a_n$$

a une solution $a_n = \dfrac{(5n)!}{5^{5n}(n!)^5}$ et donc on trouve

$$f_0(s) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left(\frac{s}{5^5}\right)^n \tag{soln}$$

est une solution holomorphe. C'est l'unique solution holomorphe en $s = 0$ avec $f_0(0) = 1$.

Le lecteur pourra completer ces exemples en traitant le cas intermédiaire de la quartique de Fermat (surface K3).

10. Variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

On reprend la discussion du §7 en considérant la famille universelle d'une variété de Calabi-Yau de dimension 3 et sa variation infinitésimale qui conduit à l'accouplement de Yukawa. On montre que, si la base est de dimension 1, cet accouplement satisfait à une équation différentielle d'ordre 1 dont les coefficients sont liés à ceux de l'équation de Picard-Fuchs, qui est une équation d'ordre 4. En cherchant une coordonnée canonique q on est forcé d'invoquer ici l'existence de la structure de Hodge mixte limite. Dans la dernière sous-section on reprend l'exemple 9.7 et on discute la prédiction qui découle de l'hypothèse de symétrie : les coefficients dans le q-développement de l'accouplement de Yukawa, proprement normalisées, sont liés aux nombres de courbes rationnelles sur le membre générique de la famille miroir, qui conjecturalement est la famille des hypersurfaces quintiques dans $\mathbb{P}^4$.

10.A. Accouplement de Yukawa

On considère une famille $f : X \to S$ de variétés de Calabi-Yau; soit alors la VHS définie par la variation de la cohomologie de rang 3, $\{H^3(X_s, \mathbb{C})\}$. On peut localement en $s_0 \in S$, supposer que $\mathcal{F}^3 = f_*(\Omega^3_{X/S})$ est trivial, et du fait que $h^{3,0} = 1$ choisir une 3-forme holomorphe (relative) ω, telle que $\omega(s) \neq 0$ pour s voisin de s_0. On trivialise le fibré vectoriel $\mathcal{H}^3(X/S)$ au moyen de sections plates ($\nabla\alpha = 0$), soit $\tau_1, \dots, \tau_{2b+2}$ une telle trivialisation (ici $b = h^{2,1}(X_s)$). On peut considérer $\{\tau_i\}$ comme la base duale d'une base d'homologie (constante) $\{\gamma_i\}$. Rappelons que la forme de Hodge-Riemann (voir le §3.A) est donnée par $Q(\alpha, \beta) = -\int_{X_s} \alpha \wedge \beta$, $\quad (k = n = 3)$ et donc

$$f_i := Q(\tau_i, \omega) = -\int_{\gamma_i} \omega$$

est une fonction holomorphe sur le voisinage considéré de s_0. Ce sont les périodes de ω. Relativement à la base choisie, ω se décompose en

$$\omega = \sum_{i=1}^{2b+2} \alpha_i \tau_i \qquad (\alpha_i \text{ holomorphe en } s_0).$$

Du fait que $\nabla\tau_i = 0$,

$$\nabla\omega = \sum_{i=1}^{2b+2} d\alpha_i \otimes \tau_i.$$

Si $t_1, \dots, t_r$ sont des coordonnées locales en s_0,

$$\nabla_{\partial/\partial t_\alpha} = \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_\alpha} \tau_i.$$

On notera que la propriété de transversalité de Griffiths entraîne que relativement à la filtration de Hodge $\{\mathcal{F}^p\}_{0 \leqslant p \leqslant 4}$, on a :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t_\alpha} := \nabla_{\partial/\partial t_\alpha} \omega \in \mathcal{F}^2 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} \in \mathcal{F}^1.$$

D'où
$$Q\Big(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial t_\alpha}\Big) = Q\Big(\omega, \frac{\partial^2 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta}\Big) = 0.$$
Par contre
$$Q\Big(\omega, \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}\Big) = \int_{X_t} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}$$
est différente de zéro en général. On va justifier que cette fonction représente l'application linéaire δ (voir la formule (iter) dans le §3.C) associée à la variation infinitésimale.

On a vu dans les §2.D et §3.C que la dérivée de l'application des périodes est donnée par
$$\sigma : T_{S,s_0} \longrightarrow \bigoplus \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$
où $\sigma(\partial/\partial t)$ agit par le cup-produit avec $\rho(\partial/\partial t)$, image de $\partial/\partial t$ par l'application de Kodaira-Spencer $\rho : T_{S,s_0} \to H^1(T_{X_{s_0}})$. Le fibré $\mathcal{F}^3$ est trivialisé par la forme ω et dans notre cas la formule (iter) revient à
$$\begin{aligned} \sigma : \mathrm{Sym}^3\, T_{S,s_o} &\longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{3,0}(X_{s_0}), H^{0,3}(X_{s_0})) = \\ &\quad\; = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}\cdot\omega(s_0), \mathbb{C}\cdot\overline{\omega}(s_0)) \\ \partial/\partial t_\alpha \otimes \partial/\partial t_\beta \otimes \partial/\partial t_\gamma &\longmapsto \{\omega(s_0) \mapsto \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}(s_0)\}. \end{aligned}$$
On peut donc écrire
$$\sigma(\partial/\partial t_\alpha \otimes \partial/\partial t_\beta \otimes \partial/\partial t_\gamma)(\omega(s_0)) = \int_{X_{s_0}} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}.$$
D'où ici la variation infinitésimale de la structure de Hodge fournit les invariants :
$$\boxed{\kappa_{\alpha\beta\gamma} := \int_{X_{s_0}} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}}$$
appelés dans ce contexte *accouplement de Yukawa* ([Mor1], [C-O], [H]). Le tenseur invariant associé est
$$\kappa = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \kappa_{\alpha\beta\gamma} dt_\alpha \otimes dt_\beta \otimes dt_\gamma \in \mathrm{Sym}^3(\Omega^1_S).$$

Si $\dim S = 1$, t est une coordonnée locale en s_0, on notera
$$\kappa_{ttt} = \int_{X_t} \omega \wedge \frac{d^3\omega}{dt^3}$$

qui est une fonction holomorphe du paramètre t (au voisinage de s_0) et le tenseur invariant est

$$\kappa = \kappa_{ttt}(dt)^{\otimes 3} \in (\Omega^1_S)^{\otimes 3}.$$

Si en outre $f : X \to S$ est une famille verselle (voir le §3.C) on a $\dim H^1(T_{X_{s_0}}) = 1 = \dim H^{2,1}(X_{s_0})$ et donc $H^3(X_{s_0})$ est de dimension 4. La versalité implique que l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme et donc que les trois flèches $H^{k,3-k} \to H^{k-1,4-k}$, $k = 1, 2, 3$ sont des isomorphismes (ces espaces sont de dimension 1 et les applications sont obtenues en prenant le cup-produit avec la classe de Kodaira-Spencer $\rho(\partial/\partial t)$). Donc $\kappa_{ttt} \neq 0$ dans ce cas et les sections $\left\{\frac{d^i\omega}{dt^i}\right\}_{i=0,1,2,3}$ forment une base du fibré $\mathcal{H}^3(X/S)$, sur un voisinage de s_0. D'où une relation de dépendance linéaire

$$\text{(PF)} \qquad \frac{d^4\omega}{dt^4} = \sum_{i=0}^{3} A_i(t) \frac{d^i\omega}{dt^i}$$

qui est l'équation différentielle de Picard-Fuchs. Si α est une section plate de $\mathcal{H}^3(X/S)$, la période $\varpi = Q(\alpha, \omega) = \int_\gamma \omega$ (si α est la classe Poincaré duale du cycle γ), satisfait à l'équation

$$\frac{d^4\varpi}{dt^4} = \sum_{i=0}^{3} A_i(t) \frac{d^i\varpi}{dt^i}.$$

On peut dériver sous le signe somme car Q est constante.

Par l'anti-symétrie de Q on a $Q(\frac{d^2\omega}{dt^2}, \frac{d^2\omega}{dt^2}) = 0$ et en dérivant deux fois la relation $Q(\omega, \frac{d^2\omega}{dt^2}) = 0$ on trouve :

$$\frac{d}{dt} Q\Big(\omega, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) = -Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) - Q\Big(\frac{d^2\omega}{dt^2}, \frac{d^2\omega}{dt^2}\Big) = -Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big),$$

mais aussi

$$\frac{d\kappa_{ttt}}{dt} = Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) + Q\big(\omega, \frac{d^4\omega}{dt^4}\big) = Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) + A_3\big(\omega, \frac{d^3\omega}{dt^3}\big),$$

et donc, en additionnant ces deux équations on a :

$$\boxed{\frac{d\kappa_{ttt}}{dt} = \frac{1}{2} A_3 \kappa.}$$

Cette équation a pour solution (bien déterminée à une constante multiplicative près) :

$$\text{(yuk)} \qquad \kappa_{ttt} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int A_3(t)dt}.$$

Remarquons que sous l'hypothèse retenue, l'équation différentielle $\nabla\alpha = 0$, est le système linéaire équivalent à l'équation du 4e ordre (PF). Ceci explique que les informations locales sur la monodromie, sur κ_{ttt}, se déduisent du calcul explicite de l'équation de Picard-Fuchs.

Finalement quelque mots sur le cas d'une équation de Picard-Fuchs à points singuliers réguliers. On suppose que s est une coordonnée locale autour d'un tel point et on écrit

$$\kappa = \kappa_{sss}\left(\frac{ds}{s}\right)^{\otimes 3}$$

et, comme d'habitude,

$$\Theta = s\frac{d}{ds}.$$

Maintenant, pour trouver κ_{sss} il faut résoudre l'équation

$$\frac{d\kappa}{ds} = -\frac{1}{2}B_3\kappa$$

Où B_3 est le coefficient de Θ dans l'équation de Picard-Fuchs $[\Theta^4 + B_3\Theta^3 + B_2\Theta^2 + \cdots]\varphi = 0$.

10.1. Exemple. Dans l'exemple 9.7 de la section précédente en utilisant la coordonnée s on trouve

$$\kappa_{sss} = C_1\frac{1}{s^3(s-1)}, \qquad C_1 = \text{constante d'intégration.}$$

Discutons les possibles normalisations de l'accouplement de Yukawa dans le cas d'un paramètre s. On applique d'abord le résultat classique (voir [Ince])

10.2. Théorème. *Soit donnée une équation différentielle d'ordre $\geqslant 2$ sur un disque autour de 0 ayant une singularité régulière en 0. On suppose que la monodromie T locale autour de 0 admet un seul bloc de Jordan pour la valeur propre 1 avec multiplicité $\geqslant 2$. Alors, il existe une solution f_0 régulière et uniforme autour de 0. De plus, il existe une solution locale f_1 autour de 0, indépendante de f_0 telle que $g(s) = 2\pi \mathrm{i} f_1(s) - \log(s)\cdot f_0(s)$ soit uniforme. La solution f_0 est unique à une constante multiplicative près, la solution f_1 est unique à un multiple de f_0 près.*

Si donc $f_0 \neq 0$ on pourra fixer le f_0 par $f_0(0) = 1$ et ensuite le f_1 par $g(0) = 0$. On peut toujours remplacer s par une autre coordonnée $w(s)$; de $\kappa_{sss}(ds/s)^{\otimes 3} = \kappa_{www}(dw/w)^{\otimes 3}$ on tire que κ est remplacé par $(ds/dw)^3$. On cherche à trouver une coordonnée q “normalisée” sur le disque. Dans un premier temps, on regarde la fonction multiforme

$$\tau(s) = f_1(s)/f_0(s)$$

comme un paramètre uniforme sur le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{h}$. Quand s tourne autour de 0 le paramètre τ se transforme en $\tau + 1$. Celui-ci est uniquement déterminé par cette propriété à une constante additive près ; cela provient du fait qu'on pourra remplacer f_1 par $f_1 + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \log c_2 \cdot f_0$, le point $s = 0$ n'ayant aucune signification intrinsèque sur $\mathfrak{h}$. Donc le paramètre

$$q = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \frac{f_1(s)}{f_0(s)}\right) = s \exp\left(\frac{g}{f_0}\right)$$

sur le disque épointé est bien-défini à la constante multiplicative $c_2 \in \mathbb{C}^*$ près.

Ensuite on souhaite normaliser $\kappa_{\tau\tau\tau}$. D'abord, il faut noter que κ dépend du choix de la 3-forme relative ω. Si ω se transforme en $k(s)\omega$, κ_{sss} est transformé en $k(s)^2\kappa_{sss}$. On remarque que la solution f_0 est de la forme $f_0 = \int_\gamma \omega$ pour un 3-cycle γ, invariant par la monodromie locale. Un tel cycle γ est unique à une constante multiplicative près. Donc, la 3-forme $\tilde{\omega} = f_0(s)^{-1}\omega = \omega / \int_\gamma \omega$ est une 3-forme holomorphe $\tilde{\omega}(s)$ telle qu'il existe un cycle invariant γ dans $H_3(X_s, \mathbb{C})$ avec $\int_\gamma \tilde{\omega} = 1$. Ainsi $\tilde{\omega}$ est unique à une constante multiplicative près. Conclusion : avec cette normalisation on a

$$\kappa = c_1 \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int B_3(s)ds\right)}{f_0(s)^2} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{ds}{s}\right)^{\otimes 3}, \quad c_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Ensuite on note que $\kappa_{\tau\tau\tau}(d\tau)^3 = \kappa_{sss}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{dq}{q}\right)^3$ est périodique en τ et donc il existe un développement en

$$q := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau(s)}.$$

On écrit alors :

$$\text{(dev)} \qquad \kappa = c_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \left(\frac{q}{c_2}\right)^j\right) \cdot \left(\frac{dq}{2\pi \mathrm{i} q}\right)^{\otimes 3}$$

On peut voir (cf. [Mor2]) facilement que les coefficients κ_j sont des nombres rationnels si les coefficients B_j de l'équation de Picard-Fuchs admettent une développement en série entière à coefficients rationnels.

Rappelons que ce calcul est fait sous l'hypothèse cruciale que $f_0(0) = \int_\gamma \omega(0) \neq 0$. On la vérifiera dans le sous-paragraphe suivant.

Exemple. On reprend l'exemple 10.1. Ici $f_0(0) = 1$ (voir l'Exemple 9.7) et on observe que l'hypothèse sur les $B_j(s)$ est bien vérifiée. On trouve ici que

$$\kappa_{sss} = \frac{c_1}{(s-1)f_0(s)^2}.$$

10.3. Remarques. I. En liaison avec les calculs précédents, rappelons le théorème de Bryant et Griffiths (Théorème 7.3). On fait l'hypothèse que la famille $f : X \to S$

est la déformation universelle de $X_0 = f^{-1}(0)$, de sorte que l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme pour tout $s \in S$, et $\dim(S) = h^{2,1} = b$. En vertu du théorème de Bogomolov et Tian (voir le §7.C), S est lisse. On suppose que S soit isomorphe à un disque de dimension b. On trivialise le système local $\{H_3(X_s, \mathbb{Z})\}$, au moyen d'une base symplectique $\{\gamma_i, \delta_j\}_{i,j=0,\ldots,b}$. Soit ω une section locale de $F^3 = f_*(\omega^3_{X/S})$ qui trivialise ce fibré. Le théorème de Bryant et Griffiths dit que les γ-périodes $\zeta_i(s) = \int_{\gamma_i} \omega(s)$ peuvent servir comme coordonnées homogènes sur S (voir le §7).

Lemme. *Avec $\xi_j(s) = \int_{\delta_j} \omega(s)$ on a les relations :*

$$\xi_i = \sum_j \zeta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \zeta_j}$$

et $\{\xi_i\}$ est le gradient d'une fonction holomorphe homogène G de degré 2 des variables $\zeta_0, \ldots, \zeta_b$.

Preuve. On a comme ci-dessus les relations

$$\int_X \omega \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_i} = \int_{X_s} \omega \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} = 0 \ .$$

Si on remplace ω par le développement $\omega = \sum \zeta_i \alpha_i + \sum \xi_j \beta_j$ (voir le §7.C pour les notations) et si on tient compte du fait que $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_j\}$ sont des sections constantes, on a les relations annoncées. Ces relations entraînent

$$2\xi_i = \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\Big(\sum_k \zeta_k \xi_k\Big)$$

d'où si $G(\zeta) = \frac{1}{2}\big(\sum\limits_k \zeta_k \xi_k\big)$, on a $\xi_i = \frac{\partial G}{\partial \zeta_i}$. □

II. Un calcul élémentaire conduit à l'expression suivante pour l'accouplement de Yukawa :

$$\kappa_{ijk} = \int_{X_s} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j \partial \zeta_k} = \frac{\partial^3 G}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j \partial \zeta_k}.$$

III. On peut définir sur l'espace local des modules S, une métrique de Kähler (en fait de Hodge ([Dem]), par son potentiel local. Les relations de Riemann montrent que

$$\mathrm{i} \int \omega \wedge \overline{\omega} = \mathrm{i}\Big(\sum_a \overline{\zeta}_a \frac{\partial G}{\partial \zeta_a} - \zeta_a \frac{\partial \overline{G}}{\partial \overline{\zeta}_a}\Big) > 0.$$

Posons $\kappa = -\log\big(\mathrm{i} \int \omega \wedge \overline{\omega}\big)$. Alors la métrique dite de Weil-Peterson, ([T]) sur S est définie localement par :

$$g_{i\overline{j}} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \zeta_i \partial \overline{\zeta}_j}.$$

La formule de dessus montre que le potentiel κ est très particulier, manifestation du caractère “spécial” de cette métrique (voir Remarque IV).

D'une autre manière, si on identifie T_sS et $H^{2,1}(X_s)$ vu que $\Omega^3_{X_s} \cong \mathcal{O}_{X_s}$, la métrique de Weil-Peterson n'est pas autre chose que :

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathrm{WP}} = \int_{X_s} \psi \wedge *\bar{\phi}.$$

Il y a une relation précise avec l'application des périodes q introduite ci-dessus. Du fait des relations de Riemann R1 et R2 du §3.A, la droite $H^{3,0}(X)$ appartient à un ouvert dans une quadrique complexe $Q \subset \mathbb{P}^{2b+1}$. La forme de Hodge induit clairement sur la restriction à Q du fibré tautologique de $\mathbb{P}^{2b+1}$ une métrique hermitienne. Si ω est la forme de Chern de cette métrique, on peut prouver [T] que la forme de Kähler ω_{WP} de la métrique de Weil-Peterson coïncide avec l'image réciproque de ω.

IV. Les considérations géométriques précédentes ont pour support l'espace des paramètres des structures complexes, soit infinitésimalement l'espace $H^{2,1}$. Il n'est pas à priori évident que des constructions similaires existent avec l'espace des paramètres pour les classes de Kähler. Définissons cet espace. Si $J \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est la forme de Kähler d'une métrique de Kähler sur X, alors J est positive et, en particulier, pour toute courbe algébrique $C \subset X$,

$$\int_{[C]} J > 0.$$

Ces inégalités définissent dans l'espace vectoriel réel $H^{1,1}(X, \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{R})$ un cône ouvert $K(X)$, appelé le cône de Kähler. Le *complexifié du cône de Kähler* est

$$CK(X) = \{B + \mathrm{i}J \mid B, J \in K(X)\}.$$

Il est important aussi de considérer les inégalités larges, c'est-à-dire le cône fermé $\overline{K(X)}$.

Il n'y a pas ici de variation de structures de Hodge supportée par le cône de Kähler complexifié, et donc pas de contrepartie évidente à l'accouplement de Yukawa, mais seulement le produit triple topologique donné par l'intersection des $(1,1)$-formes $\kappa(\rho, \sigma, \tau) = \int \rho \wedge \sigma \wedge \tau$. Il est déjà remarquable que dans cette situation duale, la “géométrie” de l'espace des modules des structures complexes subsiste formellement [C-O], renforçant l'hypothèse de symétrie entre les deux types de déformations. Les propriétés différentielles-géométriques décrites ci-dessus ont été formalisées sous le titre de “géométrie spéciale” [Str]. Nous renvoyons à cet article pour une définition précise. L'étude de cette “géométrie” sur le complexifié du cône de Kähler est le fondement de la symétrie miroir. Une définition mathématique précise peut être considérée comme équivalente à l'existence d'une variation de structures de Hodge de base le complexifié du cône de Kähler, conduisant à un accouplement triple qui “corrige” en un certain sens l'accouplement κ ci-dessus, et qui dans la dualité entre X et X^*, serait le pendant de la variation décrite dans les pages précédentes pour X^*. Pour une formulation plus précise, le lecteur consultera [Mor4], [P]. Nous voulons ne retenir de cette discussion que le fait que les aspects de théorie de Hodge sont certainement à la base d'une formulation rigoureuse du principe de symétrie. Voir aussi le §11 pour une discussion allant dans ce sens.

10.B. Normalisation mathématique

Il s'agit d'avoir des informations sur le comportement asymptotique des périodes, et de l'accouplement de Yukawa. Cela relève de l'étude générale du comportement asymptotique d'une variation de structures de Hodge (singularités de l'application des périodes).

Soit donnée une famille de variétés de Calabi-Yau, on suppose pour simplifier que $h^{2,1} = 1$ et $\dim S = 1$ (on a vu que $X \to S$ est universelle en tout point $s \in S$ (Théorème 7.2). Supposons $S = \overline{S} \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}$ où $\overline{S}$ est une courbe complète non singulière, les points $\{b_i\}$ étant les points singuliers de la famille (voir l'exemple de la famille quintique et de la famille miroir dans le §7.A). Il s'agit d'analyser le comportement de la structure de Hodge (variation) portée par $\mathcal{H}^3(X/S) = \mathbb{R}^3 f_*(\omega^\bullet_{X/S})$ lorsque le paramètre s approche un point singulier. En un tel point b_i, on a vu que $\mathcal{H}^3(X/S)$ admet une extension privilégiée (sur un disque paramétré de centre b_i), et que les fibrés de Hodge $\mathcal{F}^p$ $(p = 0, 1, 2, 3)$ se prolongent en des sous-fibrés $\widetilde{\mathcal{F}}^p$ de l'extension privilégiée $\widetilde{\mathcal{H}}^3(X/S)$. On fait une hypothèse maintenant [Mor1], hypothèse qui est vérifiée dans l'exemple qui nous intéresse.

10.4. Hypothèse. *(Voir le Théorème 4.1) L'opérateur T (de monodromie locale) en b_i est maximalement unipotent. C'est-à-dire $(T-1)^3 \neq 0$ et donc $N = \log T$ a un seul bloc de Jordan* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On vérifie immédiatement que sous cette hypothèse, la filtration $W_\bullet$ est de la forme :

$$W_0 = W_1 = \ker(N), \qquad W_2 = W_3 = \ker(N^2), \qquad W_4 = W_5 = \ker(N^3).$$

La structure de Hodge sur $\mathrm{Gr}^W_{2\ell}$ $(\ell = 0, 1, 2, 3)$ se réduit à $\mathrm{Gr}^W_{2\ell} = I^{\ell,\ell}$. En particulier $I^{a,b} = 0$ si $a \neq b$ et

$$W_\ell = \bigoplus_{a+b \leqslant \ell} I^{a,b}, \qquad F_\infty = \bigoplus_{a \geqslant p} I^{a,b}.$$

Rappelons que le fibré $\mathcal{H}^3(X/S)$ est prolongé à Δ et donc est trivialisable sur Δ^*. Si α est une section de ce fibré en $s_0 \in \Delta^*$, et si $\alpha(s)$ est le prolongement (multiforme) de α par transport parallèle par la connexion de Gauss-Manin, la section “horizontale” qui s'étend en $s = 0$ est $\alpha^*(s) = \exp\big(\frac{\log s}{2\pi i}N[\alpha(s)]\big)$. En particulier, si $\alpha \in W_0, T(\alpha) = \alpha$, on a $\alpha^*(s) = \alpha(s)$; d'où, par le fait que Q est plate dans le fibré trivialisé $\tilde{\mathcal{H}}^3$, ce qui signifie que $Q(\alpha^*(s), \beta^*(s)) = Q(\alpha, \beta) = \text{const}$, il est clair que $Q(\alpha(s), \beta(s))$ est une fonction holomorphe sur Δ. Si α est la classe de cohomologie duale du cycle γ_0, cette fonction représente la période :

$$f_0(s) := \int_{\gamma_0} \omega(s).$$

Montrons que $f_0(0) \neq 0$; dans le cas contraire, on a $Q(\alpha(0), \omega(0)) = 0$ dans la fibre de $\tilde{\mathcal{H}}^3$ en $s = 0$. Mais $\omega(0) \in \tilde{\mathcal{F}}^3(0)$, et $\alpha(0) \in W_0$. Or la filtration par le poids est auto-duale relativement à Q (du fait que $N \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$), c'est-à-dire $W_\ell^\perp = W_{6-\ell-2}$. Donc $\omega(0) \in \tilde{\mathcal{F}}^3(0) \cap W^4 = 0$. Ceci montre bien que $f_0(0) \neq 0$.

Discutons maintenant le choix d'une coordonnée intrinsèque sur Δ^*. Soit $\beta \in W_2 = \ker(N^2)$, linéairement indépendant avec α. Il y a un scalaire λ tel que $N(\beta) = \lambda\alpha$. Soit $\beta^*(s)$ l'extension canonique (horizontale) de β à $\tilde{\mathcal{H}}^3$. On a

$$\begin{aligned} \beta^*(s) &= \exp\Big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}}N\Big)\beta(s) \\ &= \beta(s) - \frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}}\lambda\alpha^*(s)\ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \int_{\gamma_1} \omega(s) \qquad \text{(si } \beta \text{ est la classe duale de } \gamma_1) \\ &= \frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}}\lambda f_0(s) + Q(\beta^*(s), \omega(s)) \end{aligned}$$

et $Q(\beta^*(s), \omega(s))$ est holomorphe sur Δ. Donc :

$$\tau = \frac{\lambda^{-1}\int_{\gamma_1}\omega}{\int_{\gamma_0}\omega}$$

est un paramètre sur $\mathfrak{h}$ et

$$q = \exp(2\pi \mathrm{i}\tau)$$

un paramètre sur Δ.

Noter que τ étant le quotient de deux périodes ne dépend pas de la section ω. Si $\{\alpha', \beta'\}$ est un autre choix, qui conduit aux périodes $\{\omega'_0, \omega'_1\}$ et aux paramètres t', q', on a $a, b, c \in \mathbb{C}$, $ac \neq 0$, avec :

$$\alpha' = a\alpha,\ \ \beta' = b\alpha + c\beta$$

donc

$$N\beta' = \lambda'\alpha' \qquad \text{avec}\ \ \lambda' = \frac{c\lambda}{a}.$$

D'où
$$\tau' = \tau + \frac{b}{c\lambda} \qquad \text{et} \quad q' = \exp\big(2\pi\mathrm{i}\frac{b}{c\lambda}\big)q\ .$$
On voit le lien avec la discussion dans le §10.A : la constante c_2 s'identifie avec $\exp(2\pi\mathrm{i}\frac{b}{c\lambda})$.

Ces remarques étant faites, il faut certainement utiliser la structure entière pour normaliser les périodes et ainsi obtenir une coordonnée "canonique" sur le disque. Notons L le réseau entier ($L = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0}$) dans H et rappelons que $T \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L, Q)$. Alors $L \cap W_0$ est de rang 1, on va donc prendre pour α un générateur de ce groupe. On a $T = \exp(N) = 1 + N$ sur $W_2 = \ker(N^2)$, donc $N = T - 1$ est entier sur $W_2 \cap L$, c'est-à-dire $N(W_2 \cap L) \subseteq L \cap W_0$. On peut alors choisir une base du groupe (de rang 2) $W_2 \cap L$, de la forme $\{\alpha, \beta\}$, et $N(\beta) \in N\alpha$, soit $N(\beta) = m\alpha$ avec $m \geqslant 1$. Une autre base de ce type est $\alpha' = \pm\alpha$, $\beta' = \pm\beta + \ell\alpha$ ($\ell \in \mathbb{Z}$).

En conclusion, le paramètre q obtenu par cette normalisation est défini à une racine m-ième de l'unité près, et si $m = 1$ (la monodromie est "petite" : dixit Morrison), q est alors déterminé de manière unique. On dit dans ces conditions que q est le *paramètre canonique* autour de la singularité (voir [Mor1]). En résumé, nous avons démontré :

10.5. Proposition (Normalisation mathématique). *Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence à un paramètre de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$. On suppose que ω est une section partout non-nulle sur Δ^* de $\mathcal{F}^3$. On suppose aussi que la monodromie locale du système local de cohomologie en dimension 3 est unipotente de rang 4. On pose $N = \log T$. Fixons $s_o \in \Delta$, un générateur α de $H^3(X_{s_o}, \mathbb{Z}) \cap \operatorname{Ker} N$ et une base $\{\alpha, \beta\}$ de $H^3(X_{s_o}, \mathbb{Z}) \cap \operatorname{Ker} N^2$ telle que $N\beta = m\alpha, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in H_3(X_{s_o}, \mathbb{Z})$ les classes duales. Alors la fonction*
$$q(s) = \exp\Big(\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}\frac{\int_{\gamma_1}\omega(s)}{\int_{\gamma_0}\omega(s)}\Big)$$
est bien définie à une racine m-ième de l'unité près.

10.6. Exemple. [Hu] La situation est analogue à celle des courbes de genre 1. Soit la famille de courbes de genre 1 : $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \neq 0, 1$ (*forme de Legendre*) ; $\omega = \frac{dx}{2y}$ définit une section de $\mathcal{F}^1$ (fibré de Hodge).

Les périodes (au nombre de deux) sont données, relativement à une base de $H_1(X_\lambda, \mathbb{Z})$, par
$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} \qquad \text{et} \quad \omega_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$
On exprime ω_1 et ω_2 en fonction de λ, au moyen de la série hypergéométrique
$$F(\lambda) = {}_2F_1\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\big) = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}^2 \lambda^n$$

convergente si $|\lambda| < 1$. Alors le résultat classique est que $\omega_1 = \pi F(\lambda)$, $\omega_2 = i\pi F(1-\lambda)$ ($|\lambda| < 1$) et que ce sont les deux solutions indépendantes de l'équation différentielle de Picard-Fuchs, qui est ici l'équation différentielle hypergéométrique

$$s(1-s)f''(s) + (1-2s)f'(s) - \frac{1}{4}f(s) = 0 \ .$$

C'est bien là le début de la connexion de Gauss-Manin !

On retourne à l'accouplement de Yukawa. Si s est une coordonnée locale sur le disque Δ de centre le point singulier b_i (ici $s(b_i) = 0$), et si ω est une section locale de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ qui trivialise ce fibré en droites sur Δ, on a défini l'accouplement de Yukawa (non normalisé) comme la fonction sur Δ^* :

$$\kappa_{sss} = Q\Big(\omega, \frac{d^3\omega}{ds^3}\Big) \ .$$

La fonction κ_{sss} dépend de la coordonnée s, ainsi que la section locale ω de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ sur Δ. Le passage de ω à $f\omega$ ($f(0) \neq 0$), transforme κ_{sss} en $f^2\kappa_{sss}$.

Pour une section ω de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ qui est une base locale en $s = 0$, la période normalisée $f_0 = \int_{\gamma_0} \omega$ est alors définie au signe près. On normalise la forme en remplaçant ω par ω/f_0, donc maintenant $f_0(0) = 1$. Alors l'accouplement de Yukawa κ_{ttt} est normalisé, et donc est une fonction définie de manière intrinsèque sur Δ^* ; on parlera de *l'accouplement de Yukawa, dans sa normalisation mathématique.*

On ne poursuit pas les calculs d'une normalisation mathématique dans les exemples, car il est plus facile de normaliser les deux constantes c_1 et c_2 introduites dans le §10.A. On suit cette démarche dans le sous-paragraphe suivant (voir Conjecture 10.6).

10.C. Lien avec le nombre des courbes rationnelles : un exemple

Les applications à la géométrie énumérative ("formules de prédiction") sont basées sur le sens précis qu'il faut attribuer à la correction ("corrections instantons") du produit triple topologique κ (remarque IV du §10.A) et donc en relation avec la définition de "l'action", qui conduit à la définition des modèles sigma basés sur une variété de Calabi-Yau [F-G], [P]. Plus précisemment, l'intégrale Z^* du §7.A admet un développement en contribution sur les morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans la variété de Calabi-Yau. Voir en particulier [P,§5.6] pour un énoncé explicite.

Dans la suite nous ne ferons qu'observer la cohérence de ces développements sur quelques exemples, particulièrement celui de [C-O-G-P].

Soit T l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^5\,\mathbb{C}^5))$ paramétrant les hypersurfaces lisses de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$ et Y_t, $t \in T$ la famille tautologique correspondante. Cette famille est une famille de variétés de Calabi-Yau avec $\dim H^1(T_{Y_t}) = \dim T - \dim \mathrm{PGL}(5) = 101$ et $h^{1,1}(Y_t) = 1$. La symétrie miroir prédit l'existence d'une famille X_s, $s \in S$ avec $\dim S = \dim H^1(T_{X_s}) = 1$ et $h^{1,1}(X_s) = 101$. Le candidat proposé pour X_s est une résolution convenable des singularités du quotient de la famille

$$f(s) = Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 - 5tZ_0Z_1Z_2Z_3Z_4, \quad s = t^{-5}$$

par le groupe

$$G = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mu_5^5 | \, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 = 1\}$$

où μ_5 est le groupe des racines d'unité d'ordre 5. En effet nous avons étudié cette famille dans les paragraphes précédents (l'exemple 9.7) et les classes des formes $\mathrm{res}(\Omega_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ constituent une base de la partie G-invariante de la cohomologie, et donc une base pour $H^3(X_s, \mathbb{C})$. L'équation de Picard-Fuchs trouvée est l'équation de ω_1, résidu de Ω_1, regardé comme 3-forme holomorphe sur X_s.

La symétrie miroir prédit en outre que l'accouplement de Yukawa, proprement normalisé, admet un q-développement $\sum a_d q^d$ tel que les coefficients a_d déterminent le nombre n_d des courbes rationnelles de degré d sur le membre générique de la famille Y_t. Ici q est le paramètre canonique du §10.B.

Malheureusement ce nombre n'est pas à priori fini. En effet, il existe des variétés de Calabi-Yau où on a un nombre infini de courbes rationnelles de degré fixé. Par exemple, on considère un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface S de degré 8. Il y a une famille de dimension $\geqslant 1$ de courbes rationnelles ayant pour image une droite trois fois tangente à la surface S (cela fait une condition pour une droite d'être tangente à une surface). En dépit de cela, Clemens a conjecturé que pour une quintique générale il n'y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles d'un degré donné. Mais si on ne veut pas admettre cette conjecture, il faut trouver une interprétation différente pour les nombres n_d. Une suggestion est d'interpréter ce nombres dans le cadre de la géométrie symplectique comme les invariants de Gromov-Witten pour des courbes rationnelles de degré d. Mais c'est une autre histoire pour laquelle on consultera [Mor3], [D-S]. Ceci dit, on a :

10.6. Conjecture. *Si, dans la formule (dev) du §10.A, on choisit* $c_1 = -5$ *et* $c_2 = 5^{-5}$ *en écrivant*

$$\text{(Myst)} \qquad \kappa_{\tau\tau\tau} = n_0 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{n_d d^3 q^d}{1 - q^d}$$

on a $n_0 = 5$ *et pour* $d \geqslant 1$, n_d *est l'invariant de Gromov-Witten pour des courbes rationnelles de degré* d *sur une hypersurface générique dans* $\mathbb{P}^4$ *de degré* 5. *Ce nombre coïncide avec le nombre de courbes rationnelles de degré* d *si la conjecture de Clemens est vraie.*

Cette prédiction a été vérifiée pour $d \leqslant 3$. Voir [Mor2] pour les références.

Voici le tableau des nombres n_d pour $d \leqslant 10$:

1	2875
2	609250
3	317206375
4	242467530000
5	229305888887625
6	248249742118022000
7	295091050570845659250
8	375632160937476603550000
9	503840510416985243645106250
10	704288164978454686113488249750

10.7. Autres exemples. Voir [L-T] et [B-S], §5 pour les détails. Les seules intersections complètes de $\mathbb{P}^{3+r}$ définies par des degrés $d_1, \ldots, d_r$ donnant une variété de Calabi-Yau sont celles avec degrés $(3,3), (2,4), (2,2,2,2)$ et $(2,2,3)$. On a dans ces exemples $h^{1,1} = 1$ et il y a une construction naturelle de la famille miroir (conjecturale) (voir le §7.B). On commence par définir des polynômes de Laurent $f_j(u, X)$ en les variables X_j :

$(3,3)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3)$ $f_2 = 1 - (u_4X_4 + u_5X_5 + u_6(X_1 \cdots X_5)^{-1})$
$(2,4)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4 + u_5X_5 + u_6(X_1 \cdots X_5)^{-1})$
$(2,2,2,2)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4))$ $f_3 = 1 - (u_5X_5 + u_6X_6$ $f_4 = 1 - (u_7X_7 + u_8(X_1 \cdots X_7)^{-1})$
$(2,2,3)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4)$ $f_3 = 1 - (u_5X_5 + u_6X_6 + u_7(X_1 \cdots X_6)^{-1})$.

Ces équations définissent une famille Y_z d'intersections complètes dans le tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^{3+r}$ paramétrée par $z = \prod u_j$. Il existe une compactification lisse de $\cup Y_z$ ayant comme fibres des variétés de Calabi-Yau. Pour cette famille on calcule l'équation de Picard-Fuchs :

$$\Theta^4 - \mu z(\Theta + \alpha_1)(\Theta + \alpha_2)(\Theta + \alpha_3)(\Theta + \alpha_4) = 0$$

où $\Theta = z\frac{\partial}{\partial z}$ et les coefficients $\mu, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ sont donnés dans le tableau suivant :

$(3,3)$	$\mu = 3^6$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/3, 1/3, 2/3, 2/3)$
$(2,4)$	$\mu = 2^{10}$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/4, 2/4, 2/4, 3/4)$
$(2,2,2,2)$	$\mu = 2^8$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
$(2,2,3)$	$\mu = 2^4 3^3$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/3, 1/2, 1/2, 2/3)$

On peut alors aussi calculer l'accouplement de Yukawa normalisé pour ces quatre exemples et trouver les invariants de Gromov-Witten dans chaque cas :

degré	type d'intersection = $(3,3)$	type d'intersection = $(2,4)$
1	1053	1280
2	52812	92288
3	6424326	15655168
4	1139448384	3883902528
5	249787892583	1190923282176
6	62660964509532	417874605342336
7	17256453900822009	160964588281789696
8	5088842568426162960	66392895625625639488
9	1581250717976557887945	28855060316616488359936
10	512045241907209106828608	13069047760169269024822656

degré	type d'intersection = $(2,2,2,2)$	type d'intersection = $(2,2,3)$
1	512	720
2	9728	22428
3	416256	1611504
4	25703936	168199200
5	1957983744	21676931712
6	170535923200	3195557904564
7	16300354777600	517064870788848
8	1668063096387072	89580965599606752
9	179845756064329728	16352303769375910848
10	20206497983891554816	3110686153486233022944

Des travaux récents (Ellingsrud, Libgober) confirment ces nombres, du moins en petit degré.

11. Lien avec la théorie de Hodge mixte

Dans ce paragraphe on explique comment la théorie de Hodge mixte permet de formuler un aspect du phénomène de symétrie.

Rappelons brièvement quelques notions de base qui complètent les définitions du §4.A.

11.1. Définition. Soit $H_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $H = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Une structure de Hodge mixte (réelle) sur H consiste en une filtration croissante $W_\bullet$ de H définie sur $H_{\mathbb{R}}$ et une filtration décroissante $F^\bullet$ de H telles que $F^\bullet$ définit sur Gr_ℓ^W une structure de Hodge par le poids ℓ.

11.2. Exemple. A. Soit M une variété kählérienne compacte de dimension d. On prend $H = \sum_p H^p(M, \mathbb{C})$, $W_\ell = \bigoplus_{a \leqslant \ell} H^a(M, \mathbb{R})$.

B. Soit M_t une famille de variétés kählériennes sur un disque épointé. On suppose que la monodromie sur $H^d(M_t)$ est unipotente. Alors $N := \log T$ satisfait à $N^{d+1} = 0$ et il existe une unique filtration $0 \subset W_0 \subset W_1 \ldots \subset W_{2d-1} \subset W_{2d}$ de $H^d(M_t, \mathbb{R})$ telle que $NW_\ell \subset W_{\ell-2}$ et N^ℓ induit un isomorphisme entre $\mathrm{Gr}^W_{d+\ell}$ et $\mathrm{Gr}^W_{d-\ell}$ (§4.B ou [S] pour les détails). On a introduit (§4.B) la filtration $F^\bullet_\infty$ sur $H^d(M_t)$. $W_\bullet$ et $F^\bullet_\infty$ définissent une structure de Hodge mixte. Voir [S].

Dans l'exemple B on a même de plus :

1) la forme de polarisation Q sur $H^d(M_t)$ est telle que

$$Q(Nu, v) + Q(u, Nv) = 0.$$

2) $Q(F^p, F^{d-p+1}) = 0$;

3) On a une décomposition de Lefschetz $\mathrm{Gr}^W_{d+\ell} = \bigoplus_{j \geqslant 0} N^j(P_{\ell+2j})$ où

$$P_\ell = \ker N^{\ell+1} : \mathrm{Gr}^W_{d+\ell} \to \mathrm{Gr}^W_{d-\ell-2}$$

telle que $Q(-, N^\ell -)$ polarise la structure de Hodge par le poids $d+\ell$ sur $\mathrm{Gr}^W_{d+\ell}$.

On dit dans ce cas que N *polarise la structure de Hodge mixte.*

Dans l'exemple A on ne peut pas utiliser l'opérateur de Lefschetz L (multiplication avec la classe de Kähler) pour polariser la structure de Hodge mixte car celui-ci est de type $(1,1)$. Il faut plutôt utiliser son adjoint Λ (voir [Dem], §6A). On peut alors vérifier [C-K] que la théorie classique de la décomposition de Lefschetz se traduit en l'énoncé que la structure de Hodge mixte de l'exemple A est polarisée par Λ avec la forme $Q(a, b) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)} \int_M a \cup b$, où $a \in H^p$ et $b \in H^{2d-p}$.

Il y a une réciproque au théorème de l'orbite nilpotente disant que, étant donnée une structure de Hodge mixte $(F^\bullet, W_\bullet)$ sur H polarisée par N avec $N^{d+1} = 0$, la filtration

$$F^\bullet_{\text{nouveau}} := \exp\left(\frac{-\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\right) F^\bullet$$

est une structure de Hodge pure de poids d pour s petit. On obtient même une variation de structure de Hodge polarisée par Q. Voir [C-K-S].

En appliquant cela dans l'exemple A on trouve

$$h^{d-q,q}_{\text{nouveau}} = \sum_a h^{a,q}$$

Nous allons voir comment cette idée permet de suggérer une dualité au niveau des variations de structures de Hodge liée à la symétrie miroir.

Pour les variétés de Calabi-Yau M de dimension 3 on a un diamant de Hodge (voir le §7) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{3,3}=1 & & & \\ & & h^{3,2}=0 & & h^{2,3}=0 & & \\ & h^{3,1}=0 & & h^{2,2}=a & & h^{1,3}=0 & \\ h^{3,0}=1 & & h^{1,2}=b & & h^{2,1}=b & & h^{0,3}=1 \\ & h^{2,0}=0 & & h^{1,1}=a & & h^{0,2}=0 & \\ & & h^{1,0}=0 & & h^{0,1}=0 & & \\ & & & h^{0,0}=1 & & & \end{array}$$

et la variation de Hodge “nouvelle” a pour nombres de Hodge :

$$h^{3,0}_{\text{nouveau}} = 2 = h^{0,3}_{\text{nouveau}}, \quad h^{2,1}_{\text{nouveau}} = h^{1,2}_{\text{nouveau}} = a+b = h^{1,1} + h^{1,2}.$$

On pourra regarder cette variation comme suit. Le choix d’une classe de Kähler détermine une variation à un paramètre, de poids 3 et à nombres de Hodge $(2, a+b, a+b, 2)$. Cette structure est somme directe d’une variation à nombres de Hodge $(1, a, a, 1)$, la partie qui provient de la cohomologie paire de M, et une variation constante à nombres de Hodge $(1, b, b, 1)$ provenant de la cohomologie impaire. A priori la variation dépend du paramètre choisi.

Exemple 11.3. Supposons $a = 1$ et que $H^+(M) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6 = \bigoplus_{k=0}^{3} \mathbb{Z} f_k$ est la cohomologie paire avec f_i le générateur positif de $H^{2i}(M)$. Si on utilise le paramètre $q(s) = \dfrac{\log(s)}{2\pi \mathrm{i}}$ sur Δ^* on trouve que la connexion plate pour la nouvelle variation dans la base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ s’écrit

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \deg(M)\dfrac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cadre de la symétrie miroir la variation de l’exemple précedente doit être modifiée de telle sorte que les nombres des courbes rationnelles de chaque degré entrent dans la connexion (“déformation quantique ou corrections instantons”). Les physiciens ont proposé d’introduire la connexion plate, appelée *connexion du modèle A*, donnée en termes de la base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ par :

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(q)\dfrac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$K(q) = \deg(M) + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d},$$

avec n_d $(d \geqslant 1)$ le nombre de courbes rationnelles de degré d sur M (ou l'invariant de Gromov-Witten si nécessaire) et donc ∇_A est entièrement définie en termes de la géométrie de M.

On peut généraliser cette construction de la variation nouvelle pour une orbite nilpotente à plusieurs paramètres. Voir [C-K-S]. Alors, en utilisant un système de a générateurs pour le cône de Kähler de M, on trouve une variation de structure de Hodge qui dépend de a paramètres, somme d'une variation à nombres de Hodge $(1, a, a, 1)$ et une variation constante $\mathcal{V}_2(M)$ à nombres de Hodge $(1, b, b, 1)$. Ensuite, la connexion de la première variation doit être modifiée en utilisant le nombre des courbes rationnelles dans toutes les classes de cohomologie (ou mieux les invariants de Gromov-Witten correspondants). Pour obtenir cette “déformation quantique”, soit f_0 le générateur positif de $H^0(M)$, f_2 le générateur dual de $H^4(M)$, puis $\{f_1^1, \ldots, f_1^a\}$ une base entière de $H^2(M)$, $\{f_2^1, \ldots, f_2^a\}$ la base duale de $H^4(M)$, et finalement soient $q_1, \cdots, q_a$ des paramètres dans $(\Delta^*)^a$. On introduit :

$$K_{ijk} := f_1^i \cdot f_1^j \cdot f_1^k + \sum_{\eta} n_{ijk}(\eta) \frac{q^\eta}{1-q^\eta}$$

où $\eta \in H^4(M)$ parcourt les classes de courbes rationnelles sur M, $n_{ijk}(\eta)$ l'invariant de Gromov-Witten (voir [D-S]), brièvement $n_{ijk}(\eta)$ est le nombre de courbes pseudo-holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \to M$ de classe η telles que $f(0) \in D_j$, $f(1) \in D_j$, $f(\infty) \in D_k$ où D_i, D_j, D_k sont des diviseurs effectifs qui représentent les classes $f_1^i, f_1^j, f_1^k)$ et où on pose $q^\eta = q_1^{c_1} \cdots q_a^{c_a}$, $c_i = \eta \cdot f_1^i$. La connexion ∇_A alors est donnée par

$$\begin{aligned}
&\nabla_A f_0 = \sum_{i=1}^{a} f_1^i \otimes \frac{dq_i}{q_i};\\
&\nabla_A f_1^k = \sum_{i,j=1}^{a} K_{ijk} f_2^j \otimes \frac{dq_i}{q_i}, \quad k = 1, \ldots, a;\\
&\nabla_A f_2 = 0.
\end{aligned}$$

Voir [B-S], §3.1 et [Mor5] pour les détails. Appelons cette variation $\mathcal{V}_1(M)$.

La symétrie miroir prédit qu'il existe une famille verselle de variétés de Calabi-Yau “miroir” avec $h^{2,1} = a$ et $h^{1,1} = b$. Il semble naturel de conjecturer que la variation $\mathcal{V}_2(M)$ ci-dessus coïncide avec la variation donnée par le troisième groupe de cohomologie de la famille “miroir”, du moins si on restreint cette famille à un ouvert de coordonnées avec des coordonnées convenables.

Apparemment, dans cette construction il y a un défaut de symétrie entre les paramètres a et b. Pour restituer cette symétrie, il faut partir d'une famille verselle

$\{M_t\}$, $t \in T$ avec $\dim T = b = H^{1,2}(M_t)$, considérer le complexifié du cône de Kähler (voir Remarque 10.3 IV) $CK(M_t)$ de chaque fibre M_t ce qui donne une variété $\hat{T}$ de dimension $a+b$ fibrée sur T, la fibre au dessus de t étant $CK(M_t)$. Les variations $\mathcal{V}_1(M_t)$ se recollent en une variation $\mathcal{V}_1$, de base $\hat{T}$. Les variations $\mathcal{V}_2(M_t)$ de même se recollent en une variation $\mathcal{V}_2$ sur $\hat{T}$.

On peut alors reformuler la symètrie miroir en une conjecture en termes de variations de structures de Hodge :

Conjecture. *Soit $\{M_t\}$, $t \in T$ une famille verselle de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 et soit $\hat{T}$ la réunion des complexifiés des cônes de Kähler de chaque fibre M_t. Soit $\mathcal{V}_1$ la variation de structures de Hodge au dessus de $\hat{T}$ provenant de la cohomologie paire des fibres M_t (la "déformation quantique" de l'orbite nilpotente introduite ci-dessus) et soit $\mathcal{V}_2$ la variation au dessus de $\hat{T}$ qui provient de la cohomologie impaire. Il existe une famille verselle M_t^*, $t \in \hat{T}^*$ de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 telles que $H^{2,1}(M_t^*) = H^{1,1}(M_t)$; $H^{1,1}(M_t^*) = H^{2,1}(M_t)$ et il y a un isomorphisme $\hat{T} \to \hat{T}^*$ qui échange les deux types de variations $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.*

Dans cette formulation il y a cependant une difficulté car la variation $\mathcal{V}_1$ dépend du choix des paramètres dans le complexifié du cône de Kähler tandis que ce n'est pas le cas pour $\mathcal{V}_2$.

On ne va pas discuter plus en détail ce problème, mais plutôt se limiter au cas $b=1$, donc le cas d'une famille verselle à un paramètre s. On suppose que la base de la variation (une courbe quasi-projective) admet une compactification avec un seul point autour lequel la monodromie locale T est maximalement unipotente. Soit

$$0 \subset W_0 = W_1 \subset W_2 = W_3 \subset W_4 = W_5 \subset W_6$$

la filtration par le poids. On suppose que $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ est une base de W_2 telle que $N\alpha_0 = 0$ et $N\alpha_1 = \alpha_0$ où $N = \log T$. On peut la compléter en une base symplectique adaptée $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_0\}$, c'est-à-dire $Q(\alpha_0, \beta_0) = Q(\alpha_1, \beta_1) = 1$, $Q(\alpha_0, \alpha_1) = Q(\alpha_0, \beta_1) = Q(\alpha_1, \beta_0) = 0$ et $N\beta_1 = k\alpha_1, N\beta_0 = -\beta_1$. On suppose de plus que $k=1$, ce qui est le cas dans l'exemple de la quintique du §10.C (c'est implicite dans les calculs de [Mor1] appendix A, C).

On sait que la filtration $F_\infty^\bullet$ induit une structure pure de poids $2j$ sur Gr_{2j}^W, $j = 0,1,2,3$ et donc forcément β_0 est de type $(3,3)$ et on a $F_\infty^3 = \mathbb{C}\beta_0$ car $\dim F_\infty^3 = 1$. Aussi, β_1 est de type $(2,2)$ et donc $F_\infty^2 = \mathbb{C}\beta_1 + F_\infty^3$. De manière analogue on trouve que $F_\infty^1 = \mathbb{C}\alpha_1 + F_\infty^2$. On peut écrire $F^\bullet(s) = X(s)F_\infty^\bullet$ avec $X(s) = e^{Y(s)}$, $\quad Y(s) \in \bigoplus_{r<0} \mathfrak{g}^{r,-r}$. On peut alors calculer $F^\bullet(s) = X(s)F_\infty^\bullet$ en supposant que $X(s)$ a une matrice de la forme

$$X(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f(s) & 1 & 0 & 0 \\ * & g(s) & 1 & 0 \\ * & * & f(s) & 1 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base $\{\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_0\}$. Soit $\{\omega_0, \omega_1, \nu_1, \nu_0\}$ la base de $H^3(X_s, \mathbb{C})$ ainsi obtenuee. Elle est adaptée à la nouvelle filtration de Hodge :

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \nu_1 \\ \nu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f(s) & * & * \\ 0 & 1 & g(s) & * \\ 0 & 0 & 1 & f(s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Si on applique la connexion de Gauss-Manin, en utilisant cette expression, la transversalité de Griffiths donne :

$$\nabla\omega_0 = f'(s)\omega_1 \cdot ds, \quad \nabla\omega_1 = g'(s)\nu_1 \cdot ds, \quad \nabla\nu_1 = f'(s)\nu_0 \cdot ds$$

et donc on retrouve l'accouplement de Yukawa :

$$\kappa_{sss} = f'(s)^2 g'(s).$$

Comme dans le §11 on prend $\tau = Q(\omega_0, \alpha_1) = f(s)$ comme paramètre canonique et $q = \exp 2\pi\mathrm{i}\tau$. Donc, dans la coordonnée q on a :

$$\begin{pmatrix} \nabla\omega_0 \\ \nabla\omega_1 \\ \nabla\nu_1 \\ \nabla\nu_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi\mathrm{i}q \cdot \dfrac{dg}{dq}\dfrac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \nu_1 \\ \nu_0 \end{pmatrix}.$$

Résumons :

Proposition 11.4. *Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence à un paramètre de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$. On suppose que le fibré de Hodge $\mathcal{F}^3$ est trivialisé sur Δ^* par ω_0. Soit $\{\omega_0, \omega_1\}$ une base de $\mathcal{F}^2$. On suppose de plus que la monodromie locale du système local de cohomologie en dimension 3 est unipotente de rang 4 et qu'il y a une base symplectique adaptée $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_0\}$. Alors, avec*

$$f(s) = Q(\omega_0, \alpha_1),$$
$$g(s) = Q(\omega_1, \beta_1),$$

le paramétre canonique est :

$$q = \exp 2\pi\mathrm{i}(f(s))$$

et l'accouplement de Yukawa (normalisé) est :

$$\text{(fin)} \qquad \kappa = 2\pi\mathrm{i}q \cdot \frac{dg}{dq} \left(\frac{dq}{2\pi\mathrm{i}q} \right)^{\otimes 3}$$

Nous allons terminer par une discussion complémentaire sur quelques résultats de Deligne [Del6] sans donner véritablement les démonstrations. La notion centrale est celle d'une extension de structure de Hodge mixtes, introduite par Carlson [Ca]. Ici nous ne donnons pas les définitions ; l'exemple suivant sert comme illustration de cette notion et suffit pour notre but.

Exemple. Soit $\mathbb{Z}(-k)$ la structure de Hodge de dimension 1 et pure de type (k,k), $k \in \mathbb{Z}$ donnée par le réseau $(2\pi \mathrm{i})^k\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ (structure de Tate). Une extension de $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ est une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}(0) \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}(-1) \to 0$$

de structures de Hodge *mixtes*. Une telle extension est classifiée par un nombre complexe non-nul q. Plus concrètement : soit $H_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ avec la base $\{e_0, e_1\}$ telle que $\alpha(1) = e_1$, $\beta(e_0) = 2\pi \mathrm{i}$. Alors $H_{\mathbb{Z}}$ admet pour base $\{f_0 = e_0 + \dfrac{\log q}{2\pi \mathrm{i}} e_1, f_1 = e_1\}$. Le choix de la branche de $\log q$ est sans importance, un autre choix mène à $\{f_0 + kf_1, f_1\}$, $k \in \mathbb{Z}$, une autre base de $H_{\mathbb{Z}}$. Les filtrations par le poids et de Hodge sont données par $W_2 = \mathbb{Q}e_1$, $W_4 = H_{\mathbb{Q}}$, $F^0 = F^1 = \mathbb{C}e_0$, $F^2 = 0$.

Pour la suite on a besoin d'une version avec paramètres, donc le cadre naturel est celui de *variations* de structures de Hodge mixtes sur une base S. Le lecteur pourra consulter [B-Z§7] pour les définitions ; pour comprendre la suite l'exemple suivant suffit.

Exemple. Soit $S = \Delta^*$ de coordonnée s. Une extension de la "variation" constante $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ est complètement déterminée par une fonction $q(s)$ méromorphe sur Δ, holomorphe et partout non-nulle sur Δ^* d'ordre $m \in \mathbb{Z}$. La structure entière est alors donnée par la base $\{f_0 = e_0 + \dfrac{\log q(s)}{2\pi \mathrm{i}} e_1, f_1 = e_1\}$. La connexion correspondante est donnée par $\nabla e_0 = -\dfrac{dq(s)}{2\pi \mathrm{i} q(s)} e_1, \nabla e_1 = 0$. La monodromie locale T vérifie $Te_0 = e_0 + me_1, Te_1 = e_1$. Donc $Ne_0 = me_1$, $Ne_1 = 0$ ($N = \log T$). Ici aussi les filtrations par le poids et de Hodge sont données par $W_2 = \mathbb{Q}e_1$, $W_4 = H_{\mathbb{Q}}$, $F^0 = F^1 = \mathbb{C}e_0$, $F^2 = 0$.

Dans notre situation, le fait que Gr^W_{2k} est de rang 1 (et donc pur de type (k,k)) implique que pour chaque point s voisin du point priviligé $F^\bullet_s$ et la filtration par le poids donnent une structure de Hodge mixte avec $h^{0,0} = h^{1,1} = h^{2,2} = h^{3,3} = 1$. La structure de Hodge mixte peut être décrite comme dans l'exemple précédent par extension itérée de structures de Tate $\mathbb{Z}(-3)$ par $\mathbb{Z}(-2)$, $\mathbb{Z}(-1)$, $\mathbb{Z}(0)$. Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ une base symplectique adaptée à la filtration $0 \subset W_0 = W_2 \subset W_2 = W_3 \subset W_4 = W_5 \subset W_6$ telle que $\{e_3\}$ est une base de F^3, $\{e_3, e_2\}$ de F^2 et $\{e_3, e_2, e_1\}$ de F^1. Les classes d'extension sont alors données par $q = \exp(2\pi \mathrm{i} f)$ (le paramètre canonique), $q_2 = \exp(2\pi \mathrm{i} g)$ (la fonction qui provient de l'accouplement de Yukawa via (fin) ci-dessus) et $q_3 = q$ par "dualité". La structure entière sous-jacente admet donc pour base $\{e_0, e_0 + f(s)e_1, e_1 + \dfrac{g(s)}{2\pi \mathrm{i}} \cdot e_2, e_2 + \dfrac{f(s)}{(2\pi \mathrm{i})^2} \cdot e_3\}$.

Puisque

$$\kappa_{\tau\tau\tau} = q\frac{\partial}{\partial q}\log q_2,$$

le développement de $\kappa_{\tau\tau\tau}$ (voir (Myst)) est équivalent au développement comme produit infini :

$$q_2 = q^{n_0}\prod_{d\geqslant 1}(1-q^d)^{-n_d d^2},$$

ce qui donne une interprétation à (Myst) purement en termes de structures de Hodge mixtes.

Soit M^* le membre générique de la famille miroir M_t^* et soit $H^+(M^*) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6 = \bigoplus_{k=0}^3 \mathbb{Z}f_k$ la cohomologie paire. On peut modifier la "variation constante" sur $H^+(M^*) \times \Delta^*$ en utilisant l'orbite nilpotente associée à l'opérateur Λ comme expliqué dans l'exemple 11.2. On obtient une extension itérée des structures de Tate $\mathbb{Z}(-3)$ par $\mathbb{Z}(-2)$ par $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ avec classes d'extension q, $\deg(N)q$, q et c'est donc pas une structure intéressante ; la connexion s'écrit dans la base f_k comme dans l'exemple 11.3 et il faut remplacer cette connexion par la connexion du modèle A :

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(q)\frac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où maintenant

$$K(q) = \deg(M^*) + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d},$$

avec n_d ($d \geqslant 1$) le nombre de courbes rationnelles de degré d sur M^* (ou l'invariant de Gromov-Witten si nécessaire) et donc ∇_A est entièrement défini en termes de la géométrie du miroir. Pour la nouvelle variation les classes d'extension sont q, $K(q)$ et q.

Donc, comparant avec la formule (fin), on conclut que l'hypothèse de symétrie miroir peut être reformulée comme suit :

Conjecture Finale. *Pour chaque $q \in \Delta^*$, la structure mixte sur $H^+(M^*) \times \{q\}$ coïncide avec la structure mixte de Deligne sur $H^3(M_q)$.*

Bibliographie

[A1] Arapura, D. : *Hodge Theory with local coefficients on compact varieties,* Duke Math. J. **61** (1990) 531–543.

[A2] Arapura, D. : *Higgs line bundles, Green-Lazarsfeld sets, and maps of Kähler manifolds to curves,* Bull. AMS **26** (1992) 310–314.

[A-M] Aspinwall, P.S., Morrison, D.R. : *Topological field theory and rational curves,* Comm. Math. Phys. **151** (1993) 245-262.

[Ba] Batyrev, V. : *Dual polyhedron and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces,* Prépublication (1992).

[B-C-O-V] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. : *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes* Comm. Math. Phys. **165** (1994) 311–427.

[Bea] Beauville, A. : *Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle,* J. Diff. Geom. **18** (1983) 755-782.

[B-G] Bryant, R., Griffiths, P.A. : *Some observations on the infinitesimal period relations for regular threefolds with trivial canonical bundle,* dans : Arithmetic and Geometry II, Birkh. Verlag Progress in Mathematics **36** (1983). 77-102.

[B-M] Bertin, J., Markushevich, D. : *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau,* Math. Ann. 299 (1994)105–116.

[Bo] Borel et al. : *Algebraic D-Modules,* Academic Press (1987).

[Bry] Brylinski, J.-L. : *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques.* Dans : Géométrie et analyse microlocales, Astérique **140-141** Soc. Math. France (1986) 3–134.

[B-S] Batyrev, V., van Straten, D. : *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties,* Comm. Math. Physics **168** (1995) 493-533.

[B-Z] Brylinski, J-L., Zucker, S. : *An Overview of recent advances in Hodge theory,* dans : Several Complex variables VI, W, Barth & R. Narasimham (Eds) Encyclopedia of Mathematical Sciences **69** Springer Verlag 1990, pp. 39–142.

[C-G] Carlson, J., Griffiths, P. : *Infinitesimal Variations of Hodge Structure and the global Torelli Problem,* dans : Journées de géométrie algébrique, Angers 1979, Sijthoff-Noordhoff, Alphen and Rijn (1980), 51–76.

[C-G-M] Cheeger, J., Goresky M., MacPherson, M. : *L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties.* Dans : Ann. Math. Studies **102** Princeton Univ. Press(1982) 303–340.

[C-G-G-H] Carlson, J., Green, M., Griffiths, P., Harris, J. : *Infinitesimal Variations of Hodge Structure I,* Comp. Math. **50** (1983) 109–205.

[Ch1] Cheeger, J. : *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds.* Dans : Geometry of the Laplace operator, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980) 91–146.

[Ch2] Cheeger, J. : *Hodge theory of complex cones.* Dans : Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers, Astérisque **101-102**, Soc. Math. France (1983) 303–340.

[C-H] Candelas, P., He, A. : *On the number of complete intersection Calabi-Yau manifolds,* Comm. Math. Phys. **135** (1990) 193-199.

[C-K] Cattani, E., Kaplan, A. : *Degenerating variations of Hodge structures (Théorie de Hodge 1987)* Astérique 179–180 (1989) .

[C-K-S1] Cattani, E., Kaplan, A., Schmid, W. : *Degenerations of Hodge structures,* Ann. Math. **123** (1986) 457–536.

[C-K-S2] Cattani, E., Kaplan, A., Schmid, W. : *L^2 and intersection cohomology for a polarized variation of Hodge structure,* Invent. Math. **87** (1987) 217–252.

[Cl] Clemens, C.H. : *Degeneration of Kähler manifolds,* Duke Math. J. **44** (1977) 215–290.

[C-L] Coddington, E.A., Levinson, N. : *Theory of ordinary differential equations,* McGraw-Hill, New-York (1955).

[Co-G] Cornalba, M., Griffiths, P. : *Some transcendental aspects of algebraic geometry,* Proc. Symp. Pure Math. AMS **29** (1975) 3–110.

[C-O] Candelas, P., de la Ossa, X.C. : *Moduli of Calabi-Yau manifolds,* Nuclear Physics, Ser. B. (1991).

[C-O-G-P] Candelas, P., de la Ossa, X.C., Green, P.S., Parkes, L. : *Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory,* Phys. Lett. B **258** (1991) 118-126 ; Nuclear Phys. B. **359** (1991) 21-74.

[Del1] Deligne, P. : *équations diffèrentielles à points singuliers réguliers,* LNM **163**, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[Del2] Deligne, P. : *Travaux de Griffiths,* Sém. Bourbaki Vol. **376** (1969/70).

[Del3] Deligne, P. : *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales,* Publ. Math. IHES **35** (1968), 107-126.

[Del4] Deligne, P. : *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. IHES **40** (1971) 5–57.

[Del5] Deligne, P. : *Théorie de Hodge III,* Publ. Math. IHES **44** (1974) 5–77.

[Del6] Deligne, P. : *Local behaviour of Hodge structures at infinity,* Prépublication 1994.

[Dem] Demailly, J.-P. : *Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation,* Ce volume.

[Dim] Dimca, A. : *Residues and cohomology of complete intersections,* Duke Math. J. **78** (1995) 89–100.

[D-S] McDuff, D., Salamon, D. : *J-holomorphic curves and quantum cohomology,* Amer. Math. Soc., (1994) Providence RI.

[D-St] Doorn, R. van, Steenbrink, J. : *A supplement to the monodromy theorem,* Abh. Mat. Ser. Univ. Hamburg **59** (1989) 225–233.

[F-G] Fröhlich, J., Gawedski, K. : *Conformal field theory and geometry of strings,* CRM **7**, Canadian Math. Soc. (1994) 57-97.

[Fo] Forster, O. : *Riemannsche Flächen,* Springer Verlag (1977).

[Giv] Givental, A. : *Homological geometry I, Projective hypersurfaces,* Selecta Math. **1** (1995)325-345.

[G-M] Goresky, M., MacPherson, R. : *Intersection homology, Topology* **19** *(1980) 135–162 (II)* Invent. Math. **72** 77–129 (1983).

[God] Godement, R. : *Théorie des faisceaux,* Hermann, Paris (1957).

[Grif1] Griffiths, P. : *Periods of rational integrals on algebraic manifolds, I, II, resp. III* Amer. J. Math. **90** (1968) 568–626, 805–865, resp. Publ. Math. IHES., 38 (1970) 125–180.

[Grif2] Griffiths, P. : *On the periods of certain rational integrals, I,* Ann. Math. (2) **90** (1969) 460-495.

[Grif3] Griffiths, P. : *Periods of integrals on algebraic manifolds : summary and discussion of open problems*, Bull. AMS **76** (1970) 228–296.

[Grif4] Griffiths, P. : *Topics in Transcendental Algebraic Geometry,* Ann. Math. Studies **106** Princeton Univ. Press, Princeton (1984).

[Groth] Grothendieck, A. : *On the De Rham cohomology of algebraic varieties,* Publ. Math. IHES **29** (1966) 95-103.

[G-S] Griffiths, P., Schmid, W. : *Recent developments of Hodge theory : a discussion of techniques and results,* dans : International Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups and Moduli, Oxford University Press (1975).

[G-S1] Griffiths, P., Schmid, W. : *Locally homogeneous complex manifolds* Acta Math. **123** 253–302 (1970).

[Hu] Husemoller, D. : *Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics* **111** Springer Verlag, Berlin (1987).

[Ill] Illusie, L. : *Frobenius et dégénérescence de Hodge,* Ce volume.

[Ince] Ince, E.L. : *Ordinary differential equations,* First ed. Dover 1929, New-York (1956).

[Iv] Iversen, B. : *Cohomology of Sheaves,* Springer Verlag, Berlin (1986).

[H] Hübsch, T. : *Calabi-Yau Manifolds, a bestiary for physicists,* World Scientific (1993).

[H-K-S-Y] Hosono, S., Klemm, A.K., Theisen, S., Yau, S.-T. : *Mirror symmetry and applications to Calabi-Yau hypersurfaces,* Comm. Math. Phys. **167** (1995) 300-350.

[H-S] Hinich, V., Schechtmann, V. : *Higher deformation theory (I),* Prépublication MSRI (1994).

[K1] Kontsevich, M. : *Homological algebra of mirror symmetry,* Intern. Congress of Mathemetics, Zürich (1994) 120–139, Birkhäuser Verlag, Basel (1995).

[K2] Kontsevich, M. : *Mirror symmetry in dimension* 3,Séminaire Bourbaki 1995.

[Ka] Katz, N. : *Algebraic solution of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration),* Invent. Math. **18** (1972) 1–18.

[Kas] Kashiwara, M. : *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems,* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **20** (1984) 319–365.

[Ki] Kirwan, F. : *An introduction to intersection homology theory,* Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, (1988) .

[K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. : *The Poincaré lemma for variations of Polarized Hodge structures.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **23** (1987) 345–407.

[K-M] Kontsevich, M., Manin, Yu. : *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry,* Commun. Math. Phys. **164** (1994) 525-562.

[K-O] Katz, N., Oda, T. : *On the differentiation of the De Rham cohomology classes with respect to parameters,* J. Math. Kyoto Univ. **1** (1968) 199-213.

[K-S] Kodaira, K., Spencer, D.C. : *On deformations of complex analytic structures I-II,* Ann. Math. **67** (1958) 328-466.

[K-S2] Kodaira, K., Spencer, D.C. : *A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces,* Acta Math. **100** (1958) 450–459.

[Ku] Kuranishi, M. : *On the locally complete families of complex analytic structures,*Ann. Math. **75** (1962) 536–577.

[La] Landman, A. : *On the Picard-Lefschetz transformations* Trans. AMS **181** (1973) 89–126.

[L-T] Libgober, A., Teitelbaum, J. : *Lines on Calabi-Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard-Fuchs equations,* Int. Math., Research Notes **1** (1993) 29-38.

[L-Y] Lian, B.H., Yau, S-T. : *Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling,* Prépublication hep-th/9411234 (1994).

[M1] Mebkhout, Z. : *Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories.* Ark. Math. **50** (1984) 51–88.

[M2] Mebkhout, Z. : *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les* $\mathcal{D}$-*modules cohérents.* Hermann, 1989.

[Mil] Milnor, J. : *Singular points of complex hypersurfaces.* Princeton Univ. Press, 1968.

[Mor1] Morrison, D.R. : *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds : A guide for mathematicians,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 223-247.

[Mor2] Morrison, D.R. : *Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces,* dans [Y2] 241-264.

[Mor3] Morrison, D.R. : *Introduction to mirror manifolds,* Lectures at the Park City Regional Geometry Institute (1993).

[Mor4] Morrison, D.R. : *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry,* Soc. Math. de France, Astérisque **218** (1993) 242–271.

[Mor5] Morrison, D.R. : *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry* à paraître.

[NA] Navarro Aznar, V. : *Sur la théorie de Hodge-Deligne,* Invent. Math. **90** (1987) 11–76.

[Ohs1] Ohsawa, T. : *Cheeger-Goresky-MacPherson's conjecture for the varieties with isolated singularities,* Math. Zeitschrift **206** (1991) 219–224.

[Ohs2] Ohsawa, T. : *On the* L^2 *cohomology of complex spaces,* Math. Zeitschrift **209** (1992) 519–530.

[P] Plesser, B.R. : *Lectures on quantum geometry,* Nucl. Phys. B. (Suppl.) **41** (1995) 92–150.

[P-S] Peters, C., Steenbrink, J. : *Infinitesimal variation of Hodge Structure and the generic Torelli problem for projective hypersurfaces.* Dans : Classification of Algebraic and Analytic Varieties, Birkhäuser Verlag (1983), 399–464.

[R-T] Ruan, Y., Tian, G. : *A mathematical theory of quantum cohomology,* J. Differential Geometry **42** (1995) 259-367.

[S] Schmid, W. : *Variations of Hodge structure : the singularities of the period mapping,* Invent. Math. **22** (1973) 211-320.

[Sa1] Saito, M. : *Modules de Hodge Polarisables,* Publ. RIMS Kyoto Univ. **24** (1988) 849–995.

[Sa2] Saito, M. : *Decomposition morphisms for proper Kähler morphisms.* Prépublication IHES (1988).

[Se] Serre, J.-P. : *Géometrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier **6** (1956) 1-42.

[Si1] Simpson, C. : *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization,* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) 876–918.

[Si2] Simpson, C. : *Nonabelian Hodge theory,* Int. Congr. of Math., Kyoto 1990, Proc., Springer, Tokyo (1991).

[Si3] Simpson, C. : *Higgs bundles and local systems,* Publ. Math. IHES **75** (1992) 5–95.

[Si4] Simpson, C. : *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety* I, Publ. Math. IHES **79** (1994) 47–129, II **80** (1995) 5–79.

[St1] Steenbrink, J. : *Limits of Hodge structures,* Invent. Math. **31** (1976) 229–257.

[St2] Steenbrink, J. : *Semicontinuity of the singularity spectrum,* Invent. Math. **79** (1985) 557–565.

[Str] Strominger, A. : *Special Geometry,* Comm. Math. Phys. **133** (1990) 163–180.

[T] Tian, G. : *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric,* dans : Mathematical methods of theoretical physics, S.-T. Yau (editor), World Scientific, Hong-Kong (1986).

[V] Voisin, C. : *Symétrie Miroir,* Panoramas et Synthèses **2** (1996).

[Y1] Yau, S.T. : *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry* Proc. Nat. Ac. Sc. USA **74** 1798-1799 (1977).

[Y2] Yau, S.-T. (Editor) : *Essays on mirror manifolds,* Internat. Press, Hong Kong (1992).

[Z1] Zuo, K. : *Some structure theorems for semi-simple representations of π_1 of algebraic manifolds,* Math. Ann. **295** (1993) 365–382.

[Z2] Zuo, K. : *Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of π_1 of projective algebraic manifolds,* Invent. Math. **118** 37–46 (1994).

[Za] Zaslow, E. : *Topological orbifold models and quantum cohomology rings,* Comm. Math. Phys. **156** 301–331 (1993).

[Zu] Zucker, S. : *Hodge theory with degenerating coefficients : L^2-cohomology in the Poincaré metric,* Ann. Math. **109** (1979) 415–476.

Index

Les références DE, IL et BP se rapportent respectivement aux chapitres rédigés par J.-P. Demailly, L. Illusie et J. Bertin-Ch. Peters. Elles sont suivies par le numéro de la section et par le numéro de la page.

Abélienne :

——— variété abélienne . . . . DE, §15, p. 91

Accouplement de Yukawa . . . . BP, §0, p. 175

Accouplement de Yukawa . . . . BP, §10, p. 237

Accouplement de Yukawa . . . . BP, §10, p. 246

Action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . DE, §6, p. 32

Adjoint formel . . . . DE, §2, p. 13

Ahlfors-Schwarz, lemme d' . . . . BP, §4, p. 204

Ample :

——— faisceau inversible ample . . . . IL, §5, p. 144

——— faisceau inversible très ample . . . . IL, §5, p. 144

——— fibré en droites ample . . . . DE, §11, p. 68

——— fibré en droites très ample . . . . DE, §11, p. 68

Anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ . . . . IL, §7, p. 159

Anneau des vecteurs de Witt $W_2(k)$ . . . . IL, §3, p. 133

Betti :

——— nombres de Betti . . . . DE, §8, p. 43

Bott-Chern, groupes de cohomologie de . . . . DE, §8, p. 40

Caractéristique :

Caractéristique d'Euler . . . . DE, §9, p. 50

Caractéristique d'Euler topologique . . . . DE, §9, p. 51

Cartésien :

——— système inductif cartésien . . . . IL, §6, p. 148

Cartier :

——— théorème de Cartier . . . . IL, §3, p. 129

——— isomorphisme de Cartier . . . . IL, §3, p. 130

Catégorie $K(A)$ . . . . IL, §4, p. 135

Catégorie dérivée $D(A)$ . . . . IL, §4, p. 135

Catégorie triangulée . . . . IL, §4, p. 136

Classe de Chern . . . . DE, §1, p. 10

Cohérence des images directes . . . . DE, §10, p. 57

Cohomologie :

Cohomologie de De Rham .... IL, §4, p. 139
Cohomologie de De Rham .... BP, §1, p. 177
Cohomologie de Hodge .... IL, §4, p. 139
Cohomologie d'intersection .... BP, §6, p. 210
Cohomologie L^2 .... BP, §6, p. 210
——— groupes de cohomologie L^2 .... DE, §12, p. 72
Commutateur gradué .... DE, §6, p. 30
Commutation
——— relations de commutation .... DE, §6, p. 30
——— relations de commutation .... DE, §13, p. 80
Complète :
——— variété riemanienne complète .... DE, §12, p. 68
Complexe de De Rham associé à une connexion .... BP, §2, p. 181
Complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 120
Complexe de De Rham à pôles logarithmiques .... IL, §7, p. 156
Complexe de De Rham à pôles logarithmiques relatif .... IL, §7, p. 158
Complexe parfait .... IL, §6, p. 152
Conjecture de Fujita .... DE, §16, p. 94
Cône de Kähler .... BP, §10, p. 242
Connexion .... DE, §1, p. 9
Connexion .... BP, §2, p. 180
Connexion de Chern .... DE, §1, p. 11
Connexion de Gauss-Manin .... DE, §10, p. 54
Connexion de Gauss-Manin .... BP, §0, p. 172
Connexion de Gauss-Manin .... BP, §2, p. 181
Connexion de Gauss-Manin .... BP, §3, p. 192
Connexion du modèle A .... BP, §11, p. 251
Connexion hermitienne .... DE, §1, p. 10
Connexion intégrable ou plate .... DE, §4, p. 24
Connexion intégrable ou plate .... BP, §2, p. 181
Conormal :
——— faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Z}$ .... IL, §1, p. 116
Coordonnées géodésiques .... DE, §5, p. 28
Coordonnées locales .... IL, §2, p. 124
Coordonnées locales .... BP, §2, p. 189
Correspondance de Riemann-Hilbert .... BP, §6, p. 212
Courant .... DE, §11, p. 62
——— cohomologie des courants .... DE, §11, p. 65
Courant d'intégration .... DE, §11, p. 63
Courant d'intégration .... DE, §11, p. 64
Courant fermé .... DE, §11, p. 63
Courant positif .... DE, §11, p. 63
Courbes elliptiques, famille de Legendre .... BP, §10, p. 245
Courbure .... DE, §1, p. 10
Courbure .... BP, §2, p. 181

Courbure sectionnelle .... BP, §4, p. 203
Critère de projectivité de Kodaira .... DE, §15, p. 91
Critère jacobien .... IL, §2, p. 124
Cycle local invariant .... BP, §4, p. 208
Cycles évanescents .... BP, §4, p. 208
Cycles proches .... BP, §4, p. 208

Décomposabilité :
——— objet décomposable .... IL, §4, p. 137
——— schéma DR-décomposable .... IL, §7, p. 161
——— condition suffisante de DR-décomposabilité .... IL, §7, p. 161
Décomposition de Hodge .... DE, §8, p. 41
Décomposition de Hodge .... DE, §9, p. 48
Décomposition de Hodge .... DE, §12, p. 73
Décomposition de Hodge .... DE, §12, p. 75
Décomposition de Hodge .... IL, §0, p. 114
Décomposition de Hodge forte .... DE, §9, p. 49
Décomposition d'un objet d'une catégorie .... IL, §4, p. 137
——— théorème de décomposition en caractéristique $p > 0$ .... IL, §5, p. 140
Décomposition primitive .... DE, §6, p. 37
Déformation complète .... BP, §3, p. 197
Déformation de variétés complexes .... DE, §10, p. 52
Déformation (uni)verselle .... BP, §3, p. 197
Dégénérescence à un paramètre .... BP, §0, p. 173
Dégénérescence d'une suite spectrale .... DE, §9, p. 47
Dégénèrescence de la suite spectrale de Hodge .... DE, §9, p. 48
——— théorème de dégénérescence en caractéristique $p > 0$ .... IL, §5, p. 144
De Rham :
——— cohomologie de De Rham .... IL, §4, p. 139
——— cohomologie de De Rham .... BP, §1, p. 177
——— complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 120
——— complexe de De Rham à pôles logarithmiques .... IL, §7, p. 156
——— complexe de De Rham à pôles logarithmiques relatif .... IL, §7, p. 158
——— complexe de De Rham associé à une connexion .... BP, §2, p. 181
——— groupe de cohomologie de De Rham $H^i_{\mathrm{DR}}(X/k)$ .... IL, §4, p. 139
——— isomorphisme de De Rham-Weil .... DE, §1, p. 8
Dérivation .... IL, §1, p. 117
Dérivée :
——— catégorie dérivée $D(A)$ .... IL, §4, p. 135
Différentiel :
——— opérateur différentiel .... DE, §2, p. 12
Différentielle $d_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 117
Dimension relative .... IL, §2, p. 125
Diviseur à croisements normaux .... IL, §7, p. 155
Dolbeault :

——— isomorphisme de Dolbeault .... DE, §1, p. 9
Dualité de Poincaré .... DE, §4, p. 25
Dualité de Serre .... DE, §7, p. 39

Elliptique :
——— opérateur elliptique .... DE, §2, p. 13
——— opérateur pseudodifférentiel elliptique .... DE, §3, p. 17
Épaississement d'ordre 1 .... IL, §1, p. 116
Équation de Lelong-Poincaré .... DE, §11, p. 64
Équation de Picard-Fuchs .... BP, §9, p. 231
Équation de Picard-Fuchs .... BP, §10, p. 238
Estimations L^2 de Hörmander .... DE, §14, p. 83
Estimations L^2 de Hörmander .... DE, §14, p. 85

Faisceau :
Faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Z}$ .... IL, §1, p. 116
Faisceau de Hodge .... BP, §1, p. 178
Faisceau des 1-différentielles de Kähler $\Omega^1_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 117
Faisceau des i-différentielles de Kähler $\Omega^i_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 119
Faisceau d'idéaux multiplicateurs .... DE, §15, p. 86
Faisceau inversible très ample .... IL, §5, p. 144
Faisceau inversible ample .... IL, §5, p. 144
Faisceau pervers .... BP, §6, p. 212
Faisceau tangent $T_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 117
Famille de variétés algébriques projectives .... BP, §0, p. 171
Famille de variétés algébriques projectives .... BP, §1, p. 180
Fibre de Milnor .... BP, §4, p. 208
Fibré de Higgs .... BP, §5, p. 210
Fibré en droites ample .... DE, §11, p. 68
Fibré en droites très ample .... DE, §11, p. 68
Fibré en droites gros .... DE, §15, p. 92
Fibré en droites nef .... DE, §15, p. 93
Fibré vectoriel positif .... DE, §11, p. 66
Filtration .... DE, §9, p. 46
Filtration de Hodge .... DE, §9, p. 47
Filtration de Hodge .... DE, §10, p. 58
Filtration de Hodge .... BP, §0, p. 172
Filtration de Hodge .... BP, §1, p. 178
——— holomorphie de la filtration de Hodge .... DE, §10, p. 58
Filtration limite .... BP, §4, p. 207
Filtration par le poids .... BP, §4, p. 207
Finitude :
——— théorème de finitude .... DE, §3, p. 17
Foncteurs dérivés $\overset{L}{\otimes}$, $R\mathcal{H}om$, $R\operatorname{Hom}$, Rf_*, Lf^*, $R\Gamma$ .... IL, §4, p. 138
Fonction plurisousharmonique .... DE, §11, p. 60

Fonction sous-harmonique .... DE, §11, p. 60
Forme de Hodge .... BP, §3, p. 191
Forme de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 192
Forme de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 190
Forme de Ricci .... BP, §4, p. 204
Frobenius :
——— endomorphisme de Frobenius (absolu) .... IL, §3, p. 128
——— morphisme de Frobenius (relatif) .... IL, §3, p. 128
Fubini-Study, métrique de .... DE, §5, p. 26
Fujita :
——— conjecture de Fujita .... DE, §16, p. 94
——— théorème de Fujita .... DE, §16, p. 96

Gårding :
——— inégalité de Gårding .... DE, §3, p. 17
Gauss-Manin :
——— connexion de Gauss-Manin .... DE, §10, p. 54
——— connexion de Gauss-Manin .... BP, §0, p. 172
——— connexion de Gauss-Manin .... BP, §2, p. 181
——— connexion de Gauss-Manin .... BP, §3, p. 192
——— propriété de transversalité .... BP, §2, p. 188
Géodésiques :
——— coordonnées géodésiques .... DE, §5, p. 28
Géométrie logarithmique .... IL, §7, p. 159
Géométrie spéciale .... BP, §10, p. 242
Green, opérateur de .... DE, §3, p. 19
Griffiths :
——— positivité de Griffiths .... DE, §11, p. 66
——— transversalité de Griffiths .... BP, §3, p. 192
Gromov-Witten, invariant de .... BP, §11, p. 252
Groupe algébrique du type Hodge .... BP, §5, p. 210
Groupe de monodromie .... BP, §3, p. 193
Groupe de Néron-Severi .... DE, §8, p. 46
Groupes kählériens .... BP, §0, p. 173

Harmonique :
——— forme harmonique .... DE, §4, p. 24
Heisenberg, groupe de .... DE, §8, p. 42
Hermitienne :
——— métrique hermitienne .... DE, §5, p. 25
——— variété hermitienne .... DE, §5, p. 26
Higgs, fibré de .... BP, §5, p. 210
Hodge :
——— décomposition de Hodge .... DE, §8, p. 41
——— décomposition de Hodge .... DE, §9, p. 48
——— décomposition de Hodge .... DE, §12, p. 73

———— décomposition de Hodge .... DE, §12, p. 75
———— décomposition de Hodge .... IL, §0, p. 114
———— faisceau de Hodge .... BP, §1, p. 178
———— filtration de Hodge .... DE, §9, p. 47
———— filtration de Hodge .... DE, §10, p. 58
———— filtration de Hodge .... BP, §0, p. 172
———— filtration de Hodge .... BP, §1, p. 178
———— forme bilinéaire de Hodge-Riemann .... DE, §8, p. 44
———— forme de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 190
———— forme de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 192
———— groupes de cohomologie de Hodge .... IL, §4, p. 139
———— isomorphisme de Hodge .... DE, §4, p. 25
———— isomorphisme de Hodge .... DE, §7, p. 39
———— opérateur $*$ de Hodge .... DE, §4, p. 21
———— opérateur $\#$ de Hodge .... DE, §4, p. 21
———— métrique de Hodge .... DE, §5, p. 27
———— nombres de Hodge .... DE, §8, p. 43
———— nombres de Hodge .... BP, §4, p. 200
———— relations bilinéaires de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 191
———— structure de Hodge réelle .... BP, §3, p. 190
———— structure de Hodge mixte .... BP, §4, p. 200
———— structure de Hodge mixte .... BP, §11, p. 249
———— suite spectrale de Hodge-Frölicher .... DE, §9, p. 46
———— suite spectrale de Hodge-Frölicher .... IL, §0, p. 113
———— suite spectrale de Hodge vers De Rham .... IL, §0, p. 113
———— théorème de dégénérescence de Hodge .... IL, §0, p. 113
———— théorème de dégénérescence de Hodge .... IL, §6, p. 153
———— variation de structures de Hodge (VHS) .... BP, §3, p. 192
———— variation infinitésimale de structures de Hodge (IVHS) .... BP, §3, p. 199
———— variation complexe de structures de Hodge (VCH) .... BP, §5, p. 209
Hopf, surfaces de .... DE, §5, p. 27
Horizontal, sous-fibré .... BP, §3, p. 195
Hypercohomologie .... DE, §9, p. 51

Identité :

Identité de Bochner-Kodaira-Nakano .... DE, §13, p. 80
Identité de Jacobi .... DE, §6, p. 31
Identités de commutation .... DE, §6, p. 30
Identités de commutation .... DE, §6, p. 33
Intégrable :
———— connexion intégrable ou plate .... DE, §4, p. 24
———— connexion intégrable ou plate .... BP, §2, p. 181
Intersection, cohomologie d' .... BP, §6, p. 210
Invariance des nombres de Hodge .... DE, §10, p. 56
Invariant de Gromov-Witten .... BP, §11, p. 252
Irrégularité .... DE, §8, p. 45

Isomorphisme de Cartier .... IL, §3, p. 130
Isomorphisme de De Rham-Weil .... DE, §1, p. 8
Isomorphisme de Dolbeault .... DE, §1, p. 9
Isomorphisme de Hodge .... DE, §4, p. 25
Isomorphisme de Hodge .... DE, §7, p. 39
———— quasi-isomorphisme .... IL, §4, p. 135
Iwasawa, variété d' .... DE, §8, p. 42

Jacobi :
Jacobi, identité de .... DE, §6, p. 31
Jacobienne .... DE, §8, p. 46
———— critère jacobien .... IL, §2, p. 124

Kähler :
———— cône de Kähler .... BP, §10, p. 242
———— groupes kählériens .... BP, §0, p. 173
———— métrique kählérienne .... DE, §5, p. 26
———— variété kählérienne .... DE, §5, p. 26
———— faisceau des 1-différentielles de Kähler $\Omega^1_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 117
———— module des 1-différentielles de Kähler .... IL, §1, p. 118
———— faisceau des i-différentielles de Kähler $\Omega^i_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 119
Kodaira :
———— application de Kodaira-Spencer .... BP, §2, p. 182
———— application de Kodaira-Spencer .... BP, §3, p. 197
———— classe de Kodaira-Spencer .... BP, §2, p. 182
———— critère de projectivité de Kodaira .... DE, §15, p. 91
———— morphisme de Kodaira-Spencer .... BP, §2, p. 182
———— théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano .... DE, §13, p. 82
———— théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano .... IL, §6, p. 154
———— théorème de Kodaira-Akizuki-Nakano en caractéristique p .... IL, §5, p. 145
———— théorème de semi-continuité de Kodaira-Spencer .... DE, §10, p. 55
———— théorie des déformations de Kodaira-Spencer .... DE, §10, p. 52

Laplace :
———— opérateur de Laplace-Beltrami .... DE, §0, p. 3
———— opérateur de Laplace-Beltrami .... DE, §4, p. 23
Lefschetz, théorème difficile de .... DE, §8, p. 44
———— théorème de Lefschetz .... BP, §8, p. 222
Legendre, famille de courbes elliptiques de .... BP, §10, p. 245
Lemme d'Ahlfors-Schwarz .... BP, §4, p. 204
Lemme d'Ehresmann .... DE, §10, p. 53
Lemme de Poincaré .... BP, §1, p. 177
Lemme de Poincaré holomorphe .... BP, §1, p. 177
Logarithmique :
———— complexe de De Rham à pôles logarithmiques .... IL, §7, p. 156
———— complexe de De Rham à pôles logarithmiques relatif .... IL, §7, p. 158

——— géométrie logarithmique ... IL, §7, p. 159

Matsusaka :
——— grand théorème de Matsusaka ... DE, §17, p. 102
——— théorème de Matsusaka effectif ... DE, §17, p. 104
Métrique de Fubini-Study ... DE, §5, p. 26
Métrique de Hodge ... DE, §5, p. 27
Métrique hermitienne ... DE, §5, p. 25
Métrique hermitienne singulière ... DE, §11, p. 67
Métrique de Weil-Peterson ... BP, §10, p. 241
——— fibre de Milnor ... BP, §4, p. 208
Miroir :
——— variété miroir ... BP, §7, p. 215
Mixte :
——— structure de Hodge mixte ... BP, §4, p. 200
——— structure de Hodge mixte ... BP, §11, p. 249
Module des 1-différentielles de Kähler ... IL, §1, p. 118
——— $\mathcal{D}$-module holonome ... BP, §6, p. 212
Monodromie locale ... BP, §0, p. 173
Monodromie locale ... BP, §4, p. 203
Monodromie locale ... BP, §4, p. 199
Monodromie locale ... BP, §9, p. 232
——— représentation de Monodromie ... BP, §2, p. 180
——— groupe de monodromie ... BP, §3, p. 193
Morphisme de Frobenius (absolu) ... IL, §3, p. 128
Morphisme de Frobenius (relatif) ... IL, §3, p. 128
Morphisme des périodes ... BP, §3, p. 196
Morphisme étale ... IL, §2, p. 120
Morphisme lisse ... IL, §2, p. 120
Morphisme localement de présentation finie ... IL, §2, p. 120
Morphisme localement de type fini ... IL, §2, p. 120
Morphisme net ... IL, §2, p. 120
Morphisme non ramifié ... IL, §2, p. 120
Morphisme plat ... IL, §2, p. 125

Nadel :
——— faisceau d'idéaux multiplicateurs de Nadel ... DE, §15, p. 86
——— théorème d'annulation de Nadel ... DE, §15, p. 89
Nakano :
——— positivité de Nakano ... DE, §11, p. 66
——— théorème d'annulation de Nakano ... DE, §13, p. 82
Nef :
——— fibré en droites nef ... DE, §15, p. 93
Néron-Severi, groupe de ... DE, §8, p. 46
Nilpotente, théorème de l'orbite ... BP, §4, p. 205
Nombres de Betti ... DE, §8, p. 43

Nombres de Hodge .... DE, §8, p. 43
Nombres de Hodge .... BP, §4, p. 200

Obstruction :
Obstruction .... IL, §2, p. 125
Obstruction .... IL, §2, p. 126
Opérateur de Green .... DE, §3, p. 19
Opérateur de Laplace-Beltrami .... DE, §0, p. 3
Opérateur de Laplace-Beltrami .... DE, §4, p. 23
Opérateur de Weil .... BP, §3, p. 191
Opérateur différentiel .... DE, §2, p. 12
Opérateur pseudodifférentiel .... DE, §3, p. 15
Opérateurs L et Λ .... DE, §6, p. 30
Opérateur $*$ de Hodge .... DE, §4, p. 21
Opérateur # de Hodge .... DE, §4, p. 21
Orbite nilpotente, théorème de l' .... BP, §4, p. 205
Ordinaire, schéma .... IL, §8, p. 164

Parallélisable :
Parallélisable, schéma .... IL, §8, p. 164
Paramètre canonique .... BP, §10, p. 245
Parfait, complexe .... IL, §6, p. 152
Périodes, morphisme des .... BP, §3, p. 196
Picard :
———— application de Picard-Lefschetz .... BP, §4, p. 203
———— application de Picard-Lefschetz .... BP, §4, p. 199
———— équation de Picard-Fuchs .... BP, §9, p. 231
———— équation de Picard-Fuchs .... BP, §10, p. 238
———— groupe de Picard .... DE, §8, p. 45
———— nombre de Picard .... DE, §8, p. 46
Plat, morphisme .... IL, §2, p. 125
Plurisousharmonique, fonction .... DE, §11, p. 60
Poids d'un élément .... DE, §6, p. 35
Poincaré :
———— dualité de Poincaré .... DE, §4, p. 25
———— lemme de Poincaré .... BP, §1, p. 177
———— lemme de Poincaré holomorphe .... BP, §1, p. 177
Polarisation .... BP, §3, p. 191
Polarisation d'une structure de Hodge mixte .... BP, §11, p. 250
Pôle logarithmique .... DE, §15, p. 87
Primitive :
———— décomposition primitive .... DE, §6, p. 37
———— forme primitive .... DE, §6, p. 37
Problème de Levi .... DE, §15, p. 92
Problème de Torelli .... BP, §3, p. 197
Projectif :

——— schéma projectif .... IL, §5, p. 144
——— variété projective .... DE, §5, p. 27
Propreté cohomologique .... IL, §6, p. 150
Pseudoconvexe, variété faiblement .... DE, §12, p. 74
Pseudodifférentiel, opérateur .... DE, §3, p. 15

Quasi-isomorphisme :
Quasi-isomorphisme .... IL, §4, p. 135

Réduction :
Réduction semi-stable .... IL, §7, p. 157
Réduction semi-stable .... IL, §7, p. 162
Réductive, algèbre de Lie .... DE, §6, p. 34
Régulier, point singulier .... BP, §9, p. 232
Régulier, schéma .... IL, §2, p. 124
Relations bilinéaires de Hodge-Riemann .... BP, §3, p. 191
Relations de commutation .... DE, §13, p. 80
Relèvement .... IL, §2, p. 126
Relèvement .... IL, §3, p. 131
Rellich, lemme de .... DE, §3, p. 15
Représentation de Monodromie .... BP, §2, p. 180
Résidu .... BP, §8, p. 223
Résidu .... BP, §8, p. 225
Résidu .... BP, §9, p. 232
Ricci, forme de .... BP, §4, p. 204
Riemann, conditions de .... DE, §15, p. 91
Riemann-Hilbert, correspondance de .... BP, §6, p. 212

Schéma :
Schéma DR-décomposable .... IL, §7, p. 161
Schéma ordinaire .... IL, §8, p. 164
Schéma parallélisable .... IL, §8, p. 164
Schéma projectif .... IL, §5, p. 144
Schéma régulier .... IL, §2, p. 124
Serre, dualité de .... DE, §7, p. 39
Siegel, demi-espace de .... BP, §3, p. 195
Singularités algébriques .... DE, §11, p. 62
Singularités analytiques .... DE, §11, p. 62
——— point singulier régulier .... BP, §9, p. 232
Sobolev, espaces de .... DE, §3, p. 14
Sobolev, lemme de .... DE, §3, p. 15
Sous-fibré horizontal .... BP, §3, p. 195
Structure de Hodge mixte .... BP, §4, p. 200
Structure de Hodge mixte .... BP, §11, p. 249
Structure de Hodge polarisée .... BP, §3, p. 191
Structure de Hodge réelle .... BP, §3, p. 190

Suite spectrale .... DE, §9, p. 47
——— dégénérescence d'une suite spectrale .... DE, §9, p. 47
Suite spectrale de Hodge-Frölicher .... DE, §9, p. 46
Suite spectrale de Hodge vers De Rham .... IL, §0, p. 113
Suite spectrale de Hodge vers De Rham .... IL, §4, p. 139
Suite spectrale de Hodge vers De Rham relative .... IL, §5, p. 147
Surfaces de Hopf .... DE, §5, p. 27
Symbole principal .... DE, §2, p. 12
Symboles, classe standard .... DE, §3, p. 15
Symétrie de Hodge .... DE, §8, p. 41
Symétrie miroir .... BP, §7, p. 215
Système inductif cartésien .... IL, §6, p. 148
Système local .... BP, §2, p. 180
Système local de coefficients .... DE, §8, p. 42
Système local de coefficients .... DE, §4, p. 24

Tangent :
——— faisceau tangent $T_{X/Y}$ .... IL, §1, p. 117
Tenseur de courbure .... DE, §1, p. 10
Théorème :
Théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg .... DE, §15, p. 93
Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano .... DE, §13, p. 82
Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano .... IL, §6, p. 154
Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano en caractéristique p .... IL, §5, p. 145
Théorème d'annulation de Nadel .... DE, §15, p. 89
Théorème d'annulation de Nakano .... DE, §13, p. 82
Théorème de Cartier .... IL, §3, p. 129
Théorème de décomposition en caractéristique $p > 0$ .... IL, §5, p. 140
Théorème de dégénérescence de Hodge .... IL, §0, p. 113
Théorème de dégénérescence de Hodge .... IL, §6, p. 153
Théorème de dégénérescence en caractéristique $p > 0$ .... IL, §5, p. 144
Théorème de finitude .... DE, §3, p. 17
Théorème de Fujita .... DE, §16, p. 96
Théorème de Lefschetz difficile .... DE, §8, p. 44
Théorème de l'orbite nilpotente .... BP, §4, p. 205
Théorème de Matsusaka effectif .... DE, §17, p. 104
——— grand théorème de Matsusaka .... DE, §17, p. 102
Théorème de semi-continuité .... DE, §10, p. 57
Théorème de semi-continuité de Kodaira-Spencer .... DE, §10, p. 55
Théorème des images directes .... DE, §10, p. 57
Tore complexe .... DE, §5, p. 27
Torelli, problème de .... BP, §3, p. 197
Translaté $L[n]$ .... IL, §4, p. 135
Transversalité de Griffiths .... BP, §2, p. 188
Transversalité de Griffiths .... BP, §3, p. 192
Triangle, triangle distingué .... IL, §4, p. 136

Tronqué canonique $\tau_{\leqslant n}L$ (resp. $\tau_{\geqslant n}L$) .... IL, §4, p. 135
Tronqué naïf $L^{\leqslant n}$ (resp. $L^{\geqslant n}$) .... IL, §4, p. 135

Universelle :
——— déformation universelle .... BP, §3, p. 197

Variation :
Variation complexe de structures de Hodge (VCH) .... BP, §5, p. 209
Variation de structures de Hodge (VHS) .... BP, §3, p. 192
Variation infinitésimale de structures de Hodge (IVHS) .... BP, §3, p. 199
Variété abélienne .... DE, §15, p. 91
Variété de Fano .... DE, §16, p. 102
Variété de Stein .... DE, §15, p. 92
Variété d'Iwasawa .... DE, §8, p. 42
Variété faiblement pseudoconvexe .... DE, §12, p. 74
Variété hermitienne .... DE, §5, p. 26
Variété jacobienne .... DE, §8, p. 46
Variété kählérienne .... DE, §5, p. 26
Variété kählérienne complète .... DE, §12, p. 73
Variété miroir .... BP, §7, p. 215
Variété projective .... DE, §5, p. 27
Variété riemanienne complète .... DE, §12, p. 68
Verselle, déformation .... BP, §3, p. 197

Weil :
——— métrique de Weil-Peterson .... BP, §10, p. 241
——— opérateur de Weil .... BP, §3, p. 191
Witt :
——— anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ .... IL, §7, p. 159
——— anneau des vecteurs de Witt $W_2(k)$ .... IL, §3, p. 133

Yukawa :
Yakawa, accouplement de .... BP, §0, p. 175
Yukawa, accouplement de .... BP, §10, p. 237
Yukawa, accouplement de .... BP, §10, p. 246

Abstract

Each of the three chapters collected in this book is concerned with various aspects – important ones in several respects – of Hodge theory. The text is an expanded version, including substantial additions, of lectures presented on the occasion of the meeting “l’Etat de la Recherche” devoted to Hodge theory, that has been held at Université Joseph Fourier in Grenoble from Friday November 25, 1994 till Sunday November 27, under the auspices of the SMF (Société Mathématique de France). The authors wishes would be fulfilled if, in accordance with the general goals of sessions “l’Etat de la Recherche”, this book could help the nonexpert reader to get a precise idea of the current status of Hodge theory.

The three main subjects developed here (L^2 Hodge theory and vanishing theorems, Frobenius and Hodge degeneration, Variations of Hodge structures and mirror symmetry) cover a wide range of techniques : elliptic PDE theory, complex differential geometry, algebraic geometry in characteristic p, cohomological and sheaf-theoretic methods, deformation theory of complex varieties, Calabi-Yau manifolds, a few aspects of singularity theory ... This accumulation of tools arising from various fields probably makes the access to the theory rather uneasy for newcomers. We hope that the present book will greatly facilitate this access : a special effort has been made to approach various themes by their most natural starting point, each of the three chapters being supplemented with a detailed introduction and numerous references. The reader will find precise statements of quite a number of open problems which have been the subject of active research in the last years.

The authors are grateful to SMF and MESR (Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche) for their decisive action – both psychological and financial – without which the Grenoble session “Hodge theory” would probably never have taken place. They address special thanks to the Scientific Committee of Sessions l’Etat de la Recherche, in behalf of its two successive directors Pierre Schapira and Colette Mœglin, as well as to Michèle Audin, Editor in Chief of the Journal “Panoramas et Synthèses”, for her strong encouragement to publish the present manuscript. Finally, they express their gratitude to the referee for his careful reading of the manuscript and a large number of invaluable suggestions.

November 27, 1995

José Bertin⋆, Jean-Pierre Demailly⋆, Luc Illusie⋆⋆, Chris Peters⋆

⋆ Université de Grenoble I, Institut Fourier,
BP74, 38402 Saint-Martin d’Hères, France

⋆⋆ Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Contents

Foreword 1

L^2 Hodge theory and vanishing theorems
by Jean-Pierre Demailly 3

0. Introduction 3

Part I : L^2 Hodge theory

1. Vector bundles, connections and curvature 8
2. Differential operators on vector bundles 12
3. Fundamental results on elliptic operators 14
4. Hodge theory of compact riemannian manifolds 20
5. Hermitian and Kähler manifolds 25
6. Formal identities of Kähler geometry 29
7. Groups $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ and Serre duality 38
8. Cohomology of compact Kähler manifolds 40
9. Hodge-Frölicher spectral sequence 46
10. Deformations and semicontinuity theorems 52

Part II : L^2 estimates and vanishing theorems

11. Pseudoconvexity and positivity concepts 60
12. Hodge theory of complete Kähler manifolds 68
13. Bochner method and vanishing theorems 80
14. L^2 estimates and existence theorems 83
15. Nadel and Kawamata-Viehweg vanishing theorems 86
16. On Fujita's conjecture 94
17. An effective version of Matsusaka's big theorem 102

References 108

Frobenius and Hodge degeneration
by Luc Illusie 113

0. Introduction 113
1. Schemes : differentials, De Rham complex 116

2. Smoothness and liftings 120
3. Frobenius morphism and Cartier isomorphism 128
4. Derived categories and spectral sequences 134
5. Decomposition, degeneration and vanishing theorems in characteristic p 140
6. From characteristic p to characteristic zero 147
7. Recent developments and open problems 155
8. Appendix : parallelizability and ordinarity 163

References 166

Variations of Hodge structures, Calabi-Yau manifolds and mirror symmetry

by José Bertin and Chris Peters 171

0. Introduction 171

Part I. Variations of Hodge structures 177

1. Hodge bundles 177
2. Gauss-Manin connection 180
3. Variations of Hodge structures 190
4. Degenerations 199
5. Higgs bundles 209
6. Hodge modules 210

Part II. Mirror symmetry and Calabi-Yau manifolds 215

7. Introduction to mirror symmetry 215
8. Cohomology of hypersurfaces 222
9. Picard-Fuchs equations 229
10. Calabi-Yau manifolds and mirror symmetry 235
11. Relation with mixed Hodge theory 249

Bibliography 256

Index 261

Abstract 273

Contents 275