Sur le calcul numérique de la constante d'Euler
Gazette des Mathématiciens, vol. **27**, (1985), p. 113–126.

SUR LE CALCUL NUMÉRIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Un peu d'histoire

La constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

dite parfois constante d'Euler-Mascheroni, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux et d'évaluations numériques depuis le XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle. Elle garde néanmoins encore beaucoup de son mystère aujourd'hui. Ainsi, on ne sait toujours pas si γ est ou non irrationnel, en dépit de plusieurs tentatives de démonstration, dont celle de P. Appell [2] en 1926 qui avorta par suite d'une erreur matérielle, et celle de A. Froda [14] en 1965 qui repose sur un critère d'irrationnalité encore incomplètement démontré. Signalons toutefois que certains résultats de transcendance pour des expressions faisant intervenir γ ont été obtenus par K. Mahler [18].

Nous nous intéresserons ici surtout à la mise en oeuvre d'algorithmes rapidement convergents qui, outre l'intérêt calculatoire, laissent espérer l'obtention de résultats arithmétiques.

La première évaluation de γ est due naturellement à Leonhard Euler, qui obtint la valeur 0.577218 en 1735 [12], bientôt étendue par Mascheroni et quelques autres. En 1781, Euler détermina la valeur plus précise 0.577215664901532 [13]. Il fut suivi notamment par C.F. Gauss, avec 22 décimales exactes, puis par un certain nombre de mathématiciens anglais du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Le lecteur pourra consulter J.W.L. Glaisher [15] pour l'historique détaillé des calculs antérieurs à 1870. W. Shanks [19] publia 110 décimales, dont 101 exactes, en 1867-71 ; peu après, le célèbre mathématicien-astronome J.C. Adams [1] calcula laborieusement 263 décimales, record qui devait tenir depuis sa publication en 1878 jusqu'à l'apparition des premiers ordinateurs et les 328 décimales de J.W. Wrench Jr [23] en 1952.

Institut Fourier, Université de Grenoble – B.P. 74 - 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS - Tél. (76) 51-46-00

Tous ces calculs, ainsi que celui ultérieur de D.E. Knuth [17] en 1962 avec 1 271 D, reposaient sur le développement asymptotique de $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ par la formule d'Euler-Maclaurin. Le temps de calcul prohibitif des nombres de Bernoulli requis dans cette méthode conduisit Dura W. Sweeney [21] à introduire un nouvel algorithme plus efficace, basé sur la formule $\gamma = -\int_0^{+\infty} \log x \; e^{-x}\, dx$. Sweeney obtint ainsi 3 566 D en 1963, et sa méthode fut reprise successivement par Beyer-Waterman [3], [4] en 1974 (7 114 D, dont 4 879 exactes) et par R.P. Brent [7], [8] (20 700 D en 1977). Enfin en 1980, R.P. Brent et E. Mc Millan [10] découvrirent un nouvel algorithme plus performant, utilisant les fonctions de Bessel, et calculèrent 30 100 D [9]. Voici un bref aperçu des algorithmes évoqués plus haut, avec analyse comparée des temps de calcul.

1. Formule d'Euler-Maclaurin

Cette formule sera utilisée sous la forme suivante (cf. par exemple Bourbaki [5]) :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(n) + f(1)\big) + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\Big[f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(1)\Big] + R_k$$

où b_j est la suite des nombres de Bernoulli, définie par

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{j!}\, z^j,$$

sorte que

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0, \quad \ldots$$

Le reste R_k est donné par

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!} \int_1^n B_{2k+1}(\{x\})\; f^{(2k+1)}(x)\,dx,$$

où $B_m(x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} b_j x^{m-j}$ est le m-ième polynôme de Bernoulli et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x. Si nous posons $f(x) = \frac{1}{x}$, la formule ci-dessus entraîne (cf. par exemple D. Knuth [17]) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} & \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k}\Big(1 - \frac{1}{n^{2k}}\Big) - \int_1^n \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{(2k+2)}}\,dx. \end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, il vient

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{b_2}{2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k} - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}\,dx.$$

Par soustraction, nous obtenons donc :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2n^2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k\, n^{2k}} - \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}\,dx.$$

Ce développement asymptotique diverge quand $k \to +\infty$, mais il donne cependant de bonnes valeurs approchées de γ lorsque n et k sont bien choisis. En effet, l'identité classique

$$B_{2k+1}(\{x\}) = 2(-1)^{k-1}(2k+1)! \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\sin 2r\pi x}{(2r\pi)^{2k+1}}$$

entraîne

$$|B_{2k+1}(\{x\})| \leqslant 4\ \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\ ,$$

et grâce à la formule de Stirling, nous en déduisons

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{(2k+2)}}\, dx \right| \leqslant \frac{4}{\pi} \Big(\frac{k}{n\pi e}\Big)^k.$$

Le reste est donc très petit tant que k demeure sensiblement inférieur à n.

Analyse du temps de calcul.

Désignons par E_1 cet algorithme et par $E_1(d)$ le temps de calcul de γ à la précision 10^{-d}. On attribue par convention une unité de temps à chaque opération arithmétique élémentaire (portant sur 1 mot de la machine). La somme de 2 nombres ayant d décimales nécessite donc, à des constantes près que nous négligerons ici, d unités de temps ; idem pour les produits ou quotients de nombres en multiprécision par des « petits» nombres (1 mot-machine). L'évaluation la plus brutale de $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ réclame alors dn unités de temps. Dans la pratique, on choisira pour n une puissance de 2 ou 10, et $\log n$ sera évalué en d^2 unités de temps à partir des séries entières $\log 2 = 2 \operatorname{arg\,tanh} \frac{1}{3}$, $\log \frac{10}{8} = 2 \operatorname{arg\,tanh} \frac{1}{9}$ exponentiellement convergentes.

D'autre part, les nombres $\beta_{2k} = \frac{b_{2k}}{n^{2k}}$ peuvent être calculés au moyen de la formule de récurrence des nombres de Bernoulli :

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2k+1} \left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n^{2k}} - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{2k+1}{2j} \frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}} \right].$$

L'étape de récurrence exige environ kd unités de temps, à condition de stocker en mémoire les résultats partiels $\binom{2k+1}{2j}\frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}}$, soit au total $k^2 d$ pour l'évaluation de la somme

$$\frac{b_2}{2n^2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2kn^{2k}}.$$

On aboutit donc à :

$$E_1(d) \sim nd + d^2 + k^2 d.$$

Bien entendu, n et k doivent être choisis de manière que le terme d'erreur soit $< 10^{-d}$, ce qui impose

$$k \log \frac{n\pi e}{k} \simeq d \log 10.$$

Le choix optimal est obtenu pour $n \sim k^2$, d'où $k \log k \sim d \log 10$, $k \sim \frac{d \log 10}{\log d}$, et

$$E_1(d) \sim Cd^3 (\log d)^{-2}.$$

Signalons qu'il existe une formule (moins connue) permettant de contourner le calcul des b_{2k}. Cette formule exprime le reste sous forme de série double rapidement convergente :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\ell!}{2^{\ell+1}2^k n(2^k n+1)\cdots(2^k n+\ell)}.$$

Pour vérifier cette identité, on part de l'intégrale convergente

$$I(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\Big(\frac{q}{1-x^q} - \frac{1}{1-x}\Big)\,dx, \qquad \text{où } p,q>0.$$

Pour tout entier $n > 1$, un calcul aisé donne

$$I(n,n) = \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-1})\,dx - d\Big[\log\frac{1-x^n}{1-x}\Big],$$

de sorte que $I(n,n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \to \gamma$ quand $n \to +\infty$. Le changement de variable $x = t^r$ dans $I(p,q)$ fournit d'autre part l'identité

$$I(p,q) + I(pr,r) = I(pr,qr).$$

Appliquons cette formule par récurrence avec $p = q$, $r = 2$. Il vient

$$I(n,n) + I(2n,2) + \cdots + I(2n,2) = I(2^k n, 2^k n),$$

d'où à la limite quand $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\gamma &= I(n,n) + \sum_{k=1}^{+\infty} I(2^k n, 2)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 x^{2^k n-1}\,\frac{dx}{1+x}.\end{aligned}$$

La formule annoncée s'en déduit maintenant par développement en série de $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1-x}{2}\Big)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(1-x)^\ell}{2^{\ell+1}}.$$

En particulier, pour $n = 1$, on obtient la formule simple

$$(E_2) \qquad \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\ell!}{2^{\ell+1}2^k(2^k+1)\cdots(2^k+\ell)}.$$

Le terme général de la série est majoré par $\min\big(2^{-\ell-k-1}, (\ell 2^{-k})^\ell\big)$; la précision 10^{-d} est donc atteinte en sommant pour

$$k,\ell \leqslant d\log 10/\log 2 \leqslant 4d, \qquad \ell \leqslant \frac{d\log 10}{k\log 2 - \log \ell},$$

ce qui (en majorant ℓ par $4d$ pour $k \leqslant 2\log(4d)/\log 2$ et par $2d\log 10/k\log 2$ sinon) laisse $O(d\log d)$ termes à calculer. Le temps de calcul requis par (E_2) admet donc l'estimation

$$E_2(d) \sim Cd^2 \log d,$$

asymptotiquement inférieure à celle de l'algorithme (E_1). Nous allons voir qu'il existe en fait des algorithmes simples en $O(d^2)$, mais cela n'empêche pas l'algorithme (E_1) d'être sans doute le plus efficace pour les calculs manuels (disons $d \leqslant 100$).

2. Algorithme de Sweeney

Le point de départ en est l'égalité

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \log t \; e^t \, dt = -\gamma,$$

qui découle par exemple de l'identité des définitions d'Euler et de Weierstrass de la fonction Γ :

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x \; e^{-t} \, dt = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^{-1}.$$

Grâce à des intégrations par parties, on obtient

$$\gamma = F(x) - \log x - R(x)$$

avec

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} \, dt \,, \\ R(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \cdots + \frac{(-1)^k k!}{x^k}\right) + (-1)^{k+1}(k+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} \, dt}{t^{k+2}}. \end{aligned}$$

La méthode (S_1) la plus simple, utilisée par Sweeney [21] et Beyer-Waterman [3], consiste à choisir un entier x assez grand de manière que $R(x)$ soit négligeable et à calculer la valeur approchée $\gamma \simeq F(x) - \log x$. Comme $0 < R(x) < \frac{e^{-x}}{x}$, la précision 10^{-d} est obtenue pour $x \simeq d \log 10$.

Etant donné $p \geqslant 0$, soit a_p l'unique racine réelle > 0 de l'équation

$$a_p(\log a_p - 1) = p,$$

de sorte que

$$a_0 = e \simeq 2.718, \quad a_1 \simeq 3.591, \quad a_2 \simeq 4.319, \quad a_3 \simeq 4.971.$$

La formule de Stirling montre que $\frac{x^n}{n!} \simeq \left(\frac{ex}{n}\right)^n$ est de l'ordre de e^{-px} pour $n \simeq a_p x$. La série $F(x)$ doit donc être sommée ici jusqu'à $n = \lceil a_1 x \rceil$.

Le calcul de chaque terme de la série, après factorisation suivant la règle de Hörner

$$F(x) = \frac{x}{1}\left(\frac{1}{1} - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - \cdots \frac{x}{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{x}{n}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdots\right)\right),$$

réclame 3 opérations arithmétiques (1 multiplication, 1 division, 1 soustraction). Une difficulté supplémentaire se présente ici du fait qu'une partie des chiffres significatifs est perdue par compensation des termes de signes opposés. Le terme de valeur absolue maximale étant de l'ordre de $\frac{x^n}{n!} \simeq e^x$ pour $n = x$, ceci amène à travailler avec des nombres à $2d$ chiffres décimaux au lieu de d. On obtient en définitive le temps de calcul suivant (en négligeant le calcul de $\log x$) :

$$S_1(d) = a_1 \times d \log 10 \times 3 \times 2d = 6a_1 \log 10\ d^2 \simeq 49.6\, d^2.$$

Une méthode (S_1') plus élaborée, suggérée par Sweeney [21] et mise en œuvre par Brent [7], consiste à évaluer le reste $R(x)$ par son développement asymptotique limité à l'ordre $k = x \in \mathbb{N}$. Compte tenu que

$$\left| R(x) - \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \cdots + \frac{(-1)^k k!}{x^k}\right)\right| \leqslant \frac{e^{-x}\ x!}{x^{x+1}} \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\ e^{-2x},$$

on est amené à choisir $x = -\frac{1}{2} d \log 10$, à sommer la série $F(x)$ jusqu'à $n = a_2 x$ ($a_2 \simeq 4.319$), et à travailler avec des nombres ayant $\frac{3d}{2}$ chiffres décimaux. Le calcul de $R(x)$ ou de e^x nécessite 2 opérations pour chaque terme, effectuées à la précision $10^{-d/2}$. On en déduit

$$S_1'(d) = \left(\tfrac{9}{4}\, a_2 + \tfrac{1}{2} a_0 + \tfrac{1}{2}\right) \log 10\ d^2 \simeq 26.7\, d^2.$$

Il existe deux autres alternatives pour le calcul de $F(x)$ qui évitent la perte de précision par compensation intervenant dans l'algorithme (S_1). Elles reposent sur les développements en séries à termes positifs ci-dessous :

$$F(x) = e^{-x} \int_0^x \frac{e^x - e^t}{x - t}\, dt = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{x^n - t^n}{x - t}\, dt$$

$$(S_2) \qquad = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$F(x) = e^{-x/2} \int_{-x/2}^{x/2} \frac{e^{x/2} - e^t}{x/2 - t}\, dt = e^{-x/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{-x/2}^{x/2} \frac{(x/2)^n - t^n}{x/2 - t}\, dt$$

$$(S_3) \qquad = e^{-x/2} \sum_{p=1}^{+\infty} 2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right)\left(\frac{(x/2)^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(x/2)^{2p}}{(2p)!}\right).$$

[On utilise le développement $\frac{x^n - t^n}{x - t} = x^{n-1} + x^{n-2} t + \cdots + t^{n-1}$, et pour la dernière sommation, on regarde séparément les termes $n = 2p$ et $n = 2p - 1$, $p \geqslant 1$]. La série (S_2), et de façon analogue (S_3), peut être évaluée par factorisation suivant la règle de

Hörner (nous notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ les sommes partielles de la série harmonique, avec par convention $H_0 = 0$, et $H_{n,N} = H_N - H_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{N}$) :

$$\begin{aligned} e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} H_n \frac{x^n}{n!} &= H_N - e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} H_{n,N} \frac{x^n}{n!} \simeq H_N - e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} H_{n,N} \frac{x^n}{n!} \\ &\simeq H_{0,N} - e^{-x} \frac{x}{1} \bigg(H_{1,N} + \frac{x}{2} \bigg(H_{2,N} + \frac{x}{3} \bigg(\cdots + \frac{x}{N-1} H_{N-1,N} \bigg) \cdots \bigg) \bigg). \end{aligned}$$

Le calcul est effectué de manière descendante en prenant $H_{N-1,N} = \frac{1}{N}$ et $H_{n-1,N} = \frac{1}{n} + H_{n,N}$. Ceci nécessite 1 multiplication, 1 division et 2 additions à chaque étape. Suivant que l'on néglige ou non le reste $R(x)$ (les algorithmes avec reste seront notés (S'_2) et (S'_3)), ces méthodes conduisent aux temps de calcul

$$\begin{aligned} S_2(d) &= 6a_0 \log 10 \, d^2 \simeq 37.6 \, d^2, \\ S_3(d) &= \frac{11}{4} a_1 \log 10 \, d^2 \simeq 22.7 \, d^2, \\ S'_2(d) &= \Big(3a_1 + \frac{1}{2} \Big) \log 10 \, d^2 \simeq 26.0 \, d^2, \\ S'_3(d) &= \Big(\frac{11}{8} a_3 + \frac{1}{2} \Big) \log 10 \, d^2 \simeq 16.9 \, d^2. \end{aligned}$$

3. Algorithme de Brent-McMillan

L'algorithme introduit par Brent-McMillan dans [10] repose sur certaines identités vérifiées par les fonctions de Bessel modifiées $I_\alpha(x)$ et $K_0(x)$:

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha+2n}}{n! \, \Gamma(\alpha + n + 1)}, \\ K_0(x) &= - \frac{\partial I_\alpha(x)}{\partial \alpha}_{|\alpha=0} . \end{aligned}$$

Les spécialistes observeront que nous avons substitué $2x$ à x dans les notations classiques du traité de Watson [22]. Par dérivation de I_α il vient

$$\begin{aligned} & K_0(x) = -(\log x + \gamma) I_0(x) + S_0(x) \qquad \text{où} \\ & I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}, \qquad S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n \, \frac{x^{2n}}{n!^2}. \end{aligned}$$

Un calcul faisant intervenir l'intégrale de Hankel de la fonction $1/\Gamma$ donne par ailleurs

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha+2n}}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} t^{-\alpha-n-1} e^t \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} x^\alpha t^{-\alpha-1} \exp(x^2/t + t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} t^{-\alpha} \exp(x/t + tx) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos u} \cos(\alpha u) \, du - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2x \cosh v} \, e^{-\alpha v} \, dv. \end{aligned}$$

La deuxième ligne ci-dessus est obtenue à l'aide du changement de variable $t \mapsto tx$ (rappelons que $x > 0$) ; la première intégrale de la troisième ligne provient de la partie du contour $\{t = e^{iu}\}$ formée du cercle de centre 0 et de rayon 1 ; la dernière intégrale des deux segments $]-\infty, -1]$ avec $t = -e^{-v}$, $v \in [0, +\infty[$. En particulier, on obtient les expressions intégrales et les équivalents suivants de $I_0(x)$, $K_0(x)$ quand $x \to +\infty$:

$$
\begin{aligned}
I_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x\cos u}\,du &\qquad \sim \text{ et } < \ \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}\,e^{2x} \quad \text{si } x \geqslant 1,\\
K_0(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2x\cosh v}\,dv &\qquad \sim \text{ et } > \ \sqrt{\frac{\pi}{4x}}\,e^{-2x}.
\end{aligned}
$$

La constante d'Euler peut donc s'écrire sous la forme

$$\gamma = \frac{S_0(x)}{I_0(x)} - \log x - \frac{K_0(x)}{I_0(x)},$$

avec

$$0 < \frac{K_0(x)}{I_0(x)} < \pi\, e^{-4x} \qquad \text{si } x \geqslant 1.$$

Dans l'algorithme (B) utilisé par Brent, le reste $\frac{K_0(x)}{I_0(x)}$ est purement et simplement négligé ; la précision 10^{-d} est donc atteinte pour $x = \frac{1}{4}\,d\log 10$, et les séries $I_0(x)$, $S_0(x)$ doivent être sommées jusqu'à $n = \lceil a_1 x\rceil$. Le calcul de

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{1^2}\left(1 + \frac{x^2}{2^2}\left(\cdots \frac{x^2}{(n-1)^2}\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\left(\cdots\right)\right)\cdots\right)\right)$$

nécessite 2 opérations arithmétiques pour chaque terme, et celui de

$$S_0(x) \simeq H_{0,N} - \frac{1}{I_0(x)}\,\frac{x^2}{1^2}\left(H_{1,N} + \frac{x^2}{2^2}\left(\cdots \frac{x^2}{(n-1)^2}\left(H_{n-1,N} + \frac{x^2}{n^2}\left(H_{n,N} + \cdots\right)\right)\cdots\right)\right)$$

en exige 4. Le temps requis par l'algorithme (B) est donc

$$B(d) = a_1 \times \frac{1}{4}\,d\ \log 10 \times 6 \times d \simeq 12.4\,d^2.$$

Raffinement de l'algorithme. Comme dans le cas de la méthode de Sweeney, le reste $K_0(x)/I_0(x)$ peut être évalué au moyen d'un développement asymptotique. On a en effet

$$
\begin{aligned}
I_0(x)K_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\{-\pi<u<\pi\,,\,v>0\}} \exp\big(2x(\cos u - \cosh v)\big)\,du\,dv\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \exp(-4xr)\,dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\,e^{i\theta}|}
\end{aligned}
$$

grâce au changement de variable $r\,e^{i\theta} = \sin^2(\frac{u+iv}{2})$. Du développement en série

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\,e^{i\theta}|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!^2}{2^{4k}\,k!^4}\,r^{2k}, \qquad \text{si } 0 \leqslant r < 1,$$

on déduit alors le développement asymptotique (divergent)

$$I_0(x)K_0(x) \sim \frac{1}{4x} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}}.$$

Si x est entier, le terme général de ce développement passe par un minimum exactement pour $k = 2x$, et on peut vérifier, comme conjecturé par Brent-McMillan [10], que le « reste » correspondant à une somme tronquée à l'ordre $2x$, à savoir

$$\Delta(x) := I_0(x)K_0(x) - \frac{1}{4x} \sum_{k=0}^{2x} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}}$$

est alors d'un ordre de grandeur comparable à celui du dernier terme $k = 2x$, soit $\frac{e^{-4x}}{2\sqrt{2\pi}\,x^{3/2}}$ par la formule de Stirling. On peut montrer plus précisément que

$$\Delta(x) \sim -\frac{5\,e^{-4x}}{24\sqrt{2\pi}\,x^{3/2}} \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

La valeur approchée

$$\frac{K_0(x)}{I_0(x)} \simeq \frac{1}{4x\,I_0(x)^2} \sum_{k=0}^{2x} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}}$$

est donc affectée d'une erreur dont l'ordre de grandeur est $\Delta(x)/I_0(x)^2 \sim -\frac{5\sqrt{2\pi}}{12\,x^{1/2}}\,e^{-8x}$. Cette méthode amène à choisir $x = \frac{1}{8}\,d \log 10$ et conduit au temps de calcul

$$B'(d) = \left(\frac{3}{4}a_3 + \frac{1}{2}\right) \log 10\; d^2 \simeq 9.7\,d^2,$$

optimal parmi tous les algorithmes présentés ici.

Nous terminons en donnant le « hit-parade » de ces algorithmes, rangés par ordre d'efficacité croissante.

Algorithmes	Euler		Sweeney						Brent-McM.	
	E_1	E_2	S_1	S_2	S'_1	S'_2	S_3	S'_3	B	B'
Temps de calcul / d^2	$\frac{Cd}{(\log d)^2}$	$C \log d$	49.6	37.6	26.7	26.0	22.7	16.9	12.4	9.7

Signalons qu'il existe des algorithmes théoriquement encore plus rapides, permettant d'évaluer γ à 10^{-d} près en $O(d(\log d)^3 \log\log d)$ unités de temps . Ces derniers reposent sur l'utilisation de l'algorithme de multiplication rapide de Schönhage-Strassen [20] et sur une factorisation par blocs de la série $F(x)$ (resp. e^x, $I_0(x)$, $S_0(x)$) ; voir Brent [6]. De tels algorithmes « rapides » sont toutefois difficiles à programmer et ne l'emportent sur les algorithmes « classiques » présentés ici que lorsque d est très grand.

4. Développement en fraction continue de γ

Les valeurs numériques de γ obtenues par les auteurs mentionnés ci-dessus ont été utilisées pour déterminer les développements en fraction continue de γ et e, qui sont connus maintenant jusqu'à l'ordre 29 000 (Brent - Mac Millan [11]). La distribution statistique des réduites successives ne fait apparaître aucune différence significative au niveau de 5% par rapport à la loi de Gauss-Kusmin (cf. Khintchine [16]) :

$$f_n = \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log_2\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

donnant la fréquence des réduites égales à n dans le développement de presque tout nombre réel. On obtient d'autre part le résultat suivant, qui rend extrêmement improbable la rationalité de γ ou e^γ :

Théorème. – *Si γ ou e^γ est de la forme p/q pour des entiers p, q positifs, alors $q > 10^{15\,000}$.*

Bibliographie

[1] J.C. Adams – *On the value of Euler's constant* ; Proc. Roy. Soc. London, **27** (1878) p. 88–94. Voir aussi vol. **42** (1887), p. 22–25.

[2] P. Appell – *Sur la nature arithmétique de la constante d'Euler* ; Comptes Rend. Ac. Sc. Paris, v. **182**, 12 avril 1926, p. 897–899 ; 19 avril 1926, p. 949.

[3] W.A. Beyer & M. S. Waterman – *Error analysis of a computation of Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **28** (1974) p. 599–604.

[4] W.A. Beyer & M.S. Waterman – *Decimals and partial quotients of Euler's constant and* ln 2 ; UMT 19, Math, of Comp., v. **28**, 1974, p. 667. Errata : Math, of Comp., MTE 549, v. **32** (1978), p. 317–318.

[5] N. Bourbaki – *Fonctions d'une variable réelle* ; chap. VI, §1, n°**7**; Hermann, Paris, 1951.

[6] R.P. Brent – *The complexity of multiple-precision arithmetic* ; Complexity of Computational Problem Solving (R.S. Anderssen and R.P. Brent, Editors), Univ. of Queensland Press, Brisbane, 1976, p. 126–165.

[7] R.P. Brent – *Computation of the regular continued fraction for Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **31**, July 1977, p. 771–777.

[8] R.P. Brent – *γ and* $\exp(\gamma)$ *to 20,700 D and their regular continued fractions to 20,000 partial quotients* ; UMT 1, Math. of Comp., v. **32**, 1978, p. 311.

[9] R.P. Brent – *Euler's constant and its exponential to 30,100 decimals* ; Math. of Comp., UMT File.

[10] R.P. Brent & E.M. McMillan – *Some new algorithms for high-precision computation of Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **34**, January 1980, p. 305–312.

[11] R.P. Brent & E.M. McMillan – *The first 29,000 partial quotients in the regular continued fraction for Euler's constant and its exponential* ; Math, of Comp., UMT File.

[12] L. Euler – *De progressionibus harmonicis observationes* ; Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v. **14**, Teubner, Leipzig and Berlin, 1925, p. 93–100.

[13] L. Euler – *De summis serierum numeros Bernoullianos involventium* ; Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v.15, Teubner, Leipzig and Berlin, 1927, p. 91–130. Voir en particulier p. 115. Le calcul est donné en détail p. 569–583.

[14] A. Froda – *La constante d'Euler est irrationnelle* ; Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **38** (1965), p. 338–344.

[15] J.W.L. Glaisher – *History of Euler's constant* ; Messenger of Math., v. **1** (1872), p. 25–30.

[16] A. Ya. Khintchine (A. Ja. Hinčin) – *Continued Fractions* ; 3^{e} édition, traduction anglaise par P. Wynn, Noordhoff, Groningen, 1963.

[17] D.E. Knuth – *Euler's constant to 1271 places* ; Math, of Comp., v. **16** (1962), p. 275–281.

[18] K. Mahler – *Applications of a theorem by A.B. Shidlovskii* ; Proc. Roy. Soc. London, A **305** (1968), p. 149–173.

[19] W. Shanks – *On the numerical value of Euler's constant* ; Proc. Roy. Soc. London, v. **15** (1867), p. 429–432 ; v. **20** (1871), p. 29–34.

[20] A. Schönhage & V. Strassen – *Schnelle Multiplikation grosser Zahlen* ; Computing, v. **7** (1971), p. 281–292.

[21] D.W. Sweeney – *On the computation of Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **17** (1963), p. 170–178.

[22] G.N. Watson – *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* ; 2nd edition, Cambridge Univ. Press, London, 1944.

[23] J.W. Wrench, Jr – *A new calculation of Euler's constant* ; Math. Tables & other Aids to Comp., v. **6** (1952), p. 255.

Ouvrages de référence sur la fonction Γ.

[24] E. Artin – *The Gamma Function* ; Holt, Rinehart and Winston, 1964, traduit de : *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, 1931.

[25] R. Campbell – *Les intégrales eulériennes et leurs applications* ; Dunod, Paris, 1966.

(juin 1984)