Sur le calcul numérique de la constante d'Euler
Gazette des Mathématiciens, vol. **27**, (1985), p. 113–126.

SUR LE CALCUL NUMÉRIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER *

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Un peu d'histoire

La constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

dite parfois constante d'Euler-Mascheroni, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux et d'évaluations numériques depuis le XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Elle garde néanmoins encore beaucoup de son mystère aujourd'hui. Ainsi, on ne sait toujours pas si γ est ou non irrationnel, en dépit de plusieurs tentatives de démonstration, dont celle de P. Appell [2] en 1926 qui avorta par suite d'une erreur matérielle, et celle de A. Froda [14] en 1965 qui repose sur un critère d'irrationnalité encore incomplètement démontré. Signalons toutefois que certains résultats de transcendance pour des expressions faisant intervenir γ ont été obtenus par K. Mahler [18].

Nous nous intéresserons ici surtout à la mise en oeuvre d'algorithmes rapidement convergents qui, outre l'intérêt calculatoire, laissent espérer l'obtention de résultats arithmétiques.

La première évaluation de γ est due naturellement à Leonhard Euler, qui obtint la valeur 0.577218 en 1735 [12], bientôt étendue par Mascheroni et quelques autres. En 1781, Euler détermina la valeur plus précise 0.577215664901532 [13]. Il fut suivi notamment par C.F. Gauss, avec 22 décimales exactes, puis par un certain nombre de mathématiciens anglais du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Le lecteur pourra consulter J.W.L. Glaisher [15] pour l'historique détaillé des calculs antérieurs à 1870. W. Shanks [19] publia 110 décimales, dont 101 exactes, en 1867-71 ; peu après, le célèbre mathématicien-astronome J.C. Adams [1] calcula laborieusement 263 décimales, record qui devait tenir depuis sa publication en 1878 jusqu'à l'apparition des premiers ordinateurs et les 328 décimales de J.W. Wrench Jr [23] en 1952.

* Le présent article est une version étendue du texte originel paru dans la Gazette en 1985, où, pour des contraintes de longueur, la plupart de calculs concernant l'algorithme de Brent-McMillan avaient été omis.

Tous ces calculs, ainsi que celui ultérieur de D.E. Knuth [17] en 1962 avec 1 271 D, reposaient sur le développement asymptotique de $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ par la formule d'Euler-Maclaurin. Le temps de calcul prohibitif des nombres de Bernoulli requis dans cette méthode conduisit Dura W. Sweeney [21] à introduire un nouvel algorithme plus efficace, basé sur la formule $\gamma = -\int_0^{+\infty} \log x \; e^{-x}\, dx$. Sweeney obtint ainsi 3 566 D en 1963, et sa méthode fut reprise successivement par Beyer-Waterman [3], [4] en 1974 (7 114 D, dont 4 879 exactes) et par R.P. Brent [7], [8] (20 700 D en 1977). Enfin en 1980, R.P. Brent et E. Mc Millan [10] découvrirent un nouvel algorithme plus performant, utilisant les fonctions de Bessel, et calculèrent 30 100 D [9]. Voici un bref aperçu des algorithmes évoqués plus haut, avec analyse comparée des temps de calcul.

1. Formule d'Euler-Maclaurin

Cette formule sera utilisée sous la forme suivante (cf. par exemple Bourbaki [5]) :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}\big(f(n) + f(1)\big) + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\Big[f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(1)\Big] + R_k$$

où b_j est la suite des nombres de Bernoulli, définie par

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{j!}\, z^j,$$

sorte que

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{30}, \quad b_{2k+1} = 0, \quad \ldots\, .$$

Le reste R_k est donné par

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!} \int_1^n B_{2k+1}(\{x\})\; f^{(2k+1)}(x)\, dx,$$

où $B_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} b_j x^{m-j}$ est le m-ième polynôme de Bernoulli et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x. Si nous posons $f(x) = \frac{1}{x}$, la formule ci-dessus entraîne (cf. par exemple D. Knuth [17]) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} & \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k}\Big(1 - \frac{1}{n^{2k}}\Big) - \int_1^n \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{(2k+2)}}\, dx. \end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, il vient

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{b_2}{2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k} - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}\, dx.$$

Par soustraction, nous obtenons donc :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2n^2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2k\, n^{2k}} - \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{2k+2}}\, dx.$$

Ce développement asymptotique diverge quand $k \to +\infty$, mais il donne cependant de bonnes valeurs approchées de γ lorsque n et k sont bien choisis. En effet, l'identité classique

$$B_{2k+1}(\{x\}) = 2(-1)^{k-1}(2k+1)! \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\sin 2r\pi x}{(2r\pi)^{2k+1}}$$

entraîne

$$|B_{2k+1}(\{x\})| \leqslant 4\, \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\ ,$$

et grâce à la formule de Stirling, nous en déduisons

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k+1}(\{x\})}{x^{(2k+2)}}\, dx \right| \leqslant \frac{4}{\pi} \Big(\frac{k}{n\pi e} \Big)^k.$$

Le reste est donc très petit tant que k demeure sensiblement inférieur à n.

Analyse du temps de calcul.

Désignons par E_1 cet algorithme et par $E_1(d)$ le temps de calcul de γ à la précision 10^{-d}. On attribue par convention une unité de temps à chaque opération arithmétique élémentaire (portant sur 1 mot de la machine). La somme de 2 nombres ayant d décimales nécessite donc, à des constantes près que nous négligerons ici, d unités de temps ; idem pour les produits ou quotients de nombres en multiprécision par des « petits » nombres (1 mot-machine). L'évaluation la plus brutale de $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ réclame alors dn unités de temps. Dans la pratique, on choisira pour n une puissance de 2 ou 10, et $\log n$ sera évalué en d^2 unités de temps à partir des séries entières $\log 2 = 2 \operatorname{arg\,tanh} \frac{1}{3}$, $\log \frac{10}{8} = 2 \operatorname{arg\,tanh} \frac{1}{9}$ exponentiellement convergentes.

D'autre part, les nombres $\beta_{2k} = \frac{b_{2k}}{n^{2k}}$ peuvent être calculés au moyen de la formule de récurrence des nombres de Bernoulli :

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2k+1} \left[\frac{k - \frac{1}{2}}{n^{2k}} - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{2k+1}{2j} \frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}} \right].$$

L'étape de récurrence exige environ kd unités de temps, à condition de stocker en mémoire les résultats partiels $\binom{2k+1}{2j}\frac{\beta_{2j}}{n^{2(k-j)}}$, soit au total $k^2 d$ pour l'évaluation de la somme

$$\frac{b_2}{2n^2} + \cdots + \frac{b_{2k}}{2kn^{2k}}.$$

On aboutit donc à :

$$E_1(d) \sim nd + d^2 + k^2 d.$$

Bien entendu, n et k doivent être choisis de manière que le terme d'erreur soit $< 10^{-d}$, ce qui impose

$$k \log \frac{n\pi e}{k} \simeq d \log 10.$$

Le choix optimal est obtenu pour $n \sim k^2$, d'où $k \log k \sim d \log 10$, $k \sim \frac{d \log 10}{\log d}$, et

$$E_1(d) \sim C d^3 (\log d)^{-2}.$$

Signalons qu'il existe une formule (moins connue) permettant de contourner le calcul des b_{2k}. Cette formule exprime le reste sous forme de série double rapidement convergente :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\ell!}{2^{\ell+1} 2^k n (2^k n + 1) \cdots (2^k n + \ell)}.$$

Pour vérifier cette identité, on part de l'intégrale convergente

$$I(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \Big(\frac{q}{1-x^q} - \frac{1}{1-x} \Big)\, dx, \qquad \text{où } p, q > 0.$$

Pour tout entier $n > 1$, un calcul aisé donne

$$I(n,n) = \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-1})\, dx - d\Big[\log \frac{1-x^n}{1-x} \Big],$$

de sorte que $I(n,n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \to \gamma$ quand $n \to +\infty$. Le changement de variable $x = t^r$ dans $I(p,q)$ fournit d'autre part l'identité

$$I(p,q) + I(pr, r) = I(pr, qr).$$

Appliquons cette formule par récurrence avec $p = q$, $r = 2$. Il vient

$$I(n,n) + I(2n,2) + \cdots + I(2n,2) = I(2^k n, 2^k n),$$

d'où à la limite quand $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \gamma &= I(n,n) + \sum_{k=1}^{+\infty} I(2^k n, 2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{2^k n - 1} \frac{dx}{1+x}. \end{aligned}$$

La formule annoncée s'en déduit maintenant par développement en série de $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{1-x}{2} \Big)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(1-x)^\ell}{2^{\ell+1}}.$$

En particulier, pour $n = 1$, on obtient la formule simple

$$(E_2) \qquad \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\ell!}{2^{\ell+1} 2^k (2^k + 1) \cdots (2^k + \ell)}.$$

Le terme général de la série est majoré par $\min\left(2^{-\ell-k-1}, (\ell 2^{-k})^\ell\right)$; la précision 10^{-d} est donc atteinte en sommant pour

$$k, \ell \leqslant d \log 10 / \log 2 \leqslant 4d, \qquad \ell \leqslant \frac{d \log 10}{k \log 2 - \log \ell},$$

ce qui (en majorant ℓ par $4d$ pour $k \leqslant 2\log(4d)/\log 2$ et par $2d \log 10 / k \log 2$ sinon) laisse $O(d \log d)$ termes à calculer. Le temps de calcul requis par (E_2) admet donc l'estimation

$$E_2(d) \sim C d^2 \log d,$$

asymptotiquement inférieure à celle de l'algorithme (E_1). Nous allons voir qu'il existe en fait des algorithmes simples en $O(d^2)$, mais cela n'empêche pas l'algorithme (E_1) d'être sans doute le plus efficace pour les calculs manuels (disons $d \leqslant 100$).

2. Algorithme de Sweeney

Le point de départ en est l'égalité

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \log t \, e^t \, dt = -\gamma,$$

qui découle par exemple de l'identité des définitions d'Euler et de Weierstrass de la fonction Γ :

$$\Gamma(1 + x) = \int_0^{+\infty} t^x \, e^{-t} \, dt = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

Grâce à des intégrations par parties, on obtient

$$\gamma = F(x) - \log x - R(x)$$

avec

$$F(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt \,,$$
$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \cdots + \frac{(-1)^k k!}{x^k}\right) + (-1)^{k+1} (k+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} \, dt}{t^{k+2}}.$$

La méthode (S_1) la plus simple, utilisée par Sweeney [21] et Beyer-Waterman [3], consiste à choisir un entier x assez grand de manière que $R(x)$ soit négligeable et à calculer la valeur approchée $\gamma \simeq F(x) - \log x$. Comme $0 < R(x) < \frac{e^{-x}}{x}$, la précision 10^{-d} est obtenue pour $x \simeq d \log 10$.

Etant donné $p \geqslant 0$, soit a_p l'unique racine réelle > 0 de l'équation

$$a_p(\log a_p - 1) = p,$$

de sorte que

$$a_0 = e \simeq 2.718, \quad a_1 \simeq 3.591, \quad a_2 \simeq 4.319, \quad a_3 \simeq 4.971.$$

La formule de Stirling montre que $\frac{x^n}{n!} \simeq \left(\frac{ex}{n}\right)^n$ est de l'ordre de e^{-px} pour $n \simeq a_p x$. La série $F(x)$ doit donc être sommée ici jusqu'à $n = \lceil a_1 x \rceil$.

Le calcul de chaque terme de la série, après factorisation suivant la règle de Hörner

$$F(x) = \frac{x}{1}\left(\frac{1}{1} - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - \cdots \frac{x}{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{x}{n}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdots\right)\right),$$

réclame 3 opérations arithmétiques (1 multiplication, 1 division, 1 soustraction). Une difficulté supplémentaire se présente ici du fait qu'une partie des chiffres significatifs est perdue par compensation des termes de signes opposés. Le terme de valeur absolue maximale étant de l'ordre de $\frac{x^n}{n!} \simeq e^x$ pour $n = x$, ceci amène à travailler avec des nombres à $2d$ chiffres décimaux au lieu de d. On obtient en définitive le temps de calcul suivant (en négligeant le calcul de $\log x$) :

$$S_1(d) = a_1 \times d \log 10 \times 3 \times 2d = 6a_1 \log 10\ d^2 \simeq 49.6\, d^2.$$

Une méthode (S_1') plus élaborée, suggérée par Sweeney [21] et mise en œuvre par Brent [7], consiste à évaluer le reste $R(x)$ par son développement asymptotique limité à l'ordre $k = x \in \mathbb{N}$. Compte tenu que

$$\left| R(x) - \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \cdots + \frac{(-1)^k k!}{x^k}\right)\right| \leqslant \frac{e^{-x}\ x!}{x^{x+1}} \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\ e^{-2x},$$

on est amené à choisir $x = -\frac{1}{2} d \log 10$, à sommer la série $F(x)$ jusqu'à $n = a_2 x$ ($a_2 \simeq 4.319$), et à travailler avec des nombres ayant $\frac{3d}{2}$ chiffres décimaux. Le calcul de $R(x)$ ou de e^x nécessite 2 opérations pour chaque terme, effectuées à la précision $10^{-d/2}$. On en déduit

$$S_1'(d) = \left(\tfrac{9}{4}\, a_2 + \tfrac{1}{2} a_0 + \tfrac{1}{2}\right) \log 10\ d^2 \simeq 26.7\, d^2.$$

Il existe deux autres alternatives pour le calcul de $F(x)$ qui évitent la perte de précision par compensation intervenant dans l'algorithme (S_1). Elles reposent sur les développements en séries à termes positifs ci-dessous :

$$F(x) = e^{-x} \int_0^x \frac{e^x - e^t}{x - t}\, dt = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{x^n - t^n}{x - t}\, dt$$

$$(S_2) \qquad = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$F(x) = e^{-x/2} \int_{-x/2}^{x/2} \frac{e^{x/2} - e^t}{x/2 - t}\, dt = e^{-x/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{-x/2}^{x/2} \frac{(x/2)^n - t^n}{x/2 - t}\, dt$$

$$(S_3) \qquad = e^{-x/2} \sum_{p=1}^{+\infty} 2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right)\left(\frac{(x/2)^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(x/2)^{2p}}{(2p)!}\right).$$

[On utilise le développement $\frac{x^n-t^n}{x-t} = x^{n-1} + x^{n-2}t + \cdots + t^{n-1}$, et pour la dernière sommation, on regarde séparément les termes $n = 2p$ et $n = 2p-1$, $p \geqslant 1$]. La série (S_2), et de façon analogue (S_3), peut être évaluée par factorisation suivant la règle de Hörner (nous notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ les sommes partielles de la série harmonique, avec par convention $H_0 = 0$, et $H_{n,N} = H_N - H_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{N}$) :

$$
\begin{aligned}
e^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} H_n \frac{x^n}{n!} &= H_N - e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} H_{n,N}\frac{x^n}{n!} \simeq H_N - e^{-x}\sum_{n=0}^{N-1} H_{n,N}\frac{x^n}{n!} \\
&\simeq H_{0,N} - e^{-x}\frac{x}{1}\biggl(H_{1,N} + \frac{x}{2}\biggl(H_{2,N} + \frac{x}{3}\biggl(\cdots + \frac{x}{N-1}H_{N-1,N}\biggr)\cdots\biggr)\biggr).
\end{aligned}
$$

Le calcul est effectué de manière descendante en prenant $H_{N-1,N} = \frac{1}{N}$ et $H_{n-1,N} = \frac{1}{n} + H_{n,N}$. Ceci nécessite 1 multiplication, 1 division et 2 additions à chaque étape. Suivant que l'on néglige ou non le reste $R(x)$ (les algorithmes avec reste seront notés (S_2') et (S_3')), ces méthodes conduisent aux temps de calcul

$$
\begin{aligned}
S_2(d) &= 6a_0 \log 10\, d^2 \simeq 37.6\, d^2, \\
S_3(d) &= \frac{11}{4}a_1 \log 10\, d^2 \simeq 22.7\, d^2, \\
S_2'(d) &= \Bigl(3a_1 + \frac{1}{2}\Bigr)\log 10\, d^2 \simeq 26.0\, d^2, \\
S_3'(d) &= \Bigl(\frac{11}{8}a_3 + \frac{1}{2}\Bigr)\log 10\, d^2 \simeq 16.9\, d^2.
\end{aligned}
$$

3. Algorithme de Brent-McMillan

L'algorithme introduit par Brent-McMillan dans [10] repose sur certaines identités vérifiées par les fonctions de Bessel modifiées $I_\alpha(x)$ et $K_0(x)$:

$$
\begin{aligned}
I_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha+2n}}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}, \\
K_0(x) &= -\frac{\partial I_\alpha(x)}{\partial\alpha}_{|\alpha=0}.
\end{aligned}
$$

Les spécialistes observeront que $2x$ a été substitué à x dans les notations classiques du traité de Watson [22]. On se restreindra aux valeurs $x > 0$ réelles dans ce qui suit. Par dérivation de I_α et grâce à la formule $\Gamma'(n+1) = (H_n - \gamma)\, n!$ (elle-même tirée des égalités $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$), il vient

$$
\begin{aligned}
&K_0(x) = -(\log x + \gamma) I_0(x) + S_0(x) \qquad \text{où} \\
&I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}, \qquad S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n\,\frac{x^{2n}}{n!^2}.
\end{aligned}
$$

L'intégrale de Hankel de la fonction $1/\Gamma$ s'exprime cette fonction sous la forme

$$
\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \zeta^{-z} e^{\zeta}\, d\zeta
$$

où (C) est le contour formé d'un petit cercle $\zeta = \varepsilon e^{iu}$, $u \in [-\pi, \pi]$, complété par deux intervalles $]-\infty, -\varepsilon]$ d'arguments $-\pi$ et $+\pi$ parcourus en sens inverse. Cette formule donne

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha+2n}}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \zeta^{-\alpha-n-1} e^{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} x^\alpha \zeta^{-\alpha-1} \exp(x^2/\zeta + \zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \zeta^{-\alpha} \exp(x/\zeta + \zeta x)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x\cos u} \cos(\alpha u)\, du - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2x\cosh v}\, e^{-\alpha v}\, dv. \end{aligned}$$

La deuxième ligne ci-dessus exprimant $I_\alpha(x)$ est obtenue à l'aide du changement de variable $\zeta \mapsto \zeta x$ (rappelons que $x > 0$) ; la première intégrale de la troisième ligne provient de la partie du contour $\{\zeta = e^{iu}\}$ formée du cercle de centre 0 et de rayon 1, et la dernière intégrale des deux segments $]-\infty, -1]$ avec $t = -e^{-v}$, $v \in [0, +\infty[$. En particulier, on obtient les expressions intégrales et les équivalents suivants de $I_0(x)$, $K_0(x)$ quand $x \to +\infty$:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x\cos u}\, du \qquad \text{de sorte que} \quad I_0(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}\, e^{2x}, \tag{1}$$

$$K_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2x\cosh v}\, dv \qquad \text{de sorte que} \quad K_0(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4x}}\, e^{-2x}. \tag{2}$$

On a de plus $I_0(x) > \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{2x}$ si $x \geqslant 1$ et $K_0(x) < \sqrt{\frac{\pi}{4x}}\, e^{-2x}$ si $x > 0$. Ces estimées peuvent se voir à l'aide de changements de variables

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \frac{e^{2x}}{2\pi\sqrt{x}} \int_0^{4x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t(1-t/4x)}}\, dt, \qquad t = 2x(1-\cos u), \\ K_0(x) &= \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t(1+t/4x)}}\, dt, \qquad t = 2x(\cosh v - 1), \end{aligned}$$

en observant que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(\frac12) = \sqrt{\pi}$; la minoration de $I_0(x)$ résulte du fait que $\frac{1}{\sqrt{1-t/4x}} \geqslant 1 + t/8x$ par convexité, d'où (au moyen d'une intégration par parties pour le terme $\sqrt{t}\, e^{-t}$)

$$\begin{aligned} \int_0^{4x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t(1-t/4x)}}\, dt &\geqslant \Gamma(\tfrac12) + \frac{1}{8x}\Gamma(\tfrac32) - \int_{4x}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{8x}\Big)\, e^{-t}\, dt \\ &\geqslant \sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{16x} - e^{-4x}\Big(\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{32x\sqrt{x}}\Big) > \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

pour $x \geqslant 1$. En définitive, la constante d'Euler peut s'écrire sous la forme

$$\gamma = \frac{S_0(x)}{I_0(x)} - \log x - \frac{K_0(x)}{I_0(x)}, \tag{3}$$

avec

$$0<\frac{K_0(x)}{I_0(x)}<\pi\, e^{-4x} \qquad \text{si } x \geqslant 1. \tag{4}$$

Dans l'algorithme basique (B) proposé par Brent, le reste $\frac{K_0(x)}{I_0(x)}$ est purement et simplement négligé ; la précision 10^{-d} est donc atteinte pour $x = \frac{1}{4}\, d \log 10$, et les séries $I_0(x)$, $S_0(x)$ doivent être sommées jusqu'à $n = \lceil a_1 x \rceil$. Le calcul de

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{1^2}\left(1+\frac{x^2}{2^2}\left(\cdots\frac{x^2}{(n-1)^2}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\left(\cdots\right)\right)\cdots\right)\right)$$

nécessite 2 opérations arithmétiques pour chaque terme, et celui de

$$S_0(x) \simeq H_{0,N} - \frac{1}{I_0(x)}\,\frac{x^2}{1^2}\left(H_{1,N}+\frac{x^2}{2^2}\left(\cdots\frac{x^2}{(n-1)^2}\left(H_{n-1,N}+\frac{x^2}{n^2}\left(H_{n,N}+\cdots\right)\right)\cdots\right)\right)$$

en exige 4. Le temps requis par l'algorithme (B) est donc

$$B(d) = a_1 \times \frac{1}{4}\, d\, \log 10 \times 6 \times d \simeq 12.4\, d^2.$$

Raffinement de l'algorithme. Comme dans le cas de la méthode de Sweeney, le reste $K_0(x)/I_0(x)$ peut être évalué au moyen d'un développement asymptotique. On a en effet

$$I_0(x)K_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{-\pi<u<\pi\,,\, v>0\}} \exp\big(2x(\cos u - \cosh v)\big)\, du\, dv,$$

et le changement de variable

$$r\, e^{i\theta} = \sin^2\left(\frac{u+iv}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(u+iv)\big) = \frac{1}{2}\big(1-\cos u\cosh v + i \sin u \sinh v\big),$$

donne

$$r = \frac{1}{2}(\cosh v - \cos u), \qquad |1-r\,e^{i\theta}| = \left|\cos\left(\frac{u+iv}{2}\right)\right|^2,$$
$$r\, dr\, d\theta = \left|\sin\left(\frac{u+iv}{2}\right)\cos\left(\frac{u+iv}{2}\right)\right|^2 du\, dv = r\,|1-r\,e^{i\theta}|\, du\, dv,$$

par conséquent

$$I_0(x)K_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-4xr)\, dr \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-r\,e^{i\theta}|}. \tag{5}$$

Notons

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \alpha\in\mathbb{C}$$

les coefficients binomiaux généralisés. Pour $z = r\,e^{i\theta}$ et $|z| = r < 1$, le développement binomial $(1-z)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-z)^k$ combiné à la formule de Parseval-Bessel implique le développement en série

$$\varphi(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\,e^{i\theta}|} = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k\, r^{2k}, \qquad 0 \leqslant r < 1, \tag{6}$$

où le coefficient

$$w_k := \binom{-1/2}{k}^2 = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\right)^2 = \frac{(2k)!^2}{2^{4k}\,k!^4}. \tag{7}$$

est étroitement lié à l'intégrale de Wallis $W_p = \int_0^{\pi/2} \sin^p x\, dx$. La relation de récurrence classique $W_p = \frac{p-1}{p} W_{p-2}$ implique en effet

$$W_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\,\frac{\pi}{2}, \qquad W_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)},$$

d'où $w_k = (\frac{2}{\pi} W_{2k})^2$. Les relations $W_{2k}W_{2k-1} = \frac{\pi}{4k}$, $W_{2k}W_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}$ entraînent par décroissance de la suite (W_p) que $\sqrt{\frac{\pi}{2(2k+1)}} < W_{2k} < \sqrt{\frac{\pi}{4k}}$, donc

$$\frac{2}{\pi(2k+1)} < w_k < \frac{1}{\pi k}. \tag{8}$$

Le point de départ de notre analyse pour l'estimation de $I_0(x)K_0(x)$ est l'égalité tirée de (5), (6)

$$I_0(x)K_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-4xr}\,\varphi(r)\, dr, \tag{9}$$

où

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k\, r^{2k} \qquad \text{pour } r < 1, \tag{9'}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k\, r^{-2k-1} \qquad \text{pour } r > 1. \tag{9''}$$

(Cette dernière identité s'obtient en faisant le changement de θ en $-\theta$ dans (6)). D'autre part, on voit facilement à l'aide de (8) que l'on a un équivalent

$$\varphi(r) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^{2k}}{\pi k} = \frac{1}{\pi}\,\log\frac{1}{1-r^2} \qquad \text{quand } r \to 1-0,$$

en particulier l'intégrale (9) converge autour de $r = 1$ (il nous sera nécessaire plus loin de préciser davantage cette approximation, mais il faut des arguments bien plus sophistiqués pour y parvenir). Par intégration terme à terme de la série donnant $\varphi(r)$ sur $[0,+\infty[$, en ignorant le fait que la série diverge pour $r \geqslant 1$, on obtient formellement un développement asymptotique, lui aussi divergent :

$$I_0(x)K_0(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k \frac{(2k)!}{(4x)^{2k+1}} \sim \frac{1}{4x}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}}. \tag{10}$$

Si x est entier, le terme général de ce développement passe par un minimum exactement pour $k = 2x$, car le rapport entre le k-ième et le $(k-1)$-ième terme vaut

$$\frac{(2k(2k-1))^3}{k^4\,(16x)^2} = \left(\frac{k}{2x}\right)^2\left(1-\frac{1}{2k}\right)^3 < 1 \quad \text{ssi } k \leqslant 2x.$$

L'idée est de tronquer le développement asymptotique précisément à $k = 2x$. On va vérifier, comme conjecturé par Brent-McMillan [10] et en partie démontré par Brent-Johansson [10′], que « l'erreur de sommation » correspondante est alors d'un ordre de grandeur comparable à celui du dernier terme $k = 2x$, soit $\frac{e^{-4x}}{2\sqrt{2\pi}\,x^{3/2}}$ par la formule de Stirling.

Théorème. *La différence*

$$\Delta(x) := I_0(x)K_0(x) - \frac{1}{4x}\sum_{k=0}^{2x} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}} \tag{11}$$

admet quand $x \to +\infty$ l'équivalent

$$\Delta(x) \sim -\frac{5\,e^{-4x}}{24\sqrt{2\pi}\,x^{3/2}}, \tag{12}$$

et on a plus précisément

$$\Delta(x) = -e^{-4x}\left(\frac{5}{24\sqrt{2\pi}\,x^{3/2}} + \varepsilon(x)\right), \qquad |\varepsilon(x)| < \frac{0.863}{x^2}. \tag{13}$$

La valeur approchée

$$\frac{K_0(x)}{I_0(x)} \simeq \frac{1}{4x\,I_0(x)^2}\sum_{k=0}^{2x} \frac{(2k)!^3}{k!^4\,(16x)^{2k}}$$

est donc affectée d'une erreur dont l'ordre de grandeur est

$$\frac{\Delta(x)}{I_0(x)^2} \sim -\frac{5\sqrt{2\pi}}{12\,x^{1/2}}\,e^{-8x}. \tag{13′}$$

La vérification de ce résultat demande de nombreux calculs. Comme on le verra plus loin, on pourrait probablement obtenir en fait un développement asymptotique de $\Delta(x)$, au moins pour les premiers termes, mais les calculs nécessaires seraient sans doute assez longs. D'après (5) et la définition de $\Delta(x)$, nous avons

$$\Delta(x) = \int_0^{+\infty} e^{-4xr}\,\delta(r)\,dr \tag{14}$$

où

$$\delta(r) := \varphi(r) - \sum_{k=0}^{2x} w_k\, r^{2k}, \qquad \text{de sorte que } \ \delta(r) = \sum_{k=2x+1}^{+\infty} w_k\, r^{2k} \quad \text{pour } r<1. \tag{15}$$

Pour $r < 1$, on notera que $\varphi(r)$ coïncide avec l'intégrale elliptique de première espèce $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1 - r^2\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta$, comme il résulte à nouveau de la série binomiale et de l'expression de W_{2k}. Nous aurons besoin de connaître le comportement asymptotique précis de $\varphi(r)$ quand $r \to 1$. Celui-ci résulte d'une identité classique que nous rappelons ci-dessous. En posant $t^2 = 1 - r^2$, le changement de variable $u = \tan\theta$ donne

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-r^2\cos^2\theta)^{-1/2}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(t^2+u^2)}}\,du\\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+t^2v^2)}} + \frac{2}{\pi}\int_t^1\frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(t^2+v^2)}} \qquad (16)\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en découpant l'intégrale $\int_0^{+\infty}\ldots\,du$ sur les 3 intervalles $[0,t]$, $[t,1]$, $[1,+\infty[$ et en y effectuant les changements de variables respectifs $u = vt$, $u = v$, $u = 1/v$ (le premier et le troisième morceaux étant égaux). Grâce à la série binomiale, la première intégrale de la ligne (16) admet un développement en série convergent

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+t^2v^2)}} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}c'_k t^{2k}, \qquad c'_k = \binom{-1/2}{k}\int_0^1\frac{v^{2k}\,dv}{\sqrt{1+v^2}}.$$

La deuxième intégrale s'obtient de même à l'aide d'une série double, en développant simultanément les deux racines carrées :

$$\frac{2}{\pi}\int_t^1\frac{dv}{v\sqrt{1+v^2}\,\sqrt{(1+t^2/v^2)}} = \frac{2}{\pi}\int_t^1\sum_{k,\ell\geqslant 0}\binom{-1/2}{\ell}v^{2\ell}\binom{-1/2}{k}(t^2/v^2)^k\,\frac{dv}{v}.$$

Les termes diagonaux $k = \ell$ fournissent un terme logarithmique

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}^2 t^{2k}\,\log\frac{1}{t} = \frac{1}{\pi}\,\varphi(t)\,\log\frac{1}{t^2},$$

et les autres s'intègrent sous la forme d'une série double absolument convergente

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k\neq\ell\geqslant 0}\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{\ell}t^{2k}\left[\frac{v^{2\ell-2k}}{2\ell-2k}\right]_t^1 = \frac{2}{\pi}\sum_{k\neq\ell\geqslant 0}\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{\ell}\,\frac{t^{2k}-t^{2\ell}}{2(\ell-k)}.$$

Après regroupement des puissances de t, celle-ci se réduit à une série entière $\frac{4}{\pi}\sum c''_k t^{2k}$ de rayon de convergence 1, avec (par raison de symétrie en k,ℓ)

$$c''_k = \sum_{0\leqslant\ell<+\infty,\,\ell\neq k}\frac{1}{2(\ell-k)}\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{\ell}.$$

D'après (8), on voit en effet a priori que

$$|c_k'| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\,\frac{1}{2k+1} = O(k^{-3/2}),$$

et

$$|c_k''| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\bigg(\frac{1}{k} + \sum_{0<\ell\neq k} \frac{1}{|\ell-k|\,\sqrt{\pi\ell}}\bigg) = O\Big(\frac{\log k}{k}\Big).$$

Au total, en posant $t^2 = 1-r^2$, on obtient la relation

$$\varphi(r) = \frac{1}{\pi}\bigg(\varphi(t)\,\log\frac{1}{t^2} + 4\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,t^{2k}\bigg), \qquad c_k = c_k' + c_k'', \tag{17}$$

qui permettra de calculer un équivalent arbitrairement précis de $\varphi(r)$ quand $r \to 1$. Observons que

$$c_k = c_k' + c_k'' = \binom{-1/2}{k}\,\alpha_k$$

avec

$$\alpha_k = \int_0^1 \frac{v^{2k}\,dv}{\sqrt{1+v^2}} + \int_1^{+\infty}\bigg(\frac{v^{2k}}{\sqrt{1+v^2}} - \sum_{\ell=0}^{k}\binom{-1/2}{\ell}\,v^{2k-2\ell-1}\bigg)\,dv + \sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{1}{2(\ell-k)}\binom{-1/2}{\ell}.$$

Un calcul direct donne

$$c_0 = \alpha_0 = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} + \int_1^{+\infty}\bigg(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{1}{v}\bigg)dv = \log 2.$$

Écrivons d'autre part

$$\frac{v^{2k}}{\sqrt{1+v^2}} = v^{2k-1}\cdot\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \quad \text{ et } \quad (\sqrt{1+v^2})' = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$

et intégrons par parties après avoir factorisé v^{2k-1}. Il vient

$$\begin{aligned}\alpha_k = \sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{1}{2(\ell-k)}\binom{-1/2}{\ell} + \Big[v^{2k-1}\,\sqrt{1+v^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 (2k-1)\,v^{2k-2}\,\sqrt{1+v^2}\,dv \\ + \bigg[v^{2k-1}\bigg(\sqrt{1+v^2} - \sum_{\ell=0}^{k}\binom{-1/2}{\ell}\,\frac{v^{1-2\ell}}{1-2\ell}\bigg)\bigg]_1^{+\infty} \\ - \int_1^{+\infty}(2k-1)\,v^{2k-2}\bigg(\sqrt{1+v^2} - \sum_{\ell=0}^{k}\binom{-1/2}{\ell}\,\frac{v^{1-2\ell}}{1-2\ell}\bigg)\,dv.\end{aligned}$$

Ceci suggère de calculer $\alpha_k + (2k-1)\alpha_{k-1}$, en utilisant la simplification

$$v^{2k-2}\,\sqrt{1+v^2} - \frac{v^{2k-2}}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{v^{2k}}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Nous en déduisons

$$\alpha_k + (2k-1)\alpha_{k-1} = -(2k-1)\alpha_k + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{-1/2}{\ell} \frac{1}{1-2\ell}$$
$$+ \int_1^{+\infty} (2k-1)\, v^{2k-2} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{-1/2}{\ell} \left(\frac{v^{1-2\ell}}{1-2\ell} - v^{1-2\ell} \right) - \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{-1/2}{\ell} v^{-1-2\ell} \right) dv$$
$$+ 2k \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2(\ell-k)} \binom{-1/2}{\ell} + (2k-1) \sum_{\ell=0}^{k-2} \frac{1}{2(\ell-(k-1))} \binom{-1/2}{\ell}.$$

Un changement d'indice $\ell = \ell' - 1$ dans les sommes associées à $k-1$ permet d'éliminer la quasi totalité des termes. Il reste seulement le terme $\ell = k$ de la première sommation, d'où la relation de récurrence

$$2k\,\alpha_k + (2k-1)\alpha_{k-1} = -\binom{-1/2}{k} \frac{1}{2k-1}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\alpha_k}{\binom{-1/2}{k}} - \frac{\alpha_{k-1}}{\binom{-1/2}{k-1}} = -\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Nous obtenons par conséquent

$$\frac{c_k}{\binom{-1/2}{k}^2} = \frac{\alpha_k}{\binom{-1/2}{k}} = \frac{\alpha_0}{1} - \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2\ell(2\ell-1)} = \log 2 - \sum_{\ell=1}^{2k} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}$$

et l'expression explicite

$$c_k = w_k \left(\log 2 - \sum_{\ell=1}^{2k} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} \right). \tag{18}$$

Le reste de la série alternée donnant $\log 2$ est majoré par la moitié du dernier terme calculé, soit $1/4k$, donc d'après (8) nous avons $0 < c_k < \frac{1}{\pi^2 k^2}$ si $k \geqslant 1$, de sorte que le rayon de convergence vaut 1. De (9) et (17) nous tirons pour $r \to 1-0$ le développement bien connu de l'intégrale elliptique

$$\varphi(r) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} w_k t^{2k} \log \frac{1}{t^2} + 4 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{2k} \right), \qquad t^2 = 1 - r^2, \tag{19}$$

avec

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{1}{4}, \quad w_2 = \frac{9}{64}, \quad c_0 = \log 2, \quad c_1 = \frac{1}{4}\left(\log 2 - \frac{1}{2} \right), \quad c_2 = \frac{9}{64}\left(\log 2 - \frac{7}{12} \right).$$

Explicitons le début du développement limité en $r = 1$ en posant $r = 1 + h$. Pour $r = 1 + h < 1$ ($h < 0$), nous avons $t^2 = 1 - r^2 = -2h - h^2 = 2|h|(1 + h/2)$, d'où

$$\log \frac{1}{t^2} = \log \frac{1}{2|h|(1+h/2)} = \log \frac{1}{|h|} - \log 2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 + O(h^2),$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k t^{2k} = 1 + \frac{1}{4}(-2h - h^2) + \frac{9}{64}(2h)^2 + O(h^3),$$
$$4 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{2k} = 4 \log 2 + \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)(-2h - h^2) + \frac{9}{16}\left(\log 2 - \frac{7}{12} \right)(2h)^2 + O(h^3),$$

et

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{\pi}\Bigg(\Big(1 - \frac{1}{2}h + \frac{5}{16}h^2 + O(h^3)\Big)\Big(\log\frac{1}{|h|} - \log 2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 + O(h^3)\Big)$$
$$+ 4\log 2 - \big(2\log 2 - 1\big)h + \Big(\frac{5}{4}\log 2 - \frac{13}{16}\Big)h^2 + O(h^3)\Bigg),$$

soit encore (par ordre de grandeur décroissant des termes) :

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{\pi}\Bigg(\log\frac{1}{|h|} + 3\log 2 - \frac{1}{2}h\log\frac{1}{|h|} - \Big(\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\Big)h$$
$$+ \frac{5}{16}h^2\log\frac{1}{|h|} + \Big(\frac{15}{16}\log 2 - \frac{7}{16}\Big)h^2 + O\Big(h^3\log\frac{1}{|h|}\Big)\Bigg). \tag{20}$$

Pour $r = 1 + h > 1$, la relation $\varphi(r) = \frac{1}{r}\varphi(\frac{1}{r})$ donne de même

$$\varphi(r) = \frac{1}{1+h}\Bigg(\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} w_k t^{2k}\log\frac{1}{t^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{2k}\Bigg), \quad t^2 = 1 - \frac{1}{r^2} = 2h - 3h^2 + O(h^3),$$

et après simplifications on voit que le développement (20) est encore valable pour $h > 0$. Un passage à la limite $r \to 0$, $t \to 1 - 0$ dans (19) fournit en particulier la relation $\sum_{k\geqslant 0} c_k = \frac{\pi}{4}$. Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 1. *Pour $h > 0$, l'écart*

$$\rho(h) = \varphi(1+h) - \frac{1}{\pi}\Bigg(\log\frac{1}{h} + 3\log 2 - \frac{1}{2}h\,\log\frac{1}{h} - \Big(\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\Big)h\Bigg) \tag{21}$$

$$= \varphi(1+h) - \frac{1}{2\pi}\Big((h-2)\log\frac{h}{8} + h\Big) \tag{21'}$$

admet la majoration

$$|\rho(h)| \leqslant h^2\Big(2 + \log\Big(1 + \frac{1}{h}\Big)\Big). \tag{22}$$

Preuve. L'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange donne $(1+h)^{-1} = 1 - h + \theta_1 h^2$, $t^2 = 1 - \frac{1}{r^2} = 2h - 3\theta_2 h^2$, $\theta_i \in\,]0,1[$, ainsi que $t^2 \leqslant 2h$ et

$$\log\frac{1}{t^2} = \log\frac{r^2}{(r-1)(r+1)} = \log\frac{1}{h} + 2\log(1+h) - \log\Big(1 + \frac{h}{2}\Big) - \log 2$$
$$= \log\frac{1}{h} - \log 2 + \frac{3}{2}h - \frac{7}{8}\theta_3 h^2, \quad \theta_2 \in\,]0,1[,$$

tandis que les restes $\sum_{k\geqslant 2} w_k t^{2k}$ et $\sum_{k\geqslant 2} c_k t^{2k}$ sont majorés respectivement par

$$\frac{w_2 t^4}{1-t^2} \leqslant 4w_2 r^2 h^2 \leqslant \frac{225}{256}h^2 \quad \text{et} \quad \frac{c_2 t^4}{1-t^2} \leqslant 4c_2 r^2 h^2 < \frac{1}{10}h^2 \quad \text{si} \quad h \leqslant \frac{1}{4},\ r = 1+h \leqslant \frac{5}{4}.$$

Pour $h \leqslant \frac{1}{4}$, on a donc une égalité

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{\pi}(1-h+\theta_1 h^2) \times \Bigg(\left(1+\frac{1}{4}(2h-3\theta_2 h^2)+\frac{225}{256}\theta_4 h^2\right)\left(\log\frac{1}{|h|} - \log 2 + \frac{3}{2}h - \frac{7}{8}\theta_3 h^2\right) + 4\log 2 + \left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)(2h - 3\theta_2 h^2) + \frac{4}{10}\theta_5 h^2\Bigg)$$

avec $\theta_i \in \,]0,1[$. Un développement de $\rho(h)$ à l'aide de cette expression, suivi d'une majoration de chaque terme par sa valeur absolue, montre que pour $h \leqslant \frac{1}{4}$ on a $|\rho(h)| \leqslant h^2(0.885 \log\frac{1}{h} + 2.11)$, de sorte que (22) est satisfait. Lorsque $h \geqslant \frac{1}{4}$, on a

$$\rho'(h) = \varphi'(1+h) - \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{h}{8} + 2 - \frac{2}{h}\right), \qquad \varphi'(r) = -\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)w_k\, r^{-2k-2},$$

et d'après (8)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi}r^{-2k-2} < -\varphi'(r) < \frac{1}{r^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3k}{\pi k}r^{-2k-2} < \sum_{k=0}^{+\infty} r^{-2k-2} = \frac{1}{r^2-1},$$

d'où

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{h(h+2)} < -\varphi'(1+h) < \frac{1}{h(h+2)},$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{8}{h} - 2 + \frac{2}{h} - \frac{2\pi}{h(h+2)}\right) < \rho'(h) < \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{8}{h} - 2 + \frac{2}{h+2}\right).$$

On obtient ainsi

$$-1.72 < \frac{1}{2\pi}\left(\log 4 - 2 + \frac{1}{4} - \frac{32\pi}{9}\right) < \rho'(h) < \frac{1}{2\pi}\left(\log 32 - 2 + \frac{8}{9}\right) < 1.51 \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{4}, 2\right],$$
$$-\frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{h}{8} + 2\right) < \rho'(h) < \frac{1}{2\pi}\left(\log 4 - \frac{3}{2}\right) < 0 \qquad \text{sur} \quad [2, +\infty[,$$

par suite $|\rho'(h)| \leqslant \frac{1}{2\pi}(h - 1 - \log 8 + 2) \leqslant \frac{1}{2\pi}h$ pour $h \in [2, +\infty[$. Comme $\rho(2) \simeq 0.00249 < \frac{1}{\pi}$, on voit que $|\rho(h)| \leqslant \frac{1}{4\pi}h^2$, ce qui montre que (22) est encore vérifié sur $[2, +\infty[$. Un calcul numérique de $\rho(h)$ en des points suffisamment rapprochés de $[\frac{1}{4}, 2]$ permet enfin de vérifier (22) sur ce dernier intervalle. □

On décompose maintenant l'intégrale (14) sur les intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$, en commençant par l'intégrale de φ sur $[1,+\infty[$. Le changement de variable $r = 1 + t/4x$ fournit

$$\int_1^{+\infty} e^{-4xr}\,\varphi(r)\,dr = \frac{e^{-4x}}{4x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\varphi\!\left(1+\frac{t}{4x}\right)dt, \tag{23}$$

et le lemme 1 (21′) donne de cette dernière intégrale une approximation

$$\begin{aligned}\frac{e^{-4x}}{8\pi x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\Big(\frac{t}{4x}-2\Big)\log\frac{t}{32x}+\frac{t}{4x}\Big)\,dt\\ &= \frac{e^{-4x}}{8\pi x}\Big(\log(32x)\Big(2-\frac{1}{4x}\Big)+2\gamma+\frac{1}{4x}\int_0^{+\infty} e^{-t}(t\log t+t)\,dt\Big)\\ &= \frac{e^{-4x}}{4\pi x}\Big(\log x+\gamma+5\log 2-\frac{\log x}{8x}-\frac{\gamma+5\log 2-2}{8x}\Big),\end{aligned}$$

avec une erreur majorée par

$$\begin{aligned}\frac{e^{-4x}}{4x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{t}{4x}\Big)^2\Big(2+\log\Big(1+\frac{4x}{t}\Big)\Big)dt\\ &= \frac{e^{-4x}}{4x}\Big(\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{16x^2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,\log\frac{t+4x}{t}\,dt\Big).\end{aligned}$$

Si on écrit

$$0<\log\frac{t+4x}{t}=\log\frac{4x}{t}+\log\Big(1+\frac{t}{4x}\Big)\leqslant \log\frac{4x}{t}+\frac{t}{4x},$$

on voit que

$$\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,\log\frac{t+4x}{t}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\Big(\log\frac{4x}{t}+\frac{t}{4x}\Big)\,dt=2\log 4x+\frac{3}{2x}+2\gamma-3.$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} e^{-4xr}\,\varphi(r)\,dr=\frac{e^{-4x}}{4\pi x}\Big(\log x+\gamma+5\log 2-\frac{\log x}{8x}\Big)+\frac{e^{-4x}}{4x}\,R_1(x), \tag{24}$$

et au moyen d'un calcul numérique il vient

$$|R_1(x)|<\frac{\gamma+5\log 2-2}{8\pi x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{2\log 4x+\frac{3}{2x}+2\gamma-3}{16x^2}<\frac{0.483}{x}. \tag{25}$$

Il faut maintenant estimer les deux intégrales $\int_0^1 e^{-4xr}\sum_{k\geqslant 2x+1} w_k\,r^{2k}\,dr$ et $\int_1^{+\infty} e^{-4xr}\sum_{k\leqslant 2x} w_k\,r^{2k}\,dr$. Des intégrations par parties successives donnent

$$\int_0^1 e^{-4xr}\,r^{2k}\,dr=e^{-4x}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{(4x)^{\ell-1}}{(2k+1)\cdots(2k+\ell)}, \tag{26}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-4xr}\,r^{2k}\,dr=\frac{e^{-4x}}{4x}\Big(1+\sum_{\ell=1}^{2k}\frac{2k(2k-1)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell}\Big). \tag{27}$$

En combinant les identités (14), (15), (24), (26), (27) il vient

$$\Delta(x)=\frac{e^{-4x}}{4x}\Big(\frac{1}{\pi}\Big(\log x+\gamma+5\log 2\Big)-\frac{\log x}{8\pi x}-\sum_{k=0}^{2x} w_k+S(x)+R_1(x)+R_2(x)\Big) \tag{28}$$

avec

$$(29)\quad S(x)=\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{w_k\,(4x)^\ell}{(2k+1)\cdots(2k+\ell)}-\sum_{k=1}^{2x}\sum_{\ell=1}^{2x-1}w_k\,\frac{2k(2k-1)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell},$$

et

$$(30)\quad R_2(x)=\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\sum_{\ell=2x}^{+\infty}\frac{w_k\,(4x)^\ell}{(2k+1)\cdots(2k+\ell)}-\sum_{k=1}^{2x}\sum_{\ell=2x}^{+\infty}w_k\,\frac{2k(2k-1)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell}$$

(dans la dernière sommation, seuls les termes $\ell\leqslant 2k$ sont non nuls). La formule (28) nous amène maintenant à étudier le développement asymptotique de $\sum_{k=0}^{2x}w_k$. Ce développement est facile à établir à partir de (19), on pourrait même le calculer à un ordre arbitrairement grand.

Lemme 2. *On a*

$$(31)\quad w_k=\frac{1}{\pi k}\left(1-\frac{1}{2(2k-1)}+\varepsilon_k\right)\quad \textit{où}\quad \frac{1}{12k(2k-1)}<\varepsilon_k<\frac{5}{16k(2k-1)},\quad k\geqslant 1,$$

$$(31')\quad \sum_{k=0}^{2x}w_k=\frac{1}{\pi}\Big(\log x+5\log 2+\gamma\Big)+R_3(x),\qquad \frac{1}{4\pi x}<R_3(x)<\frac{19}{48\pi x}.$$

Preuve. La minoration (31) va résulter de la formule d'Euler-Maclaurin du §1 appliquée à la fonction $f(x)=\log\frac{2x-1}{2x}$. Celle-ci fournit

$$\frac{1}{2}\log w_k=\sum_{i=1}^{k}f(i)=C+\int_1^k f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(k)+\sum_{j=1}^{p}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\,f^{(2j-1)}(k)+\tilde R_p$$

où C est une constante et où le reste $\tilde R_p$ est le produit par un facteur dans $[0,1]$ du terme suivant, à savoir

$$\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}\,f^{(2p+1)}(k)=\frac{2^{2p+1}\,b_{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\left(\frac{1}{(2k-1)^{2p+1}}-\frac{1}{(2k)^{2p+1}}\right).$$

On a ici

$$\begin{aligned}\int_1^k f(x)\,dx&=\frac{1}{2}(2k-1)\log(2k-1)-k\log k-(k-1)\,\log 2\\&=\left(k-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\,\log k+\frac{1}{2}\,\log 2\end{aligned}$$

et la constante C est ajustée par la formule de Wallis, d'où, avec $b_2=\frac{1}{6}$,

$$\begin{aligned}\log w_k&=\log\frac{1}{\pi k}+2k\,\log\left(1-\frac{1}{2k}\right)+1+2\theta\,b_2\left(\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{2k}\right)\\&\geqslant \log\frac{1}{\pi k}-\frac{1}{4k}-\sum_{\ell=3}^{+\infty}\frac{1}{\ell(2k)^{\ell-1}}>\log\frac{1}{\pi k}-\frac{1}{4k}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2k)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}.\end{aligned}$$

L'inégalité $e^{-x} \geqslant 1 - x$ donne alors

$$w_k > \frac{1}{\pi k}\Big(1 - \frac{1}{4k} - \frac{1}{6k(2k-1)}\Big) = \frac{1}{\pi k}\Big(1 - \frac{1}{2(2k-1)} + \frac{1}{12k(2k-1)}\Big)$$

et la minoration (31) s'ensuit pour tout $k \geqslant 1$. Dans l'autre sens, nous obtenons

$$\log w_k < \log\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} - \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{32k^3} + \frac{1}{6k(2k-1)} = \log\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{12k^2(2k-1)} - \frac{1}{32k^3}$$

et l'inégalité $e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{1}{2}x^2$ implique

$$w_k < \frac{1}{\pi k}\left(1 - \Big(\frac{1}{4k} - \frac{1}{12k^2(2k-1)} + \frac{1}{32k^3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4k}\Big)^2\right)$$

d'où (par différence polynomiale et réduction au même dénominateur)

$$w_k < \frac{1}{\pi k}\left(1 - \frac{1}{2(2k-1)} + \frac{5}{16k(2k-1)}\right) \qquad \text{si } k \geqslant 3.$$

On peut vérifier que l'inégalité finale a bien lieu aussi si $k = 1, 2$, ce qui entraîne l'estimation (31). La formule (19) implique d'autre part

$$\begin{aligned} w_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(w_k - \frac{1}{\pi k}\Big)r^{2k} &= \varphi(r) - \frac{1}{\pi}\,\log\frac{1}{1-r^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\,\big(\varphi(t) - 1\big)\,\log\frac{1}{1-r^2} + \frac{4}{\pi}\,\log 2 + \sum_{k\geqslant 1} c_k\,t^{2k} \end{aligned}$$

avec $t = \sqrt{1-r^2}$ et $\varphi(t) = 1 + O(1-r^2)$. Un passage à la limite quand $r \to 1 - 0$ et $t \to 0$ donne donc

$$w_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(w_k - \frac{1}{\pi k}\Big) = \frac{4}{\pi}\,\log 2.$$

On en déduit

$$w_0 + \sum_{k=1}^{2x}\Big(w_k - \frac{1}{\pi k}\Big) - \frac{4}{\pi}\,\log 2 = \sum_{2x+1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\pi k} - w_k\Big)$$

et l'encadrement (31) donne

$$0 < \sum_{2x+1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\pi k} - w_k\Big) \leqslant \sum_{2x+1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\,k(2k-1)} < \sum_{2x+1}^{+\infty}\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{8\pi x}.$$

L'estimation d'Euler-Maclaurin

$$\sum_{k=1}^{2x}\frac{1}{k} = \log(2x) + \gamma + \frac{1}{4x} + \frac{b_2}{2(2x)^2} - \frac{b_4}{4(2x)^4} + \cdots \tag{32}$$

implique alors (31′). □

Il reste à évaluer la somme $S(x)$, ce qui est beaucoup plus difficile du fait d'une compensation partielle entre les termes positifs et négatifs. L'approximation (31) du lemme 2 implique

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\biggl(T(x) - \frac{1}{2}U(x) + \frac{5}{8}R_4(x)\biggr), \tag{33}$$

où, en convenant qu'un produit vide vaut 1 et que $(2k-2)\cdots(2k-\ell+1) = \frac{1}{2k-1}$ si $\ell = 1$,

$$T(x) = \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{(4x)^\ell}{2k(2k+1)\cdots(2k+\ell)} - \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=1}^{2x}\frac{(2k-1)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell}, \tag{34}$$

$$U(x) = \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{(4x)^\ell}{(2k-1)\cdots(2k+\ell)} - \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=1}^{2x}\frac{(2k-2)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell}, \tag{35}$$

et où la nouvelle erreur $R_4(x)$ admet la majoration

$$|R_4(x)| \leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{(4x)^\ell/2k}{(2k-1)\cdots(2k+\ell)} + \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=1}^{2x}\frac{(2k-2)\cdots(2k-\ell+1)}{2k\,(4x)^\ell}. \tag{36}$$

La méthode consiste à sommer d'abord par rapport à l'indice k, et à utiliser pour cela des "intégrations par parties discrètes". Si on pose

$$u_k^{a,b} := \frac{1}{(2k+a)(2k+a+1)\cdots(2k+b-1)}, \qquad a \leqslant b \tag{37}$$

(en convenant que le dénominateur vaut 1 si $a = b$), alors

$$\begin{aligned} u_k^{a,b} - u_{k+1}^{a,b} &= \frac{(2k+b)(2k+b+1) - (2k+a)(2k+a+1)}{(2k+a)(2k+a+1)\cdots(2k+b+1)} \\ &= \frac{(b-a)(4k+a+b+1)}{(2k+a)(2k+a+1)\cdots(2k+b+1)}. \end{aligned}$$

L'encadrement $2(2k+a) \leqslant 4k+a+b+1 \leqslant 2(2k+b+1)$ implique

$$\frac{1}{(2k+a+1)\cdots(2k+b+1)} \leqslant \frac{u_k^{a,b} - u_{k+1}^{a,b}}{2(b-a)} \leqslant \frac{1}{(2k+a)(2k+a+1)\cdots(2k+b)}$$

avec une erreur par excès et une erreur par défaut toutes deux égales à

$$\frac{b-a+1}{2}\,\frac{1}{(2k+a)(2k+a+1)\cdots(2k+b+1)}.$$

Ces inégalités donnent en particulier par sommation de $\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{u_k^{a-1,b-1} - u_{k+1}^{a-1,b-1}}{2(b-a)}$ l'inégalité

$$\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+a)\cdots(2k+b)} \leqslant \frac{u_{2x+1}^{a-1,b-1}}{2(b-a)} = \frac{1}{2(b-a)}\,\frac{1}{(4x+a+1)\cdots(4x+b)},$$

avec une erreur par excès égale à

$$\frac{b-a+1}{2}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+a-1)\cdots(2k+b)}\leqslant\frac{1}{4}\,\frac{1}{(4x+a)\cdots(4x+b)}$$

et une "erreur sur l'erreur" (de nouveau par excès) égale à

$$\frac{(b-a+1)(b-a+2)}{4}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+a-2)\cdots(2k+b)}\leqslant\frac{b-a+1}{8}\,\frac{1}{(4x+a-1)\cdots(4x+b)},$$

autrement dit

$$\begin{aligned}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+a)\cdots(2k+b)}&=\frac{1}{2(b-a)}\,\frac{1}{(4x+a+1)\cdots(4x+b)}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(4x+a)\cdots(4x+b)}\\&\quad+\theta\,\frac{b-a+1}{8}\,\frac{1}{(4x+a-1)\cdots(4x+b)},\qquad\theta\in[0,1].\end{aligned}\tag{$38_3^{a,b}$}$$

On pourrait bien sûr pousser ce développement à 3 termes à un nombre quelconque p de termes si nécessaire, ce que nous noterons $(37_p^{a,b})$, et on utilisera ici les cas $p=2,3$. Pour les sommes $\sum_{k=1}^{2x}\ldots$, on pose de manière similaire

$$v_k^{a,b}=(2k-a)(2k-a-1)\cdots(2k-b+1),\qquad a\leqslant b,\tag{39}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}v_k^{a,b}-v_{k-1}^{a,b}&=(2k-a-2)\cdots(2k-b+1)\big((2k-a)(2k-a-1)-(2k-b)(2k-b-1)\big)\\&=(2k-a-2)\cdots(2k-b+1)\big((b-a)(4k-a-b-1)\big).\end{aligned}$$

Pour $a<b$, l'encadrement $2(2k-b)\leqslant(4k-a-b-1)\leqslant 2(2k-a-1)$ implique

$$(2k-a-2)\cdots(2k-b)\leqslant\frac{v_k^{a,b}-v_{k-1}^{a,b}}{2(b-a)}\leqslant(2k-a-1)\cdots(2k-b+1)$$

avec une erreur par excès et une erreur par défaut toutes deux égales à

$$\frac{1}{2}(b-a-1)\,(2k-a-2)\cdots(2k-b+1).$$

Par sommation de $\sum_{k=1}^{2x}\frac{v_k^{a,b}-v_{k-1}^{a,b}}{2(b-a)}$, on obtient donc

$$\sum_{k=1}^{2x}(2k-a-1)\cdots(2k-b+1)\geqslant\frac{v_{2x}^{a,b}-v_0^{a,b}}{2(b-a)}$$

avec une erreur par défaut

$$\frac{b-a-1}{2}\sum_{k=1}^{2x}(2k-a-2)\cdots(2k-b+1)\leqslant\frac{v_{2x}^{a,b-1}-v_0^{a,b-1}}{4}$$

et une erreur (par excès) sur l'erreur égale à

$$\frac{(b-a-1)(b-a-2)}{4}\sum_{k=1}^{2x}(2k-a-2)\cdots(2k-b+2)\leqslant\frac{b-a-1}{8}\Big(v_{2x}^{a,b-2}-v_0^{a,b-2}\Big),$$

autrement dit, il existe $\theta\in[0,1]$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2x}&(2k-a-1)\cdots(2k-b+1)\\ &=\frac{1}{2(b-a)}\Big(v_{2x}^{a,b}-v_0^{a,b}\Big)+\frac14\Big(v_{2x}^{a,b-1}-v_0^{a,b-1}\Big)-\theta\,\frac{b-a-1}{8}\Big(v_{2x}^{a,b-2}-v_0^{a,b-2}\Big),\\ &=\frac{1}{2(b-a)}\,v_{2x}^{a,b}+\frac14\,v_{2x}^{a,b-1}-\theta\,\frac{b-a-1}{8}\,v_{2x}^{a,b-2}+C_3^{a,b},\end{aligned}\tag{$40_3^{a,b}$}$$

avec

$$|C_3^{a,b}|\leqslant\frac{1}{2(b-a)}|v_0^{a,b}|+\frac14|v_0^{a,b-1}|+\frac{b-a-1}{8}|v_0^{a,b-2}|,\tag{$41_3^{a,b}$}$$

et en particulier $C_3^{a,b}=0$ si $a=0$. La version à l'ordre 2 avec erreur initiale par excès donne plus simplement

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2x}(2k-a-2)\cdots(2k-b)&=\frac{1}{2(b-a)}\Big(v_{2x}^{a,b}-v_0^{a,b}\Big)-\theta\,\frac14\Big(v_{2x}^{a,b-1}-v_0^{a,b-1}\Big)\\ &=\frac{1}{2(b-a)}\,(4x-a)\cdots(4x-b+1)-\theta\,\frac14\,(4x-a)\cdots(4x-b+2)+C_2^{a,b}.\end{aligned}\tag{$40_2^{a,b}$}$$

Pour le développement à l'ordre 3, il sera commode d'utiliser une transformation supplémentaire

$$v_k^{a,b}-v_k^{a+1,b+1}=(2k-a-1)\cdots(2k-b+1)\Big((2k-a)-(2k-b)\Big)=(b-a)v_k^{a+1,b},$$

et en appliquant ceci pour (a,b), $(a,b-1)$ et $k=2x$ on voit que le développement ($40_3^{a,b}$) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2x}&(2k-a-1)\cdots(2k-b+1)-C_3^{a,b}\\ &=\frac{1}{2(b-a)}v_{2x}^{a+1,b+1}+\frac34 v_{2x}^{a+1,b}+\frac{b-a-1}{8}\Big(2\,v_{2x}^{a+1,b-1}-\theta\,v_{2x}^{a,b-2}\Big),\\ &=\frac{1}{2(b-a)}\,(4x-a-1)\cdots(4x-b)+\frac34\,(4x-a-1)\cdots(4x-b+1)\\ &\quad+\frac{b-a-1}{8}\Big(2(4x-a-1)\cdots(4x-b+2)-\theta\,(4x-a)\cdots(4x-b+3)\Big)\end{aligned}\tag{$\widetilde{40}_3^{a,b}$}$$

D'après (34), ($38_3^{0,\ell}$), ($\widetilde{40}_3^{0,\ell}$), nous obtenons

$$T(x)=T'(x)-T''(x)+R_5(x)\tag{42}$$

avec

$$T'(x) = \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{2\ell}\left(\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} - \frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell)}{(4x)^\ell}\right), \tag{43}$$

$$T''(x) = \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{4}\,\frac{(4x)^\ell}{4x(4x+1)\cdots(4x+\ell)} + \frac{3}{4}\,\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)}{(4x)^\ell}, \tag{43'}$$

$$|R_5(x)| \leqslant \frac{1}{8}\sum_{\ell=1}^{2x-1}\left(\frac{(\ell+1)\,(4x)^\ell}{(4x-1)4x\cdots(4x+\ell)} + \frac{2(\ell-1)\,(4x-1)\cdots(4x-\ell+2)}{(4x)^\ell}\right). \tag{43''}$$

Le dernier terme de la dernière ligne provient de $(\widetilde{40}_3^{0,\ell})$ si on observe que l'inégalité $4x \leqslant 2(4x-\ell+2)$ pour $\ell \leqslant 2x-1$ entraîne

$$4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+3) \leqslant 2(4x-1)\cdots(4x-\ell+2).$$

De manière analogue, grâce à (35), $(38_2^{-1,\ell})$ et $(40_2^{0,\ell-1})$ on obtient une décomposition

$$U(x) = U'(x) - U''(x) + R_6(x) \tag{44}$$

avec

$$U'(x) = \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{(4x)^\ell}{4x\cdots(4x+\ell)} - \sum_{\ell=2}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell-1)}\,\frac{4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+2)}{(4x)^\ell}, \tag{45}$$

$$U''(x) = \frac{1}{4x}\sum_{k=1}^{2x}\frac{1}{2k-1} \qquad \text{(terme négatif } \ell=1 \text{ issu de } U(x)), \tag{45'}$$

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{(4x)^\ell}{(4x-1)\cdots(4x+\ell)} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{2x-1}\frac{4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+3)}{(4x)^\ell}. \tag{45''}$$

Les restes $R_2(x)$ [resp. $R_4(x)$] se majorent de même à l'aide de $(38_2^{0,\ell})$ et $(40_2^{-1,\ell-1})$ [resp. $(38_2^{-1,\ell})$ et $(40_2^{0,\ell-2})$] et (8), (30), (36) entraînent ainsi

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left(\sum_{\ell=2x}^{+\infty}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{(4x)^\ell}{(2k)\cdots(2k+\ell)} + \sum_{\ell=2x}^{+\infty}\sum_{k=1}^{2x}\frac{(2k-1)\cdots(2k-\ell+1)}{(4x)^\ell}\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=2x}^{+\infty}\frac{1}{2\ell}\left(\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} + \frac{(4x+1)\cdots(4x-\ell+2)}{(4x)^\ell}\right), \tag{46}$$

$$|R_4(x)| \leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=2x+1}^{+\infty}\frac{(4x)^{\ell-1}}{(2k-1)\cdots(2k+\ell)} + \sum_{\ell=1}^{2x-1}\sum_{k=1}^{2x}\frac{(2k-2)\cdots(2k-\ell+2)}{(4x)^\ell}$$

$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{(4x)^{\ell-1}}{4x\cdots(4x+\ell)} + \sum_{\ell=3}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell-2)}\,\frac{4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+3)}{(4x)^\ell} \tag{46'}$$

$$+\sum_{k=1}^{2x}\frac{1}{2k(2k-1)}\,\frac{1}{4x} + \sum_{k=1}^{2x}\frac{1}{(2k-1)}\,\frac{1}{(4x)^2} \quad \text{[termes } \ell=1,2 \text{ de la somme].} \tag{46''}$$

En conclusion, d'après (28), (31′), (33) et (42), (44) nous obtenons la décomposition

$$\Delta(x) = \frac{e^{-4x}}{4\pi x}\Bigg(2\,T'(x) - 2\,T''(x) - U'(x) + U''(x) - \frac{\log x}{8x}$$

$$+\,\pi\Big(R_1(x) + R_2(x) - R_3(x)\Big) - \frac{5}{4}R_4(x) + 2\,R_5(x) - R_6(x)\Bigg). \tag{47}$$

Lemme 3. *On a les inégalités*

$$\log 2 - \frac{1}{8x} < \sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{2k(2k-1)} < \log 2 - \frac{1}{2(4x+1)}, \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{2k-1} < \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\Big(\log x + \gamma\Big) + \frac{1}{24x^2}, \tag{48′}$$

$$U''(x) = \frac{\log x}{8x} + R_7(x), \qquad 0 < R_7(x) < \frac{1.37}{x}. \tag{48″}$$

Preuve. Pour (48), la somme de la série vaut $\log 2$ et on observe que le reste admet l'encadrement

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(4x+1)} &= \sum_{k=2x+1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1/2} - \frac{1}{k+1/2}\right)\\ &< \sum_{k=2x+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} < \sum_{k=2x+1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{8x}.\end{aligned}$$

D'après l'estimation d'Euler-Maclaurin (32), on en déduit d'une part

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{2k-1} &= \sum_{\ell=1}^{4x} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{2x} \frac{1}{2\ell} = \sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{2k(2k-1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{k}\\ &< \log 2 - \frac{1}{2(4x+1)} + \frac{1}{2}\left(\log(2x) + \gamma + \frac{1}{4x} + \frac{1}{12(2x)^2}\right)\\ &= \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\Big(\log x + \gamma\Big) + \frac{1}{8x(4x+1)} + \frac{1}{96x^2},\end{aligned}$$

ce qui donne (48′), et d'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2x} \frac{1}{2k-1} &> \log 2 + \frac{1}{2}\left(\log(2x) + \gamma + \frac{1}{12(2x)^2} - \frac{1}{120(2x)^4}\right)\\ &> \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\Big(\log x + \gamma\Big) + \frac{1}{96x^2} - \frac{1}{1920x^4}.\end{aligned}$$

Une estimation numérique élémentaire $\frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{24} < 1.37$ fournit alors (48″). $\square$

On va maintenant vérifier que tous les restes $R_i(x)$ sont d'ordre inférieur à celui des termes principaux et plus précisément $O(1/x)$. Le plus facile à estimer est $R_6(x)$. On peut en effet utiliser la majoration brutale

$$(49)\quad |R_6(x)| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{4x(4x-1)} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{2x-1}\frac{1}{(4x)^2} \leqslant \frac{1}{4}\,\frac{2x-1}{4x(4x-1)} + \frac{1}{4}\,\frac{2x-2}{(4x)^2} < \frac{1}{16x}.$$

Passons maintenant à $R_4(x)$, et utilisons le lemme 3 pour majorer les deux sommations de $(46'')$: on obtient

$$[[(46'')]] \leqslant \frac{\log 2 - \frac{1}{2(4x+1)}}{4x} + \frac{\frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}(\log x + \gamma) + \frac{1}{24x^2}}{(4x)^2} < \frac{0.234}{x}$$

à l'aide d'une étude numérique pour les valeurs $x = 1, 2 \ldots$. Par des majorations plus brutales, on a par ailleurs

$$\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{(4x)^{\ell-1}}{4x\cdots(4x+\ell)} \leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{1}{(4x)^2} \leqslant \frac{\log 2x+\gamma+\frac{1}{4x}+\frac{1}{12(2x)^2}-1}{32x^2} < \frac{0.025}{x},$$

$$\sum_{\ell=3}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell-2)}\,\frac{4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)}{(4x)^{\ell+2}} \leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-3}\frac{1}{\ell}\,\frac{1}{32x^2} \leqslant \frac{\log 2x+\gamma}{32x^2} < \frac{0.040}{x},$$

ce qui donne au total

$$(50)\qquad |R_4(x)| \leqslant \frac{0.299}{x}.$$

Pour borner optimalement les autres termes, il nous faut estimer plus précisément les produits partiels $\prod(4x \pm j)$ qui apparaissent, et pour cela on utilise des encadrements des logarithmes. Pour $t > 0$, on a $t - \frac{1}{2}t^2 < \log(1+t) < t$. Pour $t = \frac{j}{4x}$, ceci donne

$$-\frac{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant \ell} j}{4x} < \log\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} = \sum_{1\leqslant j\leqslant \ell}\log\frac{1}{1+\frac{j}{4x}} < -\frac{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant \ell} j}{4x} + \frac{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant \ell} j^2}{2(4x)^2}$$

où $\sum_{1\leqslant j\leqslant \ell}\, j = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ et $\sum_{1\leqslant j\leqslant \ell}\, j^2 = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}$, donc

$$-\frac{\ell(\ell+1)}{8x} < \log\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} < -\frac{\ell(\ell+1)}{8x} + \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{12\,(4x)^2},$$

soit encore

$$(51)\quad \exp\left(\frac{1}{32x} - \frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\right) < \frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} < \exp\left(\frac{1}{32x} - \frac{(\ell+1/2)^2}{8x} + \frac{(\ell+1/2)^3}{96x^2}\right).$$

Pour $\ell \leqslant 2x-1$, nous avons

$$\frac{(\ell+1/2)^2}{8x} - \frac{(\ell+1/2)^3}{96x^2} = \frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\left(1 - \frac{(\ell+1/2)}{12x}\right) \geqslant \frac{5}{6}\,\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}$$

de sorte que (à l'aide d'un nouveau calcul numérique)

$$\begin{aligned}(51') \quad &\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} < \exp\left(\frac{1}{32x} - \frac{5}{6}\,\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\right) && \text{pour } \ell \leqslant 2x-1,\\ &\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} < \exp\left(\frac{1}{32x} - \frac{5}{6}\,\frac{(2x-1/2)^2}{12x}\right) < \frac{1.52}{x} && \text{pour } \ell \geqslant 2x-1.\end{aligned}$$

Pour $\ell \geqslant 2x$, chaque nouveau facteur $\frac{4x}{4x+\ell}$ est inférieur où égal à $\frac{2}{3}$, donc

$$(51'') \qquad \sum_{\ell=2x}^{+\infty} \frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} < \frac{1.52}{x}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^p < \frac{3.04}{x}.$$

D'autre part, l'inégalité analogue $-t - 16\,t^2/26 < \log(1-t) < -t$ pour $t = \frac{j}{4x} \leqslant 1/4$ implique

$$(52) \qquad -\frac{\ell(\ell+1)}{8x} - \frac{16\,\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6\cdot 26\,(4x)^2} < \log\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell)}{(4x)^\ell} < -\frac{\ell(\ell+1)}{8x}.$$

Comme $\exp(1/4x) > 1 + 1/4x$, on en tire

$$(52') \quad \frac{(4x+1)\cdots(4x-\ell+2)}{(4x)^\ell} \leqslant \left(1+\frac{1}{4x}\right)\exp\left(-\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{8x}\right) < \exp\left(-\frac{\ell(\ell-3)}{8x}\right)$$

avec un rapport entre deux majorants consécutifs d'indices ℓ, $\ell+1$ inférieur à $\exp(-(2\ell-2)/8x) \leqslant e^{-1/4}$ si $\ell = 2x$ et $\leqslant e^{-1/2}$ si $\ell \geqslant 2x+1$, donc

$$\sum_{\ell=2x}^{+\infty}\frac{(4x+1)\cdots(4x-\ell+2)}{(4x)^\ell} \leqslant \exp\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(1 + e^{-1/4}\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p/2}\right) < \frac{4.65}{x},$$

Comme $2\ell \geqslant 4x$, on en déduit d'après (46)

$$(53) \qquad |R_2(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4x}\,\frac{7.69}{x} < \frac{1.224}{x^2}$$

(la décroissance de $R_2(x)$ étant même exponentielle en fait). Les inégalités (43″), (51′) et (52′) donnent aussi, au moyen d'une comparaison série-intégrale

$$\begin{aligned}|R_5(x)| &\leqslant \frac{1}{8}\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{\ell+1}{4x(4x-1)}\exp\left(\frac{1}{32x}-\frac{5}{6}\,\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\right) + 2\,\frac{\ell-1}{(4x)^2}\exp\left(\frac{3\ell}{8x}-\frac{\ell^2}{8x}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{8(4x)(3x)}\left(e^{\frac{1}{32}}\int_0^{+\infty}\left(t+\frac{3}{2}\right)\exp\left(-\frac{5}{6}\,\frac{t^2}{8x}\right)dt + \frac{3\,e^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{+\infty} t\,\exp\left(-\frac{t^2}{8x}\right)dt\right)\\ (54) \qquad &= \frac{1}{96x^2}\left(e^{\frac{1}{32}}\left(\frac{24}{5}x + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{48x}{5}}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}\right) + 6\,e^{\frac{3}{4}}\,x\right) < \frac{0.229}{x} \qquad \text{pour } x \geqslant 1.\end{aligned}$$

Il vient ensuite d'après (43) et (51)

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{2\ell}\Big(\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)} - \frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell)}{(4x)^\ell}\Big)\\
&= \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{2\ell}\,\frac{(4x)^\ell}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)}\left(1-\prod_{j=1}^{\ell}\Big(1-\frac{j}{4x}\Big)\Big(1+\frac{j}{4x}\Big)\right)\\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1} \exp\left(\frac{1}{32x} - \frac{(\ell+1/2)^2}{8x} + \frac{(\ell+1/2)^3}{96\,x^2}\right)\frac{(\ell+1)^2}{96x^2}
\end{aligned}$$

grâce aux inégalités $1-\prod(1-a_j)\leqslant \sum a_j$ avec $a_j=\frac{j^2}{(4x)^2}<1$, et $\sum_{j\leqslant \ell} j^2 = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}$. Dans l'autre sens, on a $\prod(1-a_j)^{-1}-1\geqslant \sum a_j$, donc d'après (52)

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{2\ell}\,\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell)}{(4x)^\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell}\Big(1-\Big(\frac{j}{4x}\Big)^2\Big)^{-1}-1\right)\\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1} \exp\left(-\frac{\ell(\ell+1)}{8x} - \frac{(\ell+1/2)^3}{78\,x^2}\right)\frac{(\ell+1)(2\ell+1)}{12\,(4x)^2}\\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1} \exp\left(-\frac{(\ell+1/2)^2}{8x} - \frac{(\ell+1/2)^3}{78\,x^2}\right)\frac{(\ell+1)(\ell+1/2)}{96x^2}\\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1} \exp\left(-\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\right)\left(1-\frac{(\ell+1/2)^3}{78\,x^2}\right)\frac{(\ell+1)(\ell+1/2)}{96x^2}.
\end{aligned}$$

Nous évaluons maintenant ces sommes en les remplaçant par des intégrales. Il vient

$$T'(x)\leqslant e^{\frac{1}{32x}}\int_0^{2x}\exp\left(-\frac{t^2}{8x}+\frac{t^3}{96x^2}\right)\frac{(t+3/2)^2}{96x^2}\,dt$$

en majorant le terme d'indice ℓ par l'intégrale sur $[\ell-1/2,\ell+1/2]$. Le changement de variable

$$u=\frac{t^2}{8x}-\frac{t^3}{96x^2}=\frac{t^2}{8x}\Big(1-\frac{t}{12x}\Big),\qquad du=\frac{t}{4x}\Big(1-\frac{t}{8x}\Big)dt$$

implique $u\geqslant \frac{5}{48x}\,t^2$, donc $t\leqslant \sqrt{\frac{48x}{5}}\,\sqrt{u}$. De plus, on a par convexité $(1-\frac{v}{p})^{-1}\leqslant 1+\frac{1}{p-1}v$ si $v\leqslant 1$; on prend ici $v=\frac{t}{2x}$ et $p=6$, resp. $p=3$) pour voir que

$$\begin{aligned}
t&=\sqrt{8xu}\Big(1-\frac{t}{12x}\Big)^{-1/2}\leqslant \sqrt{8xu}\Big(1+\frac{t}{20x}\Big)\leqslant \sqrt{8xu}\Big(1+\sqrt{\frac{3}{125x}}\,\sqrt{u}\Big),\\
dt&=\frac{4x}{t}\Big(1-\frac{t}{8x}\Big)^{-1}du\leqslant \frac{4x}{t}\Big(1+\frac{t}{6x}\Big)du\leqslant \frac{4x}{\sqrt{8xu}}\Big(1+\frac{2}{\sqrt{15x}}\,\sqrt{u}\Big)du,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$T'(x)\leqslant \frac{e^{\frac{1}{32x}}}{96x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{8xu}\Big(1+\sqrt{\frac{3}{125x}}\sqrt{u}\Big)\right)^2\Big(1+\frac{2}{\sqrt{15x}}\,\sqrt{u}\Big)\frac{\sqrt{2x}\,du}{\sqrt{u}}.$$

Cette intégrale s'évalue explicitement, avec un terme dominant qui est

$$\frac{e^{\frac{1}{32x}}}{96x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u}(\sqrt{8xu})^2\frac{\sqrt{2x}\,du}{\sqrt{u}} \sim \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\sqrt{u}\,du = \frac{\sqrt{2\pi}}{24\,x^{1/2}}.$$

Le facteur $e^{\frac{1}{32x}}$ est majoré par $1+\frac{1}{31.5\,x}$, ce qui amène une erreur

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{24\,x^{1/2}}\cdot\frac{1}{31.5\,x} < \frac{0.004}{x}.$$

Tous les autres termes intervenant dans l'intégrale mettent en jeu des termes $O(\frac{1}{x})$, avec des coefficients qui sont des produits de facteurs $\Gamma(a)$, $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$, par des coefficients dont la somme est majorée par

$$\frac{e^{\frac{1}{32}}}{96}\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{8}\Big(1+\sqrt{\frac{3}{125}}\Big)\right)^2\Big(1+\frac{2}{\sqrt{15}}\Big)\sqrt{2}-8\sqrt{2}\right] < 0.4021.$$

Comme $\Gamma(a)\leqslant\sqrt{\pi}$, on obtient

$$T'(x) < \frac{\sqrt{2\pi}}{24\,x^{1/2}} + \frac{0.717}{x}.$$

De même, la minoration de $T'(x)$ donne

$$\begin{aligned}
T'(x) &\geqslant \sum_{\ell=1}^{2x-1}\exp\Big(-\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\Big)\Big(1-\frac{(\ell+1/2)^3}{78\,x^2}\Big)\frac{(\ell+1)(\ell+1/2)}{96x^2}\\
&\geqslant \int_{3/2}^{2x+1/2}\exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)\Big(1-\frac{t^3}{78\,x^2}\Big)\frac{(t-1)(t-1/2)}{96x^2}\,dt\\
&\geqslant \int_{2}^{2x}\exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)\Big(1-\frac{t^3}{78\,x^2}\Big)\frac{t^2-3t/2}{96x^2}\,dt\\
&= \int_{1/2x}^{x/2} e^{-u}\Big(1-\frac{8\sqrt{8}\,u^{3/2}}{78\,x^{1/2}}\Big)\frac{8xu-3\sqrt{8}\,x^{1/2}u^{1/2}/2}{96x^2}\,\frac{\sqrt{8}\,x^{1/2}\,du}{2\,u^{1/2}}\\
&\geqslant \int_{1/2x}^{x/2} e^{-u}\Big(1-\frac{8\sqrt{8}\,u^{3/2}}{78\,x^{1/2}}\Big)\frac{\sqrt{8}\,u-3\,x^{-1/2}u^{1/2}/2}{24\,x^{1/2}}\,\frac{du}{u^{1/2}}\\
&\geqslant \int_{1/2x}^{x/2} e^{-u}\Big(\frac{\sqrt{2}\,u^{1/2}}{12\,x^{1/2}}-\frac{8\,u^2}{3\cdot 78\,x}-\frac{1}{16x}\Big)\,du\\
&\geqslant \int_{0}^{+\infty} e^{-u}\Big(\frac{\sqrt{2}\,u^{1/2}}{12\,x^{1/2}}-\frac{4\,u^2}{117\,x}-\frac{1}{16x}\Big)\,du-\int_{\complement} e^{-u}\frac{\sqrt{2}\,u^{1/2}}{12\,x^{1/2}}\,du.
\end{aligned}$$

L'intégrale complémentaire $\int_{\complement}\ldots$ est majorée sur $[0,1/2x]$ par

$$\int_0^{1/2x}\frac{\sqrt{2}\,u^{1/2}}{12\,x^{1/2}}\,du = \frac{1}{36\,x^2},$$

tandis que sur $[A, +\infty[= [x/2, +\infty[$ on a l'inégalité

$$\int_A^{+\infty} u^\alpha\, e^{-u}\, du = A^\alpha\, e^{-A} + \int_A^{+\infty} \alpha\, u^{\alpha-1}\, e^{-u}\, du \leqslant e^{-A}(A^\alpha + \alpha A^{\alpha-1}), \quad \alpha \in\,]0,1],$$

ce qui fournit la majoration

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-u} \frac{\sqrt{2}\, u^{1/2}}{12\, x^{1/2}}\, du \leqslant \exp\Big(-\frac{x}{2}\Big)\Big(\frac{1}{12} + \frac{1}{12x}\Big) \leqslant \frac{\frac{1}{6}\, e^{-1/2}}{x}.$$

On obtient ainsi la borne inférieure explicite

$$T'(x) > \frac{\sqrt{2\pi}}{24\, x^{1/2}} - \Big(\frac{8}{117} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} e^{-1/2}\Big)\frac{1}{x} > \frac{\sqrt{2\pi}}{24\, x^{1/2}} - \frac{0.260}{x}.$$

De la même manière, mais cette fois, sans compensation de termes, avec des calculs beaucoup plus simples, et grâce à (43″), (51), (52), on trouve une majoration

$$T''(x) \leqslant \frac{1}{4x} \sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{4} \exp\Big(\frac{32}{x} - \frac{(\ell+1/2)^2}{8x} + \frac{(\ell+1/2)^3}{96x^2}\Big) + \frac{3}{4} \exp\Big(\frac{32}{x} - \frac{(\ell-1/2)^2}{8x}\Big).$$

Par des majorations intégrales analogues à celles déjà utilisées, ceci donne

$$\begin{aligned}
T''(x) &\leqslant \frac{e^{\frac{32}{x}}}{4x}\Big(\frac{1}{4}\int_0^{2x} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x} + \frac{t^3}{96x^2}\Big)dt + \frac{3}{4}\int_0^{2x} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)dt\Big) + \frac{3}{16x} \\
&\leqslant \frac{e^{\frac{32}{x}}}{4x}\Big(\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-u}\Big(1 + \frac{2}{\sqrt{15x}}\sqrt{u}\Big)\frac{\sqrt{2x}\, du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} e^{-u}\, \frac{\sqrt{2x}\, du}{\sqrt{u}}\Big) + \frac{3}{16x} \\
&\leqslant \frac{e^{\frac{32}{x}}}{4x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\, \frac{\sqrt{2x}\, du}{\sqrt{u}} + \frac{e^{\frac{32}{x}}}{4x}\, \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{3}{16x} < \frac{\sqrt{2\pi}}{4x^{1/2}} + \frac{0.255}{x},
\end{aligned}$$

et une minoration

$$\begin{aligned}
T''(x) &\geqslant \frac{1}{4x}\sum_{\ell=1}^{2x-1} \frac{1}{4}\exp\Big(-\frac{(\ell+1/2)^2}{8x}\Big) + \frac{3}{4}\exp\Big(-\frac{(\ell-1/2)^2}{8x} - \frac{(\ell-1/2)^3}{78x^2}\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{4x}\Big(\frac{1}{4}\int_{3/2}^{2x+1/2} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)dt + \frac{3}{4}\int_{1/2}^{2x-1/2} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)\Big(1 - \frac{t^3}{78x^2}\Big)dt\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{4x}\Big(\frac{1}{4}\int_0^{2x} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)dt + \frac{3}{4}\int_0^{2x} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)\Big(1 - \frac{t^3}{78x^2}\Big)dt - \frac{9}{8}\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{4x}\Big(\int_0^{2x} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)dt - \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \exp\Big(-\frac{t^2}{8x}\Big)\frac{t^3}{78x^2}\, dt - \frac{9}{8}\Big) \\
&= \frac{1}{4x}\Big(\int_0^{x/2} e^{-u}\, \frac{\sqrt{2x}\, du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{104}\int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u\, du}{2} - \frac{9}{8}\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{4x}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-u}\, \frac{\sqrt{2x}\, du}{\sqrt{u}} - \frac{235}{208} - 2\, e^{-x/2}\Big) > \frac{\sqrt{2\pi}}{4x^{1/2}} - \frac{0.586}{x}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'estimation

$$(55)\qquad T'(x)-T''(x)=-\frac{5}{24}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{x^{1/2}}+R_8(x),\qquad -\frac{0.515}{x}<R_8(x)<\frac{1.303}{x}.$$

Il reste seulement $U'(x)$ à évaluer. Or, d'après (45), un changement de variable $\ell=\ell'+1$ suivi d'une décomposition $4x=(4x-\ell)+\ell$ permet de transformer la deuxième sommation figurant dans $U'(x)$:

$$\begin{aligned}
U'(x)&=\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{(4x)^\ell}{4x\cdots(4x+\ell)}-\sum_{\ell=1}^{2x-2}\frac{1}{2\ell}\,\frac{4x(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)}{(4x)^{\ell+1}}\\
&=\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2(\ell+1)}\,\frac{(4x)^{\ell-1}}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)}-\sum_{\ell=1}^{2x-2}\frac{1}{2\ell}\,\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)(4x-\ell)}{(4x)^{\ell+1}}\\
&\qquad-\sum_{\ell=1}^{2x-2}\frac{1}{2}\,\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)}{(4x)^{\ell+1}}.
\end{aligned}$$

En écrivant maintenant $\frac{1}{\ell+1}=\frac{1}{\ell}-\frac{1}{\ell(\ell+1)}$, il vient

$$U'(x)=\frac{1}{4x}\,T'(x)-R_9(x)$$

avec

$$\begin{aligned}
R_9(x)=\sum_{\ell=1}^{2x-1}\frac{1}{2\ell(\ell+1)}\,\frac{(4x)^{\ell-1}}{(4x+1)\cdots(4x+\ell)}&+\sum_{\ell=1}^{2x-2}\frac{1}{2}\,\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell+1)}{(4x)^{\ell+1}}\\
&-\left(\frac{1}{2\ell}\frac{(4x-1)\cdots(4x-\ell)}{(4x)^{\ell+1}}\right)_{\ell=2x-1}
\end{aligned}$$

et, pour $x\geqslant 2$, une majoration

$$0<R_9(x)<\frac{1}{4x}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{2\ell(\ell+1)}+\frac{1}{2}(2x-2)\frac{1}{(4x)^2}<\frac{3}{16x}.$$

Il résulte alors de l'encadrement de $T'(x)$ (et d'un calcul explicite de $U'(x)$ pour $x=1{,}2{,}3$) que

$$(56)\qquad |U'(x)|<\frac{0.206}{x}.$$

En combinant (25), (31′), (47), (48″), (49), (50) et (53 – 56), on obtient

$$(57)\qquad \Delta(x)=\frac{e^{-4x}}{4\pi x}\left(-\frac{5\sqrt{2\pi}}{12\,x^{1/2}}+R(x)\right)$$

avec

$$R(x)=-U'(x)+\pi\Big(R_1(x)+R_2(x)-R_3(x)\Big)-\frac{5}{4}R_4(x)+2\,R_5(x)-R_6(x)+R_7(x)+2\,R_8(x),$$

d'où

$$|R(x)| < \frac{10.835}{x}. \tag{58}$$

Ces estimées impliquent (12), (13). La preuve du théorème est achevée. □

Complexité numérique de la méthode de Brent-McMillan pour le calcul de la constante d'Euler. La version raffinée permet d'atteindre une précision finale meilleure que e^{-8x}. Ceci amène à choisir $x = \frac{1}{8}\, d \log 10$ et conduit ainsi au temps de calcul

$$B'(d) = \left(\frac{3}{4}a_3 + \frac{1}{2}\right) \log 10\; d^2 \simeq 9.7\, d^2,$$

optimal parmi tous les algorithmes présentés ici.

Nous terminons en donnant le « hit-parade » de ces algorithmes, rangés par ordre d'efficacité croissante.

Algorithmes	Euler		Sweeney						Brent-McM.	
	E_1	E_2	S_1	S_2	S'_1	S'_2	S_3	S'_3	B	B'
Temps de calcul / d^2	$\dfrac{Cd}{(\log d)^2}$	$C \log d$	49.6	37.6	26.7	26.0	22.7	16.9	12.4	9.7

Signalons qu'il existe des algorithmes théoriquement encore plus rapides, permettant d'évaluer γ à 10^{-d} près en $O(d(\log d)^3 \log\log d)$ unités de temps . Ces derniers reposent sur l'utilisation de l'algorithme de multiplication rapide de Schönhage-Strassen [20] et sur une factorisation par blocs de la série $F(x)$ (resp. e^x, $I_0(x)$, $S_0(x)$) ; voir Brent [6]. De tels algorithmes « rapides » sont toutefois difficiles à programmer et ne l'emportent sur les algorithmes « classiques » présentés ici que lorsque d est très grand.

4. Développement en fraction continue de γ

Les valeurs numériques de γ obtenues par les auteurs mentionnés ci-dessus ont été utilisées pour déterminer les développements en fraction continue de γ et e, qui sont connus maintenant jusqu'à l'ordre 29 000 (Brent - Mac Millan [11]). La distribution statistique des réduites successives ne fait apparaître aucune différence significative au niveau de 5% par rapport à la loi de Gauss-Kusmin (cf. Khintchine [16]) :

$$f_n = \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log_2\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

donnant la fréquence des réduites égales à n dans le développement de presque tout nombre réel. On obtient d'autre part le résultat suivant, qui rend extrêmement improbable la rationalité de γ ou e^γ :

Théorème. – *Si l'un des nombres γ ou e^γ est un rationnel p/q pour des entiers p, q positifs, alors $q > 10^{15\,000}$.*

Bibliographie

[1] J.C. Adams – *On the value of Euler's constant* ; Proc. Roy. Soc. London, **27** (1878) p. 88–94. Voir aussi vol. **42** (1887), p. 22–25.

[2] P. Appell – *Sur la nature arithmétique de la constante d'Euler* ; Comptes Rend. Ac. Sc. Paris, v. **182**, 12 avril 1926, p. 897–899 ; 19 avril 1926, p. 949.

[3] W.A. Beyer & M. S. Waterman – *Error analysis of a computation of Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **28** (1974) p. 599–604.

[4] W.A. Beyer & M.S. Waterman – *Decimals and partial quotients of Euler's constant and* $\ln 2$; UMT 19, Math, of Comp., v. **28**, 1974, p. 667. Errata : Math, of Comp., MTE 549, v. **32** (1978), p. 317–318.

[5] N. Bourbaki – *Fonctions d'une variable réelle* ; chap. VI, §1, n°**7**; Hermann, Paris, 1951.

[6] R.P. Brent – *The complexity of multiple-precision arithmetic* ; Complexity of Computational Problem Solving (R.S. Anderssen and R.P. Brent, Editors), Univ. of Queensland Press, Brisbane, 1976, p. 126–165.

[7] R.P. Brent – *Computation of the regular continued fraction for Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **31**, July 1977, p. 771–777.

[8] R.P. Brent – γ *and* $\exp(\gamma)$ *to 20,700 D and their regular continued fractions to 20,000 partial quotients* ; UMT 1, Math. of Comp., v. **32**, 1978, p. 311.

[9] R.P. Brent – *Euler's constant and its exponential to 30,100 decimals* ; Math. of Comp., UMT File.

[10] R.P. Brent & E.M. McMillan – *Some new algorithms for high-precision computation of Euler's constant* ; Math. of Comp., v. **34**, January 1980, p. 305–312.

[10′] R.P. Brent & F. Johansson – *A bound for the error term in the Brent-McMillan algorithm* ; Math. of Comp., v. **84**, 2015, p. 2351–2359.

[11] R.P. Brent & E.M. McMillan – *The first 29,000 partial quotients in the regular continued fraction for Euler's constant and its exponential* ; Math, of Comp., UMT File.

[12] L. Euler – *De progressionibus harmonicis observationes* ; Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v. **14**, Teubner, Leipzig and Berlin, 1925, p. 93–100.

[13] L. Euler – *De summis serierum numeros Bernoullianos involventium* ; Euleri Opera Omnia, Ser. 1, v.15, Teubner, Leipzig and Berlin, 1927, p. 91–130. Voir en particulier p. 115. Le calcul est donné en détail p. 569–583.

[14] A. Froda – *La constante d'Euler est irrationnelle* ; Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **38** (1965), p. 338–344.

[15] J.W.L. Glaisher – *History of Euler's constant* ; Messenger of Math., v. **1** (1872), p. 25–30.

[16] A. Ya. Khintchine (A. Ja. Hinčin) – *Continued Fractions* ; 3e édition, traduction anglaise par P. Wynn, Noordhoff, Groningen, 1963.

[17] D.E. Knuth – *Euler's constant to 1271 places* ; Math, of Comp., v. **16** (1962), p. 275–281.

[18] K. Mahler – *Applications of a theorem by A.B. Shidlovskii* ; Proc. Roy. Soc. London, A **305** (1968), p. 149–173.

[19] W. Shanks – *On the numerical value of Euler's constant* ; Proc. Roy. Soc. London, v. **15** (1867), p. 429–432 ; v. **20** (1871), p. 29–34.

[20] A. Schönhage & V. Strassen – *Schnelle Multiplikation grosser Zahlen* ; Computing, v. **7** (1971), p. 281–292.

[21] D.W. Sweeney – *On the computation of Euler's constant* ; Math, of Comp., v. **17** (1963), p. 170–178.

[22] G.N. Watson – *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* ; 2nd edition, Cambridge Univ. Press, London, 1944.

[23] J.W. Wrench, Jr – *A new calculation of Euler's constant* ; Math. Tables & other Aids to Comp., v. **6** (1952), p. 255.

Ouvrages de référence sur la fonction Γ.

[24] E. Artin – *The Gamma Function* ; Holt, Rinehart and Winston, 1964, traduit de : *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, 1931.

[25] R. Campbell – *Les intégrales eulériennes et leurs applications* ; Dunod, Paris, 1966.

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I, Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS
B.P. 74 – Tél. (76) 51-46-00
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

(juin 1984 ; octobre 2016 : ajout des calculs non initialement publiés)