Équations différentielles dans les espaces de Banach

Une grande partie des résultats du chapitre V s'étend aux équations différentielles vectorielles à valeurs dans un espace de Banach de dimension éventuellement infinie. Soit $(H, \| \ \|)$ un tel espace, et U un ouvert de $\mathbb{R} \times H$. On considère une fonction continue $f : U \to H$. Une équation différentielle à valeurs dans H s'écrit formellement de la même manière que pour le cas particulier $H = \mathbb{R}^m$, on pose maintenant

$$\text{(E)} \qquad y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in H,$$

et, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on cherche une solution sous la forme d'une fonction dérivable $y : I \to H$ telle que

(i) $(\forall t \in I) \qquad (t, y(t)) \in U,$

(ii) $(\forall t \in I) \qquad y'(t) = f(t, y(t)).$

Comme f est supposée continue, elle est localement bornée, on en déduit l'existence locale de cylindres de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ comme en dimension finie. On peut mettre en œuvre des méthodes de calcul approché telles que la méthode d'Euler. Le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz est valable sans changement, car sa démonstration repose principalement sur la complétude de l'espace des fonctions continues

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$$

et le lemme de Gronwall s'applique encore. On peut aussi utiliser le théorème du point fixe, et on aboutit à l'énoncé suivant.

Théorème (Cauchy-Lipschitz). *Si $f : U \to H$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solutions ε_p-approchées avec ε_p tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

En revanche, si *on suppose seulement f continue, le théorème d'existence de Cauchy-Peano-Arzelà tombe en défaut en général*. Le but de ce qui suit est de présenter un contre-exemple simple, dû à Jean Dieudonné, et paru dans *Deux exemples singuliers d'équations différentielles*, Acta Sci. Math. (Szeged) **12B** (1950) 38–40.

On choisit ici $H = c_0(\mathbb{N}^*)$, à savoir l'espace des suites numériques réelles $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ qui convergent vers zéro, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |x_n|$. Il est bien connu qu'il s'agit d'un espace de Banach (si nécessaire, nous laissons la vérification au lecteur). Soit $f : H \to H$ l'application définie par

$$f(x) = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1},$$

pour tout $x \in H$. On considère pour des fonctions $y : I \to H$ l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = f(y).$$

Cette égalité se ramène à résoudre simultanément composante par composante les équations scalaires

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x' = f_n(x).$$

où $f_n(x) = \sqrt{|x|} + \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Il est facile de voir que $f : H \to H$ est bien continue. En effet, la suite définissant $f(x)$ tend bien vers zéro à l'infini, de sorte que $f(x) \in H$. Maintenant si $a \in H$, nous avons

$$|f_n(x) - f_n(a)| = \left|\sqrt{|x_n|} - \sqrt{|a_n|}\right| \leqslant \sqrt{|x_n - a_n|}$$

car pour tous réels u, v l'inégalité

$$\left(\sqrt{|u|} + \sqrt{|v-u|}\right)^2 \geqslant |u| + |v-u| \geqslant |v|$$

et l'inégalité analogue obtenue en échangeant u et v implique que l'on a toujours $|\sqrt{|v|} - \sqrt{|u|}\,| \leqslant \sqrt{|v-u|}$. En passant au sup sur l'entier n on en déduit

$$\|f(x) - f(a)\|_\infty \leqslant \sqrt{\|x-a\|_\infty}$$

et la continuité de f s'ensuit.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on vérifie maintenant que l'équation différentielle (dans $\mathbb{R}$)

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|} + \frac{1}{n}, \qquad x(0) = 0,$$

possède une solution maximale unique, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il s'agit en effet d'une équation à variables séparées qui peut se récrire

$$\frac{dx}{\sqrt{|x|} + \frac{1}{n}} = dt,$$

et le problème de Cauchy de donnée initiale $y(0) = 0$ se résout explicitement sous la forme $F_n(x) = t$, c'est-à-dire $x(t) = F_n^{-1}(t)$, où F_n est la primitive

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{|u|} + \frac{1}{n}}.$$

Comme l'intégrale diverge lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, on voit qu'il s'agit d'une fonction C^1 strictement croissante (à dérivée strictement positive), qui définit une bijection $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La fonction F_n se calcule d'ailleurs aisément en faisant le changement de variable $u = v^2$; si $\varepsilon = \pm 1$ est le signe de x on trouve

$$F_n(x) = \varepsilon \int_0^{\sqrt{|x|}} \frac{2v\,dv}{v + \frac{1}{n}} = \varepsilon \int_0^{\sqrt{|x|}} \left(2 - \frac{\frac{2}{n}}{v + \frac{1}{n}}\right) dv = \varepsilon \left(2\sqrt{|x|} - \frac{2}{n} \ln\left(1+n\sqrt{|x|}\,\right)\right).$$

(c) Par définition de F_n, nous avons

$$F_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{x} \quad \text{pour } x \geqslant 0.$$

Il en résulte aussitôt que pour tout $u \in \mathbb{R}$, le nombre $x = F_n^{-1}(u)$ vérifie en passant aux valeurs absolues $|u| = F_n(|x|) \leqslant 2\sqrt{|x|}$, donc $|x| = |F_n^{-1}(u)| \geqslant \frac{1}{4}u^2$. La solution $x(t) = F_n^{-1}(t)$ vérifie donc $|x(t)| \geqslant \frac{1}{4}t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(d) Obtention du contre-exemple : si le problème de Cauchy dans l'espace de Banach H

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(0) = \ 0\ ,$$

avait une solution $y :]-T, T[\to H$, pour un certain temps $T > 0$, il résulterait de ce qui précède que les composantes $y_n(t)$ de $y(t)$ vérifieraient $|y_n(t)| \geqslant \frac{1}{4}t^2$, mais cette inégalité est interdite pour $t \neq 0$ puisqu'on doit avoir $\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = 0$ pour tout élément $y(t) \in H = c_0(\mathbb{N}^*)$. On en déduit que le problème de Cauchy $y(0) = 0$ n'a aucune solution locale en 0 dans l'espace de Banach H.

L'argument qui fait défaut ici dans la preuve du théorème de Cauchy-Peano-Arzelà est l'impossibilité de faire converger les solutions approchées locales au moyen du théorème d'Ascoli. Ce dernier tombe lui-même en défaut du fait que les boules fermées de H ne sont pas compactes : par le théorème de Riesz, la boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte. En fait, on peut démontrer que dans tout espace de Banach séparable H de dimension infinie il existe une fonction continue $f : H \to H$ telle que l'équation $y' = f(y)$ n'ait aucune solution locale, voir par exemple l'article de Petr Hájek et Michal Johanis, *On Peano's theorem in Banach spaces*, J. Differential Equations **249** (2010) 3342–3351.