

## Solution des problèmes du chapitre 4

**5.3.** On se propose d'étudier le comportement des itérées d'une fonction au voisinage d'un point fixe, dans le cas critique où la dérivée vaut 1 en ce point.

Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 1$ , et que  $\varphi$  admet un développement limité

$$(*) \quad \varphi(x) = x - ax^k + x^k \varepsilon(x)$$

avec

$$(**) \quad a > 0, \quad k > 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon(x) = 0.$$

(a) Sous l'hypothèse (\*\*), il existe  $h > 0$  tel que pour tout  $x \in [0, h]$  on ait  $|\varepsilon(x)| \leq a/2$  et donc  $a - \varepsilon(x) > 0$ . Ceci entraîne d'après (\*) que  $\varphi(x) = x - x^k(a - \varepsilon(x))$  vérifie  $\varphi(x) < x$  pour tout  $x \in ]0, h]$ . Si on choisit en outre  $h$  assez petit pour que  $2ah^{k-1} < 1$ , il vient

$$\varphi(x) = x - x^k(a - \varepsilon(x)) > x - 2ax^k = x(1 - 2ax^{k-1}) > 0 \quad \text{pour } x \in ]0, h].$$

On voit alors que  $\varphi$  envoie  $]0, h]$  dans  $]0, h]$ . La suite itérée  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  est donc bien définie et à valeurs dans  $]0, h]$  pour tout  $x_0 \in ]0, h]$ . Comme  $x_{p+1} = \varphi(x_p) < x_p$ , la suite  $(x_p)$  est décroissante et minorée par 0. Le théorème des suites monotones montre qu'elle converge vers une limite  $\ell \in [0, h]$ . La continuité de  $\varphi$  implique que  $\varphi(\ell) = \ell$ , et il résulte du fait que  $\varphi(x) < x$  pour  $x \in ]0, h]$  que  $\ell = 0$ . Par conséquent  $(x_p)$  converge vers 0 pour toute valeur initiale  $x_0 \in ]0, x_0]$ .

(b) On pose  $u_p = x_p^m$  où  $m \in \mathbb{R}$  (on supposera ici  $m \neq 0$ ). Déterminons un équivalent de  $u_{p+1} - u_p$  en fonction de  $x_p$ . On a

$$u_{p+1} - u_p = x_{p+1}^m - x_p^m = x_p^m \left( (x_{p+1}/x_p)^m - 1 \right)$$

et il est clair que  $x_{p+1}/x_p = \varphi(x_p)/x_p = 1 - x_p^{k-1}(a - \varepsilon(x_p)) \rightarrow 1$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . Comme la dérivée en  $t = 1$  de  $t \mapsto t^m$  vaut  $m$ , il vient  $t^m - 1 \sim m(t - 1)$  en  $t = 1$ . Par conséquent

$$u_{p+1} - u_p \sim x_p^m \times m(x_{p+1}/x_p - 1) \sim mx_p^m \times (-ax_p^{k-1}) = -amx_p^{m+k-1}.$$

(c) Le choix  $m = 1 - k < 0$  donne  $m + k - 1 = 0$  et d'après (b) on en déduit que  $v_p = u_{p+1} - u_p$  possède une limite finie  $\lambda = -am = a(k - 1) > 0$ . On va voir que ceci

entraîne  $u_p \sim \lambda p$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda - \varepsilon \leq v_p \leq \lambda + \varepsilon$  pour  $p \geq p_0(\varepsilon)$ . On en déduit que  $u_p = u_{p_0} + \sum_{p_0 \leq q \leq p-1} v_q$  vérifie l'encadrement

$$u_{p_0} + (p - p_0)(\lambda - \varepsilon) \leq u_p \leq u_{p_0} + (p - p_0)(\lambda + \varepsilon) \quad \text{pour } p \geq p_0,$$

donc

$$\lambda - \varepsilon + \frac{u_{p_0} - p_0(\lambda - \varepsilon)}{p} \leq \frac{u_p}{p} \leq \lambda + \varepsilon + \frac{u_{p_0} - p_0(\lambda + \varepsilon)}{p}.$$

Si l'on choisit  $p_1$  tel que

$$\frac{|u_{p_0}| + p_0(|\lambda| + \varepsilon)}{p_1} \leq \varepsilon,$$

on trouve  $\lambda - 2\varepsilon \leq \frac{u_p}{p} \leq \lambda + 2\varepsilon$  pour  $p \geq \max(p_0, p_1)$ , ce qui entraîne bien que  $u_p \sim \lambda p$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . On obtient en définitive

$$x_p = u_p^{1/m} \sim (\lambda p)^{1/m} = (a(k-1)p)^{-1/(k-1)}$$

quand  $p \rightarrow +\infty$ .

**(d)** Pour  $\varphi(x) = \sin x$ , nous avons

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

et on peut appliquer ce qui précède avec  $a = \frac{1}{6}$  et  $k = 3$ . On trouve alors

$$x_p \sim (p/3)^{-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{p}} \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty,$$

pour toute valeur initiale  $x_0 > 0$ . Pour la valeur initiale  $x_0 = 1$  proche de l'équivalent trouvé lorsque  $p$  est petit (à savoir  $p = 3$ ), on voit que  $\sqrt{3}/\sqrt{p} < 10^{-5}$  pour  $p > 3 \cdot 10^{10}$ , donc il faudra plusieurs dizaines de milliards d'itérations pour atteindre  $x_p < 10^{-5}$ .