

Solution des problèmes du chapitre 3

6.11. On considère une méthode de quadrature élémentaire obtenue par interpolation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{l+2}([\alpha, \beta])$ en des points $\tau_j \in [\alpha, \beta]$, $0 \leq j \leq l$, et on utilise la méthode des différences divisées pour évaluer l'erreur d'interpolation $x \mapsto f(x) - p_l(x)$.

(a) Montrons par récurrence sur k la formule générale

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}.$$

La formule est vraie pour $k = 0$ (le produit est alors vide et vaut 1 par convention). Pour $k = 1$, on a bien aussi

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Supposons la formule vraie à l'ordre $k - 1$, $k \geq 1$. Alors par définition (voir II.1.3)

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ &= \frac{1}{x_k - x_0} \left(\sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i>0, i \neq j} (x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{i<k, i \neq j} (x_j - x_i)} \right) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{0 \leq i \leq k, i \neq j} (x_j - x_i)}, \end{aligned}$$

en effet les termes $j = 0$ et $j = k$ proviennent respectivement des termes correspondants de l'avant dernière ligne, tandis que le coefficient des termes $f(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$ est donné par l'expression

$$\frac{1}{x_k - x_0} \left(\frac{1}{\prod_{i>0, i \neq j} (x_j - x_i)} - \frac{1}{\prod_{i<k, i \neq j} (x_j - x_i)} \right) = \frac{1}{x_k - x_0} \frac{(x_j - x_0) - (x_j - x_k)}{\prod_{0 \leq i \leq k, i \neq j} (x_j - x_i)},$$

qui se simplifie comme indiqué. On voit alors que l'expression de $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ figurant dans le membre de droite de l'identité est invariante par permutation des points x_i , comme il résulte de la commutativité de l'addition et de la multiplication des réels.

(b) La fonction

$$x \mapsto f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 f'(x_0 + t(x - x_0)) dt$$

s'étend en une fonction de classe \mathcal{C}^{l+1} sur $[\alpha, \beta]$ si l'on pose $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$: cela résulte du théorème de dérivation sous le signe somme et du fait que f' est de classe \mathcal{C}^{l+1} . Par récurrence sur k , on voit que pour des points distincts $\tau_i \in [\alpha, \beta]$, la différence divisée $x \mapsto f[\tau_0, \dots, \tau_k, x]$ s'étend également en une fonction de classe \mathcal{C}^{l+1} sur $[\alpha, \beta]$. On a en effet

$$f[\tau_0, \dots, \tau_k, x] = \frac{f[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, x] - f[\tau_0, \tau_2, \dots, \tau_k, x]}{\tau_1 - \tau_0},$$

comme il résulte de l'invariance par permutation en écrivant $f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x] = f[\tau_0, \tau_2, \dots, \tau_k, x, \tau_1]$ et en appliquant la définition des différences divisées.

(c) Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et tout $k = 0, 1, \dots, l$, il existe $\xi_x \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$(*) \quad \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x] = \frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(\xi_x).$$

En effet, la remarque du II.1.3 permet de voir qu'on a en général une égalité $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$, $\xi \in]\min(x_i), \max(x_i)[$. On observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_0] &= \lim_{x_\nu \rightarrow x_0} \frac{f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_\nu] - f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_0]}{x_\nu - x_0} \\ &= \lim_{x_\nu \rightarrow x_0} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_0, x_\nu] \end{aligned}$$

pour toute suite $x_\nu \rightarrow x_0$, $x_\nu \neq x_0$. Or, en appliquant le résultat rappelé ci-dessus avec 2 points supplémentaires, on en conclut qu'il existe $\xi_\nu \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_0, x_\nu] = \frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(\xi_\nu)$$

pour tout ν . Par compacité de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on peut extraire une sous-suite convergente $\xi_\nu \rightarrow \xi_0 \in [\alpha, \beta]$ et à la limite, par continuité de $f^{(k+2)}$, on en déduit

$$\frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, x_0] = \frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(\xi_0),$$

ce qui démontre l'affirmation (*).

(d) Si p_{l+1} est le polynôme d'interpolation aux points $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, x$, nous obtenons

$$f(x) - p_l(x) = p_{l+1}(x) - p_l(x) = \prod_{j=0}^l (x - \tau_j) f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, x]$$

d'après les résultats du II.1.3. L'erreur due à la formule de quadrature élémentaire par interpolation en $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l$ est donc

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - p_l(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{j=0}^l (x - \tau_j) f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, x] dx.$$

(e) On suppose désormais $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$, on considère les points équidistants $\tau_j = -1 + jh$ $h = 2/l$, $0 \leq j \leq l$, et on pose

$$w(x) = \int_{-1}^x \prod_{j=0}^l (t - \tau_j) dt \quad \text{et} \quad I_k = w(\tau_{k+1}) - w(\tau_k), \quad k = 0, 1, \dots, l-1.$$

Supposons d'abord $l = 2n$ pair. Nous avons

$$I_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \prod_{j=0}^l (t - \tau_j) dt$$

et le signe du produit change en chaque racine τ_j . Le signe de I_k est donc alterné avec k (négatif pour $k = l-1$, puisque seul le dernier terme $t - \tau_l$ est alors négatif ; le signe de I_k est donc $(-1)^{l-k} = (-1)^k$). Pour comparer I_k à I_{k-1} , on peut faire le changement de variable $t = u + h$, $u \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, et on a alors par décalage des racines $\tau_j = \tau_{j-1} + h$, d'où l'égalité

$$\prod_{j=0}^l (t - \tau_j) = \prod_{j=-1}^{l-1} (u - \tau_j) = \prod_{j=0}^l (u - \tau_j) \frac{u - \tau_{-1}}{u - \tau_l} = \prod_{j=0}^l (u - \tau_j) \frac{u + 1 + h}{u - 1},$$

et le quotient final est de valeur absolue ≤ 1 si $u + 1 + h \leq 1 - u$, soit $u \leq -h/2$. Comme $u \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, il suffit que $\tau_k \leq -h$, c'est-à-dire $k \leq n-1$. Mais par ailleurs, le changement de variables $t \mapsto -t$, $j \mapsto l-j$ donne $\tau_{l-j} = -\tau_j$, d'où $I_k = -I_{l-1-k} = -I_{2n-1-k}$, et a fortiori $|I_{2n-1-k}| = |I_k|$, en particulier $|I_n| = |I_{n-1}|$. Ceci montre que $k \mapsto |I_k|$ décroît (strictement) pour les indices successifs $k = 0, 1, \dots, n-1$ et croît de nouveau pour les indices $k = n, n+1, \dots, 2n-1$.

Le produit $t \mapsto \prod_{0 \leq j \leq l} (t - \tau_j)$ est une fonction impaire (les racines autres que 0 sont 2 à 2 symétriques par rapport à 0). Il en résulte que $w(-1) = w(1) = 0$ et que w est une fonction paire. Pour $x \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ avec $\tau_{k+1} \leq 0$, on voit que

$$w(x) = I_0 + I_1 + \dots + I_{k-1} + I'_k, \quad I'_k = \int_{\tau_k}^x \prod_{0 \leq j \leq l} (t - \tau_j) dt$$

et I'_k est du même signe que I_k avec $|I'_k| \leq |I_k|$. L'argument usuel des sommes partielles de séries alternées montre que $w(x)$ est du signe de I_0 , donc $w(x) > 0$ pour

$x \in]-1, 1[$. Une intégration par parties dans l'expression de $E(f)$ obtenue au (d) donne

$$E(f) = \left[w(x) f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, x] \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 w(x) \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, x] dx,$$

et, compte tenu de ce que $w(-1) = w(1) = 0$, l'identité du (c) implique

$$(**) \quad E(f) = -\frac{1}{(l+2)!} \int_{-1}^1 w(x) f^{(l+2)}(\xi_x) dx.$$

Les fonctions mises en jeu sont continues (et même \mathcal{C}^{l+1}). La formule de la moyenne pour le poids $w(x) > 0$ montre qu'il existe $\eta \in [-1, 1]$ tel que

$$E(f) = -\frac{1}{(l+2)!} f^{(l+2)}(\eta) A \quad \text{où} \quad A = \int_{-1}^1 w(x) dx > 0.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$A = [t w(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t w'(t) dt = - \int_{-1}^1 t \prod_{j=0}^l (t - \tau_j) dt.$$

Le changement de variable $t = \frac{u}{n}$, $u \in [-n, n]$, $\tau_{n+j} = \frac{j}{n}$, $-n \leq j \leq n$, donne maintenant

$$A = -\frac{1}{n^{2n+3}} \int_{-n}^n u \prod_{j=-n}^{+n} (u - j) = -\frac{1}{n^{2n+3}} \int_{-n}^n u^2 (u^2 - 1) \dots (u^2 - n^2) du.$$

En prenant $f(x) = x^k$, $k \leq l+2$, on voit grâce à (***) que l'erreur $E(f)$ est nulle pour $k \leq l+1$ et strictement négative (égale à $-A$) pour $k = l+1$. La méthode de Newton-Cotes NC_l est donc d'ordre $N = l+1$ exactement. On sait dans ces conditions que l'erreur s'exprime à l'aide du noyau de Peano $K_N = K_{l+1}$ par la formule

$$E(f) = \frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^1 K_{l+1}(t) f^{(l+2)}(t) dt.$$

En prenant $f(x) = x^{l+2}$ il vient $E(f) = -A$ et $\int_{-1}^1 K_{l+1}(t) dt = -A/(l+2)$.

(f) Supposons que le noyau de Peano ne soit pas de signe constant. C'est une fonction polynomiale par morceaux, donc les points où le signe change sont en nombre fini m . Il existe une fonction continue $g_\varepsilon \in \mathcal{C}([-1, 1])$ comprise entre -1 et 1 telle que

$$g_\varepsilon(t) = \pm 1 \text{ ou } 0 = \text{signe de } K_{l+1}(t)$$

en dehors d'un intervalle de longueur ε/m autour de chaque point où le signe de K_{l+1} change. On en déduit

$$\int_{-1}^1 K_{l+1}(t)g_\varepsilon(t) dt \geq \int_{-1}^1 |K_{l+1}(t)| dt - C\varepsilon \quad \text{où} \quad C = \sup_{[-1,1]} |K_N|.$$

Choisissons une fonction f_ε telle que $f_\varepsilon^{(l+2)} = g_\varepsilon$. Alors l'erreur d'interpolation vérifierait d'une part $E(f_\varepsilon) = \frac{1}{(l+2)!}g_\varepsilon(\eta)A$, $\eta \in [-1, 1]$, donc $|E(f_\varepsilon)| \leq \frac{1}{(l+2)!}A$, et d'autre part

$$E(f_\varepsilon) = \frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^1 K_{l+1}(t)g_\varepsilon(t)dt \geq \frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^1 |K_{l+1}(t)| dt - \frac{1}{(l+1)!}C\varepsilon.$$

Cependant, si K_{l+1} change de signe, on a

$$\int_{-1}^1 |K_{l+1}(t)| dt > \left| \int_{-1}^1 K_{l+1}(t) dt \right| = \frac{1}{l+2}A,$$

ce qui est une contradiction pour ε assez petit. Par conséquent $K_{l+1}(t)$ est de signe constant et comme son intégrale est négative on en conclut que $K_{l+1}(t) \leq 0$ sur $[-1, 1]$.

(g) Dans le cas où $l = 2n + 1$ est impair avec un pas $h = \frac{2}{2n+1}$, on peut reprendre les calculs précédents et observer que l'on a après simplification de $(x - \tau_l)$:

$$f(x) - p_l(x) = \prod_{j=0}^{l-1} (x - \tau_j) (f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, x] - f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \tau_l]).$$

On prend cette fois $w(x) = \int_{-1}^x \prod_{j=0}^{l-1} (t - \tau_j) dt$. L'erreur d'interpolation est alors donnée par

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-1}^1 (f(x) - p_l(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 w'(x) (f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, x] - f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \tau_l]) dx. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$E(f) = - \int_{-1}^1 w(x) \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, x] dx,$$

et on en déduit comme dans (f) (avec le point d'interpolation τ_l en moins) qu'il existe $\eta \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$E(f) = - \frac{1}{(l+1)!} f^{(l+1)}(\eta) A, \quad A = \int_{-1}^1 w(x) dx.$$

Il résulte de la question (f) que $w(x) > 0$ sur $] -1, 1 - h[$: en effet $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}$ forment une subdivision de pas constant de $[-1, 1 - h]$ en $2n$ intervalles, et on peut simplement faire un changement de variable affine pour ramener l'intervalle $[-1, 1 - h]$ à $[-1, 1]$. On voit ainsi que $w(1 - h) = 0$, avec une symétrie non évidente par rapport au point $-h/2$. Comme l'intégrande de $w(x)$ est positif aussi sur l'intervalle restant $]1 - h, 1]$, on a encore $w(x) > 0$ sur $]1 - h, 1]$. Les arguments de (f) et (g) restent applicables, au remplacement près de l par $(l - 1)$, et on trouve ainsi que

$$E(f) = -\frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^1 w(x) f^{(l+1)}(\xi_x) dx$$

pour une certaine fonction $\xi_x \in [-1, 1]$. La méthode est donc d'ordre l exactement. Le noyau de Peano est de signe constant, négatif ou nul, et on a

$$\int_{-1}^1 K_l(t) dt = -\frac{1}{l+1} A, \quad A = \int_{-1}^1 w(x) dx > 0.$$

Enfin, une intégration par parties fournit

$$A = [(x-1)w(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x-1)w'(x) dx = - \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^l (x - \tau_j) dx.$$

Le changement de variable et d'indice $t = (2u - 1)/(2n + 1)$, $u \in [-n, n + 1]$, $\tau_{j+n} = (2j - 1)/(2n + 1)$, $-n \leq j \leq n + 1$, fournit l'expression explicite

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2^{2n+3}}{(2n+1)^{2n+3}} \int_{-n}^{n+1} \prod_{j=-n}^{n+1} (u - j) du \\ &= \frac{2^{2n+3}}{(2n+1)^{2n+3}} \int_{-n}^{n+1} u(n+1-u)(u^2-1) \dots (u^2-n^2) du \end{aligned}$$

(sous cette forme, il n'est pas évident que $A > 0$!)