Solution des problèmes du chapitre 2

6.4. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, les polynômes de Bernstein sont définis par la formule

$$P_n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f(i/n).$$

(a) Pour $n = 0$ et $f(x) = f_0(x) = 1$, la formule du binôme donne $P_n[f_0] = 1$. Pour $f(x) = f_1(x) = x$, on utilise la relation $\binom{n}{i}\frac{i}{n} = \binom{n-1}{i-1}$ pour $i \geqslant 1$ et le changement d'indice $j = i - 1$ pour obtenir les égalités successives

$$\begin{aligned} P_n[f_1](x) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \frac{i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{1+j} (1-x)^{n-1-j} = x\big(x + (1-x)\big)^{n-1} = x. \end{aligned}$$

Pour $f(x) = f_2(x) = x^2$, on a de manière analogue $\binom{n}{i} = \binom{n-2}{i-2}\frac{n(n-1)}{i(i-1)}$ pour $i \geqslant 2$, d'où

$$\binom{n}{i}\frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\binom{n}{i}\big(i(i-1) + i\big) = \frac{n(n-1)}{n^2}\binom{n-2}{i-2} + \frac{n}{n^2}\binom{n-1}{i-1},$$

et en posant $j = i - 1$ et $k = j - 1$, il vient

$$\begin{aligned} P_n[f_2](x) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \frac{i^2}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=2}^{n} \binom{n-2}{i-2} x^i (1-x)^{n-i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^{2+j} (1-x)^{n-2-j} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{1+k} (1-x)^{n-1-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x = x^2 + \frac{1}{n} x(1-x). \end{aligned}$$

On voit que $P_n[f_0] = f_0$, $P_n[f_1] = f_1$, tandis que $P_n[f_2]$ converge uniformément vers f_2.

(b) On a

$$(x-i/n)^2 = x^2 - 2x\frac{i}{n} + \left(\frac{i}{n}\right)^2 = x^2 f_0(i/n) - 2x f_1(i/n) + f_2(i/n).$$

La linéarité de la formule définissant les polynômes de Bernstein implique d'après (a)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(x-i/n)^2 = x^2P_n[f_0](x) - 2xP_n[f_1](x) + P_n[f_2](x) = \frac{1}{n}x(1-x).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left|\sum a_ib_i\right|^2 \leqslant \sum |a_i|^2 \sum |b_i|^2$ appliquée à

$$a_i = \sqrt{\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}} \quad \text{et} \quad b_i = \sqrt{\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}}\;|x-i/n|$$

donne alors pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}|x-i/n|\right)^2\\ &\qquad\leqslant \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(x-i/n)^2 = \frac{1}{n}x(1-x).\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}|x-i/n| \leqslant \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

car il est facile de voir que $\max_{x\in[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$.

(c) Soit ω_f le module de continuité de f sur $[0,1]$. Nous avons

$$\big|f(x) - f(i/n)\big| \leqslant \omega_f(|x-i/n|) \leqslant \big(1+\sqrt{n}\,|x-i/n|\big)\,\omega_f(1/\sqrt{n}\,)$$

d'après l'inégalité $\omega_f(\lambda t) \leqslant (1+\lambda)\omega_f(t)$ appliquée à $t = 1/\sqrt{n}$ et $\lambda = \sqrt{n}|x-i/n|$. En écrivant que

$$f(x) - P_n[f](x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\big(f(x)-f(i/n)\big),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\big|f(x)-P_n[f](x)\big| &\leqslant \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\big|f(x)-f(i/n)\big|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\big(1+\sqrt{n}\,|x-i/n|\big)\,\omega_f(1/\sqrt{n}\,)\\ &\leqslant \left(1+\sqrt{n}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\omega_f(1/\sqrt{n}\,) = \frac{3}{2}\,\omega_f(1/\sqrt{n}\,).\end{aligned}$$

Par conséquent $\|f - P_n[f]\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f(1/\sqrt{n}\,)$ et comme $\lim_{t\to 0+}\omega_f(t) = 0$, on voit que $P_n[f]$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On peut de plus ramener tout intervalle fermé borné à $[a,b]$ par un changement de variable affine ; on en déduit alors que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([a,b])$ pour la topologie de la convergence uniforme (théorème de Weierstrass). Les polynômes de Bernstein permettent en fait de voir que la distance uniforme d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$ à l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré $\leqslant n$ admet la majoration explicite

$$d_\infty(f, \mathcal{P}_n) \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f((b-a)/\sqrt{n}\,),$$

plus faible que celle donnée par les polynômes de Jackson.