Le procédé de sommation d'Euler

Soit $a > 0$ un réel, et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite $(\tilde{u}_n)$ telle que

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k u_k \tag{SE1}$$

(le procédé de sommation d'Euler le plus classique correspond au choix $a = 1$).

Théorème. *Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors la suite $(\tilde{u}_n)$ converge également vers ℓ.*

Démonstration. Comme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k = (1+a)^n$, on a

$$\tilde{u}_n - \ell = \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k(u_k-\ell) \quad\Longrightarrow\quad |\tilde{u}_n - \ell| \leqslant \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k|u_k-\ell|.$$

Soit M un majorant de $|u_n|$, de sorte que $|\ell| \leqslant M$ et $|u_n - \ell| \leqslant 2M$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $k \geqslant N$ on ait $|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$. Découpons la sommation en les indices $k \leqslant N-1$ et $k \geqslant N$, en supposant $n \geqslant N$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k|u_k-\ell| &\leqslant \frac{1}{(1+a)^n}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k\times 2M + \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}a^k\varepsilon\right)\\ &\leqslant \varepsilon + 2M\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k.\end{aligned}$$

Pour $0 < \delta < 1$ (par exemple $\delta = 1/2$), on voit par ailleurs que

$$\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k \leqslant \frac{\delta^{1-N}}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}(\delta a)^k \leqslant \delta^{1-N}\left(\frac{1+\delta a}{1+a}\right)^n$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc on peut choisir $N_1 > N$ tel que $n \geqslant N_1$ implique

$$\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ceci montre que $|\tilde{u}_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant N_1$, et le théorème est démontré. □

Pour transformer une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on applique le procédé précédent à la suite des sommes partielles

$$s_n = \sum_{0\leqslant k<n} u_k \qquad \Longrightarrow \qquad u_n = s_{n+1} - s_n.$$

La transformation d'Euler donne une nouvelle suite

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k s_k$$

qui correspond aux sommes partielles de la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$\tilde{u}_n = \tilde{s}_{n+1} - \tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - (1+a)\binom{n}{k}\right) a^k s_k.$$

Comme $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} - a\binom{n}{k}\right) a^k s_k \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}(s_{k+1} - s_k) \\ &= \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k.\end{aligned}$$

On voit donc que pour les séries, le procédé de sommation d'Euler consiste à transformer une série $\sum u_n$ en la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$\text{(SE2)} \qquad \tilde{u}_n = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k.$$

D'après le théorème ci-dessus, le procédé préserve la convergence des séries et la valeur de leur somme, ceci pour tout $a > 0$.

Exemple 1. On considère la série entière du logarithme népérien

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in\,]0,1].$$

En choisissant $a = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \frac{1/x}{(1+1/x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x = \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k \, dt \\ &= \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}}.\end{aligned}$$

On trouve l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}},$$

qui équivaut à $\ln(1+x)=-\ln(1-\frac{1}{1+1/x})$. On observera que le membre de droite améliore très notablement la convergence de la série, en particulier pour $x=1$ (on passe d'une convergence lente à une convergence géométrique).

Exemple 2. On considère la série entière de la fonction Arctan

$$\operatorname{Arctan} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad x\in\,]0,1].$$

En choisissant $a=\frac{1}{x^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde u_n&=\frac{1/x^2}{(1+1/x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x\\&=\frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{2k}\,dt=\frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}}\int_0^1(1-t^2)^n\,dt.\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale $I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\,dt$ est un grand classique (cf. formule de Wallis), on trouve la relation de récurrence $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ et il en résulte

$$I_0=1,\qquad I_n=\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n+1}\quad\text{pour } n\geqslant 1.$$

On obtient l'identité intéressante

$$\text{(SE3)}\qquad \operatorname{Arctan} x=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+1/x^2)^{n+1}}\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n+1},$$

et en particulier, il résulte des égalités $\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\pi}{6}$ les formules très simples suivantes découvertes par Euler :

$$\pi=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n+1},$$

$$\pi=\frac{3\sqrt3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-n}\,n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n+1},$$

dont la convergence est approximativement en 2^{-n}, resp. 4^{-n}. On peut bien sûr aussi combiner (SE3) avec les formules du type de celle de John Machin

$$\pi=16\operatorname{Arctan}\frac15-4\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}.$$

En utilisant un argument de prolongement analytique pour les fonctions $\mathbb{R}$-analytiques, il n'est pas difficile de voir que (SE3) reste vrai pour tout $x>0$.

Code pour PARI/GP :

Initialiser par

```
u=3*sqrt(3)/2;s=u;n=0;
```

puis itérer la ligne

```
n=n+1;u=n*u/(4*n+2);s=s+u
```

