

Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques

Jean-Pierre Demailly

Université de Grenoble I, Institut Fourier, BP 74, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 188,
F-38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ce travail est de développer la théorie du potentiel en plusieurs variables complexes, suivant la voie inaugurée par Bedford et Taylor [1, 2]. Nous montrons en particulier que tout domaine hyperconvexe borné Ω possède des «noyaux de Poisson et de Green pluricomplexes» canoniques, invariants par biholomorphisme, permettant de reproduire les fonctions pluriharmoniques sur Ω à partir de leurs valeurs au bord.

Soit X une variété de Stein de dimension n et $\varphi: X \rightarrow [-\infty, R[$ une fonction continue plurisousharmonique (psh en abrégé). On suppose de plus que φ est *exhaustive*, c'est-à-dire que pour tout $r < R$ les pseudoboules $B(r) = \{z \in X; \varphi(z) < r\}$ sont relativement compactes dans X . On peut alors associer de manière naturelle à φ une collection de mesures positives $\mu_{\varphi,r}$, portées par les ensembles de niveau $S(r) = \{z \in X; \varphi(z) = r\}$, telles que $\mu_{\varphi,r} = (dd^c \varphi)^{n-1} \wedge d^c \varphi|_{S(r)}$ si $\varphi \in C^\infty(X)$. Les mesures $\mu_{\varphi,r}$ vérifient la formule de Lelong-Jensen fondamentale ci-dessous (cf. [4] pour une démonstration et pour l'étude de quelques applications géométriques).

(0.1) **Théorème.** *Toute fonction psh V sur X est $\mu_{\varphi,r}$ intégrable et on a*

$$\mu_{\varphi,r}(V) = \int_{B(r)} V (dd^c \varphi)^n + \int_{B(r)} (r - \varphi) dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-1}.$$

Soit Ω un ouvert faiblement pseudoconvexe relativement compact dans X . Si $\partial\Omega$ est de classe C^1 , on sait d'après Kerzman-Rosay [8] que Ω est hyperconvexe, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow [-1, 0[$ psh continue exhaustive. La démonstration de Kerzman et Rosay ne donne pas directement d'information quantitative globale sur φ , mais en raffinant leur méthode nous avons pu obtenir des estimations logarithmiques très précises.

(0.2) **Théorème.** *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine faiblement pseudoconvexe à bord lipschitzien. Alors Ω est hyperconvexe et il existe une fonction psh exhaustive $\varphi: \Omega \rightarrow [-1, 0[$ de classe C^∞ telle que*

$$-\frac{A}{\text{Log } 1/\delta} \leq \varphi \leq -\frac{B}{\text{Log } 1/\delta} \quad \text{et} \quad dd^c \varphi \geq \frac{1}{\text{Log } 1/\delta} dd^c |z|^2,$$

où δ désigne la distance au bord et A, B, C des constantes > 0 .

Soit maintenant Ω un domaine hyperconvexe et $\varphi: \Omega \rightarrow [-\infty, 0[$ une fonction psh continue exhaustive dont la masse de Monge-Ampère totale est finie, i.e.

$$(0.3) \quad \int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty.$$

On montre alors que les mesures $\mu_{\varphi,r}$ convergent faiblement au bord vers une mesure positive μ_{φ} sur $\partial\Omega$. L'un des outils principaux dont nous disposons est le théorème de comparaison suivant:

(0.4) **Théorème.** Soit $\psi: \Omega \rightarrow [-\infty, 0[$ une fonction psh continue exhaustive telle que

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \lambda(a) < +\infty$$

pour tout $a \in \partial\Omega$. Alors $d\mu_{\psi}(\zeta) \leq \lambda(\zeta)^n d\mu_{\varphi}(\zeta)$ sur $\partial\Omega$.

Le point crucial de la démonstration consiste à établir des estimations suffisamment précises pour les masses de Monge-Ampère respectives de φ et ψ au voisinage de $\partial\Omega$; ces estimations s'obtiennent elles-mêmes par application du théorème (0.1).

On cherche ensuite à définir une fonction de Green attachée canoniquement à la structure complexe de Ω . Dans ce but, on considère le problème de Dirichlet suivant, relatif à l'opérateur de Monge-Ampère: pour tout point $z \in \Omega$, existe-t-il une fonction continue $u_z: \bar{\Omega} \rightarrow [-\infty, 0[$ psh et exhaustive sur Ω , vérifiant

$$(0.5) \quad \begin{aligned} u_z|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (dd^c u_z)^n &= 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus \{z\}, \\ u_z(\zeta) &\sim \text{Log} |\zeta - z| \quad \text{quand} \quad \zeta \rightarrow z? \end{aligned}$$

Nous montrons le:

(0.6) **Théorème.** Si Ω est hyperconvexe, le problème (0.5) admet une solution u_z unique. On a $(dd^c u_z)^n = (2\pi)^n \delta_z$ et la fonction $u_{\Omega}(z, \zeta) := u_z(\zeta)$ est continue sur $\Omega \times \bar{\Omega}$.

La résolution du problème de Dirichlet (0.5) a été étudiée en détail par L. Lempert [11, 12], qui a obtenu le théorème (0.6) ainsi que de nombreux autres résultats quantitatifs lorsque Ω est convexe. La méthode de Lempert s'appuie sur une étude poussée des disques extrémaux de Ω pour la métrique de Kobayashi. Dans le cas général cette méthode ne fonctionne plus, et nous avons dû reprendre l'idée de M. Klimek [9], basée sur la méthode antérieure de Perron-Bremermann et sur les résultats de Bedford-Taylor [1]: la fonction u_z cherchée est l'enveloppe supérieure des fonctions psh $v \leq 0$ sur Ω telles que

$v(z) \leq \text{Log}|\zeta - z| + O(1)$. Des fonctions extrémales analogues avaient déjà été introduites et étudiées dans d'autres contextes par différents auteurs, notamment J. Siciak [17–19], B.A. Taylor [21] et A. Zeriahi [23] lorsque le pôle logarithmique est à l'infini.

Dans le cas où Ω est strictement pseudoconvexe de classe C^∞ , il est assez facile de prouver que u_Ω est localement lipschitzienne sur $\Omega \times \bar{\Omega} \setminus A_\Omega$, mais nous ne savons pas si u_Ω est elle-même de classe C^∞ sur cet ensemble; il n'est d'ailleurs pas sûr que ce résultat soit toujours vrai, au vu des contre-exemples donnés par Bedford-Taylor [1] et Gamelin-Sibony [7] pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation de Monge-Ampère homogène $(dd^c u)^n \equiv 0$. Nous ne savons pas non plus si de manière générale $u_\Omega(z, \zeta)$ est symétrique en z et ζ , bien que la symétrie ait lieu lorsque Ω est convexe (cf. L. Lempert [11]).

(0.7) **Définition.** On appelle mesure pluriharmonique μ_z associée au point $z \in \Omega$ la mesure μ_φ obtenue pour $\varphi = \frac{1}{2\pi} u_z$.

Pour $r = 0$ la formule (0.1) donne

$$\mu_z(V) = V(z) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega |u_z(\zeta)| dd^c V \wedge (dd^c u_z)^{n-1},$$

de sorte que le noyau $d\mu_z(\zeta)$ reproduit les fonctions pluriharmoniques. Le théorème (0.4) montre que les mesures μ_z sont toutes absolument continues entre elles; de plus ces mesures sont données en fonction de l'une quelconque d'entre elles par un noyau de Poisson $P(z, \zeta)$ continu en z . De même que la fonction de Green u_z , le noyau $d\mu_z(\zeta)$ est invariant par biholomorphisme. Dans le cas d'un domaine homogène comme la boule, on retrouve donc le noyau de Poisson invariant

(0.8)
$$d\mu_z(\zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - z \cdot \bar{\zeta}|^{2n}} d\sigma(\zeta).$$

L'une des principales caractéristiques des mesures μ_z est, en un sens vague, la minimalité de leur support.

(0.9) **Théorème.** On suppose que Ω est de classe C^2 et qu'il existe une fonction psh $\rho \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $\rho < 0$ sur Ω et $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, la mesure μ_z est portée par l'ouvert des points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$.

Le théorème (0.9) est une conséquence très simple du théorème de comparaison (0.4) si l'on observe que $C_1 \rho \leq u_z \leq C_2 \rho$ au voisinage du bord.

Lorsque Ω est strictement pseudoconvexe, nous obtenons d'autre part une description très précise de la singularité du noyau sur la diagonale du bord.

(0.10) **Théorème.** On suppose Ω strictement pseudoconvexe de classe C^2 . Soit $\rho < 0$ une fonction d'exhaustion strictement psh de classe C^2 . Alors si z tend vers $\partial\Omega$ et si $\zeta \in \partial\Omega$ est tel que $|\zeta - z| \leq A|\rho(z)|^{\frac{1}{2}}$, $A > 0$, on a

$$d\mu_z(\zeta) \sim \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{|\rho(z)|^n}{|J_{\zeta}^{2,0} \rho(z)|^{2n}} (dd^c \rho_\zeta)^{n-1} \wedge d^c \rho_\zeta,$$

où

$$J_{\zeta}^{2,0} \rho(z) = \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} (z_j - \zeta_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} (z_j - \zeta_j)(z_k - \zeta_k).$$

Le principe de la démonstration consiste à utiliser une osculation de $\partial\Omega$ par des boules tangentes intérieurement et extérieurement; l'estimation cherchée se déduit alors de (0.8) au moyen du Théorème de comparaison (0.4).

Le dernier paragraphe est consacré à une application des idées précédentes à l'étude de la géométrie des ensembles convexes. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une partie convexe et $x \in \overset{\circ}{K}$ un point intérieur. On considère la fonction $\xi \mapsto p_x(\xi)$ positivement homogène de degré 1 sur \mathbf{R}^n telle que $p_x(x) = 0$ et $p_x|_{\partial K} = 1$. Si on regarde p_x comme une fonction de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$ indépendante de η , alors on voit que

$$(dd^c p_x)^n = C \delta_x \otimes (d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_n),$$

tandis que $(dd^c p_x)^{n-1} \wedge d^c p_x = v_x \otimes (d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_n)$ où v_x est la mesure sur ∂K définie par

$$\frac{dv_x(\xi)}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \det \left(\dots, \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_{i-1}}, \frac{\partial p_x}{\partial \xi_j}, \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_{i+1}}, \dots \right) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{i-1} \wedge d\xi_{i+1} \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

La mesure v_x peut être interprétée géométriquement comme la mesure de volume radial dans les coordonnées $\xi' \in (\mathbf{R}^n)^*$, où $\xi \mapsto \xi' = dp_x(\xi)$ est la transformation par polaires sur ∂K . En utilisant le théorème (0.1), nous démontrons alors une formule de représentation barycentrique très simple, qui à notre connaissance semble être passée inaperçue jusqu'à présent.

(0.11) **Théorème.** v_x est portée par les points extrémaux de K , et le point x est barycentre de la mesure de probabilité $(v_x(\partial K))^{-1} v_x$.

Le théorème (0.11) donne donc en dimension finie une solution explicite naturelle pour les mesures barycentriques dont l'existence est assurée en général par le théorème de Choquet [3].

1. Mesures de Monge-Ampère

Dans notre mémoire antérieur [4], nous avons montré comment à toute fonction φ continue psh et exhaustive sur un espace de Stein X on peut associer de manière naturelle une collection de mesures positives portées par les ensembles de niveau de φ . Nous rappelons ici brièvement la construction de ces mesures, dont les propriétés de croissance à l'infini sont liées étroitement à la géométrie de l'espace X .

Soit X une variété de Stein de dimension n . On suppose donnée une fonction psh continue $\varphi: X \rightarrow [-\infty, R[$, où $R \in]-\infty, +\infty]$. Pour tout $r \in]-\infty, R[$ on note

$$(1.1) \quad B(r) = \{x \in X; \varphi(x) < r\}, \quad S(r) = \{x \in X; \varphi(x) = r\},$$

$$(1.2) \quad \varphi_r(x) = \max(\varphi(x), r).$$

On suppose en outre que φ est *exhaustive*, c'est-à-dire que pour tout $r < R$, la pseudoboule $B(r)$ est relativement compacte dans X .

On écrira comme d'habitude $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. La notation $(dd^c)^k$ désignera l'opérateur de Monge-Ampère complexe défini par la méthode de E. Bedford et B.A. Taylor [2]. Rappelons cette méthode: si V_1 est une fonction psh quelconque et si V_2, \dots, V_k sont des fonctions psh localement bornées sur X , on définit inductivement un courant ≥ 0 fermé de bidegré (k, k) en posant

$$(1.3) \quad dd^c V_1 \wedge \dots \wedge dd^c V_k = dd^c (V_k dd^c \wedge \dots \wedge dd^c V_{k-1});$$

d'après [4], la définition (1.3) reste encore utilisable si V_2, \dots, V_k sont seulement localement bornées dans le complémentaire d'un compact de X .

Le théorème de continuité monotone pour l'opérateur de Monge-Ampère entraîne que l'application $r \mapsto (dd^c \varphi_r)^n$, à valeurs dans l'espace des mesures sur X muni de la topologie faible, est continue sur $]-\infty, R[$. Comme la mesure positive $(dd^c \varphi_r)^n$ est nulle sur $B(r)$ et coïncide avec $(dd^c \varphi)^n$ sur $X \setminus (B(r) \cup S(r))$, on peut écrire

$$(1.4) \quad (dd^c \varphi_r)^n = \mathbf{1}_{X \setminus B(r)} (dd^c \varphi)^n + \mu_{\varphi, r},$$

où $\mu_{\varphi, r}$ est une mesure ≥ 0 portée par $S(r)$. Dans le cas où φ est de classe C^∞ et r valeur régulière de φ , la mesure $\mu_{\varphi, r}$ admet une expression explicite simple. Par régularisation des points anguleux de φ_r , on vérifie en effet (voir [4]) que $\mu_{\varphi, r}$ est la mesure induite sur $S(r)$ par la forme différentielle C^∞ de degré $2n - 1$:

$$(1.5) \quad \mu_{\varphi, r} = (dd^c \varphi)^{n-1} \wedge d^c \varphi|_{S(r)}.$$

(1.6) **Définition.** On dira que $(\mu_{\varphi, r})$ est la famille des mesures de Monge-Ampère associée à la fonction d'exhaustion φ .

Comme $r \mapsto \mathbf{1}_{X \setminus B(r)}$ est ponctuellement continue à gauche, l'application $r \mapsto \mu_{\varphi, r}$ est faiblement continue à gauche. De plus, on a la formule de Lelong-Jensen fondamentale suivante, dont la démonstration est une conséquence simple du théorème de Stokes si $\varphi \in C^\infty(X)$.

(1.7) **Théorème.** Soit V une fonction psh quelconque sur X . Alors quel que soit $r \in]-\infty, R[$, V est $\mu_{\varphi, r}$ -intégrable et

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi, r}(V) - \int_{B(r)} V (dd^c \varphi)^n &= \int_{-\infty}^r dt \int_{B(t)} ddV \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} \\ &= \int_{B(r)} (r - \varphi) dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. La première égalité n'est autre que le théorème (3.4) de [4], et la deuxième s'obtient aussitôt par application du théorème de Fubini. Lorsque $n \geq 2$, on peut d'autre part effectuer une intégration par parties dans la dernière intégrale:

$$(1.8) \quad \int_{B(r)} (r - \varphi) dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} = \int_{B(r)} dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c \varphi;$$

pour justifier (1.8) en toute rigueur, on doit bien sûr commencer par régulariser φ et passer ensuite à la limite. \square

(1.9) **Corollaire.** *Si V est psh ≥ 0 , la fonction $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(V)$ est croissante sur $] -\infty, R[$. \square*

Il résulte en particulier du théorème (1.7) que la masse totale de $\mu_{\varphi,r}$ est donnée par

$$(1.10) \quad \|\mu_{\varphi,r}\| = \mu_{\varphi,r}(1) = \int_{B(r)} (dd^c \varphi)^n.$$

2. Fonctions d'exhaustion psh bornées et ouverts hyperconvexes

Soit X une variété de Stein, Ω un ouvert relativement compact dans X et $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ le bord de Ω . Dans les paragraphes qui suivent, nous serons conduits naturellement à supposer que Ω est hyperconvexe. Cette notion avait été introduite initialement par J.-L. Stehlé [20] en vue de l'étude des espaces fibrés holomorphes. Rappelons-en la définition.

(2.1) **Définition.** Ω est dit hyperconvexe s'il existe une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow] -\infty, 0[$ psh exhaustive.

Par régularisation de φ , on voit facilement que Ω est hyperconvexe si et seulement si il existe une fonction $\tilde{\varphi}: \Omega \rightarrow] -1, 0[$ de classe C^∞ strictement psh et exhaustive. Tout ouvert hyperconvexe est pseudoconvexe, et on sait que l'hyperconvexité est une propriété locale de $\partial\Omega$ (cf. Kerman-Rosay [8]). Kerzman et Rosay [8] ont démontré par ailleurs que tout ouvert $\Omega \Subset X$ faiblement pseudoconvexe à bord de classe C^1 est hyperconvexe. Nous allons redémontrer ici ces résultats, d'une part parce que nous avons une preuve plus simple et plus générale que celle de [8], et d'autre part parce que notre méthode apporte des résultats quantitatifs nouveaux.

(2.2) **Théorème.** *Soit Ω un ouvert pseudoconvexe borné de C^n . On suppose que le bord $\partial\Omega$ est lipschitzien. Alors Ω est hyperconvexe, et il existe une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow] -1, 0[$ de classe C^∞ , strictement psh et exhaustive, telle qu'au voisinage de $\partial\Omega$ on ait*

$$(2.3) \quad -\frac{A}{\text{Log } 1/\delta(z)} \leq \varphi(z) \leq -\frac{B}{\text{Log } 1/\delta(z)},$$

$$(2.4) \quad dd^c \varphi(z) \geq \frac{C}{\text{Log } 1/\delta(z)} dd^c |z|^2,$$

où $\delta(z) = d(z, \partial\Omega)$ est la distance euclidienne au bord, et où A, B, C sont des constantes > 0 .

Le théorème (2.2) est en un certain sens pratiquement optimal: le triangle de Hartogs $T = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1| < |z_2| < 1\}$ possède un bord lipschitzien au voisinage de tout $a \in \partial T$ autre que $a = (0, 0)$, et cependant T n'est pas hyperconvexe puisque $T \cap (\{0\} \times \mathbf{C})$ est un disque pointé.

Démonstration. On commence d'abord par construire sur Ω une famille de fonctions psh continues v_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, vérifiant les estimations uniformes

$$(2.5) \quad \text{Log} \frac{1}{\delta(z) + \varepsilon} - C_1 \leq v_\varepsilon(z) \leq \text{Log} \frac{1}{\delta(z) + \varepsilon} - C_2.$$

$$(2.6) \quad dd^c v_\varepsilon(z) \geq dd^c |z|^2,$$

où $C_1, C_2 > 0$ sont des constantes.

L'hypothèse que $\partial\Omega$ est lipschitzien équivaut à la propriété suivante: il existe un nombre fini de points $a_j \in \partial\Omega$, des réels $r_j > 0$ et des cônes de révolution ouverts $\Gamma_j \subset \mathbb{C}^n$, tels que les boules $B(a_j, r_j/3)$ recouvrent $\partial\Omega$, avec pour tout j :

$$(2.7) \quad (\Omega \cap B(a_j, r_j)) + (\Gamma_j \cap B(0, r_j)) \subset \Omega.$$

Soit N_j le vecteur unitaire porté par l'axe de Γ_j et soit α_j le demi-angle au sommet de ce cône. Pour $z \in \bar{B}(a_j, r_j/2)$ et $\varepsilon \leq r_j/2$, on a alors:

$$(2.8) \quad \delta(z) + \varepsilon \sin \alpha_j \leq \delta(z + \varepsilon N_j) \leq \delta(z) + \varepsilon;$$

la première inégalité résulte en effet du fait que (2.7) implique

$$B(z, \delta(z)) + (\Gamma \cap B(0, r_j)) \subset \Omega,$$

et la deuxième est évidente. Si on pose

$$v_{\varepsilon,j}(z) = \text{Log} \frac{1}{\delta(z + \varepsilon N_j)}, \quad z \in \Omega \cap \bar{B}(a_j, r_j/2),$$

alors $v_{\varepsilon,j}$ est psh puisque $\text{Log} 1/\delta(z)$ l'est, et (2.8) entraîne

$$\text{Log} \frac{1}{\delta(z) + \varepsilon} \leq v_{\varepsilon,j}(z) \leq \text{Log} \frac{1}{(\delta(z) + \varepsilon) \sin \alpha_j}.$$

Il reste maintenant à recoller les fonctions $v_{\varepsilon,j}(z)$ de façon à obtenir une fonction psh globale v_ε sur Ω . Pour cela, soit ψ_j une fonction ≥ 0 de classe C^∞ à support compact dans $B(a_j, r_j/2)$, telle que $\psi_j > \text{Log} 1/\sin \alpha_j$ sur $B(a_j, r_j/3)$. Soit $\lambda > 0$ assez grand pour que les fonctions $\psi_j(z) + \lambda|z|^2$ soient psh. On a alors

$$v_{\varepsilon,j}(z) + \psi_j(z) + \lambda|z|^2 > [\text{resp.} \leq] \quad \lambda|z|^2 + \text{Log} \frac{1}{(\delta(z) + \varepsilon) \sin \alpha_j}$$

sur $B(a_j, r_j/3)$ [resp. sur $\partial B(a_j, r_j/2)$]. Pour tout $z \in \Omega$ on pose

$$(2.9) \quad v_\varepsilon(z) = \max_j (v_{\varepsilon,j}(z) + \psi_j(z) + \lambda|z|^2 - \lambda^2, |z|^2 - \lambda),$$

où le maximum est étendu aux indices j tels que $\bar{B}(a_j, r_j/2) \ni z$ (il peut ne pas y en avoir, et dans ce cas $v_\varepsilon(z) = |z|^2 - \lambda$). Pour $\lambda > 0$ assez grand, la fonction $v_\varepsilon(z)$ est psh continue sur Ω , car le maximum n'est jamais atteint par construction

pour un indice j tel que $z \in \partial B(a_j, r_j/2)$. La condition (2.5) est clairement satisfaite, et la condition (2.6) résulte du lemme classique suivant :

(2.10) **Lemme.** *Soient w_1, \dots, w_m des fonctions psh sur une variété analytique complexe Y et h une $(1, 1)$ -forme ≥ 0 continue telle que $dd^c w_j \geq h$ pour tout j . Alors $w := \max(w_j)$ est psh, et $dd^c w \geq h$.*

Nous construisons maintenant la fonction φ du théorème (2.2) à l'aide des fonctions v_ε . On observe d'après (2.5) que l'ordre de grandeur de $v_\varepsilon(z)$ sur $\partial\Omega$ est $\text{Log } 1/\varepsilon$. On est donc amené à poser

$$w_\varepsilon(z) = \frac{v_\varepsilon(z)}{\text{Log } 1/\varepsilon} - 1, \quad w(z) = \sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} w_\varepsilon(z),$$

où $\varepsilon_0 = \min(1/2, r_j/2)$; la fonction φ cherchée sera une régularisation de w . Si on note $t = \varepsilon/\delta(z)$, l'encadrement (2.5) entraîne

$$-\frac{\text{Log}(1+1/t) + C_1}{\text{Log } 1/t + \text{Log } 1/\delta(z)} \leq w_\varepsilon(z) \leq -\frac{\text{Log}(1+1/t) + C_2}{\text{Log } 1/t + \text{Log } 1/\delta(z)}.$$

Le choix $\varepsilon = \delta(z)$ (avec $\delta(z) < \varepsilon_0$) donne la minoration

$$w(z) \geq w_\varepsilon(z) \geq -\frac{\text{Log } 2 + C_1}{\text{Log } 1/\delta(z)}.$$

On a d'autre part la majoration

$$(2.11) \quad w_\varepsilon(z) \leq -\frac{\text{Log}(1+1/t) + C_2}{\text{Log}(1+1/t) + \text{Log } 1/\delta(z)} \leq -\frac{C_2}{\text{Log } 1/\delta(z)},$$

pourvu que $\delta(z) \leq e^{-C_2}$. Ceci montre que $w(z)$ vérifie (2.3) avec $A = \text{Log } 2 + C_1$ et $B = C_2$. Par ailleurs, pour $\varepsilon \leq t_0 \delta(z)$ et $\delta(z) \leq \min(e^{-C_2}, t_0/(1+t_0))$, on obtient $t \leq t_0$, $\text{Log}(1+1/t) \geq \text{Log}(1+1/t_0)$, $1/\delta(z) \geq 1+1/t_0$, et (2.11) entraîne donc

$$w_\varepsilon(z) \leq -\frac{\text{Log}(1+1/t_0) + C_2}{\text{Log}(1+1/t_0) + \text{Log } 1/\delta(z)} \leq -\frac{1}{2} \frac{\text{Log}(1+1/t_0) + C_2}{\text{Log } 1/\delta(z)}.$$

La dernière inégalité implique que $\sup_\varepsilon w_\varepsilon(z)$ est atteint pour $\varepsilon \geq t_0 \delta(z)$ si $t_0 > 0$ est assez petit. Par un argument de compacité standard, on voit alors que w est continue. De plus, l'analogie du lemme (2.10) pour la famille infinie de fonctions psh $\{w_\varepsilon; \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ entraîne, compte tenu de l'inégalité (2.6):

$$dd^c w \geq \frac{1}{\text{Log } 1/\varepsilon_1} dd^c |z|^2, \quad \forall \varepsilon_1 < t_0 \delta(z).$$

L'inégalité (2.4) est donc démontrée pour w . La fonction φ se déduit finalement de w par régularisation jusqu'au bord (R. Richberg [14]). \square

(2.12) *Remarque.* Le théorème (2.2) est encore vrai si Ω est un domaine pseudoconvexe lipschitzien dans une variété de Stein X . Il suffit de remplacer dans la démonstration la fonction $|z|^2$ par une fonction $\gamma(z)$ strictement psh C^∞ sur

X , et d'utiliser des boules $\bar{B}(a_j, 2r_j)$ contenues dans des ouverts de coordonnées; à la distance $\delta(z)$, on peut de même substituer la fonction $\delta_j(z) :=$ distance de z au bord de $\Omega \cap B(a_j, 2r_j)$, calculée dans le système de coordonnées correspondant.

(2.13) **Théorème** (Kerzman-Rosay [8]). *Soit $\Omega \Subset X$, où X est une variété de Stein. On suppose que tout point $a \in \partial\Omega$ possède un voisinage V_a tel que $\Omega \cap V_a$ soit hyperconvexe. Alors Ω est hyperconvexe.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un recouvrement fini de $\partial\Omega$ par des ouverts U_j tels que $\Omega \cap U_j$ possède une fonction d'exhaustion psh continue $\varphi_j < 0$. Soit $U'_j \Subset U_j$ tel que $\partial\Omega \subset \bigcup U'_j$. Il est facile de voir qu'il existe une fonction convexe croissante $\chi:]-\infty, 0[\rightarrow]0, +\infty[$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \chi(t) = +\infty$, dont la croissance est suffisamment lente pour que $|\chi \circ \varphi_j - \chi \circ \varphi_k| \leq 1$ sur $U'_j \cap U'_k \cap \Omega$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ on a encore

$$|\chi(\varphi_j(z) - \varepsilon) - \chi(\varphi_k(z) - \varepsilon)| \leq 1, \quad \forall z \in U'_j \cap U'_k \cap \Omega,$$

grâce à la convexité de χ . On applique maintenant la formule (2.9) pour construire une fonction psh globale v_ε à partir des $v_{\varepsilon,j}(z) = \chi(\varphi_j(z) - \varepsilon)$. Alors la fonction

$$w_\varepsilon(z) := \frac{v_\varepsilon(z)}{\chi(-\varepsilon)} - 1$$

est < 0 sur Ω , et quand ε tend vers 0, la fonction w_ε converge uniformément vers 0 sur $\partial\Omega$ et vers -1 sur tout compact de Ω . Par suite, $w := \sup w_\varepsilon$ est psh continue exhaustive sur Ω . \square

3. Mesures de Monge-Ampère sur le bord d'un ouvert hyperconvexe

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les mesures de Monge-Ampère du § 1 se prolongent de manière naturelle sur le bord d'un ouvert hyperconvexe $\Omega \Subset X$ quelconque, où X est une variété de Stein de dimension n .

(3.1) **Théorème et Définition.** *Soit $\varphi: \Omega \rightarrow]-\infty, 0[$ une fonction psh continue exhaustive. On suppose que la masse de Monge-Ampère totale de φ est finie, i.e.*

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty.$$

Alors, quand r tend vers 0, $\mu_{\varphi,r}$ converge faiblement dans X vers une mesure $\mu_\varphi \geq 0$ portée par $\partial\Omega$, de masse totale $\int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n$. La mesure limite μ_φ sera appelée mesure au bord associée à φ .

On verra plus loin (cf. § 4) qu'un ouvert hyperconvexe quelconque admet toujours des fonctions d'exhaustion φ vérifiant (3.2).

Démonstration. D'après (1.10) et (3.2), les mesures $\mu_{\varphi,r}$ sont uniformément bornées en masse pour $r < 0$. Il suffit donc de vérifier que $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(h)$ a une limite pour

toute fonction $h \in C^2(X, \mathbf{R})$. Si γ est une fonction >0 strictement psh de classe C^2 sur X , on peut choisir une constante $C > 0$ telle que $V = h + C\gamma$ soit psh ≥ 0 sur $\bar{\Omega}$. Le corollaire (1.9) entraîne alors que $\mu_{\varphi,r}(\gamma)$ et $\mu_{\varphi,r}(V)$ sont fonctions croissantes de r , par suite $\mu_{\varphi,r}(h) = \mu_{\varphi,r}(V) - C\mu_{\varphi,r}(\gamma)$ a une limite en $r = 0$. \square

Quand r tend vers 0, la formule de Lelong-Jensen (1.7), (1.8) entraîne le:

(3.3) **Théorème.** Soit $V \in C(\bar{\Omega})$, V psh sur Ω . Alors

$$\mu_{\varphi}(V) = \int_{\Omega} V(dd^c \varphi)^n + \int_{\Omega} dd^c V \wedge |\varphi|(dd^c \varphi)^{n-1} \quad \text{si } n \geq 1,$$

$$\mu_{\varphi}(V) = \int_{\Omega} V(dd^c \varphi)^n + \int_{\Omega} dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-2} \wedge d\varphi \wedge d^c \varphi \quad \text{si } n \geq 2.$$

On va voir maintenant que la mesure μ_{φ} ne dépend, en un certain sens, que du comportement asymptotique local de φ au voisinage de $\partial\Omega$. Nous commençons par prouver le résultat global suivant:

(3.4) **Théorème.** Soient $\varphi, \psi: \Omega \rightarrow [-\infty, 0[$ des fonctions psh continues exhaustives telles que $\varphi \leq \psi \leq 0$ et $\int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty$. Alors $\int_{\Omega} (dd^c \psi)^n \leq \int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n$ et $\mu_{\psi} \leq \mu_{\varphi}$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration. Soient $r < 0$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ fixés. Introduisons la fonction auxiliaire

$$w = \sup(\varphi, (1 - \varepsilon)\psi + \varepsilon r).$$

Sur l'ouvert $\{\psi < r\}$ on a $(1 - \varepsilon)\psi + \varepsilon r > \psi \geq \varphi$, de sorte que

$$w = (1 - \varepsilon)v + \varepsilon r \quad \text{sur } \{\psi < r\}.$$

On en déduit

$$\mu_{w,\tilde{r}} = (1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi,(\tilde{r} - \varepsilon r)/(1 - \varepsilon)}$$

pour $\tilde{r} < r$, et la continuité à gauche des mesures $\mu_{\varphi,r}$ implique

$$\mu_{w,r} = (1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi,r}.$$

Par ailleurs w coïncide avec φ sur l'ouvert $\{\varphi > \varepsilon r\}$. On a donc $\mu_w = \mu_{\varphi}$. Soit $h \in C^2(X, \mathbf{R})$ une fonction ≥ 0 quelconque. D'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi,r}(h) &= \mu_{w,r}(h) \\ &= \mu_w(h) - \int_r^0 dt \int_{\{w < t\}} dd^c h \wedge (dd^c w)^{n-1} - \int_{\{w \geq r\}} h(dd^c w)^n, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la formule de Lelong-Jensen (1.7). Le choix $h \equiv 1$ donne $(1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi,r}(1) \leq \mu_w(1) = \mu_{\varphi}(1)$, et ceci entraîne la première inégalité du théorème d'après (1.10). Dans le cas général, soit γ une fonction C^∞ strictement psh sur X . Il existe une constante $C > 0$ telle que $-dd^c h \leq C dd^c \gamma$ sur $\bar{\Omega}$, donc

$$(3.5) \quad (1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi,r}(h) \leq \mu_{\varphi}(h) + C \int_r^0 dt \int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1}.$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand r tend vers 0, en prenant garde au fait que w dépend de r . Comme $\{w < t\} \subset \{w < \varepsilon t\}$, on a la majoration

$$\begin{aligned} \int_r^0 dt \int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1} &\leq \int_r^0 dt \int_{\{w < \varepsilon t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon r}^0 dt \int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour $t > \varepsilon r$, w coïncide avec φ au voisinage de $\{w = t\}$. D'après le théorème de Stokes, on a donc

$$\int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1} = \int_{\{\varphi < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c \varphi)^{n-1},$$

ce qui entraîne

$$\int_r^0 dt \int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon r}^0 dt \int_{\{\varphi < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c \varphi)^{n-1}.$$

Le théorème (1.7) montre que

$$\int_{-\infty}^0 dt \int_{\{\varphi < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} \leq (\sup \gamma - \inf \gamma) \int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty.$$

Par suite l'intégrale $\int_{\varepsilon r}^0 dt \int_{\{\varphi < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c \varphi)^{n-1}$ tend vers 0 quand r tend vers 0, et (3.5) entraîne pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité cherchée :

$$(1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi}(h) \leq \mu_{\varphi}(h). \quad \square$$

(3.6) *Remarque.* On a un résultat analogue à celui du théorème (3.4) pour les mesures

$$\bar{\mu}_{\varphi, -\infty} := \lim_{r \rightarrow -\infty} \mu_{\varphi, r} = \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(-\infty)}(dd^c \varphi)^n,$$

à savoir que

$$(3.7) \quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \bar{\mu}_{\psi, -\infty} \leq \bar{\mu}_{\varphi, -\infty}.$$

Avec les notations précédentes, on obtient en effet lorsque $r \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^n \mu_{\psi, r}(h) &= \mu_{w, r}(h) \\ &\leq \mu_{w, \varepsilon r/2}(h) - \int_r^{\varepsilon r/2} dt \int_{\{w < t\}} dd^c h \wedge (dd^c w)^{n-1} \\ &\leq \mu_{w, \varepsilon r/2}(h) + C \int_r^{\varepsilon r/2} dt \int_{\{w < \varepsilon t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c w)^{n-1} \\ &= \mu_{\varphi, \varepsilon r/2}(h) + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\varepsilon r}^{\varepsilon^2 r/2} dt \int_{\{w < t\}} dd^c \gamma \wedge (dd^c \varphi)^{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Bien que la démonstration précédente soit de nature globale, le théorème (3.4) est en fait un résultat essentiellement local.

(3.8) **Théorème.** Soient $\varphi, \psi: \Omega \rightarrow]-\infty, 0[$ des fonctions psh continues exhaustives telles que

$$\int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty, \quad \int_{\Omega} (dd^c \psi)^n < +\infty.$$

On suppose qu'il existe un ouvert relatif $\omega \subset \partial\Omega$ et une fonction $\lambda \geq 0$ sur ω telle que pour tout point $a \in \omega$ on ait

$$\limsup_{\omega \ni z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \lambda(a) < +\infty.$$

Alors $d\mu_{\psi}(\zeta)^n d\mu_{\varphi}(\zeta)$ sur ω . Si la \limsup est une limite, alors $\mu_{\psi} = \lambda^n \mu_{\varphi}$ sur ω .

On observera que la \limsup n'est pas supposée non tangentielle. Il résulte donc des hypothèses que λ est semi-continue supérieurement sur ω (et en particulier localement bornée).

Démonstration. Soit $a \in \omega$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Par hypothèse il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que

$$\psi(z)/\varphi(z) < \lambda(a) + \varepsilon \quad \text{pour } z \in \Omega \cap U_a.$$

Considérons la fonction

$$w(z) = \max(\varphi(z), \psi(z)/(\lambda(a) + \varepsilon)).$$

Alors $\varphi(z) \leq w(z) \leq 0$ et $w(z)$ coïncide avec $\psi(z)/(\lambda(a) + \varepsilon)$ sur $\Omega \cap U_a$; on a donc $\mu_w = (\lambda(a) + \varepsilon)^{-n} \mu_{\psi}$ sur $\partial\Omega \cap U_a$. Le théorème (3.4) entraîne $\mu_w \leq \mu_{\varphi}$ sur $\partial\Omega$, d'où

$$\mu_{\psi} \leq (\lambda(a) + \varepsilon)^n \mu_{\varphi} \quad \text{sur } \partial\Omega \cap U_a.$$

L'inégalité $\mu_{\psi} \leq \lambda^n \mu_{\varphi}$ s'en déduit sur ω par semi-continuité de λ . Si de plus $\lambda = \lim \psi/\varphi$ sur ω , alors λ est continue et on a $\limsup \varphi/\psi = \lambda^{-1}$ sur l'ouvert $\omega^* = \{z \in \omega; \lambda(z) > 0\}$. On obtient par conséquent $\mu_{\varphi} \leq \lambda^{-n} \mu_{\psi}$, soit $\mu_{\psi} \geq \lambda^n \mu_{\varphi}$ sur ω^* . L'inégalité directe $\mu_{\psi} \leq \lambda^n \mu_{\varphi}$ implique d'autre part $\mu_{\psi} = 0$ sur $\omega \setminus \omega^*$. Il en résulte bien que $\mu_{\psi} = \lambda^n \mu_{\varphi}$ sur ω . \square

Une démonstration quasi-identique permet de déduire de (3.7) le résultat suivant, qui était conjecturé (sous une forme plus faible) dans [4].

(3.9) **Théorème.** Soient u, v des fonctions psh continues sur une variété de Stein X , à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, telles que $u^{-1}(-\infty) \Subset X$ et $v^{-1}(-\infty) \Subset X$. On suppose que pour tout point a d'un ouvert relatif $\omega \subset u^{-1}(-\infty)$ on a

$$\limsup_{u(z) > -\infty, z \rightarrow a} \frac{v(z)}{u(z)} = \lambda(a) < +\infty.$$

Alors $d\bar{\mu}_{v, -\infty}(\zeta) \leq \lambda(\zeta)^n d\bar{\mu}_{u, -\infty}(\zeta)$ sur ω , avec égalité si la \limsup est une limite.

Comme $(dd^c \text{Log } |z|)^n = (2\pi)^n \delta_0$ dans \mathbf{C}^n , il découle en particulier du théorème (3.9) que si u possède un pôle logarithmique isolé en un point $a \in X$ (i.e. si

$u(z) \sim \text{Log} |z - a|$ quand $z \rightarrow a$) alors

$$(3.10) \quad \bar{\mu}_{u, -\infty} = (2\pi)^n \delta_a,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a . Nous renvoyons le lecteur à [4], § 4 pour plus de détails sur cette question.

4. Fonction de Green pluricomplexe

Soit X une variété de Stein et $\Omega \Subset X$ un ouvert connexe. Nous nous proposons de construire un potentiel de Green adapté à l'étude des fonctions de plusieurs variables complexes; ce potentiel sera en particulier un invariant biholomorphe du domaine Ω . Pour cela, on considère le problème de Dirichlet suivant: pour tout point $z \in \Omega$, trouver une fonction $u_z: \bar{\Omega} \rightarrow [-\infty, 0]$ continue sur $\bar{\Omega}$ et psh sur Ω , vérifiant les propriétés

$$(4.1) \quad u_z|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(4.2) \quad (dd^c u_z)^n = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \{z\} \quad \text{et} \quad u_z(\zeta) \sim \text{Log} |\zeta - z| \text{ quand } \zeta \rightarrow z.$$

L'existence de solutions pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur de Monge-Ampère complexe a été démontrée de manière générale par Bedford-Taylor [1]. Le problème particulier ci-dessus a été étudié tout récemment par M. Klimek [9] et par L. Lempert [11, 12]; ce dernier a obtenu des résultats très précis dans le cas d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ strictement convexe.

Une condition nécessaire évidente pour l'existence de la solution u_z est que l'ouvert Ω soit hyperconvexe. Inversement, cette condition est suffisante, et on a le résultat suivant qui précise le théorème (1.6) de [9].

(4.3) **Théorème.** *Soit Ω un domaine hyperconvexe. Il existe sur Ω une unique fonction u_z psh continue, solution de (4.1) et (4.2). Cette fonction vérifie*

$$(4.4) \quad (dd^c u_z)^n = (2\pi)^n \delta_z,$$

et peut se définir comme l'enveloppe supérieure

$$(4.5) \quad u_z(\zeta) = \sup_v \{v(\zeta)\}$$

où v décrit l'ensemble des fonctions psh ≤ 0 sur Ω telles que

$$(4.6) \quad v(\zeta) \leq \text{Log} |\zeta - z| + C_v,$$

C_v étant une constante quelconque.

Existence de u_z . Définissons u_z à l'aide de (4.5) et (4.6). X étant supposée plongée dans \mathbb{C}^N , on peut choisir les coordonnées de façon que les n premières $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) := \zeta'$ définissent un système de coordonnées locales au voisinage de z . Soit $|\zeta' - z'| < r$ une petite boule contenue dans Ω et soit $R = \sup_{\zeta \in \Omega} |\zeta - z|$. Toute fonction psh $v \leq 0$ sur la boule $|\zeta' - z'| < r$ qui a un pôle logarithmique au point z vérifie $v(\zeta) \leq \text{Log} (|\zeta' - z'|/r)$, et a fortiori $v(z) \leq \text{Log} (|z - z|/r)$. D'autre part, la

fonction $\zeta \mapsto \text{Log}(|\zeta - z|/R)$ est ≤ 0 sur Ω . Par définition de u_z , on en déduit donc

$$(4.7) \quad \text{Log}(|\zeta - z|/R) \leq u_z(\zeta) \leq \text{Log}(|\zeta - z|/r) \quad \text{sur } \Omega.$$

D'après P. Lelong [10] la régularisée supérieure

$$u_z^*(a) = \limsup_{\zeta \rightarrow a} u_z(\zeta)$$

est psh sur Ω . Comme u_z est ≤ 0 et vérifie (4.6), il en est de même pour u_z^* ; u_z^* est donc l'une des fonctions v de l'enveloppe supérieure (4.5). Par suite $u_z^* = u_z$ et ceci équivaut à dire que u_z est psh.

Vérifions ensuite que $u_z(\zeta) \rightarrow 0$ quand $\zeta \rightarrow \partial\Omega$. Par hypothèse, il existe une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow]-\infty, 0[$ continue psh et exhaustive. Posons

$$(4.8) \quad \begin{aligned} v(\zeta) &= \max(C\varphi(\zeta), \text{Log}(|\zeta - z|/R)) & \text{si } |\zeta - z| > r, \\ v(\zeta) &= \text{Log}(|\zeta - z|/R) & \text{si } |\zeta - z| \leq r, \end{aligned}$$

où la constante $C > 0$ est choisie assez grande pour que $C\varphi(\zeta) < \text{Log}(r/R)$ sur $\{|\zeta - z| = r\}$. Alors v est psh ≤ 0 sur Ω . On a donc $v \leq u_z \leq 0$, et en particulier $C\varphi \leq u_z \leq 0$ au voisinage de $\partial\Omega$. Par suite, u_z tend vers 0 sur $\partial\Omega$.

Montrons maintenant que u_z est continue sur $\Omega \setminus \{z\}$, en nous inspirant de la méthode de J.B. Walsh [22]. Il suffit de prouver que u_z est semi-continue inférieurement, et ceci revient à montrer que u_z est une enveloppe sup(v_ε) de fonctions psh continues. On sait qu'il existe une suite décroissante (w_ν) de fonctions psh C^∞ sur Ω telles que $\lim w_\nu = u_z$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Pour $|\zeta - z| = \varepsilon$ et ε assez petit, (4.7) implique

$$w_\nu(\zeta) \geq u_z(\zeta) \geq \text{Log}(\varepsilon/R) > (1 - \varepsilon) \text{Log}(\varepsilon|\zeta - z|),$$

tandis que

$$(1 - \varepsilon) \text{Log}(\varepsilon|\zeta - z|) > \text{Log}(|\zeta - z|/r) \quad \text{si } |\zeta - z| = \eta(\varepsilon) := \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

D'après (4.7), le lemme de Dini entraîne pour $v = v(\varepsilon)$ assez grand:

$$\begin{aligned} w_\nu(\zeta) &< (1 - \varepsilon) \text{Log}(\varepsilon|\zeta - z|) & \text{sur } \{|\zeta - z| = \eta(\varepsilon)\}, \\ w_\nu(\zeta) &< 0 & \text{sur } \{\varphi(\zeta) = -\varepsilon^3\}. \end{aligned}$$

En particulier si ε est assez petit, on a $w_\nu(\zeta) - \varepsilon < \varepsilon^{-2} \varphi(\zeta)$ sur $\{\varphi(\zeta) = -\varepsilon^3\}$, tandis que $w_\nu(\zeta) - \varepsilon > \varepsilon^{-2} \varphi(\zeta)$ sur $\{\varphi(\zeta) = -\varepsilon\}$. Définissons alors une fonction psh continue v_ε sur Ω en posant $v = v(\varepsilon)$ et

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(\zeta) &= \varepsilon^{-2} \varphi(\zeta) & \text{pour } \varphi(\zeta) \geq -\varepsilon^3, \\ v_\varepsilon(\zeta) &= \max(w_\nu(\zeta) - \varepsilon, \varepsilon^{-2} \varphi(\zeta)) & \text{pour } -\varepsilon \leq \varphi(\zeta) \leq -\varepsilon^3, \\ v_\varepsilon(\zeta) &= w_\nu(\zeta) - \varepsilon & \text{pour } \varphi(\zeta) \leq -\varepsilon \text{ et } |\zeta - z| \geq \varepsilon, \\ v_\varepsilon(\zeta) &= \max(w_\nu(\zeta), (1 - \varepsilon) \text{Log}(\varepsilon|\zeta - z|)) - \varepsilon & \text{pour } \eta(\varepsilon) \leq |\zeta - z| \leq \varepsilon, \\ v_\varepsilon(\zeta) &= (1 - \varepsilon) \text{Log}(\varepsilon|\zeta - z|) - \varepsilon & \text{pour } |\zeta - z| \leq \eta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Par construction de v_ε , on a $v_\varepsilon \leq 0$ et $v_\varepsilon(\zeta)$ et $v_\varepsilon(\zeta) \sim (1-\varepsilon) \text{Log} |\zeta - z|$ quand $\zeta \rightarrow z$. En revenant à la définition de u_z , on voit que $u_z \geq v_\varepsilon / (1-\varepsilon)$. Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon = \lim_{v \rightarrow +\infty} w_v = u_z$, il vient $u_z = \sup_{\varepsilon > 0} v_\varepsilon / (1-\varepsilon)$. CQFD.

Enfin, u_z vérifie $(dd^c u_z)^n = 0$ sur toute boule $B \Subset \Omega \setminus \{z\}$. Sinon, d'après Bedford-Taylor [1], on pourrait modifier u_z sur B en remplaçant u_z par la solution v du problème de Dirichlet

$$v|_{\partial B} = u_z|_{\partial B}, \quad (dd^c v)^n = 0,$$

et on aurait $v \geq u_z$, $v \neq u_z$, ce qui est contradictoire. Il résulte finalement de (4.7) et (3.10) que $(dd^c u_z)^n = (2\pi)^n \delta_z$ sur Ω .

Unicité de u_z . Soit v une autre solution de (4.1) et (4.2). Par définition de u_z on a $u_z \geq v$. Supposons donc qu'il existe un point $a \in \Omega \setminus \{z\}$ tel que $u_z(a) > v(a)$. Soit $\gamma \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction strictement psh ≤ -1 . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit la fonction

$$w = \max(u_z + \varepsilon \gamma, v)$$

a les propriétés suivantes:

- (i) $w(\zeta) \sim \text{Log} |\zeta - z|$ quand $\zeta \rightarrow z$,
- (ii) $w = v$ au voisinage de $\partial\Omega$,
- (iii) $w = u_z + \varepsilon \gamma$ au voisinage de a .

Des deux premières on déduit

$$\mathbf{1}_{\{z\}}(dd^c w)^n = (2\pi)^n \delta_z, \quad \int_{\Omega} (dd^c w)^n = \int_{\Omega} (dd^c v)^n = (2\pi)^n,$$

donc $(dd^c w)^n = 0$ sur $\Omega \setminus \{z\}$, ce qui contredit la troisième. \square

(4.9) *Remarque.* Il est important de noter que si on remplace la condition (4.2) par (4.4), alors la solution u_z n'est plus unique dès que $n > 1$. Dans le raisonnement précédent, on peut en effet remplacer le pôle logarithmique $\text{Log} |\zeta - z|$ par l'un quelconque des pôles

$$\text{Log} (|\zeta_1 - z_1|^{\alpha_1} + \dots + |\zeta_n - z_n|^{\alpha_n}), \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 1,$$

ou par tout autre pôle de masse résiduelle égale à $(2\pi)^n \delta_z$. A chacun de ces pôles correspondra une solution du problème de Dirichlet ayant la singularité prescrite et vérifiant (4.4).

(4.10) **Définition.** La fonction $u_\Omega(z, \zeta) = u_z(\zeta)$ sera appelée fonction de Green pluri-complexe du domaine Ω .

Il est clair que la fonction u_Ω est invariante par le groupe des automorphismes de Ω . Plus généralement, on a la propriété suivante:

(4.11) **Théorème.** Soit $\Omega' \Subset X'$ un ouvert hyperconvexe dans une variété de Stein X' de dimension n' , et $F: \Omega \rightarrow \Omega'$ une application holomorphe. Alors pour tous $z, \zeta \in \Omega$ on a

$$u_\Omega(z, \zeta) \geq u_{\Omega'}(F(z), F(\zeta)).$$

En particulier si F est biholomorphe alors $u_\Omega = F^* u_\Omega$.

Démonstration. Soit $v(\zeta) = u_\Omega(F(z), F(\zeta))$. Alors v est une fonction psh ≤ 0 sur Ω et

$$v(\zeta) \leq \text{Log} |F(\zeta) - F(z)| + C \leq \text{Log} |\zeta - z| + C' \quad \text{quand } z \rightarrow \zeta.$$

Par suite $u_\Omega(z, \zeta) \geq v(\zeta)$. \square

Une autre propriété immédiate est la continuité de u_Ω par exhaustion du domaine Ω .

(4.12) **Proposition.** Si Ω est réunion d'une suite croissante d'ouverts hyperconvexes Ω_ν , alors la suite u_{Ω_ν} est décroissante et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} u_{\Omega_\nu} = u_\Omega$. \square

Nous démontrons maintenant la continuité de la fonction u_Ω sur $\Omega \times \bar{\Omega}$.

(4.13) **Lemme.** Soit $a \in \Omega$ un point fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout voisinage ouvert U de a , il existe un voisinage $U' \Subset U$ de a tel que pour tous $(x, \zeta), (y, \zeta) \in U' \times (\bar{\Omega} \setminus U)$ on ait

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \frac{u_x(\zeta)}{u_y(\zeta)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Démonstration. On suppose X plongée dans \mathbf{C}^N et $U = B(a, \alpha) \Subset \Omega$. D'après (4.7), il existe $0 < r < R$ tels que

$$\text{Log}(|\zeta - x|/R) \leq u_x(\zeta) \leq \text{Log}(|\zeta - x|/r), \quad \forall (x, \zeta) \in B(a, \alpha) \times \bar{\Omega}.$$

On cherche alors à modifier u_x de façon à obtenir une fonction psh ayant un pôle au point $\zeta = y$. Pour $\eta \in]0, \alpha[$ assez petit, on pose

$$\begin{aligned} v(\zeta) &= \text{Log}(|\zeta - y|/R) && \text{si } |\zeta - a| \leq \eta \\ v(\zeta) &= \max((1 + \varepsilon) u_x(\zeta), \text{Log}(|\zeta - x|/R)) && \text{si } |\zeta - a| \geq \eta. \end{aligned}$$

Ceci est cohérent pourvu que

$$(1 + \varepsilon) u_x(\zeta) < \text{Log}(|\zeta - y|/R) \quad \text{sur } \{\zeta; |\zeta - a| = \eta\}.$$

Il suffit pour cela de prendre $x, y \in B(a, \eta/2)$ et $\eta > 0$ assez petit pour que

$$(1 + \varepsilon) \text{Log}\left(\frac{3\eta}{2r}\right) < \text{Log}\left(\frac{\eta}{2R}\right).$$

On pose donc $U' = B(a, \eta/2)$. Pour $(x, \zeta), (y, \zeta) \in U' \times (\bar{\Omega} \setminus U)$ il vient par construction

$$u_y(\zeta) \geq v(\zeta) \geq (1 + \varepsilon) u_x(\zeta)$$

et de même $u_x(\zeta) \geq (1 + \varepsilon) u_y(\zeta)$ en échangeant les rôles de x et y . Le lemme est démontré. \square

(4.14) **Théorème.** u_Ω est continue sur $\Omega \times \bar{\Omega}$.

Démonstration. D'après (4.7), $u_\Omega(z, \zeta)$ tend vers $-\infty$ sur la diagonale. En dehors de la diagonale, on sait d'une part que u_Ω est continue en ζ (théorème (4.3)),

et d'autre part que u_Ω est continue en z avec uniformité locale par rapport à $\zeta \in \bar{\Omega}$ (lemme (4.13)). \square

Pour terminer ce paragraphe, signalons un certain nombre de problèmes ouverts importants.

(4.15) *Problème.* Pour tout domaine Ω , la fonction $u_\Omega(z, \zeta)$ est-elle symétrique en z et ζ ?

Si pour tous points $z, \zeta \in \Omega$ il existe un automorphisme analytique F tel que $F(z) = \zeta$ et $F(\zeta) = z$ (c'est le cas de la boule et du polydisque par exemple), alors le théorème (4.10) implique que u_Ω est symétrique. Il en est de même si Ω est un ouvert convexe de \mathbb{C}^n , car L. Lempert [11] a démontré dans ce cas que

$$u_\Omega(z, \zeta) = \text{Log tanh } c_\Omega(z, \zeta) = \text{Log tanh } k_\Omega(z, \zeta)$$

où c_Ω et k_Ω sont respectivement la distance de Carathéodory et la (pseudo)-distance de Kobayashi. Si Ω n'est pas convexe, ces relations ne sont plus nécessairement vraies, mais M. Klimek [9] a montré qu'on a en général

$$(4.16) \quad \text{Log tanh } c_\Omega(z, \zeta) \leq u_\Omega(z, \zeta) \leq \text{Log tanh } k_\Omega(z, \zeta).$$

L'autre question essentielle a trait à la régularité de la fonction u_Ω . On sait en effet que pour une donnée au bord C^∞ quelconque, la régularité de la solution de l'équation de Monge-Ampère homogène ne dépasse pas $C^{1+\text{lip}}$ en général (cf. Gamelin et Sibony [7] p. 99 pour un contre-exemple simple).

Questions ouvertes. Si Ω est strictement pseudoconvexe C^∞ est-il vrai que

$$(4.17) \quad u_z \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \bar{\Omega} \setminus \{z\}?$$

$$(4.18) \quad \text{la singularité de } \exp(2u_z) \text{ en } \zeta = z \text{ se résout par éclatement du point } z?$$

$$(4.19) \quad u_z \text{ est une fonction de Morse sur } \bar{\Omega} \setminus \{z\}?$$

$$(4.20) \quad (dd^c u_z) \text{ est de rang } n-1 \text{ en tout point?}$$

$$(4.21) \quad \exp(2u_z) \text{ est strictement psh en dehors des points critiques de } u_z?$$

Si (4.20) est vérifié, le fibré noyau $\text{Ker}(dd^c u_z)$ définit un feuilletage de rang 1 sur $\Omega \setminus \{z\}$, et la restriction de u_z à toute feuille F est harmonique non constante. Chaque feuille F est adhérente à z , sinon l'adhérence \bar{F} contiendrait un point ζ_0 où la fonction u_z atteint son minimum; alors la feuille F_0 passant par ζ_0 serait contenue dans \bar{F} , donc aussi dans $u_z(\zeta) \geq u_z(\zeta_0)$, ce qui contredit le principe du maximum pour $u_z|_{F_0}$. Si F est fermée dans $\Omega \setminus \{z\}$, le théorème de Remmert-Stein implique que F se prolonge en une courbe F' sur Ω . Il est donc naturel de conjecturer:

$$(4.22) \quad \text{toute feuille } F \text{ est fermée dans } \Omega \setminus \{z\}, \text{ et } z \text{ est un point simple (lisse) de } F' = F \cup \{z\}.$$

Ici encore, les propriétés (4.17)–(4.22) sont vraies si Ω est strictement convexe (cf. L. Lempert [11]). Dans ce cas, le feuilletage précédent admet pour feuilles les disques extrémaux de Ω relativement à la métrique de Kobayashi, et c'est précisément au moyen d'une étude très poussée de ces disques extrémaux que Lempert est parvenu à obtenir les résultats que nous avons mentionnés. Signalons que L. Lempert, H.L. Royden, N. Sibony et P.M. Wong ont construit

des exemples d'ouvert Ω lisse, borné, strictement pseudoconvexe et contractile, où il n'y a plus unicité des disques extrémaux de vecteur tangent initial donné (cf. [16]); ceux des disques qui passent par le point z ne constituent plus en général un feuilletage de $\Omega \setminus \{z\}$. Néanmoins, cet exemple ne contredit pas l'existence d'un feuilletage associé à u_z , car il n'y a aucune raison de penser que les feuilles Γ' soient nécessairement des disques.

La symétrie de u_Ω est en fait étroitement liée au problème de la régularité, comme le montre l'énoncé ci-dessous.

(4.23) **Proposition.** *Si (4.17), (4.20) et (4.22) sont vérifiées, alors la fonction u_Ω est symétrique.*

Démonstration. Soit a un point quelconque distinct de z et Γ la feuille passant par a . La fonction $\Gamma' \ni \zeta \mapsto u_\Omega(z, \zeta)$ est harmonique sur Γ avec un pôle logarithmique simple en $\zeta = z$, et elle tend vers 0 au bord. C'est donc la fonction de Green usuelle de Γ' , dont on sait qu'elle est symétrique en ses deux arguments. Le théorème (4.11) appliqué à l'inclusion $\Gamma' \subset \Omega$ donne par ailleurs $u_\Omega(a, z) \geq u_{\Gamma'}(a, z)$. Par conséquent

$$u_\Omega(a, z) \geq u_{\Gamma'}(a, z) = u_{\Gamma'}(z, a) = u_\Omega(z, a),$$

et la symétrie de u_Ω s'ensuit. \square

5. Mesures pluriharmoniques et noyau de Green pluricomplexe

Soit Ω un ouvert hyperconvexe, connexe et relativement compact dans une variété de Stein X , et soit $u_z(\zeta) = u_\Omega(z, \zeta)$ la fonction de Green pluricomplexe définie au § 4. Pour tout point $z \in \Omega$, le théorème (3.2) appliqué à l'exhaustion

$\varphi = \frac{1}{2\pi} u_z$ fournit une mesure positive $\mu_z = (2\pi)^{-n} \mu_{u_z}$ portée par $\partial\Omega$. Compte tenu de (4.4) on a $(dd^c \varphi)^n = \delta_z$, et le théorème (3.3) donne la formule de Green suivante:

(5.1) **Théorème.** *Soit une fonction $V \in C^0(\bar{\Omega})$ psh sur Ω . Alors*

$$\begin{aligned} \mu_z(V) &= V(z) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega \ni \zeta} dd^c V \wedge |u_z(\zeta)| (dd^c u_z)^{n-1} && \text{si } n \geq 1, \\ \mu_z(V) &= V(z) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int dd^c V \wedge (dd^c u_z)^{n-2} \wedge du_z \wedge d^c u_z && \text{si } n \geq 2. \end{aligned}$$

En particulier $\mu_z(V) \geq V(z)$, et si V est pluriharmonique on a $\mu_z(V) = V(z)$.

(5.2) **Définition.** *On dira que μ_z est la mesure pluriharmonique du point z et que $|u_z|(dd^c u_z)^{n-1}$ et $(dd^c u_z)^{n-2} \wedge du_z \wedge d^c u_z$ sont les noyaux de Green pluricomplexes de première et de deuxième espèce.*

Il est clair que les noyaux de Green ainsi définis se transportent par tout biholomorphisme $F: \Omega \rightarrow \Omega'$; si de plus F s'étend en une application continue $\bar{F}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}'$ (on ne suppose pas nécessairement que \bar{F} est un homéomorphisme!)

alors il est facile de vérifier que $\mu'_{F(z)}$ coïncide pour tout $z \in \Omega$ avec la mesure image directe $(\bar{F}|_{\partial\Omega})_* \mu_z$.

Nous allons maintenant démontrer un certain nombre de propriétés de base des mesures μ_z , en particulier que ces mesures sont absolument continues les unes par rapport aux autres. On a de manière générale l'inégalité de Harnack suivante.

(5.3) **Théorème.** *Pour tous $x, y \in \Omega$ on pose*

$$\delta_\Omega(x, y) = \limsup_{\zeta \rightarrow \partial\Omega} |\text{Log}(u_x(\zeta)/u_y(\zeta))|.$$

Alors δ_Ω est une distance compatible avec la topologie de variété de Ω et invariante par $\text{Aut}(\Omega)$. De plus, pour tous $x, y \in \Omega$ on a

$$e^{-n\delta_\Omega(x, y)} \mu_x \leq \mu_y \leq e^{n\delta_\Omega(x, y)} \mu_x.$$

Démonstration. Il est clair que $\delta_\Omega(x, y) = \delta_\Omega(y, x)$ et que δ_Ω satisfait l'inégalité triangulaire. Le lemme (4.13) montre par ailleurs que $\delta_\Omega(x, y)$ tend vers 0 lorsque x, y tendent vers un même point $a \in \Omega$. Par connexité de Ω , on voit donc que δ_Ω est finie et continue sur $\Omega \times \Omega$. Par définition de δ_Ω , on a

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \partial\Omega} \frac{u_y(\zeta)}{u_x(\zeta)} \leq e^{\delta_\Omega(x, y)}.$$

Le théorème (3.8) entraîne alors l'inégalité $\mu_y \leq e^{n\delta_\Omega(x, y)} \mu_x$, et de même on a $\mu_x \leq e^{n\delta_\Omega(x, y)} \mu_y$. Il reste à vérifier que δ_Ω est séparée; or $\delta_\Omega(x, y) = 0$ implique $\mu_x = \mu_y$, par suite $x = y$ puisque les fonctions pluriharmoniques séparent les points de la variété de Stein X . \square

Nous montrerons plus loin en nous appuyant sur un contre-exemple dû à N. Sibony [16] que la distance δ_Ω n'est pas reliée en général aux distances de Carathéodory ou de Kobayashi (cf. théorème (7.4) ci-dessous); la distance δ_Ω n'est d'ailleurs pas non plus reliée à la distance invariante construite par M. Klimek [9] à partir de la fonction u_Ω . Le résultat suivant montre l'existence d'un noyau de Poisson pluriharmonique, et précise la continuité des mesures μ_z par rapport à z .

(5.4) **Théorème.** *Il existe une fonction borélienne P_Ω sur $\Omega \times \Omega \times \partial\Omega$, telle que pour tous $(x, y, z) \in \Omega^3$, tout $\zeta \in \partial\Omega$ et tout automorphisme $F \in \text{Aut}(\Omega)$ bicontinu sur $\bar{\Omega}$, on ait*

$$(5.5) \quad d\mu_y(\zeta) = P_\Omega(x, y, \zeta) d\mu_x(\zeta),$$

$$(5.6) \quad e^{-n\delta_\Omega(x, y)} \leq P_\Omega(x, y, \zeta) \leq e^{n\delta_\Omega(x, y)},$$

$$(5.7) \quad P_\Omega(x, y, \zeta) = P_\Omega(x, y, \zeta) P_\Omega(y, z, \zeta),$$

$$(5.8) \quad P_\Omega(F(y), F(y), \bar{F}(\zeta)) = P_\Omega(x, y, \zeta).$$

De plus P_Ω est équicontinue en (x, y) par rapport à ζ .

On observera que l'équicontinuité de P_Ω en (x, y) est en fait une conséquence de (5.6) et (5.7). Nous ne connaissons la continuité de P_Ω en ζ que lorsque Ω est strictement convexe de classe C^∞ . Dans ce cas, d'après L. Lempert [11], u_Ω est de classe C^∞ au voisinage de tout point $(z, \zeta) \in \Omega \times \partial\Omega$, et $d\mu_z(\zeta) = (dd^c u_z)^{n-1} \wedge d^c u_z$ est une $(2n-1)$ -forme volume > 0 sur $\partial\Omega$, à coefficients C^∞ en les variables $(z, \zeta) \in \Omega \times \partial\Omega$.

(5.4) *Démonstration du théorème.* Les expressions «presque partout», «ensemble négligeable» se rapportent ici aux mesures μ_z (sans qu'il soit nécessaire de préciser z d'après le théorème (5.3)). Soit (x_k) une suite partout dense dans Ω . D'après le théorème de Radon-Nikodym il existe pour tout couple (x_k, x_l) une fonction borélienne $\zeta \mapsto P_1(x_k, x_l, \zeta)$ sur $\partial\Omega$, encadrée par les constantes $\exp(\pm n\delta_\Omega(x_k, x_l))$, telle que

$$d\mu_{x_l}(\zeta) = P_1(x_k, x_l, \zeta) d\mu_{x_k}(\zeta).$$

La propriété (5.7) sera alors vraie pour tous $x_j, x_k, x_l \in \Omega$ et tout $\zeta \in \partial\Omega \setminus N_{j,k,l}$, où $N_{j,k,l}$ est négligeable. Soit $N = \bigcap N_{j,k,l}$. On modifie P_1 sur N en posant

$$\begin{aligned} P_2(x_k, y_l, \zeta) &= P_1(x_k, y_l, \zeta) & \text{si } \zeta \in \partial\Omega \setminus N, \\ P_2(x_k, y_l, \zeta) &= 1 & \text{si } \zeta \in N. \end{aligned}$$

Les propriétés (5.6) et (5.7) sont alors vraies en tout point $\zeta \in \partial\Omega$, et elles montrent qu'on peut prolonger P_2 par continuité à $\Omega \times \Omega \times \partial\Omega$. D'après le théorème (5.3), l'application $x \mapsto \mu_x$ est continue pour la topologie faible; par conséquent P_2 va vérifier la propriété (5.5) (ainsi que (5.6) et (5.7)) pour tous $x, y \in \Omega$.

Il nous reste à construire P_Ω en sorte que la propriété d'invariance (5.8) soit satisfaite. Pour cela, on observe que le sous-groupe $G \subset \text{Aut}(\Omega)$ des automorphismes bicontinus sur $\bar{\Omega}$ est localement compact. Soit $d\sigma$ une mesure de Haar invariante à droite et ψ une fonction continue à support compact d'intégrale 1 sur G . On pose

$$P_3(x, y, \zeta) = \int_{F \in G} P_2(F(x), F(y), \bar{F}(\zeta)) \psi(F) d\sigma(F).$$

Pour F fixé, on a $P_2(F(x), F(y), \bar{F}(\zeta)) = P_2(x, y, \zeta)$ presque partout en ζ à cause de l'invariance des mesures μ_z . D'après le théorème de Fubini, l'ensemble

$$N'_{x,y,F} = \{\zeta \in \partial\Omega; P_3(F(x), F(y), \bar{F}(\zeta)) \neq P_3(x, y, \zeta)\}$$

est négligeable, et $P_3 = P_2$ ζ -presque partout. De plus P_3 vérifie (5.6), P_3 est continue en (x, y) , et l'application $F \mapsto P_3(F(x), F(y), \bar{F}(\zeta))$ est continue sur G . Soit (F_l) une suite dense dans G . La continuité de P_3 en x, y, F implique que

$$N' := \bigcup N'_{x,y,F} = \bigcup N'_{x_j, x_k, F_l};$$

N' est donc négligeable. On peut alors redéfinir P_3 sur N' en posant $P_4 = P_3$ sur $\partial\Omega \setminus N'$, $P_4 = 1$ sur N' . P_4 est invariante par G , mais elle ne vérifie peut être plus (5.7). Ceci n'est pas gênant, car on peut modifier à nouveau P_4 comme on l'a fait pour P_1 (cette opération préserve l'invariance par G). La fonction P_Ω ainsi obtenue répond à la question. \square

Étudions à titre d'illustration le cas de la boule et du polydisque.

(5.9) *Exemple.* $\Omega = \mathbf{B} =$ boule unité de \mathbf{C}^n .

Dans ce cas, il est clair que la fonction de Green est donnée en $z=0$ par $u_0(\zeta) = \text{Log} |\zeta|$; on a en effet $(dd^c u_0)^n = 0$ sur $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ par raison d'homogénéité. On sait d'autre part que $\text{Aut}(\mathbf{B})$ opère transitivement sur \mathbf{B} ; les fonctions u_z vont donc se déduire de u_0 par l'action de $\text{Aut}(\mathbf{B})$.

Suivant les notations de W. Rudin [15], désignons par $z \cdot \bar{\zeta}$ le produit scalaire hermitien de \mathbf{C}^n et par P, Q les projections orthogonales sur $\mathbf{C} \cdot z$ et $(\mathbf{C} \cdot z)^\perp$ respectivement; alors l'application

$$F_z(\zeta) = \frac{z - P\zeta + (1 - |z|^2)^{1/2} Q\zeta}{1 - \zeta \cdot \bar{z}}, \quad \zeta \in \mathbf{B},$$

est un automorphisme involutif de \mathbf{B} tel que $F_z(z) = 0$. Il en résulte

$$u_z(\zeta) = \text{Log} |F_z(\zeta)| = \frac{1}{2} \text{Log} \left(1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \zeta \cdot \bar{z}|^2} \right).$$

Quand ζ tend vers $a \in \partial\Omega$, on a donc

$$(5.10) \quad u_z(\zeta) \sim \frac{1}{2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - a \cdot \bar{z}|^2} (|\zeta|^2 - 1),$$

et le théorème (3.8) montre que

$$d\mu_z(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^n} d\mu_{u_z}(\zeta) = \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \zeta \cdot \bar{z}|^{2n}} (dd^c |\zeta|^2)^{n-1} \wedge d^c |\zeta|^2,$$

c'est-à-dire

$$d\mu_z(\zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \zeta \cdot \bar{z}|^{2n}} d\sigma(\zeta),$$

où σ est la mesure d'aire normalisée sur la sphère $\partial\mathbf{B}$. Le noyau $d\mu_z(\zeta)$ est donc précisément le noyau de Poisson relatif au laplacien invariant de la boule. D'autre part, les distances de Carathéodory et de Kobayashi de la boule sont données classiquement par

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{B}}(x, y) &= k_{\mathbf{B}}(x, y) = \text{Arg} \tanh |F_x(y)| \\ &= \text{Arg} \tanh \left(1 - \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|1 - x \cdot \bar{y}|^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La distance $\delta_{\mathbf{B}}$ que nous avons introduite dans le théorème (5.3) est donnée d'après (5.10) par la formule

$$\delta_{\mathbf{B}}(x, y) = \sup_{\zeta \in \partial\mathbf{B}} \left| \text{Log} \left(\frac{1 - |x|^2}{1 - |y|^2} \cdot \frac{|1 - \zeta \cdot \bar{y}|^2}{|1 - \zeta \cdot \bar{x}|^2} \right) \right|.$$

On a donc en particulier

$$\delta_{\mathbf{B}}(0, y) = \sup_{\zeta \in \partial \mathbf{B}} \left| \text{Log} \frac{|1 - \zeta \cdot \bar{y}|^2}{1 - |y|^2} \right| = \text{Log} \frac{1 + |y|}{1 - |y|} = 2c_{\mathbf{B}}(0, y).$$

Par transitivité de $\text{Aut}(\mathbf{B})$, il en résulte $\frac{1}{2}\delta_{\mathbf{B}} = c_{\mathbf{B}} = k_{\mathbf{B}}$.

(5.11) *Exemple.* $\Omega = D^n =$ polydisque unité de \mathbf{C}^n .

Par des raisonnements analogues aux précédents, on obtient

$$u_0(\zeta) = \text{Log} \max_j |\zeta_j|,$$

$$u_z(\zeta) = \text{Log} \max_j \left(\left| \frac{\zeta_j - z_j}{1 - \bar{z}_j \cdot \zeta_j} \right| \right).$$

Comme la fonction $\max(|\zeta_j|)$ est homogène et ne dépend localement que de $n - 1$ variables en dehors de la «polydiagonale» $\Delta = \{|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n|\}$, on voit que le courant $(dd^c u_0)^{n-1}$ est nul sur $\mathbf{C}^n \setminus \Delta$. Par conséquent μ_0 est portée par l'arête distinguée $\Gamma = \{|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n| = 1\}$. L'invariance par rotation entraîne alors

$$d\mu_0(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad \text{avec } \zeta_j = e^{i\theta_j}.$$

Le noyau $d\mu_0(\zeta)$ est donc le produit des noyaux de poisson des cercles $\{|z_j| = 1\}$:

$$d\mu_z(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1 - |z_j|^2}{|z_j - e^{i\theta_j}|^2} d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Les égalités $\frac{1}{2}\delta_{\Omega} = c_{\Omega} = k_{\Omega}$ sont encore vraies dans le cas du polydisque, comme le lecteur le vérifiera aisément.

6. Support des mesures pluriharmoniques

Nous nous intéressons ici au problème de déterminer le support des mesures μ_z lorsque Ω est un ouvert faiblement pseudoconvexe de classe C^k , $k \geq 2$. D'après Diederich-Fornaess [5], on sait qu'il existe un réel $\alpha \in]0, 1]$ et une fonction $\rho \in C^k(\bar{\Omega})$ telle que $\rho = 0$ et $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, $\rho < 0$ et $-|\rho|^\alpha$ psh sur Ω . La forme de Levi $dd^c \rho$ est ≥ 0 sur l'espace holomorphe tangent $HT(\partial\Omega)$, par conséquent $(dd^c \rho)^{n-1} \wedge d^c \rho$ est une $(2n - 1)$ -forme ≥ 0 sur $\partial\Omega$. Il est donc naturel de chercher des conditions pour que les mesures μ_z soient absolument continues par rapport à $(dd^c \rho)^{n-1} \wedge d^c \rho$ et, plus généralement, pour que μ_z soit portée par les points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$. Les deux résultats suivants apportent quelques éléments de réponse à ces questions.

(6.1) **Théorème.** *On suppose Ω de classe C^2 et ρ psh sur Ω . Alors pour tout $z \in \Omega$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1 (dd^c \rho)^{n-1} \wedge d^c \rho \leq \mu_z \leq C_2 (dd^c \rho)^{n-1} \wedge d^c \rho.$$

En particulier, μ_z est portée par le sous-ensemble ouvert de $\partial\Omega$ formé des points strictement pseudoconvexes.

Démonstration. D'après le théorème (3.8), il suffit de vérifier l'existence de constantes $C_3, C_4 > 0$ telles que $C_3\rho \leq u_z \leq C_4\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$. La minoration $u_z \geq C_3\rho$ résulte de la construction (4.8), tandis que la majoration $u_z \leq C_4\rho$ est une conséquence du classique lemme de Hopf. \square

(6.2) **Théorème.** *On suppose Ω de classe C^3 et $-|\rho|^\alpha$ psh sur Ω . Si q est un entier, on note $U(q) \subset \partial\Omega$ l'ensemble ouvert des points où la forme de Levi est de rang $\geq q$. Alors pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$\text{Supp } \mu_z \subset \overline{U(q)},$$

où q est le plus grand entier $< n\alpha$.

Compte tenu du théorème (6.1) on peut espérer que μ_z soit en fait portée par $U(q)$, mais les difficultés techniques liées à la non finitude de la masse de Monge-Ampère de $-|\rho|^\alpha$ rendent ce résultat malaisé à obtenir. Nous aurons besoin du lemme suivant.

(6.3) **Lemme.** *Soit $a \in \partial\Omega \setminus \overline{U(q)}$. Alors il existe une boule $B(a, \varepsilon)$ telle que pour tout $\zeta \in \Omega \cap B(a, \varepsilon)$ et tout entier k on ait*

$$(6.4) \quad \|(dd^c \rho_\zeta)^k\| \leq C_1 |\rho(\zeta)|^{k-q-1},$$

$$(6.5) \quad \|(dd^c \rho_\zeta)^{k-1} \wedge d\rho_\zeta \wedge d^c \rho_\zeta\| \leq C_2 |\rho(\zeta)|^{k-q},$$

où C_1, C_2 sont des constantes > 0 .

Démonstration. Le rang de la forme de Levi $dd^c \rho$ sur $HT(\partial\Omega)$ est par hypothèse $\leq q-1$ au voisinage de a . Pour tout $\eta \in \partial\Omega$, notons F_η le noyau de la forme hermitienne $dd^c \rho_\eta$ sur \mathbb{C}^n , et G_η le noyau de $dd^c \rho_\eta$ sur l'hyperplan $HT_\eta(\partial\Omega) = \partial\rho_\eta^{-1}(0)$. Pour $\eta \in \partial\Omega$ assez voisin de a , il vient

$$\dim G_\eta \geq (n-1) - (q-1) = n-q,$$

$$\dim F_\eta \geq \dim G_\eta - 1 \geq n-q-1.$$

Plaçons-nous dans un système de coordonnées locales centré au point a . Si $\zeta \in \Omega$ est un point voisin de a , on note $\eta = p(\zeta)$ sa projection orthogonale sur $\partial\Omega$. On a

$$dd^c \rho_\eta|_{F_\eta \times \mathbb{C}^n} = 0, \quad dd^c \rho_\eta|_{G_\eta \times HT_\eta(\partial\Omega)} = 0.$$

Comme $dd^c \rho$ est de classe C^1 , le théorème des accroissements finis montre que

$$\|dd^c \rho_\zeta|_{F_\eta \times \mathbb{C}^n}\| \leq C_3 |\rho(\zeta)|,$$

$$\|dd^c \rho_\zeta|_{G_\eta \times HT_\eta(\partial\Omega)}\| \leq C_4 |\rho(\zeta)|.$$

Notons G'_ζ la projection orthogonale de $G_\eta \subset HT_\eta(\partial\Omega)$ sur l'hyperplan $\partial\rho_\zeta^{-1}(0)$. $\partial\rho_\zeta^{-1}(0)$ et G'_ζ se déduisent respectivement de $HT_\eta(\partial\Omega)$ et G_η par des rotations d'angle $\leq C_5 |\rho(\zeta)|$. On obtient donc encore une majoration du type

$$\|dd^c \rho_\zeta|_{G'_\zeta \times \partial\rho_\zeta^{-1}(0)}\| \leq C_6 |\rho(\zeta)|.$$

En utilisant la décomposition orthogonale $C^n = F_\eta \oplus F_\eta^\perp$ (resp. $\partial \rho_\zeta^{-1}(0) = G'_\zeta \oplus G''_\zeta$) dans les variables C -linéaires, on en déduit

$$\begin{aligned} \|(dd^c \rho_\zeta)^k\| &\leq C_7 |\rho(\zeta)|^{k - \dim F_\eta^\perp} \leq C_1 |\rho(\zeta)|^{k - q - 1}, \\ \|(dd^c \rho_\zeta)^{k-1}|_{\partial \rho_\zeta^{-1}(0)}\| &\leq C_8 |\rho(\zeta)|^{k-1 - \dim G'_\zeta} \leq C_9 |\rho(\zeta)|^{k-q}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation équivaut à (6.5). \square

Démonstration du théorème (6.2). Comme $-|\rho|^\alpha$ est supposée psh sur Ω , la construction (4.8) montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$u_z \geq -C |\rho|^\alpha \text{ au voisinage de } \partial\Omega.$$

On ne peut néanmoins appliquer directement le théorème (3.8), car la masse de Monge-Ampère de $-|\rho|^\alpha$ est infinie au voisinage des points strictement pseudoconvexes. On va donc commencer par construire un ouvert $\tilde{\Omega} \subset \Omega \cap B(a, \varepsilon)$ où cette masse sera finie. Soit $\psi \in C^\infty(B(a, \varepsilon))$ définie par

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= 0 && \text{si } |\zeta - a| \leq \varepsilon/2, \\ \psi(\zeta) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon/2 - |\zeta - a|} + \frac{1}{\varepsilon - |\zeta - a|}\right) && \text{si } \varepsilon/2 < |\zeta - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors $\psi(\zeta)$ tend vers $+\infty$ sur $\partial B(a, \varepsilon)$, et une vérification triviale montre que $\psi(\zeta)$ est fonction convexe croissante de $|\zeta - a|$ dès que $\varepsilon \leq 1$. Par suite ψ est psh sur $B(a, \varepsilon)$. Posons alors

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= -|\rho|^\alpha + \psi \quad \text{sur } \Omega \cap B(a, \varepsilon), \\ \tilde{\Omega} &= \{\zeta \in \Omega \cap B(a, \varepsilon); \tilde{\rho}(\zeta) < 0\}. \end{aligned}$$

On a $\tilde{\rho} = -|\rho|^\alpha$ sur $\Omega \cap B(a, \varepsilon/2)$, donc

$$\Omega \cap B(a, \varepsilon/2) \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega \cap B(a, \varepsilon),$$

et $\tilde{\rho}$ est une fonction d'exhaustion psh < 0 sur $\tilde{\Omega}$. Le Hessien de $\tilde{\rho}$ est donné par

$$dd^c \tilde{\rho} = \alpha (|\rho|^{\alpha-1} dd^c \rho + (1-\alpha) |\rho|^{\alpha-2} d\rho \wedge d^c \rho) + dd^c \psi.$$

Pour montrer que $\int_{\tilde{\Omega}} (dd^c \tilde{\rho})^n < +\infty$, il suffit de montrer la convergence des intégrales

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{\tilde{\Omega}} |\rho|^{k(\alpha-1)} (dd^c \rho)^k \wedge (dd^c \psi)^{n-k}, \\ J_k &= \int_{\tilde{\Omega}} |\rho|^{k(\alpha-1)-1} (dd^c \rho)^{k-1} \wedge d\rho \wedge d^c \rho \wedge (dd^c \psi)^{n-k}, \end{aligned}$$

pour $0 \leq k \leq n$ (resp. $1 \leq k \leq n$). Or $\psi < |\rho|^\alpha$ sur $\tilde{\Omega}$, d'où

$$\|dd^c \psi\| = O\left(\frac{\psi(\zeta)}{(\varepsilon/2 - |\zeta - a|)^4}\right) = O(\psi (\text{Log } \psi)^4) = O(|\rho|^\alpha (\text{Log } \rho)^4).$$

En utilisant le lemme (6.3), on voit que

$$\begin{aligned} I_k &\leq C_3 \int_{\tilde{\Omega}} |\rho|^{k(\alpha-1)+k-q-1+(n-k)\alpha} (\text{Log } \rho)^{4(n-k)} \\ &= C_3 \int_{\tilde{\Omega}} |\rho|^{n\alpha-q-1} (\text{Log } \rho)^{4(n-k)}, \end{aligned}$$

et de même

$$J_k \leq C_4 \int_{\tilde{\Omega}} |\rho|^{n\alpha-q-1} (\text{Log } \rho)^{4(n-k)}.$$

Les intégrales I_k et J_k sont donc convergentes dès que $q < n\alpha$. Sur $\Omega \cap B(a, \varepsilon/2)$ on a d'autre part

$$(dd^c \tilde{\rho})^{n-1} \wedge d^c \tilde{\rho} = \alpha^n |\rho|^{n(\alpha-1)} (dd^c \rho)^{n-1} \wedge d^c \rho.$$

La majoration (6.5) entraîne donc sur chaque hypersurface

$$S(r) := \{\zeta \in \Omega \cap B(a, \varepsilon/2); \rho(\zeta) = r\} = \{\tilde{\rho} = -|r|^\alpha\}$$

l'inégalité

$$\|(dd^c \tilde{\rho})^{n-1} \wedge d^c \tilde{\rho}|_{S(r)}\| \leq C_5 r^{n\alpha-q}.$$

Si $q < n\alpha$, on en déduit $\mu_{\tilde{\rho}} = 0$ sur $\partial\Omega \cap B(a, \varepsilon/2)$. Puisque $u_z \geq -C|\rho|^\alpha$, la fonction $v = \max(u_z, C\tilde{\rho})$ coïncide avec u_z sur $\Omega \cap B(a, \varepsilon/2)$ et vérifie $C\tilde{\rho} \leq v \leq 0$ sur $\tilde{\Omega}$. Grâce au théorème (3.8) on obtient finalement

$$(2\pi)^n \mu_z = \mu_{u_z} = \mu_v \leq C^n \mu_{\tilde{\rho}} = 0 \quad \text{sur } \Omega \cap B(a, \varepsilon/2). \quad \square$$

7. Comportement des mesures μ_z lorsque z tend vers le bord

Nous étudions ici la convergence des mesures μ_z lorsque z tend vers un point $a \in \partial\Omega$. Dans le cas des noyaux de Poisson usuels associés aux laplaciens, on sait que μ_z converge vers la mesure de Dirac au point a . L'exemple du polydisque montre que ce n'est pas toujours le cas dans la présente situation. Rappelons d'abord quelques définitions classiques qui nous seront utiles.

(7.1) **Définition.** On dira qu'un compact $K \Subset \partial\Omega$ est pic (relativement aux fonctions psh continues) s'il existe $V \in C^0(\tilde{\Omega})$ psh sur Ω , telle que $V=0$ sur K et $V < 0$ sur $\tilde{\Omega} \setminus K$.

Il est facile de voir que toute intersection d'ensembles pics est pic; la définition suivante est donc légitime.

(7.2) **Définition.** Si K est une partie compacte de $\partial\Omega$, on appelle enveloppe pic de K le compact \hat{K} , intersection des ensembles pics contenant K .

(7.3) **Théorème.** Lorsque z tend vers $a \in \partial\Omega$, la mesure μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. Par conséquent μ_z converge vers δ_a dès que $\widehat{\{a\}} = \{a\}$, en particulier dès que a est un point strictement pseudoconvexe de classe C^2 .

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction psh continue V égale à 0 sur $\widehat{\{a\}}$ et < 0 sur $\tilde{\Omega} \setminus \widehat{\{a\}}$. On a

$$V(z) \leq \mu_z(V) \leq 0,$$

et $V(z)$ tend vers $V(a)=0$ quand z tend vers a . Ceci entraîne bien que μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. \square

Le théorème ci-dessous montre que la distance δ_Ω est complète sous des hypothèses assez diverses et assez faibles sur $\partial\Omega$; il paraît donc naturel de conjecturer que δ_Ω est en fait toujours complète.

(7.4) **Théorème.** *La distance δ_Ω est complète dès que Ω vérifie l'une des hypothèses suivantes:*

(7.5) Ω est de classe C^2 ;

(7.6) $\partial\Omega$ possède au moins un point strictement pseudoconvexe de classe C^2 ;

(7.7) Ω est un ouvert convexe de \mathbf{C}^n ;

(7.8) pour tout $a \in \partial\Omega$, il existe $b \in \partial\Omega$ tel que $\widehat{\{a\}} \cap \widehat{\{b\}} = \emptyset$.

Signalons ici que N. Sibony [16] a construit un exemple d'ouvert Ω pseudoconvexe et strictement pseudoconvexe lisse sauf en un point, qui n'est pas complet la métrique de Kobayashi (et non plus a fortiori pour la métrique de Carathéodory ou celle de M. Klimek [9]). D'après le théorème (7.4), ces métriques ne sont donc pas comparables à la distance δ_Ω .

(7.4) *Démonstration du théorème.* On commence par prouver les implications (7.5) \Rightarrow (7.6) \Rightarrow (7.8) et (7.7) \Rightarrow (7.8).

● (7.5) \Rightarrow (7.6): il existe une fonction $\gamma \in C^\infty(X)$ strictement psh sur X , n'ayant pas de points critiques sur $\partial\Omega$. Alors le point $a_0 \in \partial\Omega$ où $\gamma|_{\partial\Omega}$ atteint son maximum est strictement pseudoconvexe, car $\Omega \subset \{\gamma < \gamma(a_0)\}$.

● (7.6) \Rightarrow (7.8): si $a_0 \in \partial\Omega$ est strictement pseudoconvexe, alors on peut créer une bosse sur $\partial\Omega$ au point a_0 , c'est-à-dire qu'il existe des voisinages $W \Subset \tilde{W}$ de a_0 , arbitrairement petits, tels que $\partial(\Omega \cup W) \cap \tilde{W}$ soit strictement pseudoconvexe de classe C^2 . D'après le théorème (2.13) l'ouvert $\Omega \cup W$ est hyperconvexe, donc il existe une fonction $\varphi \in C^0(\overline{\Omega \cup W})$ psh exhaustive et < 0 sur $\Omega \cup W$. On a $\varphi = 0$ sur $(\partial\Omega) \setminus W$ et $\varphi < 0$ sur $(\partial\Omega) \cap W$, par suite $((\partial\Omega) \setminus W)^\wedge = (\partial\Omega) \setminus W$ ne rencontre pas $\widehat{\{a_0\}} = \{a_0\}$. Comme W est arbitrairement petit, ceci démontre (7.8).

● (7.7) \Rightarrow (7.8): soit $a \in \partial\Omega$ et $\text{Re } \xi \cdot (z - a) < 0$ un demi-espace contenant le convexe Ω . Si on applique les définitions (7.1), (7.2) à la fonction pluriharmonique $V(z) = -\text{Log} |1 - \xi \cdot (z - a)|$ on obtient

$$\widehat{\{a\}} \subset \partial\Omega \cap \{\xi \cdot (z - a) = 0\}.$$

Tout point $b \in \partial\Omega$ où $z \mapsto \text{Re } \xi \cdot z$ est minimum vérifie de même l'inclusion analogue $\widehat{\{b\}} \subset \{\xi \cdot (z - b) = 0\}$, d'où $\widehat{\{a\}} \cap \widehat{\{b\}} = \emptyset$.

● La preuve sera achevée si on vérifie l'implication (7.8) \Rightarrow δ_Ω complète. Il suffit de montrer que sous l'hypothèse (7.8) les δ_Ω -boules sont relativement compactes dans Ω . Soit $x \in \Omega$ un point fixé; supposons par l'absurde qu'il existe un réel

$R > 0$ et une suite $y_k \in \Omega$ convergeant vers un point $a \in \partial\Omega$, telle que $\delta_\Omega(x, y_k) \leq R$. Alors l'inégalité de Harnack donne $\mu_x \leq e^{nR} \mu_{y_k}$, et d'après le théorème (7.3) ceci implique que μ_x est à support dans $\widehat{\{a\}}$. Par suite toute mesure μ_z est à support dans $\widehat{\{a\}}$. Si on fait tendre z vers un point $b \in \partial\Omega$ tel que $\widehat{\{a\}} \cap \widehat{\{b\}} = \emptyset$, alors μ_z converge vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{b\}}$, donc aussi sur $\widehat{\{a\}}$, ce qui est contradictoire. \square

On suppose désormais dans ce paragraphe que $\Omega \Subset X$ est un ouvert strictement pseudoconvexe de classe C^2 . Le comportement asymptotique de $d\mu_z(\zeta)$ au voisinage de la diagonale de $\bar{\Omega} \times \partial\Omega$ peut alors être décrit très précisément.

Soit $\rho \in C^2(\bar{\Omega})$ une fonction d'exhaustion strictement psh < 0 sur Ω . Soient (v_z) et (v'_z) deux familles de mesures positives sur $\partial\Omega$, définies et uniformément bornées pour $z \in \Omega$. On dira que (v_z) et (v'_z) ont même comportement asymptotique sur la diagonale si pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et tout $A \geq 1$ il existe un réel $\eta = \eta(\varepsilon, A) > 0$ tel que

$$(7.9) \quad (1 - \varepsilon) dv_z(\zeta) \leq dv'_z(\zeta) \leq (1 + \varepsilon) dv_z(\zeta),$$

pour $|\rho(z)| < \eta$ et $|\zeta - z| < A|\rho(z)|^{\frac{1}{2}}$.

(7.10) **Théorème.** On désigne par $J_\zeta^{2,0} \rho(z)$ la partie holomorphe du jet d'ordre 2 de $\rho(z)$ au point $z = \zeta$:

$$J_\zeta^{2,0} \rho(z) = \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} (z_j - \zeta_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} (z_j - \zeta_j)(z_k - \zeta_k).$$

Alors les mesures pluriharmoniques (μ_z) ont même comportement asymptotique sur la diagonale que les mesures (v_z) sur $\partial\Omega$ définies par

$$dv_z(\zeta) = \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{|\rho(z)|^n}{|J_\zeta^{2,0} \rho(z)|^{2n}} (dd^c \rho_\zeta)^{n-1} \wedge d^c \rho_\zeta.$$

Le développement limité de ρ au point ζ s'écrit

$$\rho(z) = 2 \operatorname{Re} J_\zeta^{2,0} \rho(z) + H \rho_\zeta(z - \zeta) + o(|z - \zeta|^2),$$

où $H \rho_\zeta(\xi) = \sum \partial^2 \rho / \partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k \cdot \xi_j \bar{\xi}_k$ est le Hessien de ρ en ζ . Comme ρ est strictement psh < 0 sur $\bar{\Omega}$, on en déduit

$$(7.11) \quad |J_\zeta^{2,0} \rho(z)| \geq \frac{1}{2} |\rho(z)| + c |z - \zeta|^2, \quad c > 0,$$

pour tous $(z, \zeta) \in \Omega \times \partial\Omega$ assez voisins. Par ailleurs, $J_\zeta^{2,0} \rho(z)$ est invariant mod $O(|z - \zeta|^3)$ par changement de coordonnées locales; l'estimation du théorème (7.10) a donc bien une signification intrinsèque.

Dans le cas de la boule, on peut choisir $\rho_{\mathbf{B}}(z) = |z|^2 - 1$; on obtient alors

$$J_\zeta^{2,0} \rho_{\mathbf{B}}(z) = \bar{\zeta} \cdot (z - \zeta) = \bar{\zeta} \cdot z - 1, \quad \forall \zeta \in \partial\mathbf{B},$$

de sorte que pour la boule on a exactement

$$dv_z(\zeta) = \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \bar{\zeta} \cdot \bar{z}|^{2n}} (dd^c |\zeta|^2)^{n-1} \wedge d^c |\zeta|^2 = d\mu_z(z).$$

Le cas d'un domaine Ω quelconque va s'obtenir à l'aide d'une approximation de Ω par des boules osculatrices intérieures et extérieures. Une première observation importante est que le comportement asymptotique des mesures v_z est invariant par changement de la fonction d'exhaustion ρ .

(7.12) **Lemme.** Soit $\rho' \in C^2(\bar{\Omega})$ une fonction < 0 et exhaustive sur Ω , telle que $d\rho' \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors les mesures v'_z associées à ρ' ont même comportement asymptotique sur la diagonale que les mesures v_z .

Démonstration. On peut écrire $\rho' = \lambda\rho$ avec $\lambda \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} (dd^c \rho'_z)^{n-1} \wedge d^c \rho'_z &= \lambda(\zeta)^n (dd^c \rho_z)^{n-1} \wedge d^c \rho_z, \\ J_{\zeta}^{2,0} \rho'(z) &= \lambda(\zeta) J_{\zeta}^{2,0} \rho(z) + \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} (z_j - \zeta_j) \sum_k \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta_k} (z_k - \zeta_k) \\ &= \left(\lambda(\zeta) + \sum_k \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta_k} (z_k - \zeta_k) \right) J_{\zeta}^{2,0} \rho(z) + O(|z - \zeta|^3) \\ &\sim \lambda(\zeta) J_{\zeta}^{2,0} \rho(z) \end{aligned}$$

lorsque $z \in \Omega$ tend vers $\zeta \in \partial\Omega$. Par suite

$$dv'_z(\zeta) \sim \frac{\lambda(z)^n}{\lambda(\zeta)^n} dv_z(\zeta) \sim dv_z(\zeta). \quad \square$$

On va maintenant profiter de la liberté qui nous est laissée dans le choix de ρ pour contruire une fonction d'exhaustion normalisée.

(7.13) **Lemme.** Il existe une fonction $\tilde{\rho} \in C^2(\bar{\Omega})$ strictement psh < 0 et exhaustive sur Ω , telle que

$$(dd^c \tilde{\rho} - d\tilde{\rho} \wedge d^c \tilde{\rho})^n = 0$$

en tout point de $\partial\Omega$. Une telle fonction $\tilde{\rho}$ sera dite fonction d'exhaustion normalisée sur Ω .

Démonstration. Soit $\lambda \in C^0(\bar{\Omega})$ la fonction définie par

$$\lambda = \frac{1}{n} (dd^c \rho)^{n-1} \wedge d\rho \wedge d^c \rho / (dd^c \rho)^n.$$

D'après le théorème de prolongement de Whitney, il existe une fonction $\tilde{\lambda} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, $\tilde{\lambda} > 0$, telle que $\tilde{\lambda} = \lambda$ sur $\partial\Omega$ et $|D^\alpha \tilde{\lambda}| = o(\rho^{-|\alpha|})$ pour tout multi-index $\alpha \neq 0$. La fonction $\tilde{\rho} = \rho + (1 - 1/\tilde{\lambda})\rho^2/2$ est alors dans $C^2(\bar{\Omega})$ et vérifie

$$dd^c \tilde{\rho} - d\tilde{\rho} \wedge d^c \tilde{\rho} = dd^c \rho - \frac{1}{\lambda} d\rho \wedge d^c \rho \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \text{ de signature } (n-1, 0).$$

Par suite $\tilde{\rho}$ est normalisée, et $\tilde{\rho}$ est strictement psh au voisinage de $\partial\Omega$. Après modification éventuelle sur un compact, $\tilde{\rho}$ répond à la question. \square

La condition de normalisation signifie simplement que la norme de la différentielle $d\tilde{\rho}$ relativement à la métrique $dd^c \tilde{\rho}$ est égale à 1 sur le bord. On obser-

vera que la fonction $\rho_{\mathbf{B}}$ est normalisée. Le point crucial du raisonnement repose sur le lemme suivant, montrant l'existence de boules osculatrices intérieures et extérieures en tout point de $\partial\Omega$.

(7.14) **Lemme.** *On suppose que ρ est une fonction d'exhaustion normalisée du domaine Ω . Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe un voisinage Ω'_ε de $\bar{\Omega}$ dans X , une boule $B'_\varepsilon \subset \mathbf{C}^n$ contenant $\bar{\mathbf{B}}$ et un réel $\delta(\varepsilon) > 0$ ayant les propriétés suivantes. Pour tout $a \in \partial\Omega$, il existe un domaine $D'_{a,\varepsilon} \subset \Omega'_\varepsilon$ contenant $\{z \in X; |z - a| < \delta(\varepsilon)\}$, des applications $\Phi_a = \Phi_{a,\varepsilon}: \Omega'_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}^n$ holomorphe et $\Psi_a = \Psi_{a,\varepsilon}: D'_{a,\varepsilon} \rightarrow B'_\varepsilon$ biholomorphe tels que :*

(7.15) les familles (Φ_a) et (Ψ_a) sont uniformément bornées;

(7.16)
$$\Phi_a(\Omega) \subset \mathbf{B}, \quad \Phi_a(a) \in \partial\mathbf{B}$$

et la restriction $\Phi_a: D'_{a,\varepsilon} \rightarrow \Phi_a(D'_{a,\varepsilon})$ est biholomorphe;

(7.17)
$$D_{a,\varepsilon} := \Psi_a^{-1}(\mathbf{B}) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \Psi_a(a) \in \partial\mathbf{B};$$

(7.18)
$$|\rho(z) - \rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(z)| \leq \varepsilon |z - a|^2 \quad \text{si} \quad |z - a| < \delta(\varepsilon);$$

(7.19)
$$|\rho(z) - \rho_{\mathbf{B}} \circ \Psi_a(z)| \leq \varepsilon |z - a|^2 \quad \text{si} \quad |z - a| < \delta(\varepsilon).$$

Les propriétés (7.16) et (7.17) expriment intuitivement que les «boules» $\Phi_a^{-1}(\mathbf{B})$ et $\Psi_a^{-1}(\mathbf{B})$ sont tangentes extérieurement et intérieurement à $\partial\Omega$ au point a ; les inégalités (7.18), (7.19) expriment de plus que la courbure de $\Phi_a^{-1}(\partial\mathbf{B})$ et $\Psi_a^{-1}(\partial\mathbf{B})$ approche à ε près celle de $\partial\Omega$ au voisinage de a (cf. Fig. 1 ci-dessous).

(7.14) *Démonstration du lemme.* On commence par construire un système de coordonnées locales adaptées au point a .

Quitte à remplacer X par un voisinage convenable de $\bar{\Omega}$, on peut supposer que Ω est un ouvert de Runge dans X . D'après le théorème de plongement de Forneaess [6], il existe alors un plongement $X \hookrightarrow \mathbf{C}^N$ et un ouvert strictement convexe $G \subset \mathbf{C}^N$ de classe C^2 tel que $\Omega = X \cap G$, ∂G étant transverse à X le long de $\partial\Omega$. Relativement à la métrique $i\partial\bar{\partial}\rho_a$ sur T_aX , soit $e_1 \in T_aX$ un vecteur unitaire sortant normal à $\partial\Omega$, et (e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de $HT_a(\partial\Omega)$.

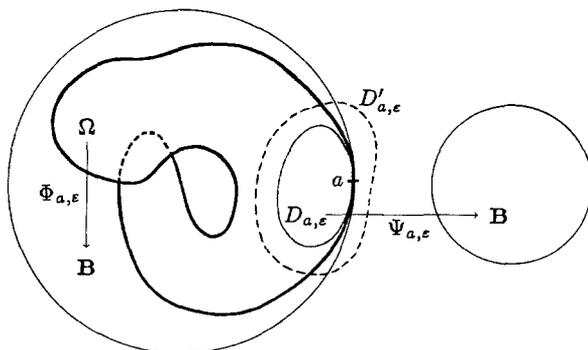


Fig. 1

Complétons (e_2, \dots, e_n) en une base (e_2, \dots, e_N) de $HT_a(\partial G)$. L'hypothèse de transversalité $T_a X \not\subset T_a(\partial G)$ implique $e_1 \notin HT_a(\partial G)$, par suite (e_1, \dots, e_N) est une base de \mathbf{C}^N . Notons $Z = (z_1, \dots, z_N)$ les coordonnées affines sur \mathbf{C}^N relatives au repère $(a; e_1, \dots, e_N)$. Par construction $z = (z_1, \dots, z_n)$ est un système de coordonnées locales sur X au point a ; de plus $T_a(\partial G) = \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}$ et on a

$$(7.20) \quad \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(a) = 1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(a) = \dots = \frac{\partial \rho}{\partial z_n}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) = \delta_{j,k};$$

l'égalité $\partial \rho / \partial z_1(a) = 1$ provient du fait que ρ est supposée normalisée. La stricte convexité de G implique que $\bar{G} \setminus \{a\}$ est contenu pour $R > 0$ assez grand dans le cylindre

$$\begin{aligned} \{|z + (R, 0, \dots, 0)| < R\} &= \left\{ 2\operatorname{Re} z_1 + \frac{1}{R} |z|^2 < 0 \right\} \\ &= \left\{ 2\operatorname{Re} \tilde{z}_1 + |\tilde{z}_1|^2 + \frac{1}{R} |\tilde{z}|^2 < 0 \right\}, \end{aligned}$$

avec $\tilde{z} = z / (1 - z_1/2)$. Quitte à remplacer les coordonnées (z_j) par les (\tilde{z}_j) , ce qui préserve (7.20), on peut supposer que $\bar{\Omega} \setminus \{a\}$ est contenu dans le cylindre à base ellipsoïdale

$$(7.21) \quad 2\operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2 + \frac{1}{R} |z|^2 < 0.$$

D'après (7.20), la fonction ρ admet un développement limité de la forme

$$(7.22) \quad \rho(Z) = 2\operatorname{Re}(z_1 + \sum_{1 \leq j, k \leq n} c_{jk} z_j z_k) + |z|^2 + o(|z|^2),$$

avec

$$c_{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial z_k}(a).$$

● *Construction de Φ_a .*

La difficulté est que l'ellipsoïde (7.21) a en général au point a une courbure beaucoup plus faible que celle de $\partial \Omega$. Pour corriger ce défaut, on va déformer l'ellipsoïde au voisinage de a en introduisant les nouvelles coordonnées

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 + \frac{\varepsilon}{2} z_1^2 + \left(1 - \frac{z_1}{\eta}\right)^{-\varepsilon^2} \sum_{j,k} c_{jk} z_j z_k, \\ z'_j &= (1 - \varepsilon)^{1/2} \left(1 - \frac{z_1}{\eta}\right)^{-\varepsilon^2/2} z_j, \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\Phi_a(Z) = (z'_1 + 1, z'_2, \dots, z'_n),$$

et on va montrer que $\Phi_a(\Omega) \subset \mathbf{B}$ pour $\eta > 0$ assez petit. Sur $\bar{\Omega}$ on a $\operatorname{Re} z_1 \leq 0$, d'où

$$\left|1 - \frac{z_1}{\eta}\right| \geq 1 \quad \text{et} \quad \theta(z_1) := \arg\left(1 - \frac{z_1}{\eta}\right) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Soit $Z \in \bar{\Omega}$ fixé. Il vient

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) &= |\Phi_a(Z)|^2 - 1 = 2 \operatorname{Re} z'_1 + |z'_1|^2 \\ &\leq \left| 1 - \frac{z_1}{\eta} \right|^{-\varepsilon^2} [2 \operatorname{Re}(e^{-i\varepsilon^2\theta(z_1)} \sum_{j,k} c_{jk} z_j z_k) + (1-\varepsilon)(|z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)] \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} z_1 + \varepsilon \operatorname{Re}(z_1^2) + |z_1|^2 + C_1 |z|^3, \end{aligned}$$

où C_1 est une constante > 0 indépendante de ε et η . Distinguons maintenant deux cas. Si $[\dots] \leq 0$, on obtient

$$\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) \leq 2 \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2 + \varepsilon |z|^2 + C_1 |z|^3,$$

et donc pour $\varepsilon \leq 1/2R$ l'inéquation (7.21) entraîne

$$\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) \leq -\varepsilon |z|^2 + C_1 |z|^3.$$

Si $[\dots] > 0$, il vient

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) &\leq 2 \operatorname{Re}(e^{-i\varepsilon^2\theta(z_1)} \sum_{j,k} c_{jk} z_j z_k) + (1-\varepsilon) |z|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} z_1 + \varepsilon (\operatorname{Re}(z_1^2) + |z_1|^2) + C_1 |z|^3 \\ &\leq 2 \operatorname{Re}(z_1 + \sum_{j,k} c_{jk} z_j z_k) + |z|^2 \\ &\quad + (C_1 |z|^3 + 2\varepsilon (\operatorname{Re} z_1)^2 + (O(\varepsilon^2) - \varepsilon) |z|^2) \\ &\leq \rho(Z)(1 + 2\varepsilon \rho(Z)) + o(|z|^2) + (O(\varepsilon^2) - \varepsilon) |z|^2. \end{aligned}$$

Pour $Z \in \Omega$, ε assez petit et $|z| < r_1(\varepsilon)$, on a donc dans les deux cas $\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) \leq -\frac{\varepsilon}{2} |z|^2 < 0$. D'autre part $(1 - z_1/\eta)^{-\varepsilon^2}$ converge uniformément vers 0 sur le compact $\bar{\Omega} \cap \{|z| \geq r_1(\varepsilon)\}$ quand η tend vers 0. Sur ce compact $\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z)$ converge vers $2 \operatorname{Re}\left(z_1 + \frac{\varepsilon}{2} z_1^2\right) + \left|z_1 + \frac{\varepsilon}{2} z_1^2\right|^2$, et pour ε assez petit l'inéquation (7.21) entraîne

$$2 \operatorname{Re}\left(z_1 + \frac{\varepsilon}{2} z_1^2\right) + \left|z_1 + \frac{\varepsilon}{2} z_1^2\right|^2 \leq 2 \operatorname{Re} z_1 + \left(1 + \frac{1}{R}\right) |z_1|^2 < 0.$$

Pour $\eta = \eta_1(\varepsilon)$ assez petit, on obtient par conséquent $\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a < 0$ sur Ω tout entier, c'est-à-dire $\Phi_a(\Omega) \subset \mathbf{B}$; (7.16) s'ensuit. De plus Φ_a est biholomorphe sur $D'_{a,\varepsilon}$ dès que $D'_{a,\varepsilon}$ est contenu dans une boule de centre a de rayon $r_2(\varepsilon)$ assez petit. La propriété (7.18) est vérifiée si $\delta(\varepsilon)$ est suffisamment petit devant $\eta_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon)$, car on a le développement de Taylor

$$(7.23) \quad \rho(Z) - \rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a(Z) = -\varepsilon \operatorname{Re}(z_1^2) + \varepsilon(|z_2|^2 + \dots + |z_n|^2) + o(|z|^2).$$

● *Construction de Ψ_a .*

Le problème étant cette fois local, on introduit les coordonnées

$$w_1 = z_1 + \sum c_{jk} z_j z_k, \quad w_2 = z_2, \dots, w_n = z_n.$$

D'après (7.22), on a le développement limité

$$(7.24) \quad \rho(Z) = 2 \operatorname{Re} w_1 + |w|^2 + o(|w|^2),$$

et pour $r_3(\varepsilon) < r_2(\varepsilon)$ assez petit, Ω contient l'intersection de la boule

$$\left\{ 2 \operatorname{Re} w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |w|^2 < 0 \right\}$$

de rayon $1/(1 + \varepsilon/4) < 1$ avec la boule $\{|w| < r_3(\varepsilon)\}$. L'idée est maintenant de chercher un changement de coordonnées tangent à l'identité, dans lequel la «boule» osculatrice à $\partial\Omega$ sera de diamètre arbitrairement petit. On considère pour cela une composée $F = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_5$ de transformations conformes de la variable w_1 , avec les notations suivantes:

$$D_R = \{|w_1 + R| < R\}, \quad D_\infty = \{\operatorname{Re} w_1 < 0\},$$

$$U = \{\operatorname{Re} w_1 < 0 \text{ et } (\operatorname{Im} w_1)^2 \leq \frac{1}{3}(1 + (\operatorname{Re} w_1)^2)\},$$

$$F_1 : D_{2/\varepsilon} \rightarrow D_1, \quad F_1(w_1) = \frac{w_1}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right) w_1},$$

$$F_2 : D_\infty \rightarrow D_\infty, \quad F_2(w_1) = A^{-1} w_1, \quad A > 0,$$

$$F_3 : U \rightarrow D_\infty, \quad F_3(w_1) = w_1 + w_1^3,$$

$$F_4 : D_\infty \rightarrow D_\infty, \quad F_4(w_1) = A w_1,$$

$$F_5 : D_{1/(1 + \varepsilon/2)} \rightarrow D_\infty, \quad F_5(w_1) = \frac{w_1}{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right) w_1}.$$

On a $F_2 \circ F_3 \circ F_4(w_1) = w_1 + A^2 w_1^3$, d'où

$$(7.25) \quad F(w_1) = F_1 \circ F_5(w_1) + O(w_1^3) = w_1 - \frac{\varepsilon}{2} w_1^2 + O(w_1^3).$$

On va montrer que le diamètre de $F^{-1}(D_1)$ est aussi petit que l'on veut si $A > 1$ est assez grand. En effet, on vérifie successivement les relations d'inclusion

$$(F_1 \circ F_2)^{-1}(D_1) = F_2^{-1}(D_{2/\varepsilon}) = D_{2A/\varepsilon} \subset \{|w_1| < 4A/\varepsilon\},$$

$$F_3^{-1}(D_{2A/\varepsilon}) \subset U \cap \{|w_1| < 2(A/\varepsilon)^{1/3}\},$$

$$(F_3 \circ F_4)^{-1}(D_{2A/\varepsilon}) \subset D_\infty \cap \{|w_1| < 2\varepsilon^{-1/3} A^{-2/3}\},$$

$$F^{-1}(D_1) \subset D_{1/(1 + \varepsilon/2)} \cap \{|w_1| < 2\varepsilon^{-1/3} A^{-2/3}\}.$$

En particulier, on peut choisir $A = A(\varepsilon)$ assez grand pour que

$$(7.26) \quad F^{-1}(D_1) \subset D_{1/(1 + \varepsilon/2)} \cap \{|w_1| < r_3(\varepsilon)/2\}.$$

A étant maintenant fixé, on pose

$$\begin{aligned} w'_1 &= F(w_1), \\ w'_j &= (1 + \varepsilon)^{1/2} \left(1 - \frac{w_1}{\eta}\right)^2 w_j, \quad j \geq 2, \\ \Psi_a(Z) &= (w'_1 + 1, w'_2, \dots, w'_n). \end{aligned}$$

Pour $\text{Re } w_1 < 0$, on a alors d'après (7.25):

$$(7.27) \quad \rho_{\mathbf{B}} \circ \Psi_a(Z) = 2 \text{Re } F(w_1) + |F(w_1)|^2 + (1 + \varepsilon) \left|1 - \frac{w_1}{\eta}\right|^4 (|w_2|^2 + \dots + |w_n|^2)$$

$$(7.28) \quad \geq 2 \text{Re } F(w_1) + |F(w_1)|^2 + (1 + \varepsilon)(|w_2|^2 + \dots + |w_n|^2)$$

$$(7.29) \quad = 2 \text{Re } w_1 + (1 + \varepsilon) |w|^2 - 2\varepsilon (\text{Re } w_1)^2 + O(w_1^3)$$

$$(7.30) \quad \geq (1 - \varepsilon \text{Re } w_1)(2 \text{Re } w_1 + (1 + \varepsilon) |w|^2 - C_2(\varepsilon) |w|^3)$$

où la constante $C_2(\varepsilon)$ est indépendante de η . On va montrer que $\Psi_a^{-1}(\mathbf{B}) \subset \Omega$ pour $\eta > 0$ assez petit. Soit Z un point fixé de $\Psi_a^{-1}(\mathbf{B})$, i.e. un point tel que $\rho_{\mathbf{B}} \circ \Psi_a(Z) < 0$. On a en particulier $|w'_1 + 1| < 1$, donc (7.26) implique $w_1 \in F^{-1}(D_1) \subset D_{1/(1 + \varepsilon/2)}$, i.e.

$$2 \text{Re } w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) |w_1|^2 < 0.$$

Distinguons deux cas suivant l'ordre de grandeur de $\text{Re } w_1$.

Si $\text{Re } w_1 \leq -\eta^{1/2}$, alors $|1 - w_1/\eta| \geq \eta^{-1/2}$ et (7.27) entraîne

$$(7.31) \quad (1 + \varepsilon)(|w_2|^2 + \dots + |w_n|^2) < \eta^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2 \text{Re } w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |w|^2 & \\ & \leq 2 \text{Re } w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) |w_1|^2 - \frac{\varepsilon}{4} |\text{Re } w_1|^2 + (1 + \varepsilon)(|w_2|^2 + \dots + |w_n|^2) \\ & < -\frac{\varepsilon}{4} \eta + \eta^2 < 0 \end{aligned}$$

pour $\eta < \varepsilon/4$; dans ce cas, compte tenu de (7.26) et (7.31), on aura de plus $|w| < r_3(\varepsilon)$ dès que $\eta < r_3(\varepsilon)/2$.

Si $-\eta^{1/2} \leq \text{Re } w_1 < 0$, alors $|w_1|^2 < -2 \text{Re } w_1 \leq 2\eta^{1/2}$ et (7.28) implique

$$|w_2|^2 + \dots + |w_n|^2 \leq -2 \text{Re } F(w_1) = -2 \text{Re } w_1 + O(|w_1|^2) \leq C_3(\varepsilon) \eta^{1/2};$$

on a donc $|w| \leq C_4(\varepsilon) \eta^{1/4}$, et de (7.30) on déduit

$$2 \operatorname{Re} w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |w|^2 \leq C_2(\varepsilon) |w|^3 - \frac{3\varepsilon}{4} |w|^2$$

$$\leq \left(C_2(\varepsilon) C_4(\varepsilon) \eta^{1/4} - \frac{3\varepsilon}{4}\right) |w|^2 < 0$$

pour $\eta < (3\varepsilon/4 C_2(\varepsilon) C_4(\varepsilon))^4$; dans ce cas, on a de plus $|w| < r_3(\varepsilon)$ si $\eta < (r_3(\varepsilon)/C_4(\varepsilon))^4$.

Le choix $\eta < \min(\varepsilon/4, r_3(\varepsilon)/2, (3\varepsilon/4 C_2(\varepsilon) C_4(\varepsilon))^4, (r_3(\varepsilon)/C_4(\varepsilon))^4)$ entraîne donc finalement

$$\Psi_a^{-1}(\mathbf{B}) \subset \left\{ 2 \operatorname{Re} w_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |w|^2 < 0 \right\} \cap \{|w| < r_3(\varepsilon)\} \subset \Omega.$$

L'estimation (7.19) résulte d'autre part des développements limités (7.24) et (7.29). \square

(7.10) *Démonstration du théorème.* Soient $A, \varepsilon > 0$ et $a \in \partial\Omega$ quelconques. Considérons les applications holomorphes $\Phi_a: \Omega \rightarrow \mathbf{B}$ et $\Psi_a^{-1}: \mathbf{B} \rightarrow D_{a,\varepsilon} \subset \Omega$ fournies par le lemme (7.14). Pour tous $z, \zeta \in D_{a,\varepsilon}$ le théorème (4.11) donne

$$(7.32) \quad u_{\mathbf{B}}(\Phi_a(z), \Phi_a(\zeta)) \leq u_{\Omega}(z, \zeta) \leq u_{\mathbf{B}}(\Psi_a(z), \Psi_a(\zeta)).$$

Posons $b = \Psi_a(a) \in \partial\mathbf{B}$. Pour tout $(w, \xi) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}$ avec $|\xi - b| < r_1(\varepsilon)$ assez petit, on aura d'après (5.10):

$$(7.33) \quad \frac{1 + \varepsilon}{2} \cdot \frac{|\rho_{\mathbf{B}}(w)| |\rho_{\mathbf{B}}(\xi)|}{|J_b^{2,0} \rho_{\mathbf{B}}(w)|^2} \leq u_{\mathbf{B}}(w, \xi) \leq \frac{1 - \varepsilon}{2} \cdot \frac{|\rho_{\mathbf{B}}(w)| |\rho_{\mathbf{B}}(\xi)|}{|J_b^{2,0} \rho_{\mathbf{B}}(w)|^2}.$$

Posons $\eta = (\delta(\varepsilon)/A)^2$ et soit $z \in \Omega$. Sous les hypothèses $|\rho(z)| < \eta$ et $|z - a| < A |\rho(z)|^{1/2}$ il vient $|z - a| < \delta(\varepsilon)$, donc (7.19) entraîne

$$(7.34) \quad |\rho(z) - \rho_{\mathbf{B}} \circ \Psi_a(z)| \leq \varepsilon |z - a|^2 \leq \varepsilon A^2 |\rho(z)|;$$

en particulier $z \in \Psi_a^{-1}(\mathbf{B}) = D_{a,\varepsilon}$ pour $\varepsilon < A^{-2}$. Choisissons $r_2(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que

$$(7.35) \quad |\zeta - a| < r_2(\varepsilon) \Rightarrow \max(|\Phi_a(\zeta) - \Phi_a(a)|, |\Psi_a(\zeta) - \Psi_a(a)|) < r_1(\varepsilon);$$

ceci est possible d'après la propriété (7.15). Sous les hypothèses $|\rho(\zeta)| < \eta$ et $|\zeta - a| < \min(A |\rho(\zeta)|^{1/2}, r_2(\varepsilon))$ on a de même que pour (7.34):

$$(7.36) \quad |\rho(\zeta) - \rho_{\mathbf{B}} \circ \Psi_a(\zeta)| \leq \varepsilon A^2 |\rho(\zeta)|,$$

et grâce à (7.35) on voit que l'encadrement (7.33) est applicable au couple de points $(w, \xi) = (\Psi_a(z), \Psi_a(\zeta))$. Les estimations (7.11) et (7.19) donnent d'autre part

$$(7.37) \quad |J_a^{2,0} \rho(z) - J_a^{2,0} \rho_{\mathbf{B}}(\Psi_a(z))| \leq \varepsilon |z - a|^2 \leq \frac{\varepsilon}{c} |J_a^{2,0} \rho(z)|;$$

on a bien entendu des estimations analogues à (7.34), (7.36) et (7.37) pour la fonction $\rho_{\mathbf{B}} \circ \Phi_a$. De (7.32)–(7.37) et leurs analogues on déduit alors l'encadrement

$$\left(\frac{1+\varepsilon A^2}{1-\varepsilon/c}\right)^2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{2} \cdot \frac{|\rho(z)|\rho(\zeta)}{|J_a^{2,0}\rho(z)|^2} \leq u_\Omega(z, \zeta) \leq \left(\frac{1-\varepsilon A^2}{1+\varepsilon/c}\right)^2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \frac{|\rho(z)|\rho(\zeta)}{|J_a^{2,0}\rho(z)|^2}$$

sous les hypothèses

$$\begin{aligned} |\rho(z)| < \eta \quad \text{et} \quad |z-a| < A|\rho(z)|^{1/2}, \\ |\rho(\zeta)| < \eta \quad \text{et} \quad |\zeta-a| < \min(A|\rho(\zeta)|^{1/2}, r_2(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le théorème (3.8) aux fonctions

$$\varphi(\zeta) = \rho(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} u_\Omega(z, \zeta)$$

en tout point a de l'ouvert $\omega := \{a \in \partial\Omega; |a-z| < A|\rho(z)|^{1/2}\}$. Les hypothèses du théorème (3.8) sont satisfaites car

$$\begin{aligned} \limsup_{\zeta \rightarrow a} \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} &\leq \left(\frac{1+\varepsilon A^2}{1-\varepsilon/c}\right)^2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{|\rho(z)|}{|J_a^{2,0}\rho(z)|^2}, \\ \liminf_{\zeta \rightarrow a} \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} &\leq \left(\frac{1-\varepsilon A^2}{1+\varepsilon/c}\right)^2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{|\rho(z)|}{|J_a^{2,0}\rho(z)|^2}; \end{aligned}$$

on notera que pour obtenir ces limites il est nécessaire de faire varier un peu le point a dans l'encadrement de u_Ω , car celui-ci est valable seulement sur le domaine tangentiel $\{\zeta; |\zeta-a| < A|\rho(\zeta)|^{1/2}\}$. Le théorème (3.8) donne finalement l'inégalité souhaitée

$$(1-\varepsilon') dv_z(\zeta) \leq d\mu_z(\zeta) \leq (1+\varepsilon') dv_z(\zeta), \quad \forall \zeta \in \omega,$$

avec $\varepsilon' = 2n\varepsilon(1+A^2+1/c)$ au lieu de ε . \square

(7.38) *Remarque.* On a les formules

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \partial\Omega} v_z(\{\zeta \in \partial\Omega; H\rho_z(\zeta-z) < A|\rho(z)|^{1/2}\}) &= J(A) \\ J(A) &:= \frac{2^{2n-2}(n-1)!}{\pi^n} \int_{\substack{(t,w) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}^{n-1} \\ |w| < A}} \frac{dt dw}{((1+|w|^2)^2 + t^2)^n} \\ &= 1 - \frac{2^{2n-2}(n-1)!}{\pi^n} \int_{|w| \geq A} \frac{dt dw}{((1+|w|^2)^2 + t^2)^n}. \end{aligned}$$

Soit z un point fixé, voisin de $\partial\Omega$. Pour vérifier les formules précédentes, il suffit de se placer dans un système de coordonnées locales $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ tel que

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= 2\operatorname{Re}\zeta_1 + |\zeta|^2 + o(|\zeta|^2), \\ z &= (z_1, 0, \dots, 0) \quad \text{avec} \quad z_1 \in]-1, 0[. \end{aligned}$$

On a donc $\rho(z) \sim 2z_1$. On effectue alors des homothéties dans la direction tangente réelle et dans les directions tangentes complexes à $\partial\Omega$ en posant

$$t = |z_1|^{-1} \operatorname{Im} \zeta_1, \quad w = |2z_1|^{-1/2} (\zeta_2, \dots, \zeta_n).$$

Pour $\zeta \in \partial\Omega$ et $|\zeta - z| = O(|\rho(z)|^{1/2})$, c'est-à-dire $|\zeta| = O(|z_1|^{1/2})$, on obtient les estimations $\operatorname{Re} \zeta_1 \sim -|\zeta|^2/2 = O(|z_1|)$ et

$$\begin{aligned} J_{\zeta}^{2,0} \rho(z) &= (1 + \bar{\zeta}_1)(z_1 - \zeta_1) - \bar{\zeta}_2 \cdot \zeta_2 - \dots - \bar{\zeta}_n \cdot \zeta_n + o(|\zeta||z - \zeta|) \\ &= z_1 - \zeta_1 - |\zeta|^2 + o(|z_1|) \\ &= z_1 - \frac{1}{2} |\zeta|^2 - i \operatorname{Im} \zeta_1 + o(|z_1|). \end{aligned}$$

On en déduit aisément

$$|J_{\zeta}^{2,0} \rho(z)|^2 \sim |z_1|^2 \cdot ((1 + |w|^2) + t^2),$$

tandis que

$$(dd^c \rho_{\zeta})^{n-1} \wedge d^c \rho_{\zeta} \sim 2^{2n-2} (n-1)! |2z_1|^n dt dw.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'achever les calculs. \square

La remarque (7.38) montre que les estimations du théorème (7.10) prennent en compte à la limite toute la masse de μ_z quand A tend vers $+\infty$. Il serait néanmoins intéressant de connaître le comportement de $d\mu_z(\zeta)$ lorsque z tend vers $\partial\Omega$, ζ n'étant plus nécessairement astreint à rester dans un ouvert du bord de la forme $|\zeta - z| \leq A|\rho(z)|^{1/2}$; pour cela, il serait nécessaire d'étendre le lemme (7.14) au cas de boules osculatrices en deux points $a, b \in \partial\Omega$ simultanément, tout en conservant l'uniformité des estimations quand $|a - b|$ tend vers 0; nous n'y sommes pas parvenus ici.

8. Mesures canoniques sur les points extrémaux d'une partie convexe compacte de \mathbf{R}^n

Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une partie convexe compacte d'intérieur $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les mesures de Monge-Ampère fournissent en dimension finie une solution explicite naturelle au théorème de Choquet (cf. [3, 13]), à savoir que tout point d'une partie convexe compacte métrisable dans un espace vectoriel topologique localement convexe est barycentre d'une mesure positive portée par les points extrémaux de cette partie. Bien sûr, ce théorème est trivial dans \mathbf{R}^n , tout point $x \in K$ étant alors barycentre d'au plus $n + 1$ points extrémaux; l'intérêt de notre résultat réside plutôt dans le caractère explicite de la solution et dans le fait que le noyau obtenu dépend continûment du point x et du convexe K .

Soit $x \in \overset{\circ}{K}$ un point fixé. On associe à x la fonction jauge p_x définie sur \mathbf{R}^n par

$$p_x(\xi) = \inf \left\{ \lambda > 0; x + \frac{1}{\lambda} (\xi - x) \in K \right\}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

La fonction p_x est convexe sur \mathbf{R}^n , positivement homogène de degré 1 relativement au pôle x et on a $p_x|_{\partial K} = 1$. On introduit maintenant l'espace de Stein

$$X = (\mathbf{C}/i\mathbf{Z})^n \simeq \mathbf{R}^n + i\mathbf{T}^n$$

où $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, qu'on considère comme une complexification de \mathbf{R}^n . On introduit également l'ouvert

$$\Omega = \mathring{K} + i\mathbf{T}^n;$$

Ω est un ouvert pseudoconvexe relativement compact dans X (on notera que Ω n'aurait pas été relativement compact si on s'était contenté de prendre $X = \mathbf{C}^n$ et $\Omega = \mathring{K} + i\mathbf{R}^n$). On définit maintenant une fonction psh continue \tilde{p}_x sur X en posant

$$\tilde{p}_x(\zeta) = p_x(\zeta) \quad \text{où} \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \quad \eta \in \mathbf{T}^n.$$

On a alors $\Omega = \{\zeta \in X; \tilde{p}_x(\zeta) < 1\}$, de sorte que \tilde{p}_x est une fonction d'exhaustion psh bornée de Ω .

(8.1) **Proposition.** *On a $(dd^c \tilde{p}_x)^n = 0$ sur $X \setminus (x + i\mathbf{T}^n)$.*

Démonstration. K est réunion d'une suite croissante de parties convexes K^v de classe C^2 , et \tilde{p}_x est la limite décroissante des fonctions jauges \tilde{p}_x^v associées. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque K est de classe C^2 . Dans ce cas $p_x \in C^2(X \setminus (x + i\mathbf{T}^n))$, et on a les formules

$$(8.2) \quad \begin{aligned} d^c \tilde{p}_x &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial p_x}{\partial \xi_k} d\eta_k, \\ dd^c \tilde{p}_x &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k} d\xi_j \wedge d\eta_k, \end{aligned}$$

$$(8.3) \quad (dd^c \tilde{p}_x)^n = n! \det \left(\frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) d\xi_1 \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \wedge d\eta_n.$$

Or p_x est linéaire sur la demi-droite affine $x + \mathbf{R}_+ \cdot (\xi - x)$, donc $\xi - x$ est dans le noyau de la matrice $(\partial^2 p_x / \partial \xi_j \partial \xi_k)$; par suite $\det(\partial^2 p_x / \partial \xi_j \partial \xi_k) = 0$ pour $\xi \neq x$. \square

Comme \tilde{p}_x est invariante par les translations de \mathbf{T}^n , il en est de même pour la mesure $(dd^c \tilde{p}_x)^n$. On voit donc qu'il existe une constante $C = C(x, K) > 0$ telle que

$$(dd^c \tilde{p}_x)^n = C \cdot \delta_x \otimes \sigma,$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x sur \mathbf{R}^n et σ la mesure d'aire invariante sur $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. D'après le § 1, on peut associer à \tilde{p}_x la mesure de Monge-Ampère

$$(8.5) \quad \tilde{v}_x = \mu_{\tilde{p}_x, 1} = (dd^c \max(\tilde{p}_x, 1))^n,$$

qui est portée par $\partial\Omega = \partial K + i\mathbf{T}^n$. D'après (1.10) on a

$$\|\tilde{v}_x\| = \int_{\Omega} (dd^c \tilde{p}_x)^n = C;$$

comme \tilde{v}_x est elle aussi invariante par les translations de \mathbf{T}^n , on voit qu'il existe une mesure $v_x \geq 0$ sur ∂K telle que $\tilde{v}_x = v_x \otimes \sigma$ et $C = v_x(\partial K)$. Pour toute fonction psh $V(\zeta) = V(\xi + i\eta)$ sur X , la formule de Lelong-Jensen (1.7) s'écrit maintenant

$$\int_{(\xi, \eta) \in \partial K \times \mathbb{T}^n} V(\xi + i\eta) dv_x(\xi) d\sigma(\eta) = v_x(\partial K) \int_{\eta \in \mathbb{T}^n} V(x + i\eta) d\sigma(\eta) + \int_{\Omega} (1 - \tilde{p}_x(\xi)) dd^c V \wedge (dd^c \tilde{p}_x)^{n-1}.$$

Choisissons en particulier pour V une fonction affine de ξ , indépendante de η . Nous obtenons

$$v_x(V) = v_x(\partial K) \cdot V(x)$$

quelle que soit V affine, d'où :

(8.6) **Théorème.** *Le point x est barycentre de la mesure de probabilité*

$$m_x := (v_x(\partial K))^{-1} v_x.$$

(8.7) *Remarque.* Il est clair que l'on pourrait encore définir les mesures \tilde{v}_x sur l'espace $X = \mathbb{C}^n/i\Gamma$, où Γ est un réseau quelconque de \mathbb{R}^n . Les mesures v_x telles que $\tilde{v}_x = v_x \otimes \sigma_{\mathbb{R}^n/\Gamma}$ ne seraient alors modifiées que d'un facteur > 0 , égal au volume de \mathbb{R}^n/Γ . De ceci, on déduit aussitôt que les mesures v_x (resp. m_x) se transforment fonctoriellement par l'action du groupe spécial affine (resp. du groupe affine) sur le convexe K . \square

Par analogie avec ce qui a été fait dans le cas complexe, on introduit sur \mathring{K} la distance

$$\delta_K(x, y) = \limsup_{\xi \rightarrow \partial K} \left| \log \frac{p_x(\xi) - 1}{p_y(\xi) - 1} \right|;$$

cette distance est toujours complète et on a l'encadrement

$$e^{-n \delta_K(x, y)} v_x \leq v_y \leq e^{n \delta_K(x, y)} v_x, \quad \forall x, y \in \mathring{K}.$$

En particulier, on voit que les mesures v_x dépendent continûment de x pour la topologie de la masse. Elles dépendent aussi continûment de ∂K pour la topologie faible des mesures; ceci résulte du fait que l'opérateur de Monge-Ampère

$$\tilde{p}_x \mapsto (dd^c \max(\tilde{p}_x, 1))^n$$

est faiblement continu lorsque \tilde{p}_x converge uniformément sur tout compact.

Lorsque K est de classe C^2 , on a $\tilde{v}_x = (dd^c \tilde{p}_x)^{n-1} \wedge d^c \tilde{p}_x$, et les formules (8.2) donnent $\tilde{v}_x = v_x \otimes (d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_n)$ avec

$$(8.8) \quad dv_x(\xi) = (n-1)! \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \Delta_l(x, \xi) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l \wedge \dots \wedge d\xi_n,$$

$$\Delta_l(x, \xi) = \det \left(\frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_{l-1}}, \frac{\partial p_x}{\partial \xi_j}, \dots, \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_n} \right).$$

Dans ce cas, on sait que \tilde{v}_x est portée par l'ensemble des points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$, par conséquent v_x est portée par l'ensemble des points strictement convexes de ∂K . Dans le cas général, on va montrer que v_x est portée par l'ensemble des points extrémaux de K .

(8.9) **Définition.** Soit ξ un point de ∂K .

- Le point ξ est dit extrême si il n'existe pas de vecteur $a \neq 0$ tel que le segment $[\xi - a, \xi + a]$ soit contenu dans ∂K . On notera $E(K)$ l'ensemble des points extrêmes de K .
- Un hyperplan affine H est dit hyperplan d'appui au point ξ si $H \ni \xi$ et si K est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés délimités par H .

Grâce à la transformation par polaires de centre x , on peut associer à K le convexe dual

$$K_x^* = \{y' \in (\mathbf{R}^n)^*; \forall x \in K, y' \cdot (\xi - x) \leq 1\};$$

K_x^* est une partie convexe compacte de $(\mathbf{R}^n)^*$ contenant 0 en son intérieur. Si $\xi \in \partial K$, on note ξ_x^* l'ensemble des formes linéaires $y' \in (\mathbf{R}^n)^*$ telles que $H_{y'} = \{y; y' \cdot (y - x) = 1\}$ soit un hyperplan d'appui au point ξ . Bien entendu, lorsque K est de classe C^1 , ξ_x^* se réduit à l'unique forme linéaire définissant l'hyperplan tangent en ξ à ∂K ; dans le cas général, ξ_x^* est une partie convexe de $(\mathbf{R}^n)^*$, contenue dans $\partial(K_x^*)$. Pour toute partie $A \subset \partial K$, on pose plus généralement

$$A_x^* = \bigcup_{\xi \in A} \xi_x^*.$$

Avec ces notations, on obtient la relation naturelle $\partial(K_x^*) = (\partial K)_x^*$. On définit enfin une mesure positive θ sur ∂K_x^* en posant

$$\theta(A') = \text{Vol}([0, 1] \cdot A')$$

pour toute partie borélienne $A' \subset \partial K_x^*$, où Vol désigne le volume calculé relativement à la mesure de Lebesgue de $(\mathbf{R}^n)^*$. On a alors le théorème suivant, qui donne l'interprétation géométrique des mesures v_x .

(8.10) **Théorème.** Pour tout point $x \in \overset{\circ}{K}$ et pour toute partie borélienne $A \subset \partial K$ on a la formule

$$(8.11) \quad v_x(A) = n! \theta(A_x^*) = n! \text{Vol}([0, 1] \cdot A_x^*),$$

en particulier $v_x(\partial K) = n! \text{Vol}(K_x^*)$.

De plus, v_x est portée par l'ensemble des points extrêmes de K , c'est-à-dire que $v_x(\partial K \setminus E(K)) = 0$.

Démonstration. On commence par vérifier la formule (8.11) lorsque A est une partie compacte de ∂K ; pour cela, on procède en plusieurs étapes.

Première étape: on suppose ∂K strictement convexe de classe C^∞ .

Soit ξ un point de ∂K . L'homogénéité de p_x entraîne la relation d'Euler $dp_x(\xi) \cdot (\xi - x) = p_x(\xi) = 1$. L'hyperplan tangent à ∂K au point ξ est donc donné par $\{y; dp_x(\xi) \cdot (y - x) = 1\}$, i.e. $\xi_x^* = \{dp_x(\xi)\}$. La stricte convexité de ∂K montre que l'application $\xi \mapsto dp_x(\xi)$ de ∂K sur ∂K_x^* est un C^∞ -difféomorphisme. Soit $\Phi_x:]0, 1] \times \partial K \rightarrow K_x^* \setminus \{0\}$ le C^∞ -difféomorphisme défini par

$$y' = \Phi_x(t, \xi) := t \cdot dp_x(\xi), \quad t \in]0, 1], \xi \in \partial K.$$

On a alors par définition

$$\begin{aligned}\theta(A_x^*) &= \text{Vol}([0, 1] \cdot dp_x(A)) = \text{Vol}(\Phi_x([0, 1] \times A)) \\ &= \int_{[0, 1] \times A} (\Phi_x)^*(dy'_1 \wedge \dots \wedge dy'_n).\end{aligned}$$

En utilisant la formule (8.8) on voit aussitôt que

$$(\Phi_x)^*(dy'_1 \wedge \dots \wedge dy'_n) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \wedge dv_x(\xi),$$

donc

$$\theta(A_x^*) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \cdot \int_A dv_x(\xi) = \frac{1}{n!} v_x(A).$$

Deuxième étape: on suppose ∂K de classe $C^{1+\text{lip}}$.

Dans ce cas, la différentielle dp_x est lipschitzienne, donc presque partout différentiable relativement à la mesure d'aire euclidienne α sur ∂K ; la formule (8.8) est encore valable, $dv_x(\xi)$ étant ici une forme volume à densité L^∞ par rapport à α .

Soit ξ un point où dp_x est différentiable; supposons qu'il existe un segment $[\xi_1, \xi_2] \subset \partial K$ contenant ξ et non réduit à un point. Alors la matrice $(\partial^2 p_x / \partial \xi_j \partial \xi_k)$ a dans son noyau les deux directions $\xi_2 - \xi_1$ et $\xi - x$, ce qui entraîne $dv_x(\xi) = 0$. En particulier, on a $dv_x(\xi) = 0$ α -presque partout sur $\partial K \setminus E(K)$, d'où $v_x(\partial K \setminus E(K)) = 0$.

Notons maintenant \hat{A} la réunion de A et des segments $[\xi_1, \xi_2] \subset \partial K$ tels que $\xi_1 \in A$. Il est trivial de vérifier que $(\hat{A})^\wedge = \hat{A}$ dès que ∂K est de classe C^1 , et que \hat{A} est une partie compacte de ∂K si A est elle-même compacte; de plus, d'après ce qui précède, on a $v_x(\hat{A} \setminus A) = 0$. Par ailleurs, ∂K a même hyperplan tangent en tout point de chaque segment $[\xi_1, \xi_2] \subset \partial K$, donc $(\hat{A})_x^* = A_x^*$. Pour vérifier (8.11), on peut donc supposer sans perte de généralité que $\hat{A} = A$.

L'idée suivante est d'approximer K par des compacts strictement convexes. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact L_ε strictement convexe de classe C^∞ tel que

$$(1 - \varepsilon) \cdot (K - x) \subset L_\varepsilon - x \subset K - x;$$

par dualité on en déduit

$$(8.12) \quad K_x^* \subset (L_\varepsilon)_x^* \subset (1 - \varepsilon)^{-1} K_x^*.$$

Considérons le compact $B'_\varepsilon = ([0, (1 - \varepsilon)^{-1}] \cdot A_x^*) \cap \partial(L_\varepsilon)_x^*$, image de A_x^* par projection radiale sur $\partial(L_\varepsilon)_x^*$, et le compact $B_\varepsilon \subset \partial L_\varepsilon$, image réciproque de B'_ε par la transformation par polaires. Désignons par v_x^ε et θ^ε les mesures associées à L_ε , analogues à v_x et θ . On sait que v_x^ε converge faiblement vers v_x et que $v_x^\varepsilon(B'_\varepsilon) = n! \theta^\varepsilon(B'_\varepsilon)$ grâce à la première étape. La double inclusion (8.12) implique

$$\theta(A_x^*) \leq \theta^\varepsilon(B'_\varepsilon) \leq (1 - \varepsilon)^{-n} \theta(A_x^*),$$

donc $\lim \theta^\varepsilon(B'_\varepsilon) = \theta(A_x^*)$. En particulier, on voit que

$$\theta(\partial K_x^*) = \lim \theta^\varepsilon(\partial(L_\varepsilon)_x^*) = \lim \frac{1}{n!} v_x^\varepsilon(\partial L_\varepsilon) = \frac{1}{n!} v_x(\partial K).$$

On va montrer maintenant que $\limsup v_x^\varepsilon(B_\varepsilon) \leq v_x(A)$. Soient en effet $U \ni V \ni A$ deux voisinages ouverts arbitraires de A dans \mathbf{R}^n et $h \in C^0(\mathbf{R}^n, [0, 1])$ une fonction à support compact dans U , égale à 1 sur V . Pour ε assez petit, on a $B_\varepsilon \subset V$; sinon, il existerait une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant vers 0 et une suite de points $\xi_k \in B_{\varepsilon_k} \setminus V$ convergeant vers un point $\xi_\infty \in \partial K \setminus V$; comme $(\xi_k)_x^* \in B'_{\varepsilon_k}$ et comme A_x^* est fermé, la suite $(\xi_k)_x^*$ aurait un point limite $y' \in A_x^*$ qui serait un hyperplan d'appui de K au point ξ_∞ ; mais par ailleurs $y' \in A_x^*$ serait l'hyperplan tangent en un point $\xi \in A$, d'où $[\xi, \xi_\infty] \subset \partial K$ et $\xi_\infty \in \hat{A} = A$, ce qui est contradictoire. Pour ε assez petit il vient donc

$$v_x^\varepsilon(B_\varepsilon) \leq v_x^\varepsilon(V) \leq v_x^\varepsilon(h),$$

et puisque $\lim v_x^\varepsilon(h) = v_x(h)$ on obtient

$$\limsup v_x^\varepsilon(B_\varepsilon) \leq \inf_h v_x(h) = v_x(A).$$

On en déduit donc

$$v_x(A) \geq \limsup v_x^\varepsilon(B_\varepsilon) = n! \limsup \theta^\varepsilon(B'_\varepsilon) = n! \theta(A_x^*);$$

d'après les réductions préliminaires que nous avons faites, il vient

$$v_x(A) \geq n! \theta(A_x^*)$$

pour toute partie compacte $A \subset \partial K$. L'ouvert $\partial K \setminus A$ est d'autre part réunion d'une suite croissante de parties compactes S_k , par conséquent

$$v_x(\partial K \setminus A) = \lim v_x(S_k) \geq n! \lim \theta((S_k)_x^*) = n! \theta((\partial K \setminus A)_x^*).$$

Comme $(\partial K_x^*) \setminus (\partial K \setminus A)_x^* \subset A_x^*$ il vient finalement

$$\begin{aligned} v_x(A) &= v_x(\partial K) - v_x(\partial K \setminus A) \\ &\leq n!(\theta(\partial K_x^*) - \theta((\partial K \setminus A)_x^*)) \leq n! \theta(A_x^*). \end{aligned}$$

Troisième étape: K quelconque.

On pose alors:

$$K_\varepsilon = K + \bar{B}(0, \varepsilon) = \{\xi \in \mathbf{R}^n; d(\xi, K) \leq \varepsilon\},$$

où $\bar{B}(0, \varepsilon)$ et d sont respectivement la boule et la distance euclidienne de \mathbf{R}^n . Soit $r > 0$ tel que $\bar{B}(x, r) \subset K$. On a les inclusions

$$(8.13) \quad \begin{aligned} K &\subset K_\varepsilon \subset K + \frac{\varepsilon}{r} K = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1} K_x^* &\subset (K_\varepsilon)_x^* \subset K_x^*. \end{aligned}$$

A toute partie compacte $A \subset \partial K$, on associe d'autre part

$$A_\varepsilon = \{\xi \in \partial K_\varepsilon; d(\xi, A) = \varepsilon\} \subset \partial K_\varepsilon.$$

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant, dont la vérification est laissée au lecteur.

Lemme. *On a les deux propriétés suivantes :*

$$(8.14) \quad \partial K_\varepsilon \text{ est de classe } C^{1+\text{lip}};$$

$$(8.15) \quad (A_\varepsilon)_x^* = ([0, 1] \cdot A_x^*) \cap \partial(K_\varepsilon)_x^*.$$

Grâce à (8.13) et (8.15) on voit que

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-n} \theta(A_x^*) \leq \theta^\varepsilon((A_\varepsilon)_x^*) \leq \theta(A_x^*)$$

tandis que (8.14) implique $v_x^\varepsilon(A_\varepsilon) = n! \theta^\varepsilon((A_\varepsilon)_x^*)$. Des arguments identiques à ceux de la deuxième étape permettent d'obtenir successivement

$$n! \theta(A_x^*) = n! \lim \theta^\varepsilon((A_\varepsilon)_x^*) = \lim v_x^\varepsilon(A_\varepsilon) \leq v_x(A),$$

puis l'inégalité opposée $v_x(A) \leq n! \theta(A_x^*)$, grâce à une exhaustion $\bigcup S_k$ du complémentaire de A dans ∂K .

Quatrième étape: pour K quelconque, $v_x(\partial K \setminus E(K)) = 0$.

Par définition de $E(K)$, on a

$$\partial K \setminus E(K) = \bigcup A_k$$

où A_k est la suite croissante de parties de ∂K définie par

$$A_k = \left\{ \xi \in \partial K; \exists u \in \mathbf{R}^n, \|u\| = 1 \text{ et } \left[\xi - \frac{1}{k}u, \xi + \frac{1}{k}u \right] \subset \partial K \right\}.$$

Pour $l > k$, on pose

$$A_{k,l} = \bigcup \left[\xi - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l} \right) u, \xi + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l} \right) u \right]$$

où la réunion est étendue aux couples $(\xi, u) \in \partial K \times \mathbf{R}^n$ tels que $\|u\| = 1$ et $[\xi - u/k, \xi + u/k] \subset \partial K$. On pose enfin

$$B_{k,l} = \left\{ \xi \in A_{k,l}; d(\xi, A_k) \geq \frac{1}{l} \right\} \subset A_{k,l}.$$

Il est immédiat de vérifier que A_k , $A_{k,l}$ et $B_{k,l}$ sont des parties compactes de ∂K , que les suites $(A_{k,l})$, $(B_{k,l})$ sont croissantes avec l , et que $A_k \subset A_{k,l}$, $A_k \cap B_{k,l} = \emptyset$. Comme tout hyperplan d'appui en un point de chaque segment $[\xi - (1/k - 1/l)u, \xi + (1/k - 1/l)u] \subset A_{k,l}$ est aussi un hyperplan d'appui au point $\xi \in A_k$, on voit que $(A_{k,l})_x^* = (A_k)_x^*$, donc $(A_k \cup B_{k,l})_x^* = (A_k)_x^*$. Grâce à la troisième étape, il vient $v_x(A_x \cup B_{k,l}) = v_x(A_x)$, d'où

$$v_x(B_{k,l}) = 0 = \theta((B_{k,l})_x^*).$$

Soit maintenant H un hyperplan d'appui en un point $\xi \in A_k$. Alors $H \cap \partial K = H \cap K$ est une partie compacte convexe, et il existe $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|u\|=1$ et $[\xi - u/k, \xi + u/k] \subset H \cap \partial K$. Soient $\xi_1, \xi_2 \in H \cap \partial K$ tels que

$$\|\xi_2 - \xi_1\| = \text{diam}(H \cap \partial K) \geq \frac{2}{k},$$

et soient

$$u_0 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\|\xi_2 - \xi_1\|}, \quad \xi_0 = \xi_1 + \frac{1}{k} u_0.$$

Il est immédiat que

$$\left[\xi_0 - \frac{1}{k} u_0, \xi_0 + \frac{1}{k} u_0 \right] \subset [\xi_1, \xi_2] \subset H \cap \partial K,$$

donc $\xi_0 \in A_k$. Posons $\xi_\varepsilon = \xi_1 + \varepsilon u_0 = \xi_0 - (1/k - \varepsilon)u_0$. Tout intervalle $[\xi_\varepsilon - a, \xi_\varepsilon + a] \subset \partial K$ est en fait contenu dans $H \cap \partial K \subset B(\xi_1, \|\xi_2 - \xi_1\|)$, d'où, par un argument de géométrie élémentaire:

$$\|a\| \leq \sqrt{\varepsilon(\|\xi_2 - \xi_1\| - \varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\|\xi_2 - \xi_1\|}.$$

Si l'on choisit $\varepsilon < k^{-2} \|\xi_2 - \xi_1\|^{-1}$ il en résulte que $\xi_\varepsilon \notin A_k$, donc $\xi_\varepsilon \in B_{k,l}$ pour l assez grand. Comme H est aussi un hyperplan d'appui au point ξ_ε , on en déduit

$$(A_k)_x^* \subset \bigcup_{l > k} (B_{k,l})_x^*,$$

$$\theta((A_k)_x^*) \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \theta((B_{k,l})_x^*) = 0;$$

par conséquent $v_x(A_k) = 0$ et

$$v_x(\partial K \setminus E(K)) = 0 = \theta((\partial K \setminus E(K))_x^*).$$

Cinquième étape: montrons pour terminer que la formule (8.11) est vraie quelle que soit la partie borélienne $A \subset \partial K$.

Pour cela, il suffit de vérifier que la fonction d'ensembles $A \mapsto \theta(A_x^*)$ est dénombrablement additive sur les boréliens. Or, pour toute suite A_k croissante, on a

$$\theta\left(\bigcup A_k\right)_x^* = \theta\left(\bigcup (A_k)_x^*\right) = \lim \theta((A_k)_x^*);$$

il suffit donc de vérifier l'additivité finie. Si $A \cap B = \emptyset$, tout élément de $A_x^* \cap B_x^*$ correspond à un hyperplan d'appui en des points distincts $\xi_1 \in A, \xi_2 \in B$; cet hyperplan passe aussi par le point milieu $(\xi_1 + \xi_2)/2 \in \partial K \setminus E(K)$, par conséquent

$$A_x^* \cap B_x^* \subset (\partial K \setminus E(K))_x^*.$$

On a donc $\theta(A_x^* \cap B_x^*) = 0$, ce qui implique

$$\theta((A \cup B)_x^*) = \theta(A_x^* \cup B_x^*) = \theta(A_x^*) + \theta(B_x^*).$$

La démonstration du théorème (8.10) est achevée. \square

Pour terminer, nous allons expliciter les mesures v_x et m_x dans le cas de la boule euclidienne de \mathbf{R}^n .

(8.16) *Exemple.* $K = \mathbf{B}_n = \{\xi \in \mathbf{R}^n; \|\xi\| \leq 1\}$.

Dans ce cas, la fonction jauge $p_x(\xi)$ est la solution $\lambda > 0$ de l'équation $\|x + (\xi - x)/\lambda\|^2 = 1$, ce qui donne

$$p_x(\xi) = \frac{\langle x, \xi - x \rangle + \sqrt{\langle x, \xi - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|\xi - x\|^2}}{1 - \|x\|^2}.$$

Après quelques transformations aisées, on obtient

$$p_x(\xi) - 1 = \frac{1 - \langle x, \xi \rangle}{1 - \|x\|^2} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|\xi\|^2)}{(1 - \langle x, \xi \rangle)^2}} \right].$$

Quand ξ tend vers $\partial\mathbf{B}_n$, il en résulte

$$p_x(\xi) - 1 \sim \frac{1}{1 - \langle x, \xi \rangle} \cdot \frac{\|\xi\|^2 - 1}{2} \sim \frac{1}{1 - \langle x, \xi \rangle} (p_0(\xi) - 1).$$

Le théorème de comparaison (3.8) entraîne par conséquent

$$dv_x(\xi) = \frac{1}{(1 - \langle x, \xi \rangle)^n} dv_0(\xi), \quad \xi \in \partial\mathbf{B}_n.$$

D'après le théorème (8.10), la masse totale de v_x vaut $n! \text{Vol}((\mathbf{B}^n)_x^*)$. La transformation par polaires de centre x s'écrit ici

$$\xi \mapsto dp_x(\xi) = \frac{\langle \xi, d\xi \rangle}{1 - \langle x, \xi \rangle},$$

c'est-à-dire $\xi \mapsto \xi/(1 - \langle x, \xi \rangle)$ modulo l'identification $(\mathbf{R}^n)^* \simeq \mathbf{R}^n$. On vérifie alors que $(\mathbf{B}_n)_x^*$ est l'ellipsoïde de centre $x/(1 - \|x\|^2)$, de demi-grand axe $1/(1 - \|x\|^2)$ dans la direction $\mathbf{R} \cdot x$ et de demi-petit axe $1/\sqrt{1 - \|x\|^2}$ dans les $n - 1$ directions orthogonales à x . Par suite

$$v_x(\partial\mathbf{B}_n) = n!(1 - \|x\|^2)^{-(n+1)/2} \text{Vol}(\mathbf{B}_n).$$

Comme v_0 est invariante par rotation, on voit que $v_0 = (n - 1)! \alpha$, où α désigne la mesure d'aire euclidienne sur la sphère. On obtient donc finalement les formules

$$dv_x(\xi) = \frac{(n - 1)! d\alpha(\xi)}{(1 - \langle x, \xi \rangle)^n},$$

$$dm_x(\xi) = \frac{1}{\alpha(\partial\mathbf{B}_n)} \cdot \frac{(1 - \|x\|^2)^{(n+1)/2}}{(1 - \langle x, \xi \rangle)^n} d\alpha(\xi).$$

On observera que $dm_x(\xi)$ diffère du noyau de Poisson euclidien de la boule pour tout $n > 1$, bien que le noyau de Poisson résolve également le problème de la représentation barycentrique d'un point $x \in \mathring{K}$ en fonction des points de ∂K (ceci parce que les fonctions coordonnées de \mathbf{R}^n sont harmoniques). Ce phénomène n'est pas surprenant, puisque le noyau de Poisson euclidien n'est pas porté par $E(K)$ en général.

Bibliographie

1. Bedford, E., Taylor, B.A.: The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation. *Invent. Math.* **37**, 1–44 (1976)
2. Bedford, E., Taylor, B.A.: A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.* **149**, 1–41 (1982)
3. Choquet, G.: Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *Sém. Bourbaki*, exposé n° 139, 15 p. (Déc. 1956)
4. Demailly, J.-P.: Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines, mémoire (nouvelle série) n° 19, Soc. Math. de France, 1985
5. Diederich, K., Fornæss, J.E.: Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic functions. *Invent. Math.* **39**, 129–141 (1977)
6. Fornæss, J.E.: Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains. *Am. J. Math.* **98**, 529–569 (1976)
7. Gamelin, T.W., Sibony, N.: Subharmonicity for uniform algebras. *J. Funct. Anal.* **35**, 64–108 (1980)
8. Kerzman, N., Rosay, J.-P.: Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut. *Math. Ann.* **257**, 171–184 (1981)
9. Klimek, M.: Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances. *Bull. Soc. Math. France* **113**, 123–142 (1985)
10. Lelong, P.: *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*. Presses de l'Univ. de Montréal, *Sém. de Math. Supérieures*, été 1967, n° 28, Montréal, 1968
11. Lempert, L.: La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule. *Bull. Soc. Math. France* **109**, 427–474 (1981)
12. Lempert, L.: Solving the degenerate Monge-Ampère equation with one concentrated singularity. *Math. Ann.* **263**, 515–532 (1983)
13. Phelps, R.: *Lectures on Choquet's theorem*. Van Nostrand Math. Studies n° 7, Princeton, New Jersey, 1966
14. Richberg, R.: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. *Math. Ann.* **175**, 257–286 (1968)
15. Rudin, W.: *Function theory in the unit ball of \mathbf{C}^n* . Grundlehren der math. Wissenschaften 241. Berlin Heidelberg New York: Springer 1980
16. Sibony, N.: Remarks on the Kobayashi metric, manuscrit, communication personnelle (juin 1986)
17. Siciak, J.: On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables. *Trans. Am. Math. Soc.* **105**, 322–357 (1962)
18. Siciak, J.: Extremal plurisubharmonic functions in \mathbf{C}^n . *Ann. Pol. Math.* **39**, 175–211 (1981)
19. Siciak, J.: *Extremal plurisubharmonic functions and capacities in \mathbf{C}^n* . Sophia Kokyuroku in Math., Tokyo, 1982
20. Stehlé, J.-L.: Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certains espaces fibrés analytiques. *Sém. P. Lelong (Analyse) 1973/74*, *Lecture Notes in Math.* n° 474, 155–179. Berlin Heidelberg New York: Springer 1975
21. Taylor, B.A.: An estimate for an extremal plurisubharmonic function on \mathbf{C}^n , *Sém. P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse) 1982/83*, *Lecture Notes in Math.* n° 1028, 318–328. Berlin Heidelberg New York: Springer 1983
22. Walsh, J.B.: Continuity of envelopes of plurisubharmonic functions. *J. Math. Mech.* **18**, 143–148 (1968)

23. Zeriahi, A.: Fonctions plurisousharmoniques extrémales, approximation et croissance des fonctions holomorphes sur des ensembles algébriques. Thèse de Doctorat-ès-Sciences, Univ. de Toulouse, 1986

Received July 30, 1986