Sur le rapport isopérimétrique du tétraèdre

par Jean-Pierre DEMAILLY, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, membre correspondant de l'Académie des Sciences.

Si K est un domaine à bord fermé borné de l'espace $\mathbb{R}^n$, on définit le rapport isopérimétrique de K comme le quotient

$$\rho(K) = \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)^{1/(n-1)}}{\mathrm{Vol}_n(K)^{1/n}},$$

comparant l'aire de la frontière ∂K et le volume de K (une fois ceux-ci ramenés à des dimensions homogènes). Il est bien connu que ce rapport est minimal lorsque K est une boule euclidienne.

On se propose ici de résoudre le problème suivant en dimension 3 : *étant donné un triangle ABC, comment choisir le quatrième sommet D de façon que le rapport isopérimétrique du tétraèdre $ABCD$ soit minimal ?*

Pour étudier ce problème, on recherche les extrema de la fonction

$$f(M) = \rho(ABCM) = \frac{\mathrm{Vol}_2\big(\partial(ABCM)\big)^{1/2}}{\mathrm{Vol}_3(ABCM)^{1/3}}.$$

Choisissons un repère orthonormé en sorte que le plan (ABC) soit le plan d'équation $z = 0$ et désignons par $M\,(x, y, z)$ les coordonnées de M (avec $z > 0$). Soit $P\,(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M sur le plan (ABC) et H_{AB} le pied de la hauteur issue de M dans le triangle ABM, égal à la projection orthogonale de P sur la droite (AB). On utilisera de même les notations H_{BC}, H_{CA}. Si S est l'aire du triangle ABC, on obtient

$$\mathrm{Vol}_3(ABCM) = \frac{1}{3}S|z|,$$
$$\mathrm{Vol}_2\big(\partial(ABCM)\big) = S + \frac{1}{2}(AB\cdot MH_{AB} + BC\cdot MH_{BC} + CA\cdot MH_{CA})$$

avec (par exemple)

$$MH_{AB} = \sqrt{z^2 + PH_{AB}^2}.$$

Calculons la différentielle de f. On se place d'abord dans un plan “horizontal” $z = z_0$, $z_0 > 0$. Comme $\overrightarrow{dH_{AB}}$ est colinéaire à (AB) et donc orthogonal à $\overrightarrow{PH_{AB}}$, on trouve

$$d(MH_{AB}) = \frac{d(\overrightarrow{PH_{AB}}^2)}{2MH_{AB}} = \frac{-\overrightarrow{PH_{AB}}\cdot\overrightarrow{dP}}{MH_{AB}}.$$

On obtient donc

$$d\Big(\mathrm{Vol}_2\big(\partial(ABCM)\big)\Big)_{|z=z_0} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{AB}{MH_{AB}}\overrightarrow{PH_{AB}} + \frac{BC}{MH_{BC}}\overrightarrow{PH_{BC}} + \frac{CA}{MH_{CA}}\overrightarrow{PH_{CA}}\Big)\cdot\overrightarrow{dP}$$

soit encore

$$\overrightarrow{0} = \frac{AB}{MH_{AB}}\overrightarrow{PH_{AB}} + \frac{BC}{MH_{BC}}\overrightarrow{PH_{BC}} + \frac{CA}{MH_{CA}}\overrightarrow{PH_{CA}}$$

puisque $\overrightarrow{dP}$ est quelconque.

Cette égalité peut être écrite sous la forme

$$\overrightarrow{0} = \gamma\overrightarrow{PH_{AB}} + \alpha\overrightarrow{PH_{BC}} + \beta\overrightarrow{PH_{CA}}$$

avec α, β et γ strictement positifs, ce qui implique que P est strictement intérieur au triangle $H_{AB}H_{BC}H_{CA}$. Montrons que cette relation implique à son tour que P est strictement intérieur au triangle ABC.

Sinon en effet P serait, par exemple, dans le demi-plan fermé d'arête (BC) ne contenant pas A, d'où $P \neq A$. Si K est sa projection orthogonale sur la hauteur issue de A, on disposerait des relations

$$\lambda = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH_{BC}} = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{PH_{BC}} \geqslant 0.$$

Or l'appartenance de H_{CA} et de H_{AB} au cercle de diamètre PA implique les relations

$$\mu = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH_{CA}} \geqslant 0, \quad \nu = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH_{AB}} \geqslant 0, \quad \mu > 0 \quad \text{ou} \quad \nu > 0$$

puisque, si les deux nombres μ et ν étaient nuls ensemble, les quatre points P, H_{CA}, H_{AB} et A seraient confondus. Par suite $\beta\mu + \gamma\nu > 0$.

Enfin les égalités

$$0 = \overrightarrow{PA} \cdot \left(\gamma\overrightarrow{PH_{AB}} + \alpha\overrightarrow{PH_{BC}} + \beta\overrightarrow{PH_{CA}}\right) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

impliqueraient les inégalités contradictoires

$$0 \leqslant \lambda = -\frac{\beta\mu + \gamma\nu}{\alpha} < 0$$

qui achèvent de prouver l'absurdité de l'hypothèse.

Or un peu de géométrie intrinsèque, usant du produit vectoriel par exemple, montre que pour tout point P intérieur à ABC la somme

$$AB \cdot PH_{AB} + BC \cdot PH_{BC} + CA \cdot PH_{CA}$$

est constante (c'est le double de l'aire S du triangle ABC). Sa différentielle est donc nulle pour un vecteur $\overrightarrow{dP}$ quelconque. Conformément à un calcul effectué ci-dessus si $M = P$, on dispose de l'égalité

$$d(PH_{AB}) = \frac{-\overrightarrow{PH_{AB}} \cdot \overrightarrow{dP}}{PH_{AB}}$$

et de deux autres analogues, d'où l'identité

$$\overrightarrow{0} = \frac{AB}{PH_{AB}}\overrightarrow{PH_{AB}} + \frac{BC}{PH_{BC}}\overrightarrow{PH_{BC}} + \frac{CA}{PH_{CA}}\overrightarrow{PH_{CA}}$$

pour tout point P intérieur à ABC.

Par unicité essentielle du triplet de coordonnées barycentriques de P relatives au triangle ABC, les deux égalités ci-dessus impliquent les relations

$$\frac{MH_{AB}}{PH_{AB}} = \frac{MH_{BC}}{PH_{BC}} = \frac{MH_{CA}}{PH_{CA}}.$$

En élevant au carré et en tenant compte des relations du type $MH_{AB} = \sqrt{z^2 + PH_{AB}^2}$ cela équivaut à

$$PH_{AB} = PH_{BC} = PH_{BA},$$

c'est-à-dire que P doit-être le centre $I\,(x_0, y_0, 0)$ du cercle inscrit dans le triangle ABC. On voit que la fonction

$$M \mapsto \mathrm{Vol}_2\big(\partial(ABCM)\big)$$

admet I comme seul point critique.

Or cette fonction tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini dans le plan $z = z_0$. Les inégalités

$$2\,\mathrm{Vol}_2\big(\partial(ABCM)\big) > AB \cdot MH_{AB} + AC \cdot MH_{AC} > AB \cdot PH_{AB} + AC \cdot PH_{AC}$$

montrent en effet qu'il suffit de démontrer que $F(P) = AB \cdot PH_{AB} + AC \cdot PH_{AC}$ n'est pas borné lorsque P décrit le plan $z = 0$. Or dans le repère $\big(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\big)$, cette fonction s'écrit sous la forme

$$F(P) = p\,|x| + q\,|y|$$

avec p et q strictement positifs. Pour tout réel $h > 0$, dans chacune des quatre parties définies par les droites (AB) et (AC), on a $F(P) = ux + vy$ avec ux et vy positifs ou nuls ; le sous-ensemble des points tels que $F(P) \leqslant h$, qui contient A puisque $F(A) = 0$, forme donc un triangle de sommet A. La réunion des quatre triangles ainsi définis étant bornée, le résultat en découle.

Par conséquent (x_0, y_0, z_0) est le minimum absolu de $f(M)$ dans le plan $z = z_0$. Soit

$$r = IH_{AB} = IH_{BC} = IH_{BA}$$

le rayon du cercle inscrit. On trouve

$$f(M) = \frac{\big(S + \frac{1}{2}(AB + BC + CA)\sqrt{z^2 + r^2}\big)^{1/2}}{\big(\frac{1}{3}Sz\big)^{1/3}}.$$

Avec les notations usuelles $2p = AB + BC + CA$, on sait que $S = pr$, donc

$$f(M) = 3^{1/3} p^{1/6} r^{-1/6}\,\frac{(1 + \sqrt{(z/r)^2 + 1})^{1/2}}{(z/r)^{1/3}}.$$

Un calcul élémentaire montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{(1 + \sqrt{t^2 + 1})^3}{t^2}$, qui tend vers $+\infty$ quand $t \to 0_+$ et quand $t \to +\infty$, atteint un unique minimum au point $t = 2\sqrt{2}$ (et alors $f(M) = 2^{1/2} 3^{1/3} p^{1/6} r^{-1/6}$). On peut donc énoncer :

Proposition. *Lorsqu'un tétraèdre $ABCD$ a une face ABC fixée, le rapport isopérimétrique du tétraèdre est minimal précisément lorsque la projection orthogonale de D sur le plan (ABC) coïncide avec le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC, avec de plus $ID = 2\sqrt{2}\,r$ où r est le rayon de ce cercle.*

On peut même aller un tout petit peu plus loin, en cherchant la valeur minimale de $\dfrac{p}{r}$. C'est le réel $3\sqrt{3}$, obtenu lorsque le triangle ABC est équilatéral. En effet

$$\frac{p}{r} = \frac{p^2}{S} = \frac{1}{\sqrt{uvw}}$$

où les trois nombres u, v et w, respectivement égaux à $\dfrac{p - BC}{p}$, $\dfrac{p - CA}{p}$ et $\dfrac{p - AB}{p}$, ont 1 pour somme. Le théorème classique de Cauchy sur les comparaisons entre moyennes arithmétique et géométrique montre que uvw est maximum pour $u = v = w$, d'où le résultat.

Par suite le minimum absolu du rapport isopérimétrique est donc $2^{1/2}3^{7/12}$. Il est atteint pour le tétraèdre régulier et seulement par lui, ce qui est assez classique dans ce genre de problèmes. On peut même noter que toute valeur supérieure ou égale à ce minimum est effectivement atteinte par un tétraèdre au moins.

Nous sommes donc ici dans un cadre assez rare, où l'on peut déterminer à la fois un minimum, absolu et strict, ainsi que les valeurs effectivement prises par la fonction à optimiser.

Note sur l'origine du problème du "tétraèdre joufflu"

par Yves Bréchet, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Il s'agit d'un problème de mécanique des fluides, plus précisément d'acoustique, pour concevoir des structures amortissant le bruit des réacteurs d'avion : on a besoin de résoudre des équations aux dérivées partielles pour obtenir l'écoulement du gaz et la dissipation, et ce dans des géométries un peu complexes (empilement de billes). Dans ces situations les équations de Navier Stokes doivent être résolues numériquement, et l'on utilise des calculs par éléments finis. La discrétisation de l'espace se fait par des pavages de tétraèdres, et les calculs sont plus rapides et plus précis quand les tétraèdres sont réguliers. Au voisinage des parois courbes, il faut discrétiser les surfaces par des triangles qui ne peuvent pas tous être réguliers. On doit donc, pour un triangle de base donné, construire le tétraèdre le plus "joufflu". C'est un beau problème de géométrie, motivé par un problème de mécanique, nécessaire pour inventer un matériau nouveau… et pour améliorer le confort du citoyen !

Référence : S. Gasser, thèse de l'INPG (2003) en science des matériaux sur les "*Propriétés mécaniques et acoustiques d'un matériau métallique poreux à base de sphères creuses de Nickel*".