Adrien Douady et les espaces analytiques banachiques

Jean-Pierre Demailly, Siegmund Kosarew, Bernard Malgrange[1]

Les premiers travaux d'Adrien Douady remontent au tout début des années 1960 ; ils révèlent d'emblée une grande étendue de préoccupations mathématiques : topologie différentielle [D1], [D6], théorie de Galois [D3], analyse fonctionnelle [D2], [D4]... Ils vont se focaliser ensuite pendant une quinzaine d'années sur la théorie des espaces analytiques banachiques, pour aboutir assez vite à la célèbre thèse [D7] menée sous la direction de Henri Cartan, et publiée aux *Annales de l'Institut Fourier* en 1966.

Nous ne pouvons pas résister au plaisir de citer les trois premières phrases introductives du mémoire de thèse, qui permettent se bien situer l'humour mathématique très particulier de Douady :

« *Soit X un espace analytique complexe.*

Le but de ce travail est de munir son auteur du grade de docteur ès-sciences mathématiques et l'ensemble $H(X)$ des sous-espaces analytiques compacts de X d'une structure d'espace analytique.

Pour formuler de façon plus précise le second problème, on a besoin de la notion de famille analytique de sous-espaces compacts de X. »

La petite histoire[2] dit que la dernière phrase avait été initialement libellée « *Pour formuler de façon plus précise ce problème...* » et que c'est la seule correction qui ait été demandée expressément par Henri Cartan !

Dans ce travail, Douady met à la disposition de la communauté le concept nouveau d'espace analytique banachique, et développe à cette occasion d'autres notions importantes, comme celle des polycylindres privilégiés[3], afin de montrer l'existence d'un espace des modules qui porte aujourd'hui son nom. Le résultat spectaculaire de Douady est la réponse affirmative à une conjecture de A. Grothendieck, énoncée quelques années auparavant au Séminaire H. Cartan, concernant l'existence d'un espace analogue au schéma de Hilbert, mais valable dans le cadre plus général de la géométrie analytique.

L'un des aspects remarquables de la théorie développée par Douady est le recours à l'analyse de dimension infinie pour aboutir *in fine* à des résultats qui ne concernent que la dimension finie. Le style de rédaction de la thèse – inspiré certainement en partie par celui de N. Bourbaki – est d'une clarté et d'une précision exemplaires, qui rendent ce texte très accessible, même pour les chercheurs souhaitant découvrir le sujet. Dans d'autres travaux connexes, Douady développe le concept de voisinages privilégiés et ses implications en géométrie analytique (platitude, images directes...), notamment dans [D8], puis dans [D9] en collaboration avec Jacques Frisch et André Hirschowitz.

---

[1] Université de Grenoble I, Institut Fourier, 38400 Saint-Martin d'Hères.

[2] Le troisième auteur a eu le privilège d'être le témoin direct du travail de thèse d'Adrien Douady, et d'en suivre de près quelques unes des étapes !

[3] Notion déjà présente en 1944 dans les travaux de H. Cartan sur les idéaux de fonctions holomorphes, même si la terminologie de polycylindres privilégiés utilisée aujourd'hui a été introduite plus tard.

Un autre problème encore plus difficile, posé également par A. Grothendieck au Séminaire Cartan, est celui de l'existence d'un espace de modules local pour un espace complexe compact donné. Grâce à l'analyse de l'opérateur de Cauchy-Riemann et à la théorie de la déformation de Kodaira-Spencer, Kuranishi en avait donné une solution en 1962 pour les variétés compactes lisses [17]. Dès 1964, Douady obtient une autre preuve du résultat de Kuranishi, qu'il présente au séminaire Bourbaki dans [D5] ; il s'y appuie pour la première fois sur la théorie des espaces analytiques banachiques qui constituera l'essence de sa thèse. Près de dix ans plus tard, le cas général de l'espace des modules local d'un espace analytique compact quelconque est enfin résolu par Douady lui-même, qui publie la solution complète [D12] dans les Annales de l'école Normale Supérieure en 1974. à cette époque le problème était devenu l'objet d'une vive concurrence, avec notamment des travaux indépendants de H. Grauert ([10], publié aussi en 1974), V. Palamodov ([19], 1976) et O. Forster/K. Knorr ([8], 1979), aboutissant au même résultat et en utilisant (sauf celui de Forster/Knorr) les espaces analytiques banachiques de Douady. Ces espaces avaient déjà permis à I.F. Donin [5] de montrer en 1972 – avec une démonstration d'une simplicité frappante – l'existence d'un espace de modules local pour les singularités isolées, un problème dont une solution « formelle » avait été établi un peu avant par A. Kas et M. Schlessinger [13].

L'impact des idées de Douady, via le passage audacieux par la dimension infinie, se poursuit tout au long des années 1970 et au delà. Il s'agit en général de démontrer l'existence d'espaces de modules pour les objets naturels les plus fondamentaux de la géométrie analytique. On peut ainsi mentionner l'existence d'espaces de modules locaux pour les applications holomorphes propres, ou pour les variétés complexes strictement pseudoconvexes (pour ce contexte plus général, on pourra consulter le livre de J. Bingener/S. Kosarew [2] et les travaux de V. Palamodov [19], [20]). Les idées de Douady en théorie de la déformation ont même trouvé une incarnation axiomatique très systématique dans le livre de H. Stieber [23] publié en 1988.

Dans des directions voisines (que Douady lui-même n'a pas explorées directement, mais qu'il a suivies de près[4]), un fort courant d'intérêt a été la recherche de preuves banachiques simples et convaincantes du théorème des images directes de Grauert [9] – là encore un énoncé proposé initialement par A. Grothendieck : *les images directes d'un faisceau analytique cohérent par un morphisme analytique propre sont elles-mêmes des faisceaux cohérents*. Une telle preuve a été obtenue par Knorr[5] en 1969 ([15], [16]), puis par Forster/Knorr [6], [7] et Kiehl/Verdier [14] en exploitant la théorie des espaces nucléaires de Grothendieck, et au moyen d'une vaste généralisation des idées de L. Schwartz [22] sur les perturbations compactes des opérateurs continus ; le principe de base en est en quelque sorte une version relative du théorème de Montel sur les familles normales de fonctions holomorphes, dont le cas absolu est le théorème fondamental de Cartan-Serre [4] sur la finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents sur les espaces analytiques compacts. Dans son séminaire commun avec J.-L. Verdier à l'École Normale Supérieure en 1971/72, Douady participera à la rédaction d'une série d'exposés plus didactiques

4 C'est dans un cours de 3e cycle de Douady donné à Paris en 1977/78 que le premier auteur a appris beaucoup des faits qui suivent.

5 Le deuxième auteur a été introduit aux travaux de Douady sur la vive recommandation de K. Knorr, alors qu'il était étudiant en 4e année à l'Université de Regensburg…

[D10] publiés dans Astérisque, destinés à expliquer toutes ces théories aux non spécialistes. À peu près à la même époque, Ch. Houzel [12] obtient une autre preuve reposant sur la considération des complexes d'espaces bornologiques, et finalement R. Levy parvient en 1985 à mettre au point une version paramétrique du théorème de perturbation de Schwartz qui aboutit à une nouvelle démonstration encore plus simple [18].

Beaucoup d'autres travaux ultérieurs feront un usage essentiel de l'analyse complexe de dimension infinie, suivant une philosophie à laquelle Douady a grandement contribué. Ainsi D. Barlet [1] démontre en 1974 l'existence d'un espace analytique réduit des cycles compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie, au moyen de techniques de recollement pour les espaces (de dimension infinie) de fonctions holomorphes à valeurs dans des puissances symétriques ad hoc. Plus récemment, l'introduction des courbes pseudo-holomorphes par Gromov [11], la théorie des invariants de Gromov-Witten et de la cohomologie quantique pour les variétés symplectiques (voir par exemple [21]) ont confirmé l'importance cruciale des techniques banachiques pour la construction des espaces de modules et l'étude de la topologie différentielle des variétés – au moins dans le versant analytique de ces théories.

Dans l'intervalle, Adrien Douady s'était tourné vers la conquête d'autres univers mathématiques, ceux des systèmes dynamiques holomorphes et de la géométrie fractale...

Travaux cités d'Adrien Douady
Références

[D1] Séminaire Cartan 1961/62, exposé N° 1 : *Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires* ; exposé N° 2 : *Théorèmes d'isotopie et de recollement* ; exposé N° 3 : *Arrondissement des arêtes.*

[D2] avec Jacques Dixmier : *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres*, Bull. Soc. Math. France **91** (1963) 227–284

[D3] *Détermination d'un groupe de Galois*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964) 5305–5308.

[D4] *Espace des sous-modules d'un module de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964) 5783–5785.

[D5] *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, d'après M. Kuranishi*, exposé N° 277 au séminaire Bourbaki de Décembre 1964.

[D6] avec Michel Lazard : *Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes*, Invent. Math. **1** (1966) 133–151.

[D7] *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*, Ann. Inst. Fourier **16** (1966) 1–95.

[D8] *Flatness and privilege*, Enseignement Math. **14** (1968) 47–74.

[D9] avec Jacques Frisch et André Hirschowitz : *Recouvrements privilégiés*, Ann. Inst. Fourier **22** (1972) 59–96.

[D10] *Le théorème des images directes de Grauert (d'après Kiehl-Verdier)*, Séminaire Bourbaki, 24e année (1971/1972), Exp. N° 404, p. 73–87, Lecture Notes in Math., Vol. 317, Springer, Berlin, 1973.

[D11] *Quelques problèmes de modules*, Séminaire de Géométrie Analytique de l'école Normale Supérieure de Paris, 1971-1972, p. 49–62, Astérisque N° 16, Soc. Math. France, Paris, 1974.

[D12] *Le problème des modules locaux pour les espaces C-analytiques compacts*, Ann. Sci. école Norm. Sup. **7** (1974) 569–602.

Autres références

[1] D. Barlet, *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie*, Sém. François Norguet 1974-1975, Fonctions de plusieurs variables complexes, II, p. 1-158. Lecture Notes in Math., Vol. 482, Springer, Berlin, 1975.

[2] J. Bingener, S. Kosarew, *Lokale Modulräume in der analytischen Geometrie*, Aspekte der Mathematik D2, D3, Vieweg Verlag, Braunschweig 1987.

[3] H. Cartan, *Thèse de Douady*, Exposé N° 296 au séminaire Bourbaki de Novembre 1965.

[4] H. Cartan, J.-P. Serre, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R. Acad. Sc. **237** (1953) 128–130.

[5] I. F. Donin, *Complete families of deformations of germs of complex spaces*, Mat. Sbornik (N.S.) **89** (131) (1972), 390–399. [English translation, Math. USSR-Sbornik **18** (1972), 397–406].

[6] O. Forster, K. Knorr, *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange*, Manuscripta Math. **5** (1971), 19–44.

[7] O. Forster, K. Knorr, *Relativ-analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben*, Invent. Math. **16** (1972), 113–160.

[8] O. Forster, K. Knorr, *Konstruktion verseller Familien kompakter komplexer Räume*, Lecture Notes in Mathematics 705, Springer, Berlin, 1979. vii+141 p.

[9] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. I.H.E.S. **5** (1960) 233–292.

[10] H. Grauert, *Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume*, Invent. Math. **25** (1974), 107–142.

[11] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985) 307–347.

[12] Ch. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude*, Math. Annalen **205** (1973) 13–54.

[13] A. Kas et M. Schlessinger, *On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity*, Math. Ann. **196** (1972), 23–29.

[14] R. Kiehl, J.-L. Verdier, *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert*, Math. Ann. **195** (1971) 24–50.

[15] K. Knorr, *Le théorème de projection de Grauert*, Séminaire sur les Espaces Analytiques, Bucarest, 1969, p. 17–24, Editura Acad. R.S.R., Bucarest.

[16] K. Knorr, *Der Grauertsche Projektionssatz*, Invent. Math. **12** (1971), 118–172.

[17] M. Kuranishi, *On the locally complete families of complex analytic structures*, Ann. of Math. **75** (1962) 536–577.

[18] R. Levy, *A new proof of the Grauert direct image theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987) 535–542.

[19] V. P. Palamodov, *Deformations of complex spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **31** (1976), N° 3 (189), 129–194. [English translation : Russian Math. Surveys **31** (1976), N° 3, 129–197].

[20] V. P. Palamodov, *The tangent complex of an analytic space*, Trudy Sem. Petrovsk. **4** (1978), 173–226.

[21] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology*, J. Differential Geom. **42** (1995) 259–368.

[22] L. Schwartz, *Homomorphismes et applications complètement continues*, C. R. Acad. Sc. **236** (1953) 2472–2473.

[23] H. Stieber, *Existenz semiuniverseller Deformationen in der komplexen Analysis*, Aspects of Mathematics, D5, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988, xxviii+179.