Perspectives pour une renaissance de l'enseignement des mathématiques dans le primaire et le secondaire

Jean-Pierre Demailly
Institut Fourier, Université de Grenoble I
27 mars 2010

Chapitre I :
Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire

Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html`

version du 2 juillet 2008

0. Introduction

L'objectif de ce texte est de proposer une piste pour l'enseignement de la géométrie élémentaire et pour la réflexion sur cet enseignement. La géométrie euclidienne se trouve être un domaine très privilégié des mathématiques, à l'intérieur duquel il est possible de mettre en œuvre depuis le point de départ des raisonnements riches, tout en faisant appel de manière remarquable à la vision et à l'intuition. Notre préoccupation est d'autant plus grande que l'évolution des programmes scolaires depuis 3 ou 4 décennies révèle une diminution très marquée des contenus géométriques enseignés, en même temps qu'un affaiblissement du raisonnement mathématique auquel l'enseignement de la géométrie permettait précisément de contribuer de façon essentielle.

Or, au delà de leurs applications dans tous les domaines des sciences, les mathématiques jouent un rôle crucial dans la formation de l'esprit critique des citoyens. Le raisonnement mathématique est un atout considérable pour évaluer la pertinence des assertions en tout genre issues de la société et du monde politique. A l'heure où une certaine expression politique tend à demander au public scolaire d'être le témoin docile de choix éthiques, gestionnaires ou sociétaux contestables – fussent-ils marqués du sceau européen – nous estimons au contraire que la rigueur du raisonnement mathématique et l'universalité de sa portée sont des garde-fous précieux. Encore faut-il pour cela que les connaissances scientifiques puissent être librement accessibles à tous, et que les politiques publiques favorisent leur création dans une vision à long terme au service du citoyen(1).

---

(1) Dans ce domaine, nous sommes préoccupés par la réforme du système de recherche français qui tend à réduire le rôle de la recherche fondamentale au profit de la seule recherche rentable à court terme. La liberté de création et de circulation des informations scientifiques est parfois gravement compromise par une gestion abusive des questions de propriété intellectuelle au bénéfice de la bulle spéculative et financière. Nous avons ici par exemple à l'esprit le scandale des traitements de lutte contre le sida, facturés à des prix exorbitants au pays en voie de développement par des laboratoires pharmaceutiques peu scrupuleux. Mais les mathématiques elles-mêmes ne sont pas à l'abri. Ainsi, un doctorant russe en cryptanalyse dénommé Igor Sklyarov et employé par la société russe ElcomSoft, fut arrêté le 16 juillet 2001 à Las Vegas après avoir donné une conférence sur la sécurité informatique. Il a été arrêté par le FBI, sur ordre de l'industrie américaine du livre, pour avoir diffusé des algorithmes arithmétiques susceptibles de contourner des mesures de protection logicielles, selon les termes du

Une autre forme de liberté particulièrement importante pour les mathématiques est celle de leurs méthodes d'enseignement. Ceci est vrai particulièrement dans la situation d'incertitude qui prévaut sur la validité du modèle éducatif actuel, et qui rend d'autant plus nécessaire l'exploration de nouvelles pistes. De ce point de vue, nous avons espoir que la liberté pédagogique prévue par la loi d'orientation sur l'école soit vraiment appliquée par la hiérarchie éducative, et qu'elle soit concrètement permise par les nouveaux programmes en chantier. Compte tenu du précédent des mathématiques modernes, nous ne souhaitons pas – pour le cas improbable où certains décideurs viendraient à l'envisager – que le présent texte de propositions soit pris trop au pied de la lettre et devienne ainsi la source d'un nouveau dogmatisme !

Nous espérons néanmoins que l'approche décrite ci-dessous sera utile aux professeurs et aux auteurs de manuels de mathématiques. Idéalement, le contenu de ce texte devrait être maîtrisé aussi par tous les professeurs d'école, car même à l'école primaire, il apparaît difficile d'avoir un recul suffisant sur l'enseignement de la géométrie sans posséder l'essentiel des notions qui vont suivre (exception faite des sections 10 à 13, qui portent sur des mathématiques plus avancées).

1. Point de vue sur les axiomatiques de la géométrie

Comme discipline constituée, la géométrie trouve son origine dans l'axiomatique établie par Euclide et ses successeurs, même si des connaissances géométriques élaborées préexistaient au développement de la science grecque. L'enseignement traditionnel de la géométrie institué en France au cours de la période 1880-1970 mettait en œuvre une approche directement inspirée d'Euclide : énoncé des axiomes et des propriétés fondamentales des objets et figures géométriques, puis utilisation des « cas d'égalité des triangles » comme point de départ du raisonnement géométrique.

Cette approche avait l'intérêt d'être très concrète et de donner lieu rapidement à des résultats et raisonnements riches en contenu. D'autre part, elle rendait fidèlement compte du caractère intrinsèque des propriétés géométriques, sans nécessiter le recours a priori au calcul et à l'algèbre. Les choix opérés faisaient écho à une tradition mathématique bien ancrée au XIX^e siècle, ayant pour but de dégager les formes de la « géométrie pure », dont l'un des points culminants a été le développement de la géométrie projective par Poncelet.

L'axiomatique d'Euclide n'était cependant ni complète ni tout à fait satisfaisante sur le plan logique, ce qui a conduit des mathématiciens comme Pasch et Hilbert à mettre au point le système d'axiomes maintenant attribué à Hilbert, popularisé dans son célèbre mémoire Grundlagen der Geometrie [Hil] en 1899. Il faut noter toutefois que le nombre élevé d'axiomes mis en jeu et la complexité logique du système rendent en réalité impossible son enseignement à un niveau élémentaire(2), ce qui veut dire qu'un

---

Digital Millennium Copyright Act. Sur ce plan, nous somme heureux de constater l'émergence de communautés et d'acteurs nouveaux favorables à la libre diffusion des connaissances : logiciels libres, encyclopédie universelle Wikipedia, journaux scientifiques en libre accès, formats de documents libres et interopérables (TEX, Openoffice Document Format, ...)

(2) Même sous la forme sensiblement améliorée présentée par E. Artin dans son célèbre ouvrage « Algèbre géométrique » [Art51], il apparaît que l'axiomatique de Hilbert peut difficilement être abordée avant la 3^e ou 4^e année d'université.

nombre substantiel de propriétés formellement démontrables devront être admises, et que la logique de cette axiomatique a toutes les chances d'échapper complètement à l'élève (et même à ses enseignants). Ceci n'est toutefois pas nécessairement un handicap majeur pour l'introduction et la compréhension des principaux résultats géométriques, comme la longue expérience de l'enseignement secondaire de la III^e^ République l'a amplement montré.

On peut noter cependant une certaine coupure avec les formes modernes beaucoup plus diversifiées du raisonnement géométrique, coupure déjà sensible avec la géométrie analytique introduite par Descartes dans la première moitié du XVII^e^ siècle. La réforme dite des mathématiques modernes a balayé ces points de vue en imposant brutalement un changement complet de paradigme : l'enseignement de la géométrie se devait de commencer par les fondements de l'algèbre linéaire, traités qui plus est par une approche formelle et axiomatique dans le cadre le plus général possible. Or celle-ci présente une difficulté conceptuelle a priori, qui est que l'univers sensible des physiciens est celui de la géométrie euclidienne, avec en particulier la notion de longueur sous-jacente, alors que l'algèbre linéaire abstraite tend à vouloir faire commencer la géométrie avec un groupe d'invariance plus grand, à savoir le groupe de toutes les transformations linéaires. Si cette approche a pu tout de même donner des résultats satisfaisants au milieu des années 1970, notamment avec les 2 ou 3 promotions d'élèves qui avaient encore bénéficié des programmes de géométrie euclidienne traditionnelle au collège, il est apparu que les programmes s'enfermaient peu à peu dans un formalisme excessif et stérile. On peut citer en exemple la définition absconse de la droite affine donnée par les programmes de 4^e^ au cours des années 1975-1985 : c'est un ensemble muni d'un système de bijections avec l'ensemble des nombres réels, de sorte que deux bijections quelconques f, g se déduisent l'une de l'autre par une relation de la forme $g(M) = af(M) + b$ où a et b sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Les élèves ont fini par en faire une indigestion chronique - aggravée il est vrai par les multiples réformes intervenues dans le primaire, qui ont abouti de leur côté à un recul des possibilités de raisonnement et des savoirs fondamentaux en calcul. L'étape suivante, sous le ministère Chevènement en 1985, a résulté dans une série de coupes sombres dans les programmes. Ceux-ci ont été marqués par un nouvel affaiblissement des contenus enseignés en géométrie, dans des formes qui ne laissaient plus place au collège qu'à des quasi-tautologies en guise de raisonnement. La « dégénérescence » de l'enseignement du raisonnement nous paraît en grande partie imputable à l'insuffisance de structuration logique des programmes et à l'absence d'un vocabulaire apte à formuler des énoncés riches et précis, comme par exemple le vocabulaire ensembliste devenu soudain suspect et donc frappé de bannissement quasi total. Bien que les programmes actuels du lycée donnent l'illusion de contenir encore des éléments substantiels de géométrie, on voit que la dominante est l'utilisation de calculs de géométrie analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, sans qu'une formulation intrinsèque des concepts mis en jeu puisse se dégager clairement, en particulier l'idée essentielle que les objets géométriques sont indépendants des coordonnées choisies.

Il est donc indispensable d'en revenir à des modes d'enseignement de la géométrie qui posent clairement la nature géométrique des objets considérés, ce qui signifie que des définitions précises doivent pouvoir être données, et que les programmes doivent permettre d'obtenir et de démontrer des énoncés riches à partir des propriétés prises comme point de départ. En un mot, il convient d'en revenir, sous une forme explicite ou non, à une certaine forme de présentation axiomatique de la géométrie. Nous ne voulons pas dire par là que l'enseignement doit nécessairement adopter l'ordre de présentation très strict sous-tendu par l'axiomatique choisie (quelle qu'elle soit), mais celle-ci devrait d'une part donner un cadre précis où les enseignants puissent se retrouver, et d'autre part guider la conception des programmes et des progressions.

Pour justifier notre souhait de dépasser l'approche d'Euclide encore utilisée dans l'enseignement il y a 50 ans, nous ferons observer que l'on bénéficie aujourd'hui d'un avantage considérable par rapport aux Grecs, qui est de disposer depuis Simon Stevin de notations algébriques universellement admises, et depuis Descartes, de la possibilité d'aborder la géométrie au moyen des coordonnées et du calcul analytique. Pour ce qui est des nombres réels au sens moderne, la géométrie grecque semblait surtout mettre l'accent sur le concept de rapport de grandeurs de même nature, et la notion de fonction polynôme n'était pas dégagée en tant que telle – même si les Grecs savaient ramener les équations du second et du troisième degré à des problèmes géométriques.

L'approche que nous voulons proposer ici sera donc une synthèse des points de vue de Pythagore et Euclide avec celui de Descartes. La géométrie euclidienne se caractérise par la donnée d'une distance se calculant au moyen du théorème de Pythagore, et il se trouve alors que tous les objets dont on a besoin en géométrie euclidienne peuvent se définir à partir de la seule notion de longueur[(3)]. Ainsi, dans la reconstruction de la géométrie euclidienne que nous allons exposer, le théorème de Thalès peut se déduire de celui de Pythagore. Un autre avantage est que toutes les notions peuvent se définir à l'aide d'un formalisme minimal et intuitif. De fait, la théorie va comporter une seule propriété de départ, liée directement au théorème de Pythagore, que l'on peut en outre justifier au préalable par des considérations intuitives simples et visuelles (mais ce n'est certes pas la présence d'un seul axiome qui soit nécessairement le fait décisif – en réalité l'axiome « Pythagore+Descartes » que nous allons introduire s'apparente davantage à une description concise d'un modèle de la géométrie euclidienne qu'à un axiome proprement dit). Contrairement à l'approche issue de l'algèbre linéaire, nous partons des notions de points et de figures géométriques plutôt que de celles beaucoup moins intuitives de vecteurs et d'espaces vectoriels, et l'idée de vecteur apparaîtra comme une construction a posteriori. Un autre de nos buts est de démonter l'argument erroné que la géométrie élémentaire enseignée autrefois ne constitue pas une partie sérieuse ou utile des mathématiques, parce que non susceptible d'une formalisation rigoureuse au sens moderne.

Il y a certainement quelques désavantages à la synthèse qui va être exposée. L'un d'entre eux est d'être seulement une reconstruction moderne, qui, même si elle paraîtra tout à fait évidente au mathématicien contemporain (et aurait sans doute paru évidente aussi à Klein ou Hilbert), n'a probablement jamais été enseignée telle quelle à une quelconque époque. Un autre est de « rigidifier » d'emblée le modèle euclidien, donc de ne pas être le cadre adapté aux autres géométries d'incidence telles que les géométries affines ou projectives. Enfin, les nombres réels sont introduits a priori dans le modèle, donc il

(3) Il est bien connu aujourd'hui que la donnée de la structure métrique détermine un grand nombre d'autres invariants, comme la mesure au sens de Hausdorff, la courbure riemannienne, etc. Ce point de vue a été très largement développé par Mikhail Gromov dans les 2 ou 3 dernières décennies. Voir par exemple M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

n'est pas question non plus d'accéder aux géométries sur d'autres corps que celui des réels. Mais pour une utilisation potentielle au collège ou au lycée, nous avons fait le choix délibéré de privilégier l'extrême simplicité à la généralité, et de nous focaliser sur le modèle euclidien et archimédien qui est aussi celui de la physique classique newtonienne…

2. Savoirs fondamentaux en calcul et en géométrie

Comme nous l'avons esquissé plus haut, l'enseignement de la géométrie est indissociable de celui du calcul arithmétique. Cela sera vrai en particulier pour l'étude du modèle euclidien (au sens moderne du terme), qui est fondé sur la notion de nombre réel. Nous décrirons donc tout d'abord les connaissances fondamentales en calcul mises en jeu.

2.1. L'école primaire et les quatre opérations

Il est indispensable que l'école primaire enseigne de nouveau le calcul écrit, afin d'aboutir à une maîtrise complète des algorithmes opératoires – les calculettes ne doivent être utilisées que lorsque l'élève y est parvenu. La pratique sûre et effective du calcul écrit suppose une connaissance fluide des tables d'addition et de multiplication (et leur lecture inverse : « tables de soustraction » et de « division »). Certains pédagogues minimalistes tendent à reporter l'essentiel de leur attention sur le calcul approché (estimations des ordres de grandeur) ou sur le calcul mental, mais les points suivants sont à peu près incontournables :

– bien que le calcul mental, comme le calcul écrit, implique la connaissance fluide des tables, ses procédures sont différentes, du fait de la nécessaire mémorisation des résultats intermédiaires. On procède ainsi par manipulation des unités, dizaines, centaines, milliers plutôt que sur les chiffres pris isolément, en partant d'ailleurs en général plutôt des chiffres de poids fort que des chiffres de poids faible comme c'est le cas avec les algorithmes posés usuels. En outre, la taille réduite des nombres mis en jeu ne permet pas d'atteindre le degré de généralité nécessaire pour une compréhension complète des algorithmes du calcul posé.

– s'il existe chez le jeune enfant une sorte de perception intuitive de la taille des nombres précédant son aptitude au calcul exact (perception qu'il convient bien sûr de ne pas contrecarrer), la fiabilité de la maîtrise du calcul approché et des ordres de grandeur n'est atteinte qu'au moyen d'éléments préalables du calcul exact, par exemple le calcul des puissances de dix combiné à la table de multiplication.

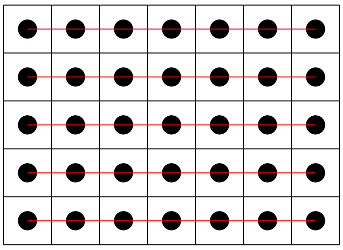
– enfin, même dans l'optique de la maîtrise du seul calcul approché, l'apprentissage d'un algorithme tel que celui de la division est un atout décisif : lorsque le diviseur comporte deux chiffres ou plus, l'obtention des chiffres du quotient fait fonctionner de manière très effective l'aptitude au calcul approché de la multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à plusieurs chiffres. En la circonstance, on sait bien que l'enfant a besoin de points de repère précis et d'objectifs clairement définis pour construire ses schémas mentaux, il ne suffit donc pas de déclarer le calcul approché comme un objectif pour qu'il se réalise par miracle.

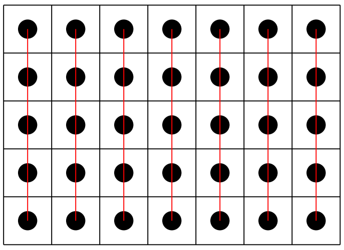
Bien entendu la maîtrise des algorithmes est très loin de se suffire à elle-même, l'enfant ne peut accéder au sens des opérations qu'en résolvant aussi des problèmes concrets portant sur des grandeurs de la vie courante (nombre de pommes, monnaie, longueurs, poids . . .). Ce sens ne peut se construire de manière efficace que si les quatre opérations sont introduites simultanément, afin que l'enfant puisse comparer et éventuellement opposer l'usage des différentes opérations. C'est donc le plus tôt possible, au cours préparatoire et même à la maternelle, que les quatre opérations doivent être étudiées.

2.2. Synergie de l'enseignement du calcul et de la géométrie

C'est dès la maternelle que les considérations géométriques apparaissent, par exemple au travers des activités de dessin ou de coloriage. Il est utile de faire dessiner des motifs géométriques simples, des frises, etc.

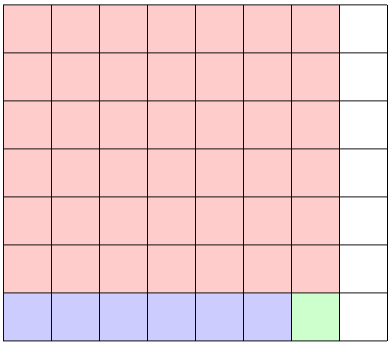
Au cours des premières années du primaire, le travail sur la géométrie doit venir solliciter les connaissances en calcul et réciproquement. Ainsi, le calcul du périmètre d'un rectangle permet de faire travailler l'addition, celui de son aire fait utilement mettre en pratique la multiplication et les changements d'unité. La représentation géométrique du rectangle donne la preuve de la commutativité de la multiplication :



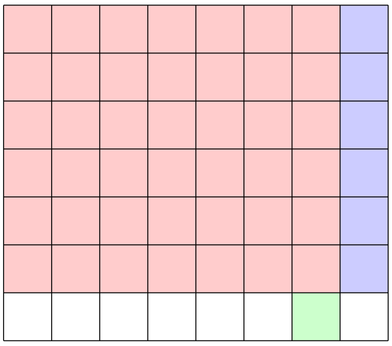


$7 \times 5 = 5 \times 7$

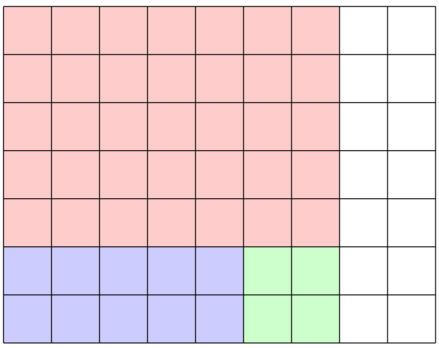
Certaines identités numériques comme $6 \times 8 = 7 \times 7 - 1$ ou $5 \times 9 = 7 \times 7 - 4$ peuvent se visualiser et s'expliquer géométriquement (il serait bon de faire la manipulation avec des pièces en bois pour solliciter tous les sens . . .)



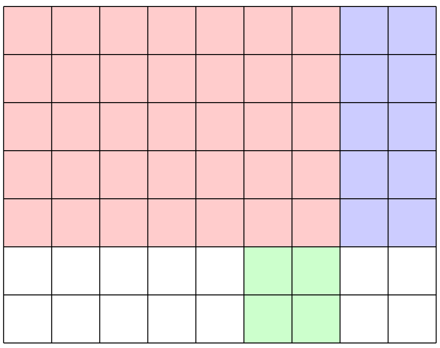
7×7



$6 \times 8 = 7 \times 7 - 1$



7×7



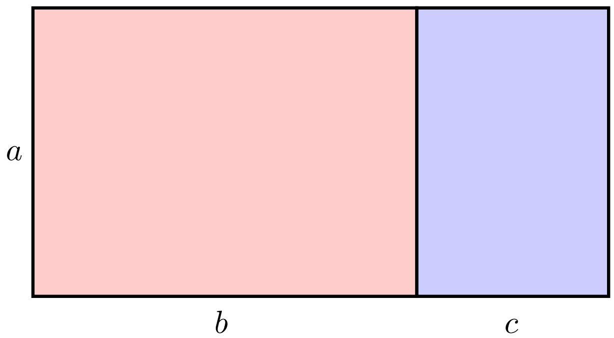
$5 \times 9 = 7 \times 7 - 2 \times 2$

Ces petits raisonnements sont bien de véritables démonstrations mathématiques, parmi les premières que l'on puisse présenter aux élèves.

Venons-en aux aires. On commencera naturellement par le calcul de l'aire d'un rectangle dont les côtés comprennent un nombre entier de fois l'unité de longueur choisie. Plus tard, pour calculer l'aire d'un rectangle de côtés $1,2\,\mathrm{m}$ par $0,7\,\mathrm{m}$, on se ramène en décimètres, ce qui donne

$$12\,\mathrm{dm} \times 7\,\mathrm{dm} = 84\,\mathrm{dm}^2 = 0,84\,\mathrm{m}^2,$$

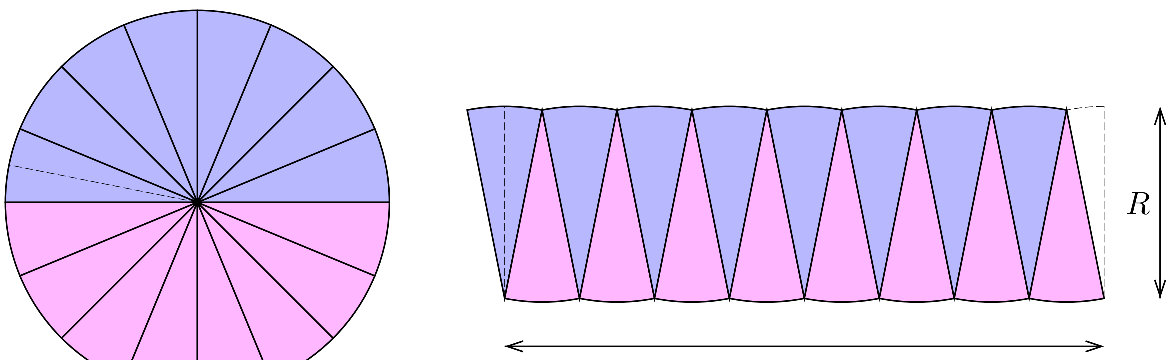
sachant que $1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2$ et donc $1\,\mathrm{dm}^2 = 0,01\,\mathrm{m}^2$. On voit donc que l'aire d'un rectangle est bien toujours le produit des longueurs des côtés, même lorsque ces longueurs sont des nombres décimaux. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se lit géométriquement :



$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Le calcul des aires et des volumes permet ainsi de consolider la compréhension du sens des opérations en liaison avec la manipulation des unités. Il est possible de donner en primaire de véritables démonstrations mathématiques non triviales – par exemple en CM1 ou en CM2 on peut donner la justification de la formule d'aire du disque :

Disque $\longrightarrow$ parallélogramme (ou rectangle)



$$\text{base} \simeq \frac{P}{2} = \pi \times R$$

$$\pi = \frac{P}{D} \quad \Rightarrow \quad P = \pi \times D = 2 \times \pi \times R$$

À la limite, en augmentant le nombre de secteurs triangulaires, on voit donc que l'aire du disque est donnée par $\pi \times R \times R = \pi R^2$. Bien entendu, ce travail suppose que l'on ait au préalable soigneusement traité l'aire du rectangle, du triangle et du parallélogramme, avec là encore les découpages géométriques classiques pour justifier les formules. Le statut de la formule $P = \pi D = 2\pi R$ est différent, dans ce cas il s'agit plutôt d'une *définition* du nombre π : c'est le rapport du périmètre au diamètre, qui est indépendant du cercle considéré (on justifiera intuitivement que si le diamètre double ou triple, il en est de même pour le périmètre, ce qui formellement résulte du théorème de Thalès...). Il est bien sûr souhaitable d'expérimenter en enroulant quelques tours d'une ficelle autour d'un tuyau de diamètre connu, pour trouver une valeur approchée de π.

De manière générale, l'enseignement de la géométrie doit se faire autour de manipulations concrètes : découpages, usage des instruments (règle, compas, rapporteur), tracés et constructions élémentaires (milieu, médiatrice, bissectrice, ...). Le travail sur papier quadrillé aide à former une première représentation intuitive des coordonnées cartésiennes ; il serait donc extrêmement utile d'envisager des activités dans cette direction dès le Cours Élémentaire.

2.3. Nombres négatifs, racines carrées, nombres réels

Avec la maîtrise des opérations élémentaires apparaissent naturellement les progressions arithmétiques et géométriques simples

$$\begin{array}{lllllllll} 0, & a, & 2a, & 3a, & 4a, & 5a, & 6a, & 7a, & \ldots \\ 1, & a, & a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & \ldots \end{array}$$

où $n\,a = a + a + \ldots + a$ (répété n fois) et $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (répété n fois). Le cas particulier des carrés, des cubes et des puissances de 10 relève déjà de l'enseignement primaire.

C'est encore au moyen de considérations géométriques (règle graduée, thermomètre), que l'on ressent le mieux le besoin d'introduire les nombres négatifs, à commencer par les multiples entiers négatifs d'une unité :

$$\ldots\ -5u,\quad -4u,\quad -3u,\quad -2u,\quad -u,\quad 0,\quad u,\quad 2u,\quad 3u,\quad 4u,\quad 5u,\quad 6u,\quad 7u\ \ldots$$

Au début du collège, on peut ensuite enchaîner avec les nombres décimaux négatifs et les échelles de mesure « continues ». Le souhait d'étendre la propriété de distributivité de la multiplication aux nombres de signe quelconque permet de déduire la règle des signes pour le produit des nombres positifs et négatifs :

$$a \times (b + (-b)) = a \times b + a \times (-b),$$

et comme le membre de gauche vaut $a \times 0 = 0$ on doit avoir $a \times (-b) = -(a \times b)$.

À la fin du cycle primaire, la pratique sûre de la division posée permet d'observer la périodicité des restes et donc du développement décimal d'une fraction. Ceci est particulièrement apparent sur de nombreuses fractions de petit dénominateur conduisant à une périodicité très courte (dénominateurs tels que 3, 7, 9, 11, 21, 27, 33, 37, 41, 63, 77, 99, 101, 271 (...) et leurs multiples par 2 et 5, qui conduisent à une période de longueur 6 au plus).

Les nombres réels apparaissent naturellement comme développements décimaux non périodiques avec l'introduction de la racine carrée. Cependant, l'usage prématuré des calculettes lié à l'absence de pratique suffisante du calcul décimal approché « à la main », par exemple des divisions, risque de conduire à une vision pauvre, trop formelle, de la notion de racine carrée. Il convient absolument que les élèves soient confrontés au problème numérique de l'extraction de la racine carrée, par exemple de $\sqrt{2}$:

$$(1,4)^2 = 1,96 \quad (1,5)^2 = 2,25 \qquad \text{donc} \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$
$$(1,41)^2 = 1,9881 \quad (1,42)^2 = 2,0164 \qquad \text{donc} \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42,$$
$$(1,414)^2 = 1,999396 \quad (1,415)^2 = 2,002225 \qquad \text{donc} \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \quad \ldots$$

Nous recommandons cette réintroduction dès la cinquième, en même temps que la preuve du théorème de Pythagore, qui met en évidence la nécessité géométrique des racines carrées (bien sûr, ceci suppose en pratique que les graves déficiences du primaire aient été préalablement résolues ...).

Lorsque ceci aura été compris, il deviendra possible de donner une définition précise générale de la notion de nombre réel, qui est une bonne occasion d'avoir une première approche implicite de la notion de limite :

(2.3.1) Définition. *Les nombres réels servent à mesurer les grandeurs, avec une précision illimitée. Un nombre réel s'exprime donc par un développement décimal illimité quelconque, non nécessairement périodique, autrement dit une suite* $\pm\ \square\square\ldots\square\square,\square\square\square\square\square\ldots$ *de chiffres* $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre infini à droite de celle-ci, précédée du signe* $+$ *ou du signe* $-$ (*l'absence de signe signifiant implicitement qu'on met le signe* $+$*, sauf pour le nombre zéro* $0 = 0,000\ldots$ *qui n'a pas de signe*).
D'un point de vue géométrique, un nombre réel correspond à un point sur un axe orienté, qui serait positionné à l'aide d'une « règle graduée de précision infinie ».

Nous préconisons de manière très ferme l'enseignement de l'algorithme d'extraction de la racine carrée « à la main », qui, comme tout algorithme effectif, met l'enfant en situation de maîtriser son environnement numérique (et lui fait voir, en la circonstance, l'absence de raison particulière qu'une racine carrée d'un nombre entier possède en général un développement décimal périodique). Ce serait là une excellente consolidation post-primaire de la pratique du calcul posé ; l'expérience montre que les enfants qui maîtrisent bien la division passent très facilement à l'algorithme de la racine carrée (une heure ou deux suffisent), de sorte que cet apprentissage n'engendre aucune perte de temps. Malheureusement, il n'est possible de tester ceci aujourd'hui que sur une fraction infime de la population scolaire, tellement la soupe est devenue insipide et la maîtrise des algorithmes opératoires incertaine ...

Pour que la définition (2.3.1) devienne rigoureuse et précise, on doit expliquer aussi les développements décimaux propres et impropres [(4)]. On fait constater à l'élève que $0,999999\ldots = 1$, en effet si $x = 0,999999\ldots$, alors $10\,x = 9,999999\ldots$, donc $10\,x - x = 9$ et ceci conduit à admettre nécessairement que $x = 1$, si on veut que les règles de calcul sur les nombres décimaux continuent à fonctionner sur les développements décimaux illimités. Plus généralement on a par exemple

$$0,34999999\ldots = 0,35 = 0,35000000\ldots$$

(4) Une fois que cela est fait, la définition (2.3.1) peut être considérée comme une définition formelle parfaitement acceptable des nombres réels – même si celle-ci a l'inconvénient, qui tient plus d'un léger manque d'élégance, de sembler dépendre du choix de la base 10.

Ces observations apparaissent comme des précisions à apporter à la définition (2.3.1) :

(2.3.2) Complément à la définition des nombres réels. *Les nombres décimaux ont deux écritures possibles, l'une finie (ou, ce qui revient au même, comportant une infinité de* 0 *consécutifs), appelée « développement propre », l'autre sous forme de « développement impropre » avec une infinité de* 9 *consécutifs et le chiffre précédent réduit d'une unité. Les nombres réels non décimaux n'ont qu'un seul développement décimal illimité.*

Les opérations sur les décimaux permettent de trouver le trouver le développement de la somme et du produit de deux nombres réels avec n'importe quelle précision donnée d'avance – donc de calculer la somme et le produit de deux nombres réels, au moins en principe[5]. La relation d'ordre est obtenue en comparant les décimales une à une.

À ce stade, dès la cinquième disons, on devrait pouvoir aboutir aux caractérisations importantes qui suivent (sous réserve que tous les programmes précédents aient été reconstruits de manière solide !) :

(2.3.3) Caractérisation des nombres rationnels et décimaux.

(a) *Un développement décimal représente un nombre rationnel (fraction de nombres entiers) si et seulement si ce développement est périodique à partir d'un certain rang.*

(b) *Parmi les nombres rationnels, les nombres décimaux sont ceux dont le développement comporte au choix une infinité de* 0 *consécutifs (« développement décimal propre ») ou une infinité de* 9 *consécutifs (« développement décimal impropre »).*

(c) *Les nombres réels non décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement ne comporte pas une suite infinie de décimales consécutives qui sont tous des* 0 *ou tous des* 9 *; ils ont donc soit une infinité de décimales qui ne sont ni des* 0 *ni des* 9*, soit une alternance infinie (éventuellement irrégulière) de* 0 *et de* 9 *à partir d'un certain rang.*

Démonstration. (a) En effet, étant donné une fraction p/q simplifiée qui n'est pas un nombre décimal (c'est-à-dire que q a d'autres facteurs premiers que 2 et 5), l'algorithme de division avec virgule de p par q « ne tombe pas juste » et conduit à des restes qui figurent parmi $1, 2, \ldots, q-1$. Au bout de $q-1$ étapes au plus après la virgule, on retombe nécessairement sur un reste déjà trouvé, de sorte que le développement est périodique et que la période est au plus de longueur $q-1$.[6]

(5) Pour une justification théorique complète, on a besoin du théorème sur la convergence des suites croissantes majorées de nombres réels, ce qui relève au mieux du lycée, cf. notre texte *Puissances, exponentielles, logarithmes, ...* pour plus de détails.

(6) De façon plus formelle, si on regarde les restes de la division de 10^m par un entier $q \in \mathbb{N}^*$ quelconque, il doit exister deux entiers $m < n$ dans l'intervalle $[0, q-1]$ tels que 10^m et 10^n ont le même reste, donc q divise $10^n - 10^m$. Autrement dit, q divise l'entier $10^m(10^a - 1)$ avec $a = n - m$. La fraction p/q s'écrit encore $10^{-m}\frac{p}{10^a-1} = 10^{-n}(k + \frac{r}{10^a-1})$ où r est le reste de la division de p par $10^a - 1$ et k son quotient. Comme r est un entier d'au plus a chiffres et que $1/(10^a - 1) = 0{,}00\ldots00100\ldots001\ldots$ avec une périodicité de a chiffres, on voit que $r/(10^a - 1) = 0{,}r_1r_2\ldots r_{a-1}r_ar_1r_2\ldots r_{a-1}r_a\ldots$ où $r_1r_2\ldots r_{a-1}r_a$ est l'écriture décimale de r. Suivant le signe de p, ceci implique un développement décimal de la forme

$$\frac{p}{q} = \pm\, k'_N k'_{N-1}\ldots k'_1 k'_0, k_1 k_2 \ldots k_m r_1 r_2 \ldots r_{a-1} r_a r_1 r_2 \ldots r_{a-1} r_a \ldots$$

Inversement, si on a un développement périodique, disons de longueur 5, soit par exemple

$$x = 0,10723114231142311423114\ldots,$$

on observe que la division 1 : 99999 donne

$$\frac{1}{99999} = 0,00001000010000100001\ldots,$$

de sorte que

$$\frac{23114}{99999} = 23114 \times \frac{1}{99999} = 0,23114231142311423114\ldots$$

$$\frac{23114}{99999000} = 0,00023114231142311423114\ldots$$

En définitive, comme $0,107 = \dfrac{107}{1000}$, on obtient

$$x = \frac{107}{1000} + \frac{23114}{99999000} = \frac{107 \times 99999 + 23114}{99999000} = \frac{10723007}{99999000}$$

qui est bien un nombre rationnel. Ce procédé de mise en forme de fraction s'étend facilement à tout développement décimal périodique. L'affirmation (b) est seulement une reformulation de la définition (2.5), et (c) lui est équivalente. Le dernier cas de (c) est illustré par exemple par le nombre rationnel $1/11 = 0,09090909\ldots$ □

Toutes ces considérations sont consolidées par l'introduction du calcul algébrique et polynomial, la manipulation des inégalités et des encadrements, les identités remarquables. Il me paraît important de visualiser géométriquement $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$. Il serait utile de distribuer dans toutes les écoles primaires et tous les collèges de France des assemblages de pièces en bois permettant de visualiser $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ (car ce sujet peut même être abordé de manière concrète dès la fin de l'école primaire, à l'occasion de l'introduction des aires et des volumes). L'identité $(10a+b)^2 - 100a^2 = (20a+b)b$ intervient dans la justification de l'algorithme de la racine carrée. À un niveau plus élémentaire (disons au CM2) – et avec une justification seulement géométrique sur des carrés découpés dans du papier millimétré – la formule

$$(10a+5)^2 = 100\,a(a+1) + 25$$

peut servir au calcul mental efficace de carrés de nombres se terminant par 5 : ainsi $(75)^2 = 5625$, le nombre 56 étant obtenu en faisant $a(a+1) = 7 \times 8$.

3. Premiers pas de l'enseignement de la géométrie au collège

3.1. Concepts fondamentaux

Compte tenu de l'approche que nous souhaitons développer, la notion de longueur et de distance est l'une des notions primitives sur lesquelles nous allons nous appuyer – ceci ne devrait pas poser de difficulté particulière puisqu'il s'agit précisément de l'une des premières notions déjà enseignées à l'école primaire.

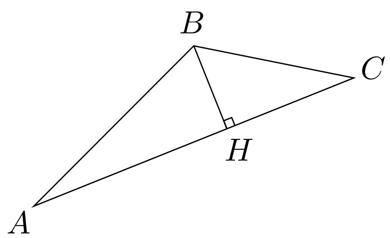
Les autres notions primitives sont celle de nombre réel (déjà discutée), et celles de point et d'ensemble de points : un point doit être pensé comme un objet géométrique qui n'a ni étendue ni épaisseur (ou plutôt une épaisseur et une étendue nulles); on en obtient une approximation en représentant une petite croix avec un crayon bien taillé. Une figure géométrique est constitué d'une collection ordonnée finie ou infinie de points – ainsi une ligne continue contient une infinité de points au sens mathématique du terme. Une droite, un plan sont également considérés comme des ensembles infinis de points.

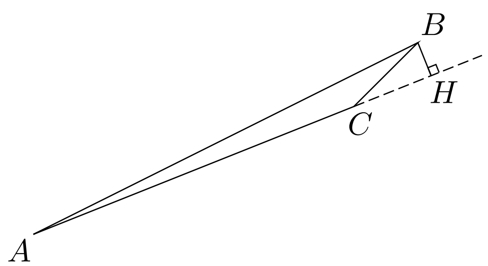
On sera donc amené à raisonner avec les ensembles, et, pour cela, nous recommandons que le symbolisme ensembliste de base soit (ré)introduit dès le début du collège : ensembles définis en extension et en compréhension, notations $x \in E$ (l'élément x appartient à l'ensemble E), $A \subset B$ (l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B), $A \cup B$ (union de A et B), $A \cap B$ (intersection de A et B), $A \smallsetminus B$ (différence ensembliste A moins B). À ce niveau, il s'agit seulement d'un langage et de notations utiles, pas d'une théorie axiomatique…

Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on note $d(A, B)$ (ou encore simplement AB) leur distance, qui est en général un nombre positif, nul si les points A et B sont confondus – concrètement cette distance se mesure avec une règle graduée. La première propriété fondamentale de la distance est la suivante :

3.1.1. Inégalité triangulaire. *Étant donnés trois points A, B, C, les distances vérifient toujours $AC \leqslant AB + BC$, autrement dit la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

Justification intuitive.





On abaisse la hauteur issue de B sur la droite (AC) et on note H le pied de la hauteur. Si H est situé entre A et C, on a $AC = AH + HC$, et d'autre part, si le triangle n'est pas aplati (c'est-à-dire si $H \neq B$), on a $AH < AB$ et $HC < BC$ (car dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que les deux autres côtés – on le vérifiera plus loin grâce au théorème de Pythagore). Si H est situé en dehors du côté $[A, C]$, disons au delà de C, on a déjà $AC < AH \leqslant AB$, et donc $AC < AB \leqslant AB + BC$. □

Cette justification[7] montre que l'égalité $AC = AB + BC$ est réalisée si et seulement si les points A, B, C sont alignés et si B est situé entre A et C (dans ce cas, on a $H = B$ sur la partie gauche du dessin ci-dessus). Ceci nous amène aux définitions naturelles suivantes reposant toutes sur la notion de distance, et sur elle seulement[8].

3.1.2. Définitions (segments, droites, demi-droites).

(a) *Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on appelle segment $[A, B]$ d'extrémités A, B l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$.*

(b) *On dit que trois points A, B, C sont alignés avec B situé entre A et C si $B \in [A, C]$, et on dit qu'ils sont alignés (sans autre précision) si l'un deux appartient au segment formé par les deux autres.*

(c) *Étant donné deux points distincts A, B, la droite (AB) est l'ensemble des points M alignés avec A et B ; la demi-droite $[A, B)$ d'origine A contenant B est l'ensemble des points M alignés avec A et B tels que M soit situé entre A et B, ou B entre A et M. Deux demi-droites de même origine sont dites opposées si leur réunion forme une droite.*

La partie (a) de la définition correspond physiquement à la réalisation d'un segment de droite en tendant un fil mince et léger entre deux points A et B : si le fil est tendu, les points M situés entre A et B ne peuvent pas « dévier », sinon la distance AB est inférieure à la longueur du fil et on peut encore étirer celui-ci . . .

On peut passer ensuite à la notion d'axe : c'est une droite $\mathcal{D}$ munie d'une origine O et d'une orientation, ce qui revient à choisir parmi les deux points situés à distance unité de O lequel sera représenté par $+1$ et lequel par -1 ; notons les respectivement I et I'. Un point M de $[O, I)$ sera représenté par le réel $x_M = +OM$ et un point M de la demi-droite opposée $[O, I')$ par le réel $x_M = -OM$. La *mesure algébrique* d'un bipoint (A, B) de cet axe est par définition $\overline{AB} = x_B - x_A$, qui est égal à $+AB$ ou $-AB$ suivant que A, B se suivent dans le sens de l'orientation ou dans le sens inverse. Pour trois points quelconques A, B, C de $\mathcal{D}$, on a la *relation de Chasles*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Elle résulte du fait que $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ après simplification de l'expression algébrique.

À partir de la distance et des notions de segments, droites et demi-droites, nous pouvons maintenant définir rigoureusement et sans difficultés les plans, demi-plans, cercles, arcs de cercle, angles . . .[9]

---

(7) Ce n'est pas une véritable démonstration puisqu'on s'appuie sur des notions non définies et des faits non encore démontrés, par exemple la notion de droite, la perpendicularité, l'existence d'un point de concours d'une droite avec sa perpendiculaire, etc. Ceci viendra après (sans qu'il y ait de cercle vicieux, les justifications auront juste servi à nous amener vers les bonnes définitions !).

(8) Ces définitions sont quant à elles parfaitement licites et rigoureuses, à partir des données primitives que sont les points et leurs distances mutuelles. Elles fonctionneraient encore par exemple en géométrie hyperbolique (ou même en géométrie riemannienne, du moins lorsqu'il y a unicité des géodésiques).

(9) Bien entendu, cette longue succession de définitions est juste destinée à exposer l'enchaînement des concepts dans un ordre logique. Devant des élèves, ces définitions doivent être espacées dans le temps au fur et à mesure de l'introduction des notions, et entrecoupées d'illustrations, d'exercices et de travaux de construction avec les instruments.

3.1.3. Définitions.

(a) *Deux droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ sont dites concourantes si leur intersection est constituée d'exactement un point.*

(b) *Un plan $\mathcal{P}$ est un ensemble de points balayé par les droites (UV) telles que U décrit une droite $\mathcal{D}$ et V une droite $\mathcal{D}'$, pour des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ concourantes données. Si A, B, C sont 3 points non alignés, on note (ABC) le plan associé par exemple aux droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (AC)$.*[10]

(c) *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles si elles sont confondues, ou bien si elles sont contenues dans un même plan $\mathcal{P}$ et ne coupent pas.*

(d) *Un angle aigu $\widehat{BAC}$ (ou secteur angulaire aigu) défini par deux demi-droites $[A,B)$, $[A,C)$ de même origine et non opposées est l'ensemble balayé par les segments $[U,V]$ avec $U \in [A,B)$ et $V \in [A,C)$.*

(e) *Un angle obtus (ou secteur angulaire obtus) $\widetilde{BAC}$ est le complémentaire de l'angle aigu $\widehat{BAC}$ dans le plan (ABC), auquel on convient d'ajouter les demi-droites $[A,B)$ et $[A,C)$ comme bord.*

(f) *Étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un point M situé hors de $\mathcal{D}$, le demi-plan bordé par $\mathcal{D}$ contenant M est la réunion des secteurs angulaires $\widehat{BAM}$ et $\widehat{CAM}$ obtenus en écrivant $\mathcal{D}$ comme réunion de deux demi-droites opposées $[A,B)$ et $[A,C)$; c'est la réunion de tous les segments $[U,V]$ tels que $U \in D$ et $V \in [A,M)$. Le demi-plan opposé est celui associé à une demi-droite $[A,M')$ opposée à $[A,M)$. On parle aussi dans ce cas d'angles plats de sommet A.*

(g) *Dans un plan $\mathcal{P}$, on appelle cercle de centre A et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $d(A,M) = AM = R$.*

(h) *Un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un secteur angulaire ayant pour sommet le centre du cercle.*

(i) *La mesure d'un angle (en degrés) est calculée proportionnellement à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur un cercle dont le centre est le sommet de l'angle, de sorte que le cercle complet corresponde à $360°$. Un angle plat (découpé par un demi-plan bordant un diamètre du cercle) correspond à un arc formé par un demi-cercle et a pour mesure $180°$. On appelle angle droit la moitié d'un angle plat, c'est-à-dire un angle correspondant à un quart de cercle, ou encore un angle de mesure égale à $90°$.*

(j) *Deux demi-droites de mêmes extrémités sont dites perpendiculaires si elles forment un angle droit.*[11]

---

(10) Ce qu'on entend par ensemble « balayé » par des droites désigne tout simplement la réunion de ces droites (qui sont en nombre infini). De manière générale, on pourrait définir par récurrence sur n un sous-espace affine S_n de dimension n comme l'ensemble balayé par les droites (UV) où U décrit une droite $\mathcal{D}$ et V décrit un sous-espace S_{n-1} de dimension $n-1$ coupant $\mathcal{D}$ en exactement un point. Nos définitions sont valables en toute dimension (même infinie), sans qu'il y ait besoin de préciser !

(11) Les notions d'angle plat et d'angle droit, de même que la notion d'angle moitié relèvent déjà du primaire. A ce niveau, la meilleure façon d'aborder ces questions est probablement de pratiquer le pliage de feuilles papier. (La notion d'horizontalité et de verticalité étant des notions relatives, il vaut mieux les éviter pour introduire la perpendicularité, de façon à éviter les confusions probables).

L'énoncé des propriétés des droites parallèles et des angles correspondants ou alterne-interne permet d'aboutir à la valeur de la somme des angles d'un triangle (puis, à partir de là, d'un quadrilatère).

La définition (i) appelle évidemment de nombreux commentaires. La première est le besoin d'une définition de la longueur d'un arc de cercle, ou plus généralement d'un arc de courbe : c'est la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe, lorsqu'on subdivise en segments de plus en plus petits (cf. 2.2)[12]. La seconde est l'indépendance de la mesure de l'angle par rapport au rayon du cercle choisi (c'est-à-dire par rapport à la taille du rapporteur utilisé comme instrument de mesure) ; cela résulte de la proportionnalité des longueurs d'arc aux rayons R, qui elle-même résulte du théorème de Thalès (cf. plus loin).

Par ailleurs, une règle de trois donne l'expression de la longueur d'arc sur un cercle de rayon R : un arc de 360° a pour longueur $2\pi R$, donc un arc de 1° a pour longueur 360 fois moins, c'est-à-dire $2\pi R/360 = \pi R/180$, et un arc de mesure a (en degrés) a pour longueur

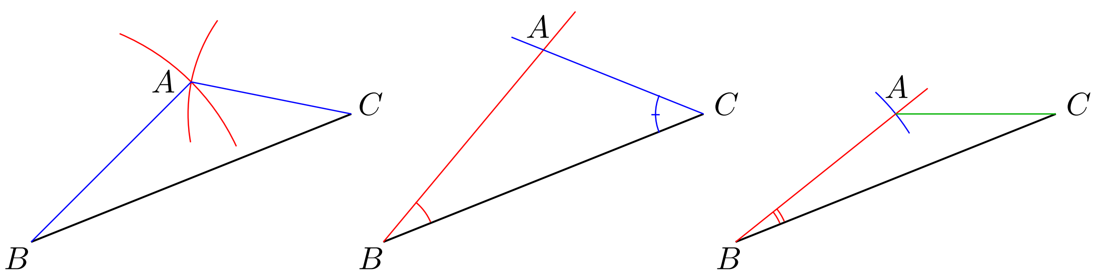
$$\ell = (\pi R/180) \times a = R \times a \times \pi/180.$$

3.2. Construction avec les instruments et cas d'isométrie des triangles

Il est indispensable d'illustrer toutes les notions géométriques introduites à l'aide de dessins et de construction effectuées à l'aide des instruments (règle, compas, rapporteur). Les constructions élémentaires à la règle et au compas, comme celles du milieu, de la médiane, de la bissectrice, devraient déjà relever de l'enseignement primaire. Suivent de près celles de la perpendiculaire et de la parallèle à une droite passant par un point.

Au début du collège, il convient de passer à un niveau de conceptualisation plus avancé et, par exemple, de poser le problème de construire un triangle ABC ayant une base BC donnée et deux autres éléments, à savoir :

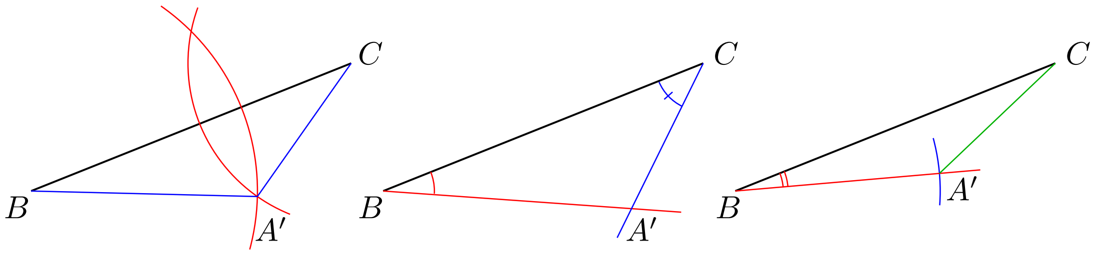
(3.2.1) les longueurs des côtés AB et AC,
(3.2.2) les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$,
(3.2.3) la longueur du côté AB et la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



Dans le premier cas, on obtient la solution en traçant les cercles de centres B et C et de rayons AB et AC, dans le deuxième cas on utilise le rapporteur pour tracer

(12) La définition précise et l'existence de la limite sont des questions difficiles qui ne peuvent pas être abordées avant le lycée, mais il paraît bon d'introduire déjà ces points de manière intuitive.

deux secteurs angulaires de sommets B et C, dans le troisième cas on trace un secteur angulaire de sommet B et un cercle de sommet B. Dans chaque cas on voit qu'il y a exactement deux solutions, le deuxième triangle $A'BC$ solution étant symétrique de ABC par rapport à la droite (BC) :



On voit que les triangles ABC et ABC' ont dans les trois cas les mêmes longueurs de côtés. Ceci conduit à la notion très importante de *figures isométriques.*

3.2.4. Définition.

(a) *On dit que deux triangles sont isométriques si les côtés qui se correspondent sont de mêmes longueurs, de sorte que si le premier triangle a pour sommets A, B, C et les sommets correspondants du deuxième sont A', B', C', on ait $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.*

(b) *Plus généralement on dit que deux figures du plan ou de l'espace sont isométriques, la première étant définie par des points A_1, A_2, A_3, A_4 ... et la seconde par des points correspondants A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ... si toutes les distances mutuelles $A'_iA'_j = A_iA_j$ coïncident.*

La notion de figure isométriques est reliée à la notion physique de *corps solide*: un objet est dit solide si les distances mutuelles de ses composants (molécules, atomes) sont fixes au cours d'un mouvement; après un déplacement, les atomes qui occupaient des point A_i occupent de nouvelles positions A'_i et on a bien $A'_iA'_j = A_iA_j$. Ceci permet d'aboutir à une définition rigoureuse des mouvements et déplacements, qui ont un sens aussi bien du point de vue des mathématiques que de la physique.

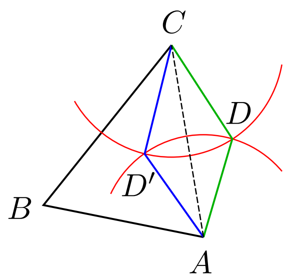
3.2.5. Définition. *Étant donné une figure (ou corps solide de l'espace) défini par les points A_1, A_2, A_3, A_4 ..., on appelle mouvement une succession continue de positions $A_i(t)$ de ces points par rapport au temps t, de telle sorte que les distances $A_i(t)A_j(t)$ soient fixes. Si les points A_i constituent les positions initiales et les A'_i les positions finales, on dit que la figure $(A'_1A'_2A'_3A'_4 \ldots)$ est obtenue par déplacement de la figure $(A_1A_2A_3A_4 \ldots)$.*[13]

En dehors des déplacements, une autre façon de produire des figures isométriques est d'utiliser une symétrie miroir (symétrie par rapport à une droite dans le plan, symétrie

(13) La notion de continuité utilisée est ici la notion usuelle de fonction continue d'une variable – on ne peut bien sûr en parler que de manière intuitive au niveau du collège. On démontrera plus loin qu'une isométrie entre deux figures ou corps solides s'étend en une isométrie affine de tout l'espace, et qu'un déplacement correspond à une isométrie affine positive, cf. section 10. La preuve n'est pas extrêmement difficile, mais ne peut pas être donnée avant la fin du lycée (cette éventualité paraît même optimiste au vu de la situation actuelle).

par rapport à un plan dans l'espace)[14]. Ce fait s'observe déjà avec des triangles, et l'utilisation du papier calque s'impose dans ce contexte pour construire des triangles isométriques non superposables par déplacement sans sortir du plan ; il sera de même utile de construire des solides élémentaires non superposables (tétraèdres non réguliers, par exemple).

3.2.6. Exercice. Pour que deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ soient isométriques, il ne suffit pas que les 4 côtés $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'D' = CD$, $D'A' = DA$ soient de mêmes longueurs, on doit aussi supposer que les deux diagonales $A'C' = AC$ et $B'D' = BD$ soient égales ; une seule ne suffit pas comme le montre la construction ci-dessous :



Le travail de construction fait plus haut avec les triangles nous amène à énoncer en conclusion les cas d'isométrie des triangles.

3.2.7. Les cas d'isométrie des triangles[15]**.** *Pour que deux triangles soient isométriques, il faut et il suffit*

(a) *qu'ils aient leurs trois côtés égaux (c'est la définition), ou*

(b) *qu'ils aient un angle égal et les côtés adjacents égaux, ou*

(c) *qu'ils aient un côté égal et les deux angles adjacents égaux.*

On notera que les conditions (b) et (c) ne sont pas suffisantes si on omet le mot adjacent – et il serait bon de montrer (ou de faire faire) des constructions mettant ce fait en évidence.

L'utilisation des cas d'isométrie en conjonction avec les propriétés des angles alternes-internes permet de démontrer les diverses caractérisations usuelles des quadrilatères (parallélogrammes, losanges, rectangles, carrés).

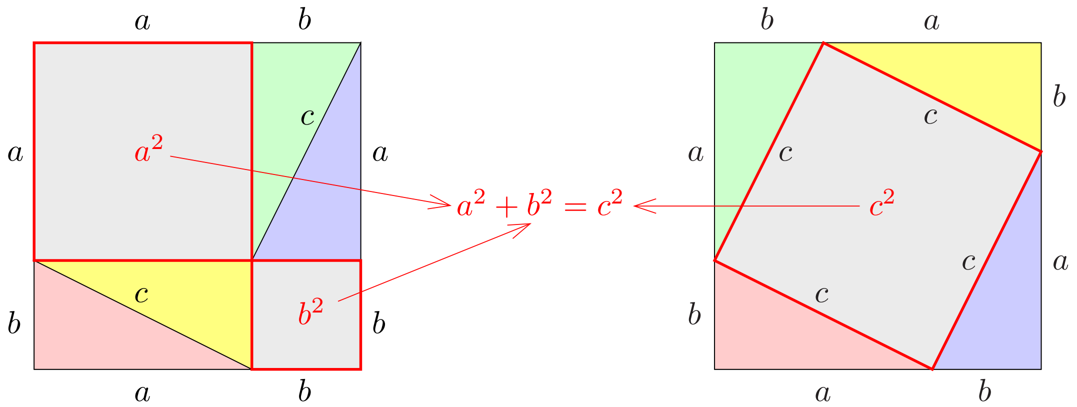
3.3. Le théorème de Pythagore

Voici une « preuve » très classique du théorème de Pythagore, obtenue par simple déplacement des pièces triangulaires colorées. Elle a l'avantage d'être à la fois visuelle et convaincante[16].

(14) Inversement, un théorème important – qu'on ne pourra démontrer que plus tard (cf. section 10), affirme que des figures isométriques se déduisent l'une de l'autre soit par un déplacement, soit par un déplacement précédé (ou suivi) d'une symétrie miroir.

(15) La démonstration formelle rigoureuse des propriétés d'isométrie décrites dans les 3 cas ne pourra être véritablement donnée qu'un peu plus loin, cf. section 8.

(16) De nouveau, dans notre contexte, il s'agit davantage que d'une justification que d'une preuve au sens formel. En effet, il faudrait prouver que le quadrilatère central de la figure de droite est bien un carré,



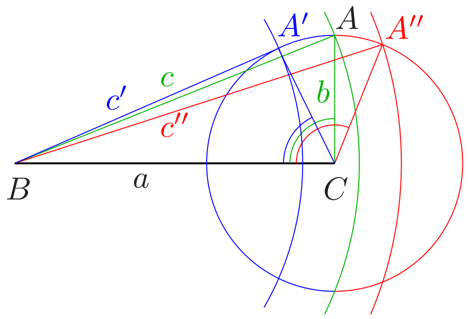
On compare, sur les dessins de droite et de gauche, l'aire de la différence entre le carré de côté $a + b$ et les quatre triangles rectangles colorés de côtés a, b, c, aire qui est représentée en grisé. L'égalité des aires de part et d'autre implique $a^2 + b^2 = c^2$.

Complément. *Soit (ABC) un triangle et a, b, c les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C.*

(1) *Si l'angle $\widehat{C}$ est inférieur à un angle droit, on a $c^2 < a^2 + b^2$.*

(2) *Si l'angle $\widehat{C}$ est supérieur à un angle droit, on a $c^2 > a^2 + b^2$.*

Démonstration. Considérons le cas où (ABC) est rectangle : on a $c^2 = a^2 + b^2$.



Si l'angle $\widehat{C}$ est $< 90°$, on a $c' < c$.

Si l'angle $\widehat{C}$ est $> 90°$, on a $c'' > c$.

Réciproque du théorème de Pythagore. *D'après ce qui précède, si $c^2 = a^2 + b^2$, alors l'angle $\widehat{C}$ ne peut être qu'un angle droit, donc le triangle est rectangle en C.*

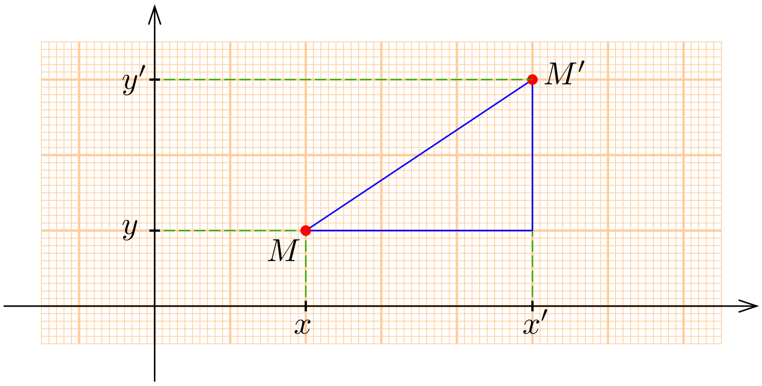
4. Coordonnées cartésiennes dans le plan

L'étape complémentaire indispensable est l'introduction des coordonnées cartésiennes et leur usage pour *démontrer les propriétés précédemment admises* (ou seulement justifiées de manière partielle), en travaillant dans des repères orthonormés.

---

ce qui peut certes se vérifier à l'aide des propriétés d'isométrie des triangles – mais n'oublions pas que celles-ci ne sont pas encore démontrées à ce stade. Plus sérieusement, le raisonnement utilise la notion d'aire, et il faudrait montrer l'existence d'une mesure d'aire dans le plan ayant toutes les propriétés voulues d'additivité et d'invariance par translation . . .

4.1. Expression de la distance euclidienne



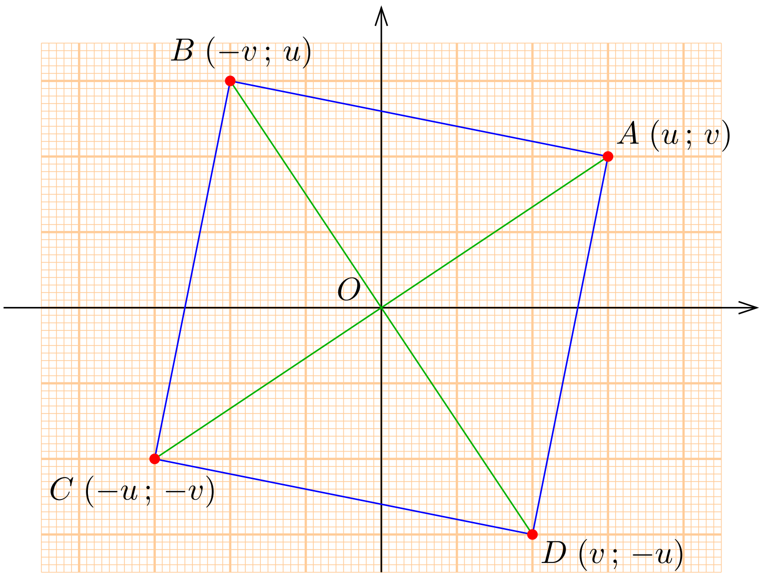
Le théorème de Pythagore montre que l'hypoténuse MM' est donnée par la formule $MM'^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2$, puisque les deux côtés de l'angle droit sont $x'-x$ et $y'-y$ (au signe près). La distance de M à M' est donc

$$d(M,M') = MM' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}. \tag{4.1.1}$$

(on commencera évidemment par le cas de points donnés par des valeurs numériques concrètes).

4.2. Le carré

Considérons la figure formée par les points $A\,(u\,;\,v)$, $B\,(-v\,;\,u)$, $C\,(-u\,;\,-v)$, $D\,(v\,;\,-u)$.



La formule (4.1.1) donne

$$AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2+v^2),$$

donc les 4 côtés sont de longueur égale à $\sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2}$. De même on trouve

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{u^2+v^2},$$

par conséquent les 4 triangles isocèles OAB, OBC, OCD et ODA sont isométriques, ce qui implique que $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODA} = 90°$ et que les autres angles valent 45°. On a donc $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90°$, et la figure est bien un carré.

4.3. Droites « horizontales et verticales »

L'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M\ (x\,;y)$ tels que $y = c$ (où c une constante numérique donnée) est une droite « horizontale ». En effet, étant donnés trois points M, M', M'' d'abscisses $x < x' < x''$ on a

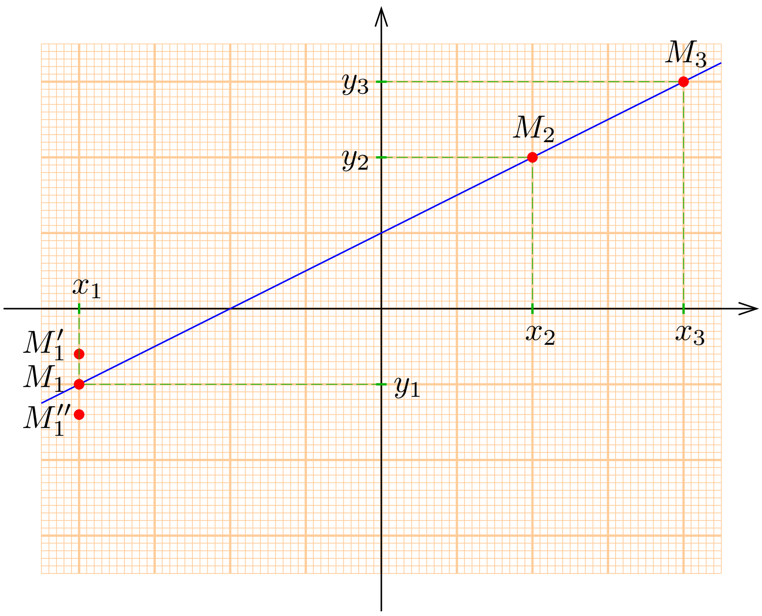
$$MM' = x' - x, \qquad M'M'' = x'' - x', \qquad MM'' = x'' - x$$

et donc $MM' + M'M'' = MM''$, ce qui implique que les points M, M', M'' sont alignés par définition. Si on considère $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = c_1$ avec $c_1 \neq c$, c'est une autre droite horizontale et on a de façon évidente $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$, donc il s'agit de droites parallèles.

De même, l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M\ (x\,;y)$ tels que $x = c$ est une « droite verticale » et les droites $\mathcal{D} : x = c$, $\mathcal{D}_1 : x = c_1$ sont parallèles.

4.4. Droite définie par une équation $y = ax + b$

Nous commencerons par le cas général $y = ax + b$ pour éviter des redites, mais avec les élèves il conviendrait sans doute de traiter d'abord le cas $y = ax$ qui correspond à la proportionnalité.



Considérons trois points $M_1\ (x_1\,;y_1)$, $M_2\ (x_2\,;y_2)$, $M_3\ (x_3\,;y_3)$ satisfaisant les relations $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ et $y_3 = ax_3 + b$, avec par exemple $x_1 < x_2 < x_3$. Comme $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, on trouve

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + a^2)} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

et de même $M_2M_3 = (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}$, $M_1M_3 = (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2}$. Ceci montre que $M_1M_2 + M_2M_3 = M_1M_3$, donc les points M_1, M_2, M_3 sont alignés. On voit d'autre part[17] que si on prend un point M_1' (x, y_1') qui est tel que $y_1' > ax_1 + b$ alors ce point n'est pas aligné avec M_2 et M_3, et de même pour M_1'' (x, y_1'') tel que $y_1'' < ax_1 + b$.

Conséquence. *L'ensemble $\mathcal{D}$ des points M $(x\,;\,y)$ tels que $y = ax + b$ est une droite.*

On appelle pente de la droite $\mathcal{D}$ le rapport entre la « dénivellation verticale » et la « distance parcourue horizontalement », c'est-à-dire, pour deux points M_1 $(x_1\,;\,y_1)$, M_2 $(x_1\,;\,y_2)$ de $\mathcal{D}$ le rapport

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Pour une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, le coefficient a s'interprète donc comme la pente de la droite (on l'appelle aussi parfois le « coefficient directeur » de $\mathcal{D}$.) Une droite horizontale est une droite de pente $a = 0$.

Lorsque le coefficient a devient très grand, la droite devient intuitivement très inclinée et de plus en plus proche d'une verticale. On conviendra qu'une droite verticale est de pente infinie. L'infini se note par le symbole ∞.

Considérons deux points distincts M_1 (x_1, y_1) et M_2 (x_2, y_2). Si $x_1 \neq x_2$, on voit qu'il existe une unique droite $\mathcal{D} : y = ax + b$ qui passe par M_1 et M_2 : la pente est donnée par $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et on trouve ensuite nécessairement $b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$. Si $x_1 = x_2$, l'unique droite $\mathcal{D}$ passant par M_1, M_2 est la droite verticale d'équation $x = x_1$.

4.5. Intersection de deux droites définies par des équations

Considérons deux droites $\mathcal{D} : y = ax + b$ et $\mathcal{D}' : y = a'x + b'$. Pour trouver l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ on écrit que $y = ax + b = a'x + b'$, ce qui donne $(a' - a)x = -(b' - b)$, donc si $a \neq a'$ on trouve un point d'intersection unique M $(x\,;\,y)$ tel que

$$x = -\frac{b' - b}{a' - a}, \qquad y = ax + b = \frac{-a(b' - b) + b(a' - a)}{a' - a} = \frac{ba' - ab'}{a' - a}.$$

L'intersection de $\mathcal{D}$ avec une droite verticale $\mathcal{D}_1 : x = c$ est encore unique, on a immédiatement $x = c$, $y = ac + b$. Nous pouvons conclure :

Théorème. *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ayant des pentes a, a' distinctes possèdent un point d'intersection unique : on dit qu'elles sont concourantes.*

Au contraire, si $a = a'$ et si de plus $b \neq b'$, il n'y a pas de solution possible, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$, il s'agit de droites parallèles distinctes. Si $a = a'$ et $b = b'$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont égales, on les considère encore comme parallèles.

Conséquence 1. *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de pentes a, a' sont parallèles si et seulement si leurs pentes sont identiques (finies ou infinies).*

Conséquence 2. *Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ et si $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{D}''$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}''$.*

(17) La démonstration formelle rigoureuse est bien entendu possible à partir d'un calcul de distances, mais moins évidente que ce qui précède. On pourrait raisonner comme en § 5.2 pour changer de repère et se ramener à la droite $Y = 0$.

Démonstration. En effet, si $a = a'$ et $a' = a''$, alors $a = a''$. $\square$

On obtient enfin l'énoncé suivant qui n'est autre que le « postulat d'Euclide » (dans notre approche, il s'agit bien d'un théorème quasi-évident, et non d'un postulat !)

Conséquence 3. *Étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un point M_0, il y a une unique droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par M_0.*

Démonstration. En effet, si $\mathcal{D}$ est de pente a et si $M_0\ (x_0\,;\,y_0)$, on voit que

– pour $a = \infty$, l'unique droite possible est la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x = x_0$
– pour $a \neq \infty$, la droite $\mathcal{D}'$ a pour équation $y = ax + b$ avec $b = y_0 - ax_0$, autrement dit : $\mathcal{D}'$ est l'unique droite d'équation $\mathcal{D}' : y - y_0 = a(x - x_0)$.

4.6. Condition d'orthogonalité de deux droites

Considérons une droite passant par l'origine $\mathcal{D} : y = ax$. Choisissons un point $M\ (u\,;\,v)$ situé sur $\mathcal{D}$, $M \neq O$, c'est-à-dire $u \neq 0$. On a alors $a = \frac{v}{u}$. On sait que le point $M'\ (u'\,;\,v') = (-v\,;\,u)$ est tel que les droites $\mathcal{D} = (OM)$ et (OM') sont perpendiculaires d'après la construction du carré faite au paragraphe 4.2. Par conséquent, la pente de la droite $\mathcal{D}' = (OM')$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$a' = \frac{v'}{u'} = \frac{u}{-v} = -\frac{u}{v} = -\frac{1}{a}$$

si $a \neq 0$. Si $a = 0$, la droite $\mathcal{D}$ est l'axe horizontal, sa perpendiculaire est l'axe vertical de pente infinie, et la formule $a' = -\frac{1}{a}$ est encore vraie si on convient que $\frac{1}{0} = \infty$ (on utilise ici un infini ∞ dépourvu de signe).

Conséquence 1. *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de pentes a, a' sont perpendiculaires si et seulement si leurs pentes vérifient la relation $a' = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{a'}$ (on convient ici que $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$).*

Conséquence 2. *Si $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}''$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont parallèles.*

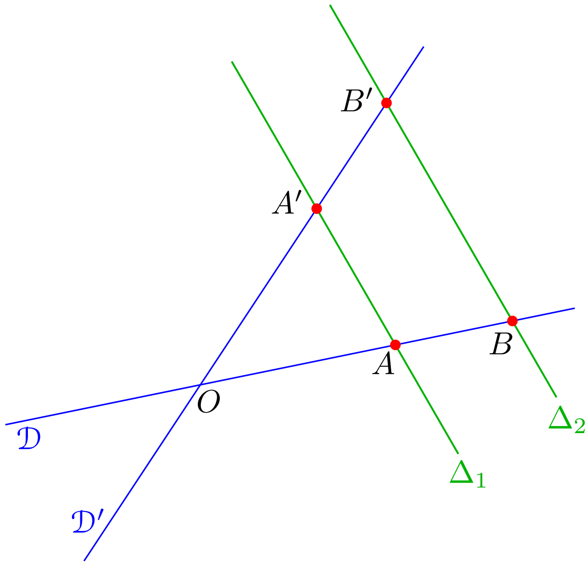
Démonstration. En effet les pentes vérifient $a = -\frac{1}{a'}$ et $a'' = -\frac{1}{a'}$, donc $a'' = a$. $\square$

4.7. Le théorème de Thalès

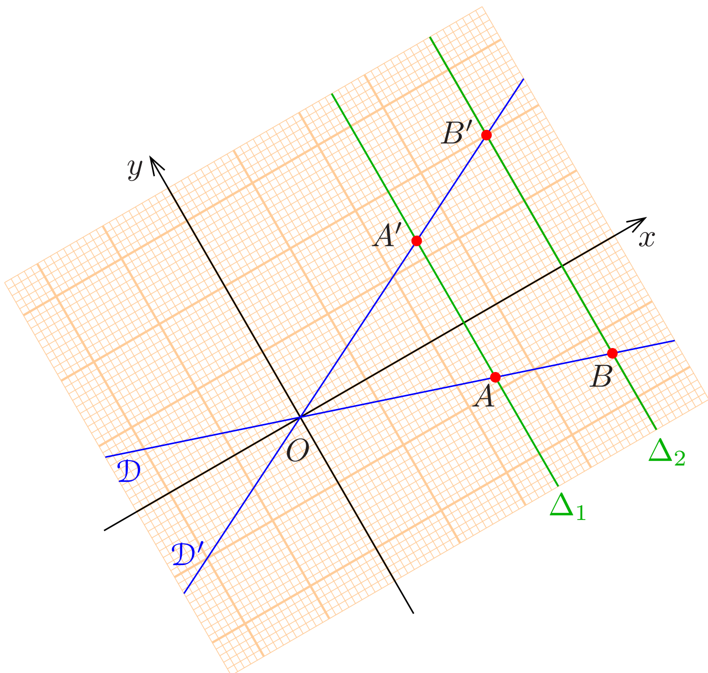
Nous énoncerons d'abord la « version euclidienne » du théorème, qui s'exprime en termes de rapports de distances plutôt que de rapports de mesures algébriques.

Théorème de Thalès. *On considère deux droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ concourantes en un point O, et deux droites parallèles Δ_1, Δ_2 qui coupent $\mathcal{D}$ en des points A, B, et $\mathcal{D}'$ en des points A', B' supposés tous distincts de O. Alors on a les égalités de rapports*

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}.$$



Démonstration. On procède à l'aide d'un calcul en coordonnées, en utilisant un repère orthonormé d'origine O tel que Ox soit perpendiculaire aux droites Δ_1, Δ_2, et tel que Oy soit parallèle aux droites Δ_1, Δ_2.



Dans ces coordonnées, les droites Δ_1, Δ_2 sont les droites « verticales » d'équations $\Delta_1 : x = c_1$, $\Delta_2 : x = c_2$ avec $c_1, c_2 \neq 0$, et les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ admettent des équations respectives $\mathcal{D} : y = ax$, $\mathcal{D}' : y = a'x$. On obtient alors

$$A\,(c_1, ac_1), \quad B\,(c_2, ac_2), \quad A'\,(c_1, a'c_1), \quad B'\,(c_2, a'c_2).$$

D'après le théorème de Pythagore, on trouve, en prenant les valeurs absolues :

$$OA = |c_1|\sqrt{1+a^2}, \quad OB = |c_2|\sqrt{1+a^2}, \quad OA' = |c_1|\sqrt{1+a'^2}, \quad OB' = |c_2|\sqrt{1+a'^2},$$
$$AA' = |(a'-a)c_1|, \quad BB' = |(a'-a)c_2|.$$

On a $a' \neq a$ puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes par hypothèse, donc $a' - a \neq 0$, et on voit alors facilement que
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{|c_2|}{|c_1|}. \qquad \square$$

De manière plus précise, si on choisit des orientations sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ pour en faire des axes et des orientations de même sens sur Δ_1, Δ_2, on voit qu'on a en fait les égalités de rapports de mesures algébriques

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

Réciproque du théorème de Thalès. *Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ des droites concourantes en O. Si Δ_1 est concourantes à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ en A, A' distincts, si Δ_2 est concourante à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ en B, B' distincts et si*
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$
alors Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

Démonstration. La preuve s'obtient aisément en considérant la parallèle δ_2 à Δ_1 qui passe par B, et son intersection β' avec $\mathcal{D}'$. On voit alors que $\overline{O\beta'} = \overline{OB'}$, donc $\beta' = B'$ et $\delta_2 = \Delta_2$, de sorte que $\Delta_2 = \delta_2 \mathbin{//} \Delta_1$. $\square$

4.8. Conséquences des théorèmes de Thalès et Pythagore

La conjonction des cas d'isométries des triangles et des théorèmes de Thalès et Pythagore permet (très classiquement) d'établir de nombreux théorèmes de géométrie euclidienne. Une notion importante est celle de similitude.

Définition. *Deux figures $(A_1A_2A_3A_4\ldots)$ et $(A'_1A'_2A'_3A'_4\ldots)$ sont dites semblables dans le rapport k ($k > 0$) si on a $A'_iA'_j/A_iA_j = k$ pour tous les segments $[A_i, A_j]$ et $[A'_i, A'_j]$ en correspondance.*

Un cas important de similitude est obtenu au moyen d'une homothétie de centre un point O donné : si O est choisi comme origine et si au point M $(x\,; y)$ on associe le point M' $(x'\,; y')$ tel que $x' = kx$, $y' = ky$, alors la formule (4.1.1) montre que l'on a $A'B' = |k|\,AB$, donc en associant à tout point A_i le point correspondant A'_i on obtient des figures semblables dans le rapport $|k|$; on parle de figures homothétiques de rapport k ; ce rapport peut être positif ou négatif (si $k = -1$ par exemple, il s'agit d'une symétrie de centre O). Les cas d'isométrie des triangles conduisent directement aux cas de similitudes.

Critères de similitude des triangles. *Pour que deux triangles soient semblables, il faut et il suffit que l'un des cas suivants soit réalisé :*

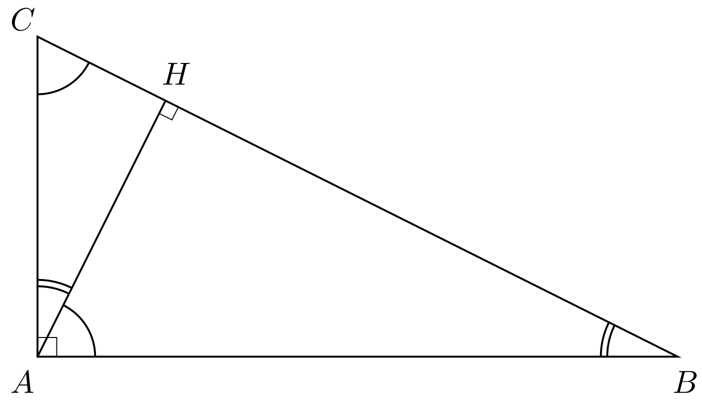
(a) *les trois côtés sont proportionnels dans un certain rapport $k > 0$ (c'est la définition)*;

(b) *les triangles ont un angle égal et les côtés adjacents proportionnels*;

(c) *les triangles ont deux angles égaux.*

Une bonne application des cas de similitude consiste à énoncer et démontrer les relations métriques dans le triangle rectangle : si le triangle ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A, on a les relations classiques

$$AB^2 = BH \cdot BC, \quad AC^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH, \quad AB \cdot AC = AH \cdot BC.$$



En effet (par exemple) la similitude des triangles rectangles ABH et ABC conduit à l'égalité de rapports

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \quad \Longrightarrow \quad AB^2 = BH \cdot BC.$$

On aboutit aussi à la définition des cos, sin et tan d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Définition. *Étant donné un triangle ABC rectangle en A, on définit*

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}, \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}, \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}.$$

Les rapports ne dépendent en effet que de l'angle $\widehat{ABC}$ (qui détermine aussi l'angle complémentaire $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC}$), puisque des triangles rectangles qui ont un angle autre que l'angle droit égal sont toujours semblables d'après le critère (c). Le théorème de Pythagore permet d'aboutir au calcul des valeurs de cos, sin, tan pour les angles remarquables 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

4.9. Calcul d'aires et de volumes

Il est possible – et donc probablement souhaitable – de justifier les principales formules usuelles concernant les aires et volumes de solides usuels (cylindres, pyramides, cônes, sphère), en utilisant seulement les théorèmes de Thalès et Pythagore et des raisonnements géométriques très simples[(18)]. Nous indiquons ici comment on peut

(18) Nous parlons ici de « justification » plutôt que de démonstration parce que les fondements théoriques nécessaires (à savoir la théorie de la mesure) manquent – et manqueront sans doute encore pour 5 ou 6 années ou plus. Mais en réalité, on pourra s'apercevoir que ces justifications peuvent être rendues parfaitement rigoureuses une fois que les fondements considérés ici comme intuitifs seront rigoureusement établis. Il serait par exemple possible de prendre la formule (11.3) comme définition rigoureuse de la mesure p-dimensionnelle.

procéder – les raisonnements sont proches de ceux que connaissaient déjà Archimède plus de deux siècles avant JC (reformulés avec les notations algébriques modernes).

Volume d'un cône de base quelconque

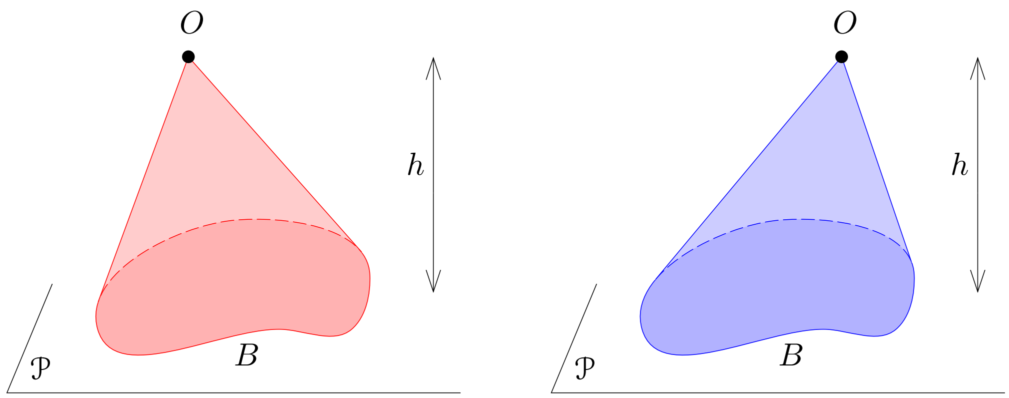
Nous commencerons par étudier le volume d'un cône dont la base B est un domaine plan borné quelconque. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant cette base B et on considère un point O situé en dehors du plan $\mathcal{P}$.

Définition. *Le cône de sommet O et de base B est la réunion des segments $[O, M]$ issus de O et d'extrémités $M \in B$. La hauteur h du cône est la distance du point O au plan $\mathcal{P}$ qui contient B.*

Dans le cas où la base B est un disque, on parle de *cône circulaire* (droit ou oblique), lorsque la base est un triangle, le cône est un *tétraèdre*, et lorsque la base est un carré ou un rectangle, le cône est une *pyramide* (droite ou oblique).

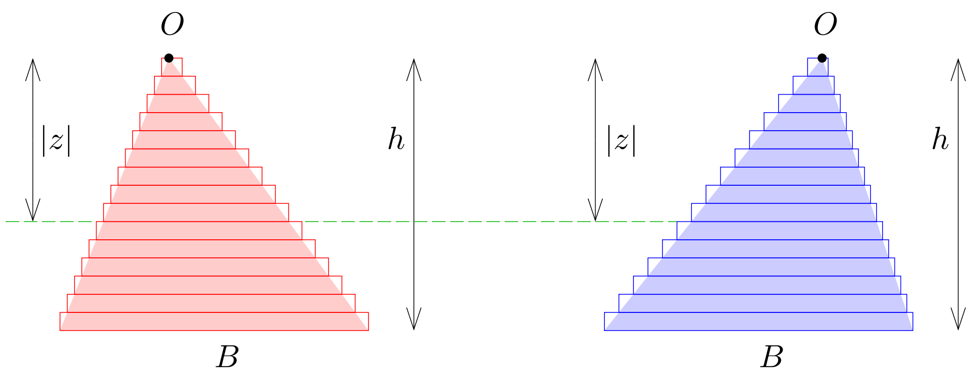
On fait l'hypothèse qu'on peut calculer l'aire A de la base B (ce qui veut dire qu'en utilisant des quadrillages assez fins, l'aire approximative obtenue en comptant le nombre de carrés du quadrillage tend vers une limite quand le côté de ces carrés tend vers 0).

Si on choisit le sommet O comme origine et des coordonnées telles que le plan $\mathcal{P}$ soit horizontal et situé « plus bas que O », alors $\mathcal{P}$ s'écrit comme le plan d'équation $z = -h$. Une première observation importante est la suivante :



(4.9.1) *Le volume V du cône ne dépend que de la base B et de la hauteur h, mais pas de la position relative de O et de B* (autrement dit, si on déplace B horizontalement par rapport à O, le volume ne change pas).

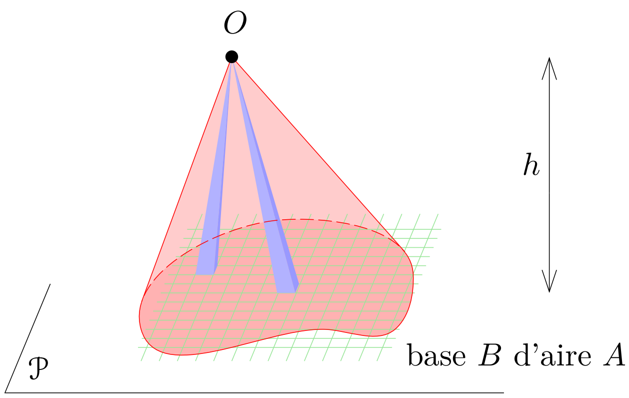
Pour démontrer (4.9.1), on découpe les deux cônes en tranches horizontales assez fines, comme figuré sur le dessin ci-après :



Si on remplace les tranches par des cylindres de parois latérales verticales (et dont les bases sont homothétiques à la base B dans le rapport $|z|/h$, comme sur le schéma ci-dessus), on commet une petite erreur, puisque les volumes calculés deviennent un peu supérieur à ceux des cônes ; cependant l'erreur devient de plus en plus petite quand le nombre de tranches augmente. Or, il est évident que les volumes des deux empilements de pièces cylindriques sont identiques, puisque celles-ci ont simplement été glissées horizontalement les unes par rapport aux autres.

La deuxième observation est la suivante :

(4.9.2) *La hauteur h étant donnée, le volume V du cône est proportionnel à l'aire A de la base B.*

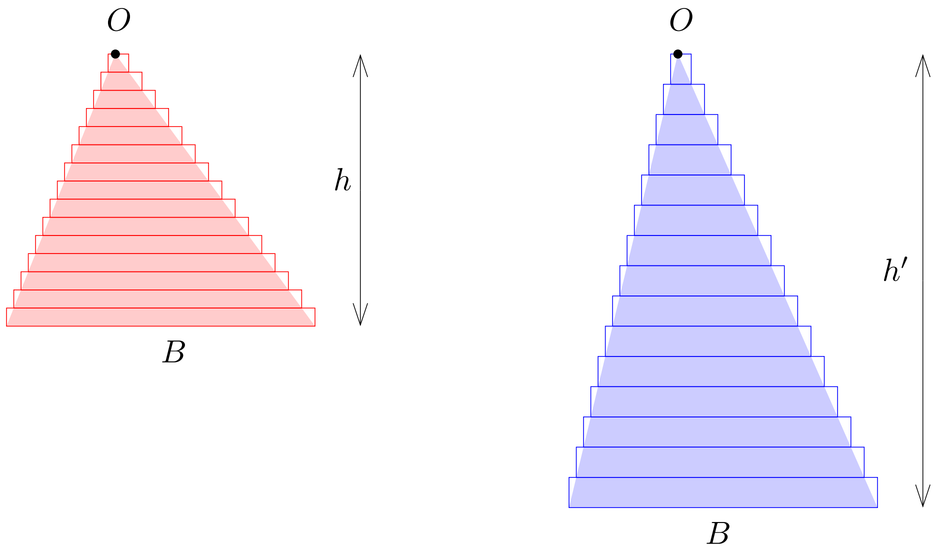


En effet, on peut calculer une valeur approchée de l'aire A de la base à l'aide d'un quadrillage, mais alors il résulte de (4.9.1) que le volume de toutes les pyramides obliques s'appuyant sur les différents carrés du quadrillage est le même. Ceci montre que le volume total de toutes ces pyramides est proportionnel au nombre n de carrés de quadrillage, et donc, à la limite, que le volume V du cône est proportionnel à l'aire A de la base.

Voici la troisième observation :

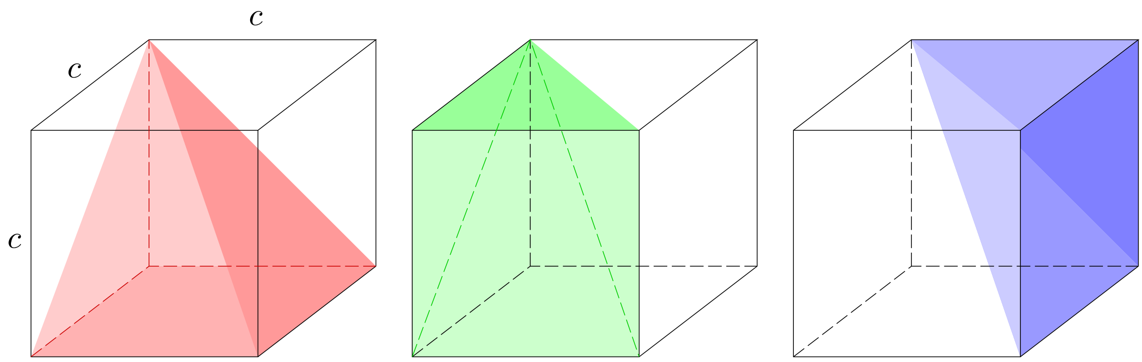
(4.9.3) *La base B étant donnée, le volume V du cône est proportionnel à la hauteur h.*

Pour démontrer cette propriété, on considère deux cônes ayant la même base B et des hauteurs h, h' différentes, et on évalue leurs volumes approchés à l'aide de tranches cylindriques :



Pour réaliser le deuxième cône, on dilate verticalement chaque pièce cylindrique dans le rapport h'/h. Comme le volume d'un cylindre est le produit de l'aire de sa base par la hauteur, on voit que le volume du deuxième empilement est proportionnel au premier dans le rapport h'/h. À la limite, quand les tranches deviennent de plus en plus fines, ceci démontre bien que le rapport des volumes des cônes vérifie $V'/V = h'/h$.

La quatrième et dernière étape est le calcul du volume d'une pyramide : on commence par le cas d'une pyramide dont la base est un carré de côté c et dont la hauteur vaut aussi $h = c$. Le schéma suivant montre qu'on peut remplir le cube de côté c avec 3 pyramides isométriques de ce type (il serait utile de les construire et de vérifier qu'elles s'assemblent en un cube !)



Le volume de chacune des 3 pyramides figurées ci-dessus vaut donc le tiers de celui du cube, soit $V = \frac{1}{3}c^3$. Pour une pyramide de base carrée $A = c^2$ et de hauteur h quelconque, le volume doit être multiplié par h/c d'après (4.9.3), donc le volume vaut dans ce cas

$$V = \frac{h}{c} \times \frac{1}{3}c^3 = \frac{1}{3}c^2 h.$$

Pour une base B quelconque, on utilise maintenant un quadrillage de la base comme dans la preuve de (4.9.2). Si n est le nombre de carrés de côté c contenus dans la base B, l'aire A de la base vaut approximativement $A \approx nc^2$ et on a donc

$$V \approx n \times \frac{1}{3}c^2 h = \frac{1}{3}(n\,c^2)h \approx \frac{1}{3}Ah.$$

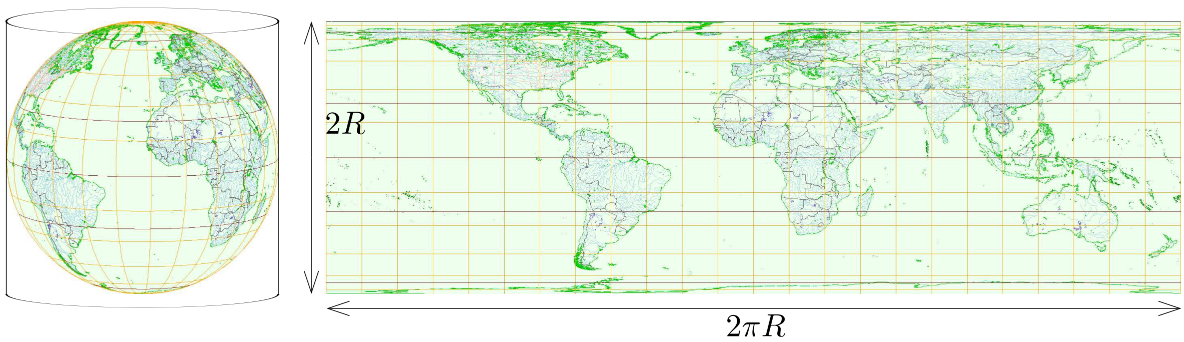
L'approximation devient de meilleure en meilleure quand le côté c tend vers 0, et à la limite, on voit que le volume d'un cône quelconque est donné par

$$V = \frac{1}{3}Ah. \tag{4.9.4}$$

Calcul de l'aire d'une sphère de rayon R

Comme deux sphères de même rayon sont isométriques, l'aire dépend uniquement du rayon R. Fixons le centre O de la sphère comme origine, et considérons le cylindre « vertical » tangent à la sphère le long de son équateur (donc de rayon égal à R), et plus précisément, la partie du cylindre comprise entre les plans horizontaux $z = -R$ et $z = R$. On effectue une projection de la sphère sur le cylindre : pour tout point M de la sphère on considère son projeté M' sur le cylindre qui est l'intersection de celui-ci avec la droite $\mathcal{D}_M$ horizontale passant par M et s'appuyant sur l'axe Oz.

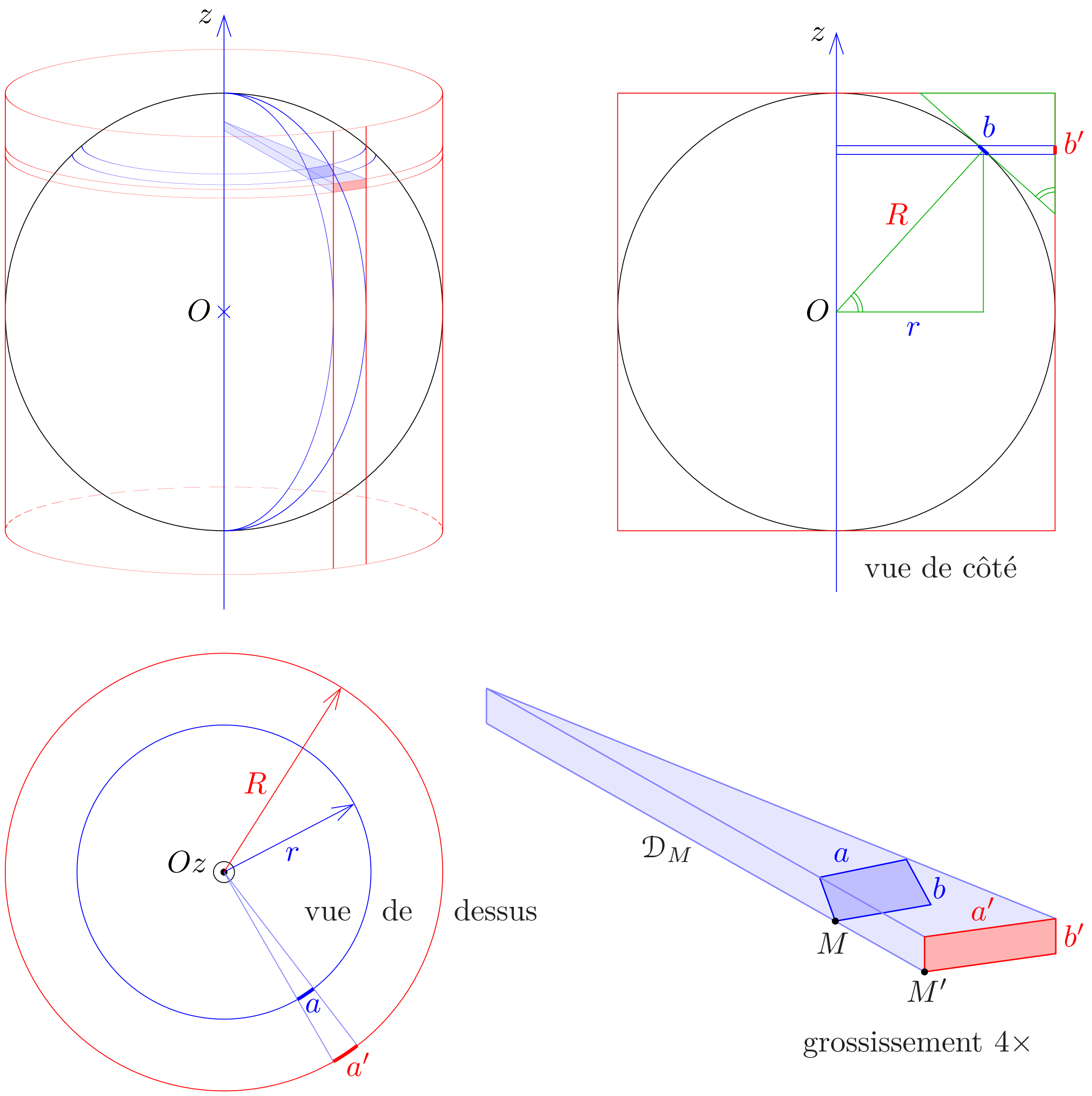
Cette projection est un mode de représentation cartographique assez courant du globe terrestre : après avoir coupé le cylindre le long du méridien de longitude 180° et déroulé celui-ci en un rectangle, on obtient ainsi la carte suivante de la Terre.



On va démontrer que la projection cylindrique conserve les aires, donc que l'aire de la sphère est égale à celle de la carte rectangulaire de côtés $2R$ et $2\pi R$:

$$A = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2. \tag{4.9.5}$$

Pour vérifier l'égalité des aires, on considère un « champ rectangulaire » délimité par les parallèles et méridiens, de dimensions très petites par rapport à celle de la sphère, de sorte qu'on puisse l'assimiler à une surface plane, c'est-à-dire à un véritable rectangle (sur la Terre par exemple, on ne s'aperçoit pas de la rotondité du globe à une échelle de quelques dizaines ou centaines de mètres).



Soient a, b les côtés du « champ rectangulaire » respectivement dans la direction des parallèles et des méridiens, et a', b' les côtés du rectangle correspondant, projeté sur le cylindre.

Dans la vue de dessus, le théorème de Thalès donne aussitôt

$$\frac{a'}{a} = \frac{R}{r}.$$

Dans la vue de côté, les deux triangles rectangles figurés en vert sont homothétiques (ils ont un angle égal, car les côtés adjacents sont deux à deux perpendiculaires). En appliquant de nouveau le théorème de Thalès à chacun de ces deux triangles et en comparant les côtés adjacents aux angles égaux, on obtient

$$\frac{b'}{b} = \frac{\text{petit côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{r}{R}.$$

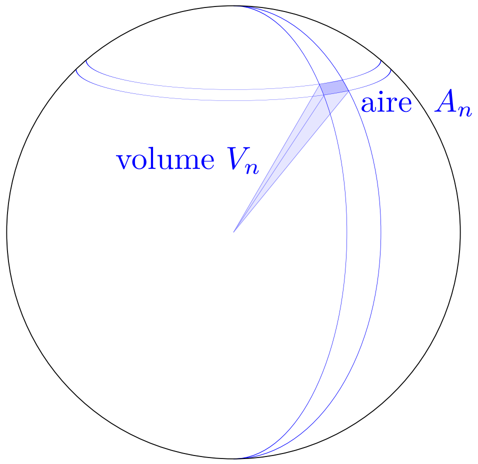
Le produit de ces deux égalités donne

$$\frac{a' \times b'}{a \times b} = \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} = \frac{R}{r} \times \frac{r}{R} = 1.$$

On en déduit que les aires des rectangles $a \times b$ et $a' \times b'$ sont égales, ce qui entraîne que la projection cylindrique conserve les aires, et donc en particulier que la formule (4.9.5) est bien vraie.

Volume d'une boule de rayon R

Pour obtenir le volume d'une boule[19] de rayon R, on utilise un quadrillage de la sphère par méridiens et parallèles, et on calcule le volume des pyramides construites sur les champs rectangulaires ainsi délimités. Lorsque le maillage est suffisamment fin, on peut considérer que les champs rectangulaires sont pratiquement plans (on notera que ce raisonnement est l'exact analogue dans l'espace de la preuve de l'aire du disque donnée à la section 2.2). Soit A_1, A_2, A_3, ... les aires des champs rectangulaires et V_1, V_2, V_3, ... le volume des pyramides associées (la hauteur de ces pyramides vaut évidemment $h = R$). On note ici $n = 1$ ou 2 ou 3 ...



Volume des pyramides :

$$V_n = \frac{1}{3} A_n \times R$$

Si $A = 4\pi R^2$ désigne l'aire totale de la sphère, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition montre que le volume V de la boule est donné par

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) \times R = \frac{1}{3} AR.$$

Ceci donne la formule cherchée pour le volume de la boule de rayon R :

$$V = \frac{1}{3} AR = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \times R = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{4.9.6}$$

(19) On appelle « boule » le domaine de l'espace délimité par une sphère, de même qu'on appelle disque le domaine du plan délimité par un cercle.

5. Une approche axiomatique de la géométrie euclidienne

Bien que nous ayons pu jusqu'à présent suivre une approche extrêmement déductive par rapport à l'approche traditionnelle – tous les énoncés ou presque ont été « démontrés » à partir des définitions – il n'en reste pas moins que certaines démonstrations s'appuyaient sur des faits intuitifs, par exemple celle du théorème de Pythagore. La seule solution pour sortir du cercle vicieux est de prendre certains des faits que nous voulons vrais commes des « axiomes », c'est-à-dire de les considérer comme des hypothèses premières dont on déduira toutes les autres par le raisonnement ; le choix d'autres hypothèses de départ conduirait à des géométries non euclidiennes (cf. section 11).

Comme nous allons le voir, la notion de plan euclidien peut se définir à l'aide d'un seul axiome, essentiellement équivalent à la conjonction du théorème de Pythagore – qui n'avait été que partiellement justifié – et de l'existence des coordonnées cartésiennes – que nous n'avions pas non plus discutée. Dans le cas où l'idée d'utiliser une approche axiomatique effraierait, cette section peut tout à fait être omise – à condition de comprendre que les systèmes de coordonnées peuvent être changés à volonté (translatés, tournés, etc) en fonction des besoins.

5.1. Le modèle « Pythagore + Descartes »

Dans notre vision, la géométrie euclidienne plane est fondée sur la « définition axiomatique » suivante.

Définition. *On appellera plan euclidien un ensemble de points noté $\mathcal{P}$, muni d'une distance d, c'est-à-dire une application*

$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+, \qquad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geqslant 0,$$

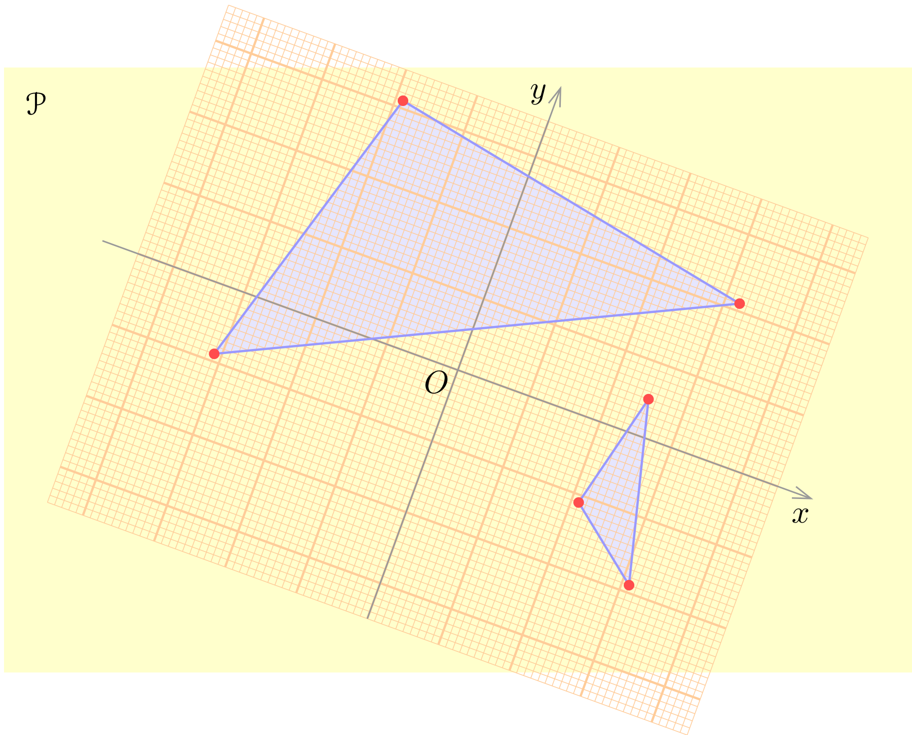
de sorte qu'il existe des « systèmes de coordonnées orthonormés » : à tout point $M \in \mathcal{P}$ on peut faire correspondre un couple de coordonnées $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x\,;\,y)$ satisfaisant l'axiome[20]

$$\text{(Pythagore + Descartes)} \qquad d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

pour tous points $M\ (x\,;y)$ et $M'\ (x'\,;\,y')$.

Il est bon de se représenter le choix d'un système de coordonnées orthonormé comme le fait de placer une feuille de papier millimétré transparent sur le plan $\mathcal{P}$ dans lequel on travaille (et où nous avons représenté deux triangles figurés en bleu, par dessus lesquels on vient placer la feuille millimétrée transparente).

[20] Comme on va le voir, il s'agit là d'une description complète et rigoureuse de la géométrie euclidienne plane, parfaitement équivalente aux systèmes d'axiomes reposant sur les notions d'espace vectoriel euclidien de dimension 2 et d'espace affine associé – mais avec un formalisme drastiquement plus simple ne présupposant aucune notion d'algèbre linéaire. La géométrie hyperbolique, dans le modèle de Poincaré, consisterait à envoyer $\mathcal{P}$ sur le disque des nombres complexes de module $|z| < 1$, avec la distance infinitésimale $|dz|/(1-|z|^2)$, cf. section 11.



Il y a bien entendu une infinité de choix possibles pour le système de coordonnées, et nous allons étudier quelques manières simples de modifier les coordonnées.

5.1.1. Demi-tour de la feuille de papier millimétré autour de O

Ceci revient juste à changer l'orientation des axes, sans changer autrement leur position. Les nouvelles coordonnées $(X\,;\,Y)$ sont données par rapport aux anciennes par

$$X = -x, \qquad Y = -y.$$

Comme $(-u)^2 = u^2$ pour tout nombre réel u, on voit que la formule

$$(*) \qquad d(M, M') = \sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2}$$

sera vraie dans les nouvelles coordonnées si elle était vraie dans les coordonnées $(x\,;\,y)$.

5.1.2. Retournement de la feuille de papier millimétré le long de Ox

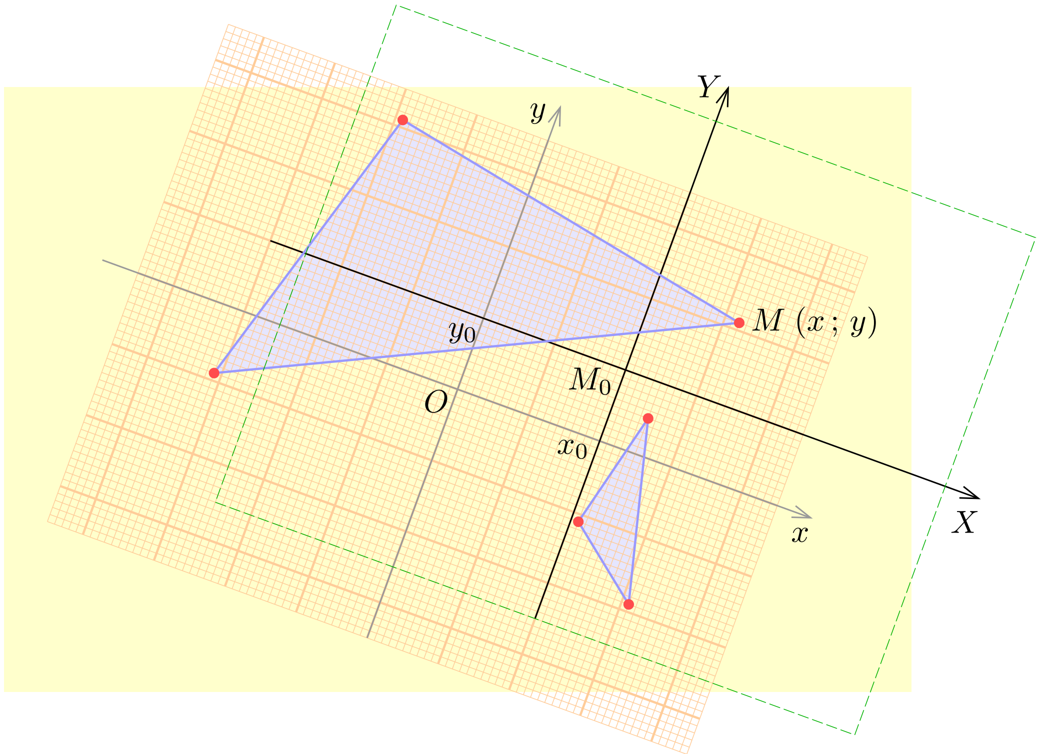
Ici Oy est inchangé, et l'orientation de Ox est inversée. On a $X = -x$, $Y = y$ et la formule $(*)$ est encore vraie.

5.1.3. Retournement de la feuille de papier millimétré le long de Oy

Ici Ox est inchangé, seule l'orientation de Oy est inversée. On a $X = x$, $Y = -y$ et la formule $(*)$ est encore vraie.

5.1.4. Changement d'origine

On remplace ici l'origine O par le point M_0 $(x_0\,;\,y_0)$.



Les nouvelles coordonnées du point $M\ (x\,;\,y)$ sont données par

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0.$$

Pour deux points M, M', on a dans ce cas

$$X' - X = (x' - x_0) - (x - x_0) = x' - x, \qquad Y' - Y = (y' - y_0) - (y - y_0) = y' - y$$

et la formule $(*)$ est encore inchangée.

5.1.5. Rotation des axes

On va montrer que l'origine O étant choisie, on peut amener le demi-axe Ox à passer par un point $M_1\ (x_1\,;\,y_1)$ quelconque distinct de O, ce qui est intuitivement évident par rotation de la feuille papier millimétré autour du point O, mais nécessite une démonstration à partir de l'axiome « Pythagore + Descartes ». Ce point est plus délicat que ce qui précède, et la preuve formelle devra probablement être laissée de côté dans un premier temps – nous la donnons ici pour montrer qu'il n'y a pas de faille logique dans notre approche. On utilise l'égalité algébrique appelée *identité de Lagrange*

$$(au + bv)^2 + (-bu + av)^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + b^2u^2 + a^2v^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2),$$

valable pour tous nombres réels a, b, u, v, qui s'obtient en observant que les deux doubles produits se simplifient. Par conséquent, si a et b vérifient $a^2 + b^2 = 1$ (un tel exemple est $a = 3/5$, $b = 4/5$) et si on effectue le changement de coordonnées tel que

$$X = ax + by, \qquad Y = -bx + ay$$

on aura, pour deux points M, M' quelconques

$$X' - X = a(x' - x) + b(y' - y), \qquad Y' - Y = -b(x' - x) + a(y' - y),$$
$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

d'après l'identité de Lagrange avec $u = x' - x$, $v = y' - y$. Il est facile de voir d'autre part que

$$aX - bY = x, \qquad bX + aY = y,$$

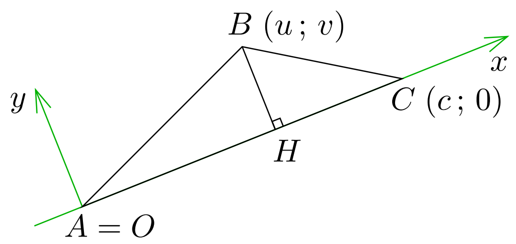
donc la transformation $(x\,;\,y) \mapsto (X\,;\,Y)$ est bijective. On en déduit que, au sens de notre définition, $(X\,;\,Y)$ est bien un système de coordonnées orthonormées. Si on choisit maintenant $a = kx_1$, $b = ky_1$, les coordonnées du point M_1 $(x_1\,;\,y_1)$ sont transformées en

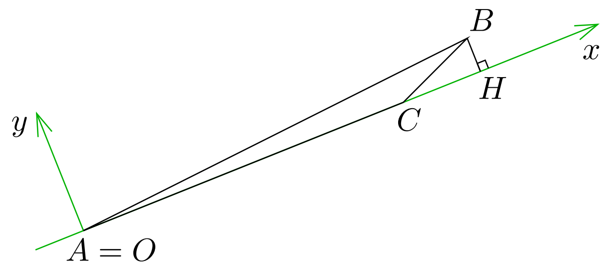
$$X_1 = ax_1 + by_1 = k(x_1^2 + y_1^2), \qquad Y_1 = -bx_1 + ay_1 = k(-y_1x_1 + x_1y_1) = 0,$$

et la condition $a^2 + b^2 = k^2(x_1^2 + y_1^2) = 1$ est satisfaite en prenant $k = 1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Comme $X_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0$ et $Y_1 = 0$, le point M_1 est bien situé sur le demi-axe positif OX dans les nouvelles coordonnées.

5.2. L'inégalité triangulaire revisitée

La preuve donnée en 3.1.1, qui reposait sur des faits non complètement justifiés, peut maintenant être rendue rigoureuse.





Étant donnés trois points A, B, C distincts, on choisit O comme origine et on place le demi-axe Ox suivant la demi-droite $[A, C)$. Les trois points ont alors pour coordonnées

$$A\ (0\,;\,0), \qquad B\ (u\,;\,v), \qquad C\ (c\,;\,0), \qquad c > 0,$$

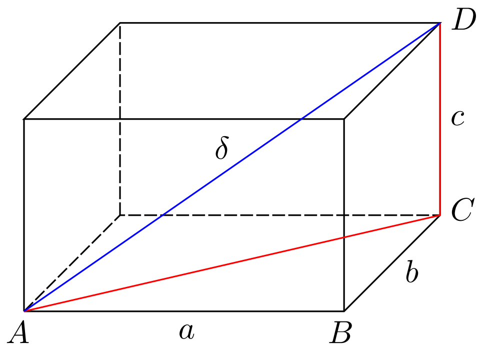
et le pied H de la hauteur est H $(u\,;\,0)$. On trouve $AC = c$ et

$$AB = \sqrt{u^2 + v^2} \geqslant AH = |u| \geqslant u, \quad BC = \sqrt{(c-u)^2 + v^2} \geqslant HC = |c - u| \geqslant c - u.$$

On a donc bien $AC = c = u + (c - u) \leqslant AB + BC$ dans tous les cas. L'égalité n'est possible que si on a à la fois $v = 0$, $u \geqslant 0$ et $c - u \geqslant 0$, c'est-à-dire $u \in [0, c]$ et $v = 0$, autrement dit si B est sur le segment $[A, C]$ de l'axe Ox.

5.3. Axiomatique de l'espace

L'approche que nous avons décrite serait tout à fait apte à introduire la géométrie euclidienne en dimension quelconque, en particulier en dimension 3. La justification initiale est le calcul de la diagonale δ d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c :



Comme les triangles ACD et ABC sont rectangles en C et B respectivement, on a

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad \text{et} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

donc la « grande diagonale » du parallélépipède rectangle est donnée par

$$\delta^2 = AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

À partir de là, on peut donner la définition suivante.

Définition. *On appellera espace euclidien de dimension* 3 *un ensemble de points noté $\mathcal{E}$, muni d'une distance d, c'est-à-dire une application*

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+, \qquad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geqslant 0,$$

de sorte qu'il existe des « systèmes de coordonnées orthonormés » : à tout point $M \in \mathcal{E}$ on peut faire correspondre un triplet de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathbb{R}^3$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x\,;\,y\,;\,z)$ satisfaisant l'axiome

$$\text{(Pythagore + Descartes)} \qquad d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

pour tous points $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$ et $M'\ (x'\,;\,y'\,;\,z')$ de $\mathcal{E}$.

On pourrait bien entendu donner une définition analogue en dimension n quelconque, avec des systèmes de coordonnées $(x_1\,;\,\ldots\,;\,x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité triangulaire se démontre presque sans changement : étant donné trois points A, B, C, on choisit A comme origine, avec la demi-droite $[A, C)$ comme demi-axe Ox, ce qui ramène le calcul à $B = (u\,;\,v\,;\,w)$ et $C = (c\,;\,0\,;\,0)$. Il faut au préalable vérifier que l'on peut trouver un système de coordonnées orthonormé qui pointe l'axe Ox dans la direction d'un point $M_1\ (x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$ quelconque : on commence par annuler z_1 par un changement $Y = ay + bz$, $Z = by - az$ des deux dernières coordonnées, ce qui ramène M_1 dans le « plan horizontal » $Z = 0$, puis on annule y_1 par la même méthode à l'aide d'un changement de variables portant sur x, y uniquement. Idem en dimension plus grande.

6. Fondements du calcul vectoriel

Nous travaillerons ici principalement dans le plan, mais il n'y aurait aucun changement autre que l'ajout de coordonnées supplémentaires en dimension 3 et plus.

6.1. Formule de la médiane

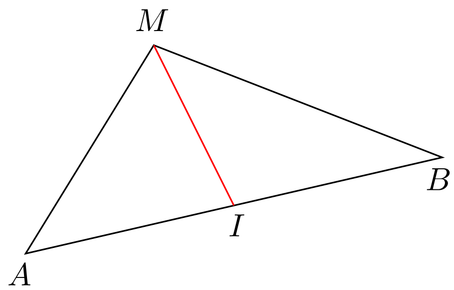
Étant donné des points A, B de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$, $(x_B\,;\,y_B)$ dans un repère Oxy, le point I de coordonnées

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

vérifie $IA = IB = \frac{1}{2}AB$: c'est le milieu du segment $[A, B]$.

Formule de la médiane. *Pour tout point M $(x\,;\,y)$, on a*

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2.$$



Démonstration. En effet, un développement des carrés donne

$$(x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 = 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2,$$

tandis que

$$\begin{aligned} 2(x - x_I)^2 + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 &= 2(x^2 - 2x_I x + x_I^2) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 \\ &= 2\Big(x^2 - (x_A + x_B)x + \frac{1}{4}(x_A + x_B)^2\Big) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 \\ &= 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2. \end{aligned}$$

On a donc bien

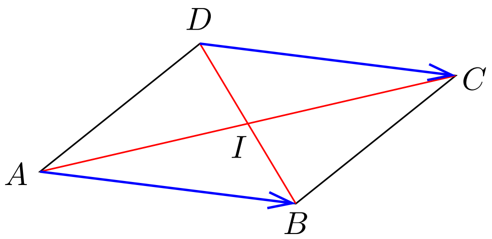
$$(x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 = 2(x - x_I)^2 + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2.$$

La formule de la moyenne s'obtient en ajoutant l'égalité analogue pour les coordonnées y et en appliquant le théorème de Pythagore. □

Il résulte de la formule de la médiane qu'il existe bien un unique point M tel que $MA = MB = \frac{1}{2}AB$, en effet on trouve alors $MI^2 = 0$, donc $M = I$. Les formules données au début pour définir le milieu sont donc bien indépendantes des coordonnées choisies.

6.2. Parallélogrammes

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ se coupent en leur milieu :



On trouve donc la condition nécessaire et suffisante

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = \frac{1}{2}(y_A + y_C),$$

ce qui équivaut encore à

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \qquad y_B + y_D = y_A + y_C$$

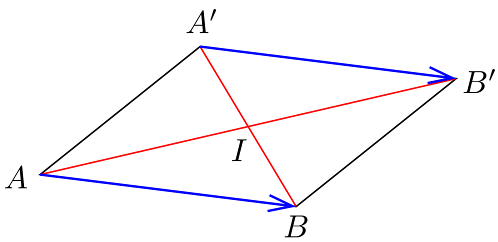
ou encore à

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \qquad y_B - y_A = y_C - y_D,$$

autrement dit, la variation des coordonnées nécessaire pour aller de A en B est le même que pour aller de D en C.

6.3. Vecteurs

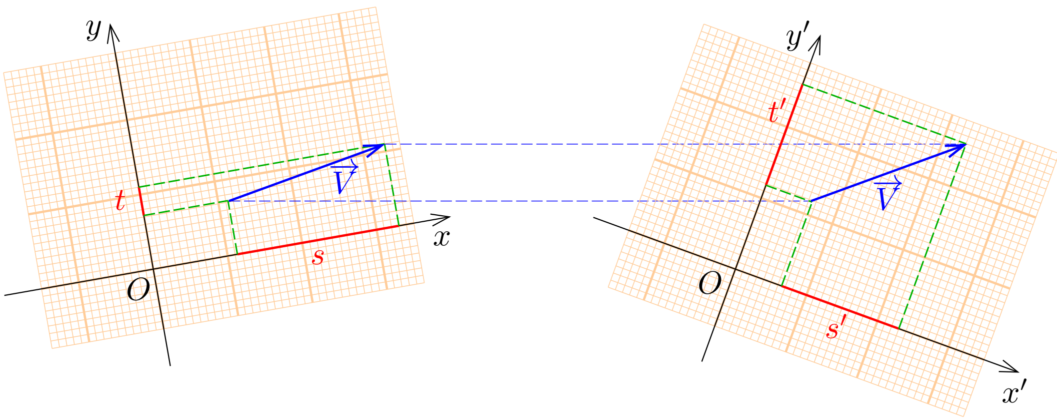
On appelle *bipoint* un couple ordonné (A, B) de points ; on dit que A est l'*origine* et que B est l'*extrémité* du bipoint. Les bipoints (A, B) et (A', B') sont dits *équipollents* si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme (qui peut être éventuellement « plat » si les quatre points sont alignés).



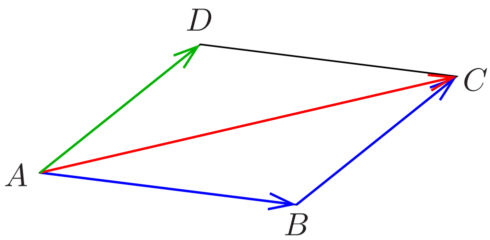
Définition. *Étant donné deux points A, B, on appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ la « variation de position » nécessaire pour aller de A en B. Étant donné un repère Oxy, cette « variation de position » se mesure dans la direction Ox par $x_B - x_A$ et dans la direction Oy par $y_B - y_A$. Si les bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux puisque les variations $x_{B'} - x_{A'} = x_B - x_A$ et $y_{B'} - y_{A'} = y_B - y_A$ sont les mêmes (ceci est vrai dans n'importe quel repère).*

Les « composantes » du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère Oxy sont les nombres notés par définition sous la forme du couple $(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$. Les composantes $(s\,; t)$

d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ dépendent bien sûr du repère Oxy choisi : à un même vecteur $\overrightarrow{V}$ correspondent des composantes différentes $(s\,;t)$, $(s'\,;t')$ dans des repères Oxy, $Ox'y'$ différents.



6.4. Addition des vecteurs



L'addition des vecteurs est définie par la *relation de Chasles*

(6.4.1) $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

pour trois points A, B, C quelconques : si on fait la somme de la variation de position nécessaire pour aller de A en B, puis de B en C, on trouve la variation de position pour aller de A en C ; ainsi par exemple, pour la composante suivant Ox, on a

$$(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A.$$

De façon équivalente, si $ABCD$ est un parallélogramme, on peut aussi poser

(6.4.2) $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

L'équivalence résulte de (6.4.1) et (6.4.2) résulte de ce que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ dans le parallélogramme $ABCD$. Pour tout choix de repère Oxy, la somme $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}$ des vecteurs de composantes $(s\,;t)$, $(s'\,;t')$ a pour composantes $(s+s'\,;t+t')$.

Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ a ses composantes nulles : on le note $\overrightarrow{0}$. On a de façon évidente $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$. D'autre part, la relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

pour tous points A, B. On posera donc

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA},$$

autrement dit l'opposé d'un vecteur s'obtient en échangeant origine et extrémité d'un bipoint qui le définit.

6.5. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Étant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$ de composantes $(s\,;\,t)$ dans un repère Oxy et un nombre réel λ quelconque, on définit $\lambda\overrightarrow{V}$ comme étant le vecteur de composantes $(\lambda s\,;\,\lambda t)$.

Cette définition est bien indépendante du repère Oxy choisi. En effet si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ et $\lambda \geqslant 0$, on a $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ où C est l'unique point situé sur la demi-droite $[A, B)$ tel que $AC = \lambda\,AB$. D'autre part, si $\lambda \leqslant 0$, on a $-\lambda \geqslant 0$ et

$$\lambda\overrightarrow{AB} = (-\lambda)(-\overrightarrow{AB}) = (-\lambda)\overrightarrow{BA}.$$

Enfin on a clairement $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. La multiplication des vecteurs par un nombre est distributive par rapport à l'addition des vecteurs (ceci résulte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble des nombres réels).

7. Équation cartésienne d'un cercle; fonctions trigonométriques

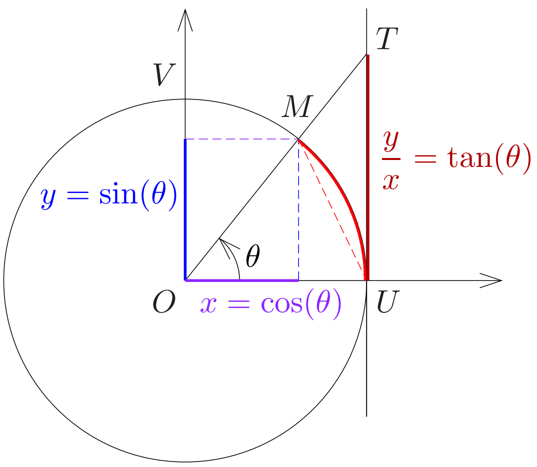
D'après le théorème de Pythagore, le cercle de centre $A\ (a, b)$ et de rayon dans le plan est l'ensemble des points M satisfaisant l'équation

$$AM = R \quad\Leftrightarrow\quad AM^2 = R^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x-a)^2 + (y-b) = R^2,$$

soit encore une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Inversement, l'ensemble des solutions d'une telle équation définit un cercle de centre $A\ (a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ si $c < a^2 + b^2$, se réduit au point A si $c = a^2 + b^2$, et est vide si $c > a^2 + b^2$.

On appelle *cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre l'origine dans un plan orthonormé Oxy, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 = 1$. Soit U le point de coordonnées $(1, 0)$ et V le point de coordonnées $(0, 1)$. Les fonctions trigonométriques cos, sin et tan d'un angle quelconque sont alors définies par le schéma classique suivant[(21)] :

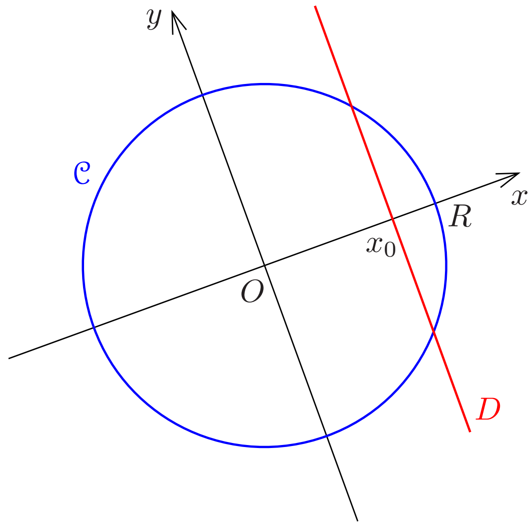


L'équation du cercle montre qu'on a la relation $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ pour tout θ.

(21) Il nous paraît indispensable à ce stade que les fonctions cos, sin, tan aient déjà été introduites au préalable comme rapports de côtés dans un triangle rectangle, ceci dans le cas des angles aigus, et que leurs valeurs pour les angles remarquables $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ soient connues.

8. Intersection de cercles et de droites

Commençons par l'intersection d'un cercles $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R avec une droite $\mathcal{D}$ quelconque. Pour simplifier les calculs, on choisit $A = O$ comme origine et on prend l'axe Ox perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ est alors « verticale » dans le repère Oxy. (Nous traitons ici d'emblée le cas général, mais il faut évidemment commencer par des exemples numériques simples ...)



Ceci donne des équations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \qquad D : x = x_0,$$

d'où

$$y^2 = R^2 - x_0^2.$$

Par conséquent, si $|x_0| < R$, on a $R^2-x_0^2 > 0$ et on trouve deux solutions $y = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$, ce qui correspond à deux points d'intersections $(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ et $(x_0, -\sqrt{R^2 - x_0^2})$ symétriques par rapport à l'axe Ox. Si $|x_0| = R$, on a une solution unique $y = 0$: la droite $\mathcal{D} : x = x_0$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point $(x_0, 0)$. Si $|x_0| > R$, l'équation $y^2 = R^2 - x_0^2 < 0$ n'a pas de solution ; la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le cercle.

Considérons maintenant l'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R avec un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A' et de rayon R'. Soit $d = AA'$ la distance des deux centres. Si $d = 0$ les cercles sont concentriques et la discussion est immédiate (cercles confondus si $R = R'$, disjoints si $R \neq R'$). On supposera donc $A \neq A'$, c'est-à-dire $d > 0$. Quitte à choisir $O = A$ comme origine et $Ox = [A, A')$ comme demi-axe positif, on se ramène au cas où $A\ (0\,;0)$ et $A'\ (d\,;0)$. On trouve alors les équations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \qquad \mathcal{C}' : (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2dx + R'^2 - d^2.$$

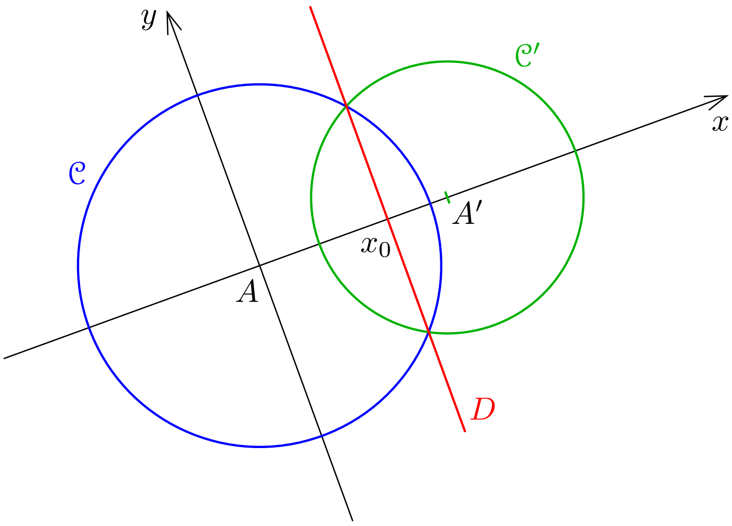
Si un point M appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, on a donc $2dx + R'^2 - d^2 = R^2$, d'où

$$x = x_0 = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - R'^2).$$

Ceci montre que l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est contenue dans l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ de $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D} : x = x_0$. Mais inversement, on voit que si $x^2 + y^2 = R^2$ et $x = x_0$, alors $(x\,;\,y)$ satisfait aussi l'équation

$$x^2 + y^2 - 2dx = R^2 - 2dx_0 = R^2 - (d^2 + R^2 - R'^2) = R'^2 - d^2$$

qui est l'équation de $\mathcal{C}'$, donc on a aussi $\mathcal{C} \cap D \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ et finalement $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap D$.



Les points d'intersection sont donc donnés par $y = \pm\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Par conséquent on a exactement deux solutions symétriques par rapport à la droite (AA') dès lors que $-R < x_0 < R$, ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} -2dR < d^2 + R^2 - R'^2 < 2dR \quad &\Longleftrightarrow \quad (d+R)^2 > R'^2 \ \text{ et } \ (d-R)^2 < R'^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad d + R > R', \ \ d - R < R', \ \ d - R > -R', \end{aligned}$$

soit encore $|R - R'| < d < R + R'$. Si l'une des inégalités est une égalité, ce qui correspond à $x_0 = \pm R$, on a une seule solution $y = 0$, les cercles sont tangents intérieurement si $d = |R - R'|$ et tangents extérieurement si $d = R + R'$.

On notera que ces résultats permettent d'obtenir une preuve complète et rigoureuse des trois cas d'isométrie des triangles : à changement de coordonnées orthonormées près, chacun des trois cas détermine entièrement les coordonnées des triangles, à symétrie près par rapport à Ox, une fois que l'on a choisi comme origine O l'un des sommets et comme demi-axe Ox la demi-droite qui porte le côté dont on connaît la longueur. Les triangles ainsi spécifiés sont donc isométriques.

9. Produit scalaire

La *norme* $\|\overrightarrow{V}\|$ d'un vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur $AB = d(A,B)$ d'un bipoint quelconque qui le définit. À partir de là, on pose par définition

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{2}\big(\|\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\|^2 - \|\overrightarrow{U}\|^2 - \|\overrightarrow{V}\|^2\big) \tag{9.1}$$

de sorte que l'on a en particulier $\vec{U}\cdot\vec{U} = \|\vec{U}\|^2$. Le nombre $\vec{U}\cdot\vec{V}$ s'appelle le *produit scalaire* de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et $\vec{U}\cdot\vec{U}$ s'appelle aussi le carré scalaire de $\vec{U}$, noté $\vec{U}^2$. On obtient par conséquent

$$\vec{U}^2 = \vec{U}\cdot\vec{U} = \|\vec{U}\|^2.$$

D'après la définition (9.1), nous avons

$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 + 2\,\vec{U}\cdot\vec{V}, \tag{9.2}$$

ce qui peut se récrire

$$(\vec{U}+\vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\,\vec{U}\cdot\vec{V}. \tag{9.2$'$}$$

C'était la motivation principale de la définition : faire en sorte que l'identité des carrés soit vraie pour les produits scalaires. En dimension 2 et dans un repère orthonormé Oxy, on trouve $\vec{U}^2 = x^2+y^2$; si $\vec{V}$ a pour composantes $(x'\,;\,y')$, la définition (9.1) implique

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{1}{2}\big((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\big) = xx'+yy'. \tag{9.3}$$

En dimension n, on trouve de même

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n'.$$

De là, on déduit que le produit scalaire est « bilinéaire », c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}(k\vec{U})\cdot\vec{V} = \vec{U}\cdot(k\vec{V}) &= k\,\vec{U}\cdot\vec{V},\\ (\vec{U_1}+\vec{U_2})\cdot\vec{V} &= \vec{U_1}\cdot\vec{V}+\vec{U_2}\cdot\vec{V},\\ \vec{U}\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_1}) &= \vec{U}\cdot\vec{V_1}+\vec{U}\cdot\vec{V_2}.\end{aligned}$$

Si $\vec{U}$, $\vec{V}$ sont deux vecteurs, fixons un point A comme origine et écrivons $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, puis $\vec{V} = \overrightarrow{BC}$, de sorte que $\vec{U}+\vec{V} = \overrightarrow{AC}$. Le triangle ABC est rectangle si et seulement si on a la relation de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire

$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2,$$

autrement dit, d'après (9.2), si et seulement si $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$.

Conséquence. *Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$.*

Plus généralement, si on choisit une origine O et un point A tel que $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$, on peut également fixer les coordonnées pour que A appartienne à l'axe Ox, c'est-à-dire $A = (u\,;\,0)$. Pour tout vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}\ (v\,;\,w)$ dans Oxy, on a alors

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = uv$$

tandis que

$$\|\vec{U}\| = u, \qquad \|\vec{V}\| = \sqrt{v^2+w^2}.$$

Comme la demi-droite $[O, B)$ coupe le cercle trigonométrique au point $(kv\,;\,kw)$ avec $k = 1/\sqrt{v^2 + w^2}$, on a par définition

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}) = \cos(\widehat{AOB}) = kv = \frac{v}{\sqrt{v^2 + w^2}}.$$

Ceci donne les formules très utiles

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \|\overrightarrow{U}\|\,\|\overrightarrow{V}\|\ \cos(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}), \qquad \cos(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}) = \frac{\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{U}\|\,\|\overrightarrow{V}\|}. \tag{9.4}$$

10. Espaces vectoriels, applications affines et linéaires

À partir de cette étape, on dispose de tous les fondements nécessaires, et l'ordre dans lequel on peut aborder les notions devient beaucoup plus flexible – la plus grande partie de ce qui suit déborde sur les mathématiques du lycée et au delà.

On peut par exemple poursuivre l'étude du triangle et du cercle, et introduire peu à peu les principales transformations géométriques : (dans le plan) translations, homothéties, affinités, symétries axiales, projections, rotations par rapport à un point ; (dans l'espace) translations et homothéties, symétries par rapport à un point, une droite ou un plan, projections orthogonales sur un plan ou sur une droite, rotation par rapport à un axe. Les outils disponibles permettent à la fois de faire des raisonnement intrinsèques (avec angles, distances, rapports de similitude, …), ou des calculs en coordonnées cartésiennes – il nous paraît bon que ces différentes techniques ne soient pas dissociées puisque ceci correspond à l'usage contemporain des mathématiques – la période « contemporaine » dont il s'agit remontant d'ailleurs à plusieurs siècles chez les mathématiciens, mécaniciens ou physiciens.

On peut commencer à mettre en évidence les phénomènes de linéarité, indépendamment de tout lien avec la distance. Ainsi, on peut introduire les notions de combinaison linéaire de vecteurs, de dépendance et indépendance linéaire, les bases et les repères non orthonormés, en relation avec la résolution des systèmes d'équations linéaires (par combinaisons ou substitutions – on aboutit assez rapidement à la notion de déterminant 2×2, puis 3×3), à la manipulation des équations de droites, de plans.

Étant donné un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n quelconque, ce qui a été fait à la section 6 fonctionne sans changement. On notera $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$ associés aux points de $\mathcal{E}$. Cet ensemble est muni des deux lois $+$ d'addition des vecteurs et $\cdot$ de multiplication par un scalaire, qui vérifient les propriétés usuelles :

(A 0) L'addition est une « loi de composition interne » $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$;

(A 1) L'addition des vecteurs est associative ;

(A 2) L'addition des vecteurs est commutative ;

(A 3) L'addition possède un élément neutre qui est $\overrightarrow{0}$;

(A 4) tout vecteur $\overrightarrow{V}$ possède un opposé $-\overrightarrow{V}$ tel que $\overrightarrow{V} + (-\overrightarrow{V}) = (-\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.

(M 0) La multiplication par un scalaire $(\lambda, \overrightarrow{V}) \mapsto \lambda\overrightarrow{V}$ est une « loi de composition externe » $\mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

(M 1) Le scalaire 1 est élément neutre : $1 \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$.

(M 2) La multiplication scalaire vérifie la « pseudo-associativité » $\lambda\cdot(\mu\cdot\overrightarrow{V}) = (\lambda\mu)\cdot\overrightarrow{V}$;

(M 3) On a distributivité à gauche $(\lambda+\mu)\cdot\overrightarrow{V} = \lambda\cdot\overrightarrow{V} + \mu\cdot\overrightarrow{V}$

(M 4) On a distributivité à droite $\lambda\cdot(\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}) = \lambda\cdot\overrightarrow{V} + \lambda\cdot\overrightarrow{W}$.

Chaque fois que l'on a un ensemble $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ munis de deux lois $+$ et $\cdot$ vérifiant les propriétés (A 0,1,2,3,4) et (M 0,1,2,3,4) ci-dessus pour tous les scalaires λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$, on dit qu'on a affaire à un espace vectoriel sur le corps des réels (cette terminologie vient du fait qu'on peut donner une définition analogue sur d'autres corps, par exemple le corps $\mathbb{Q}$ des nombre rationnels).

Pour chacune des transformations $s : M \mapsto s(M)$ évoquées ci-dessus, on s'aperçoit que la transformation est donnée en coordonnées par des formules du type suivant : si $M\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $s(M)\ (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a une écriture du type

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \tag{10.1}$$

autrement dit, les coordonnées (y_i) de $s(M)$ sont des fonctions affines des coordonnées (x_i) de M. On peut plus généralement considérer une transformation $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ d'un espace $\mathcal{E}$ de dimension n dans un espace $\mathcal{F}$ de dimension p non nécessairement égale à n dimension (par exemple, une projection de l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 sur un plan $\mathcal{F} = \mathcal{P}$), et l'écriture est encore du même type. De manière matricielle (et après introduction du formalisme matriciel qui nous paraît recommandable en milieu ou fin de lycée – au moins en dimensions 1, 2 et 3), on peut écrire dans tous ces cas $Y = AX + B$. On dit alors que s est une transformation affine. Si N est un autre point de coordonnées $N : X' = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $s(N) : Y' = (y'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ son image, on voit que $Y' = AX' + B$, donc

$$\overrightarrow{s(M)s(N)} : Y' - Y = A(X' - X).$$

Par conséquent, si on note $\sigma : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$, $\overrightarrow{V} \mapsto \sigma(\overrightarrow{V})$, la transformation vectorielle définie par $Y = AX$, on a la formule

$$\overrightarrow{s(M)s(N)} = \sigma(\overrightarrow{MN}), \tag{10.2}$$

et σ possède les propriétés essentielles de « linéarité »

$$\sigma(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) = \sigma(\overrightarrow{V}) + \sigma(\overrightarrow{W}), \qquad \sigma(\lambda\overrightarrow{V}) = \lambda\sigma(\overrightarrow{V}). \tag{10.3}$$

Inversement, si $\sigma : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ vérifie (10.3), on montre aisément à l'aide d'une base que σ est donnée en coordonnées par une formule du type $Y = AX$; de plus, si $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ vérifie (10.2), alors en appliquant la formule au couple (O, M) et en notant B les coordonnées de $f(O)$, on voit que $Y - B = AX$, soit encore $Y = AX + B$, donc f est une transformation affine. Un théorème de « rigidité » essentiel de la géométrie euclidienne est le suivant (on peut se limiter au cas $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, qui est tout aussi intéressant !)

Définition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces euclidiens et $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une transformation ponctuelle quelconque. On dit que s est une isométrie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ si pour tout couple de points (M, N) de $\mathcal{E}$ on a $d(s(M), s(N)) = d(M, N)$.*

Théorème. *Si $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une isométrie, alors s est une transformation affine, et son application linéaire associée $\sigma : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ est ce qu'on appelle une transformation orthogonale, c'est-à-dire une application vectorielle respectant l'orthogonalité et les produits scalaires :*

$$\sigma(\overrightarrow{V}) \cdot \sigma(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W} \tag{10.4}$$

pour tous vecteurs $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W} \in \overrightarrow{E}$.

Démonstration. Fixons une origine O, et définissons σ par

$$\sigma(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{s(O)s(M)}.$$

Les propriétés du produit scalaire donnent

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}\big(\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(d(O,M)^2 + d(O,N)^2 - d(M,N)^2\big).\end{aligned} \tag{10.5}$$

On obtient par conséquent

$$\begin{aligned}\sigma(\overrightarrow{OM}) \cdot \sigma(\overrightarrow{ON}) &= \overrightarrow{s(O)s(M)} \cdot \overrightarrow{s(O)s(N)}\\ &= \frac{1}{2}\big(d(s(O),s(M))^2 + d(s(O),s(N))^2 - d(s(M),s(N))^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(d(O,M)^2 + d(O,N)^2 - d(M,N)^2\big) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}.\end{aligned}$$

Ceci montre que σ vérifie (10.4). En développant par bilinéarité le carré scalaire

$$\big(\sigma(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) - \lambda\sigma(\overrightarrow{V}) - \mu\sigma(\overrightarrow{W})\big)^2,$$

on voit alors en utilisant (10.4) que le résultat vaut

$$\big((\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) - \lambda\overrightarrow{V} - \mu\overrightarrow{W}\big)^2 = 0,$$

donc $\sigma(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) - \lambda\sigma(\overrightarrow{V}) - \mu\sigma(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{0}$ et σ est linéaire. Par différence, la formule $\sigma(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{s(O)s(M)}$ donne $\sigma(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{s(M)s(N)}$ pour deux points M, N quelconques, donc s est une application affine d'application linéaire associée σ, et le théorème est démontré. □

Dans la même direction, on peut énoncer le « théorème des figures isométriques », qui lui-même permet d'aboutir à une justification mathématique complète de toutes les définitions et considérations physiques apparues dans la section 3.2.

Théorème. *Soient* $(A_1A_2A_3A_4\ldots)$ *et* $(A'_1A'_2A'_3A'_4\ldots)$ *deux figures isométriques formées par des points* A_i, A'_i *d'un espace euclidien* $\mathcal{E}$. *Alors il existe une isométrie* s *de l'espace euclicien* $\mathcal{E}$ *tout entier tel que* $A'_i = s(A_i)$.

Démonstration. Considérons les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{V}'}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ formé par les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$ (resp. $\overrightarrow{A'_iA'_j}$). Comme

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_1A_j} - \overrightarrow{A_1A_i},$$

il suffit de prendre les combinaisons linéares des vecteurs $\overrightarrow{V_i} = \overrightarrow{A_1A_i}$ (resp. $\overrightarrow{V'_i} = \overrightarrow{A'_1A'_i}$). En ramplaçant O par A_1, M par A_i et N par A_j, la formule (10.5) implique

$$\overrightarrow{V_i}\cdot\overrightarrow{V_j} = \overrightarrow{A_1A_i}\cdot\overrightarrow{A_1A_j} = \frac{1}{2}\big((A_1A_i)^2 + (A_1A_j)^2 - (A_iA_j)^2\big).$$

Ceci implique que $\overrightarrow{V'_i}\cdot\overrightarrow{V'_j} = \overrightarrow{V_i}\cdot\overrightarrow{V_j}$, par conséquent la transformation vectorielle

$$\sigma_0 : \sum \lambda_i\overrightarrow{V_i} \mapsto \sum \lambda_i\overrightarrow{V'_i}$$

définit une application linéaire orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{V}'}$ (σ_0 est bien définie, car si un vecteur a plusieurs représentations $\sum\lambda_i\overrightarrow{V_i}$, les images $\sum\lambda_i\overrightarrow{V'_i}$ correspondantes sont les mêmes, comme on le voit en observant que le carré scalaire de la différence est nul). En particulier, les espaces $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{V}'}$ sont de même dimension, et on peut prolonger σ_0 en une isométrie σ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ en faisant la somme directe orthogonale $\sigma = \sigma_0 \oplus \tau$ avec une transformation orthogonale quelconque τ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}^{\perp}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{V}'}^{\perp}$ (celle-ci existe puisque $\overrightarrow{\mathcal{V}}^{\perp}$ et $\overrightarrow{\mathcal{V}'}^{\perp}$ sont de même dimension $= \dim\overrightarrow{\mathcal{E}} - \dim\overrightarrow{\mathcal{V}}$). On définit maintenant une isométrie affine s en considérant l'unique application affine $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui envoie A_1 sur A'_1, et qui a comme application linéaire associée la transformation orthogonale σ. Comme $s(A_1) = A'_1$ et $\sigma(\overrightarrow{V_i}) = \overrightarrow{V'_i}$, c'est-à-dire $\sigma(\overrightarrow{A_1A_i}) = \overrightarrow{A'_1A'_i}$, on a bien $s(A_i) = A'_i$ pour tout i. □

Pour aller un peut plus loin, on a besoin de connaître la structure précise des transformations orthogonales : on démontre qu'une transformation vectorielle de matrice A dans une base orthonormée est orthogonale si et seulement si sa matrice A vérifie ${}^tAA = \mathrm{Id}$, ce qui équivaut à ce que les vecteurs colonnes forment une base orthonormée. En dimension 2, on obtient les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1,$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

qui correspondent respectivement à la rotation vectorielle d'angle α et à la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_{\alpha/2}$ d'angle $\alpha/2$ par rapport à Ox.

Dans ce dernier cas, le choix d'une nouvelle base orthonormée appropriée conduit à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En général, en dimension quelconque, on montre que pour toute tranformation vectorielle orthogonale, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme

$$A = \begin{pmatrix}
\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 & 0 & & & \dots & & & & 0 \\
\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 & & & \dots & & & & 0 \\
0 & 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & & & \dots & & & & 0 \\
0 & 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & & & \dots & & & & 0 \\
\vdots & & & 0 & \ddots & & \dots & & & & \vdots \\
0 & \dots & & 0 & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k & 0 & \dots & & 0 \\
0 & \dots & & 0 & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 & \dots & & 0 \\
0 & \dots & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & & \vdots & & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \dots & & 0 & & & 0 & & & \dots & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

pour des angles adéquats α_i et $\varepsilon = \pm 1$. La preuve s'obtient par récurrence sur la dimension, en observant qu'il existe ou bien une valeur propre réelle (nécessairement égale à ± 1), ou bien une valeur propre complexe non réelle, correspondant à un plan réel stable dans lequel la transformation opère comme une rotation d'angle α_i ; on s'appuie sur le fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable est stable ; les valeurs propres -1 peuvent être regroupées 2 par 2 et correspondent à des rotations d'angle $\alpha_i = \pi$. Ceci laisse la possibilité d'au plus une valeur propre -1 isolée, qui figure ici à la dernière ligne sous la forme de la valeur propre $\varepsilon = \pm 1$ (mais cette ligne peut-être absente).(22)

En choisissant un paramètre $t \in [0,1]$ (pensé comme un paramètre temps), et en définissant A_t comme la matrice associée aux angles $t\alpha_i$ et au paramètre $\varepsilon = \pm 1$ comme-ci dessus, on obtient une variation continue telle que $A_1 = A$ et $A_0 = \mathrm{Id}$ ou $A_0 =$ matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Ceci montre que pour toute transformation isométrique $s : X \mapsto Y = AX + B$, on a une variation continue dans le temps $s_t : X \mapsto A_tX + tB$ telle que $s_1 = s$, tandis que s_0 est soit la transformation identique, soit la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Ceci montre que deux figures isométriques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' = s(\mathcal{F})$ se déduisent l'une de l'autre par un mouvement continu $\mathcal{F}_t = s_t(\mathcal{F})$ tel que $\mathcal{F}_1 = s_1(\mathcal{F}) = s(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}_0 = s_0(\mathcal{F})$ coïncide soit avec $\mathcal{F}$ soit avec la figure obtenue par symétrie miroir par rapport à un hyperplan.

On notera qu'avec les notations précédentes nous avons $\det(A) = \varepsilon = \pm 1$. On dit que l'on a affaire à une *isométrie positive* si $\varepsilon = +1$ et à une *isométrie négative* si $\varepsilon = -1$.

---

(22) En dimension 3, la preuve se réduit facilement à la dimension 2, du fait que le polynôme caractéristique de degré 3 a nécessairement une valeur propre réelle. Ce résultat était au programme des classes de Terminale C des années 1970–1985 (le cas de dimension 2 était même introduit dès la classe de Première !). C'est hélas une bonne mesure de l'incroyable et consternante dégradation du niveau des études dans notre pays : ce résultat ne semble malheureusement même plus pouvoir être compris au niveau L2 de l'université, pour autant qu'il y soit mentionné et démontré explicitement.

Dans le cas d'une variation continue $t \mapsto A(t)$, le déterminant $\det(A(t))$ qui est une fonction continue ne peut « sauter » de la valeur 1 à la valeur -1, et ce déterminant est donc constant dans le temps. Le mouvement d'un corps solide $t \mapsto s_t(\mathcal{F})$ à partir d'une position initiale (correspondant à $s_0 = \mathrm{Id}$, donc à $\det A(0) = 1$) s'effectue donc uniquement par des isométries positives. Inversement, la discussion qui précède montre que toute isométrie positive peut se réaliser par un déplacement au sens de la définition (3.2.5) : mathématiquement, il y a donc coïncidence entre les notions de déplacement et d'isométrie positive.

11. Géométries non euclidiennes

L'approche de la géométrie fondée sur l'exploitation de la structure d'espace métrique n'est pas une simple curiosité propre à la géométrie euclidienne. Ainsi, les géométries non euclidiennes trouvent naturellement place dans le cadre général de la géométrie riemannienne, ainsi nommée en référence à Bernhard Riemann (1826 – 1866, l'un des principaux fondateurs de l'analyse complexe et de la géométrie différentielle modernes).

Une variété riemannienne est par définition une variété différentielle X, c'est-à-dire un espace qui admet localement des systèmes de coordonnées différentiables réelles $x = (x_1\,;\, x_2\,;\, \ldots\,;\, x_n)$, muni d'une métrique infinitésimale g de la forme

$$ds^2 = g(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}(x)\, dx_i dx_j.$$

Cette métrique représente le carré de la longueur d'un petit déplacement $dx = (dx_i)$ sur la variété. On suppose ici que $(a_{ij}(x))$ est une matrice symétrique définie positive et que les coefficients $a_{ij}(x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de x. Étant donné un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ continûment différentiable par morceaux, la longueur se calcule en posant

$$x = \gamma(t) = (\gamma_1\,;\, \ldots\,;\, \gamma_n(t)), \qquad dx = \gamma'(t)\, dt,$$

ce qui donne

$$(11.1') \qquad ds = \|dx\|_{g(\gamma(t))} = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)}\; dt,$$

$$(11.1'') \qquad \mathrm{long}(\gamma) = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)}\; dt.$$

Etant donné deux points a, $b \in X$, la « distance géodésique » $d_g(a, b)$ de a à b est définie par $d_g(a, b) = \inf_\gamma\ \mathrm{long}(\gamma)$ où l'inf est étendu à tous les chemins $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ d'extrémités $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. La géométrie euclidienne telle que nous l'avons décrite correspond au cas particulier d'une métrique riemannienne constante (on parle aussi de « métrique plate » pour signifier que la courbure est nulle)

$$(11.2') \qquad ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2,$$

ce qui donne dans ce cas l'expression plus simple

$$\text{long}(\gamma) = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \gamma_i'(t)^2}\, dt. \tag{11.2''}$$

La théorie de la relativité restreinte fait appel quant à elle à une métrique d'un type un peu différent, appelée métrique lorentzienne, qui est une métrique de signature $(3,1)$ dans l'espace-temps einsteinien :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\, dt^2 \tag{11.3}$$

où c désigne la vitesse de la lumière. La théorie de la relativité généralisée correspond au cas de métriques lorentziennes à coefficients variables, et son étude mène à celle des phénomènes de courbure qui décrivent les effets de la gravitation.

Pour en revenir à la géométrie en dimension 2, nous rappellerons ici brièvement la description de la géométrie non euclidienne de Lobatchevski à partir du modèle du disque de Poincaré muni de sa métrique hyperbolique invariante.

Définition. *Sur le disque unité* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ *du plan complexe, avec* $z = x + iy$*, on considère la métrique dite de Poincaré*

$$ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2} \quad\Leftrightarrow\quad ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}. \tag{11.4}$$

Un calcul montre que cette métrique est invariante par le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *des automorphismes holomorphes, constitué des transformations homographiques*

$$h(z) = \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad |\lambda| = 1, \quad a \in \mathbb{D}$$

qui préservent $\mathbb{D}$*. Pour la métrique ci-dessus, la longueur d'un chemin* $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{D}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux se calcule en posant* $z = \gamma(t)$*,* $dz = \gamma'(t)\,dt$*, d'où*

$$\text{long}(\gamma) = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\, dt.$$

D'après la définition générale, la distance de Poincaré $d_P(a,b)$ de a à b est la distance géodésique définie par $d_P(a,b) = \inf_\gamma\ \text{long}(\gamma)$ où l'inf est étendu à tous les chemins $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{D}$ d'extrémités $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. Du fait que la métrique de Poincaré ds est invariante par $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, on déduit aussitôt que la distance d_p l'est aussi, autrement dit $d_P(h(a),h(b)) = d_P(a,b)$ pour tout $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et tous points $a,b \in \mathbb{D}$.

Nous affirmons que le chemin de longueur minimale joignant le centre 0 du disque à un point quelconque $w \in \mathbb{D}$ est le segment $[0,w]$. En effet, si on écrit $z = \gamma(t) = r(t)\,e^{i\theta(t)}$ en coordonnées polaires, il vient

$$dz = (dr + ir\,d\theta)\,e^{i\theta}, \qquad |dz| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \geqslant dr = r'(t)dt$$

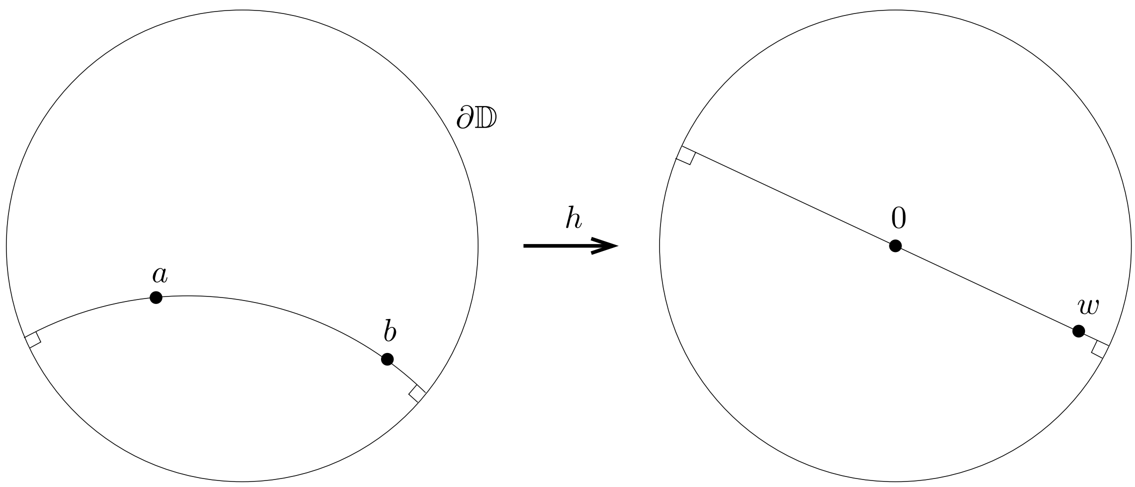
On obtient donc

$$\mathrm{long}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geqslant \int_0^{|w|} \frac{dr}{1-r^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|w|}{1-|w|},$$

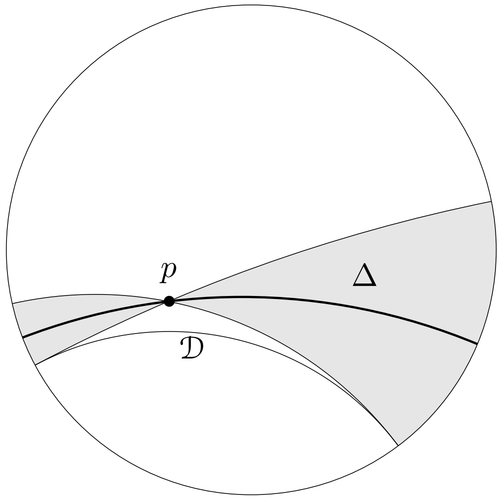
et ce calcul correspond précisément à la longueur du segment $[0, w]$. Pour trouver la distance de deux points quelconques a, b, on peut utiliser l'automorphisme $h(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ qui envoie a sur $h(a) = 0$ et b sur $w = h(b) = \frac{b-a}{1-\overline{a}b}$. On trouve ainsi

$$d_P(a,b) = d_P(h(a),h(b)) = d_P(0,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{|b-a|}{|1-\overline{a}b|}}{1-\frac{|b-a|}{|1-\overline{a}b|}}. \tag{11.5}$$

Cette distance gouverne la géométrie hyperbolique tout comme la formule de la distance issue du théorème de Pythagore gouverne la géométrie euclidienne.



La géodésique (chemin le plus court) joignant a à b est l'image inverse par h du segment $[0, w]$. C'est donc un arc de cercle d'extrémités a et b, porté par un cercle orthogonal au bord $\mathbb{D}$ (en effet le diamètre $\mathbb{R}w$ est orthogonal au bord $\partial\mathbb{D}$, donc leurs images inverses par h le sont, du fait du caractère conforme de h, et $\partial\mathbb{D}$ est évidemment invariant par h). La seule exception est le cas où $0, a, b$ sont alignés, auquel cas la géodésique est le segment de droite $[a, b]$ porté par un diamètre de $\mathbb{D}$. Les « droites hyperboliques » de $\mathbb{D}$ sont donc les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au bord $\partial\mathbb{D}$.



En géométrie hyperbolique, on constate facilement que les axiomes d'incidence d'Euclide sont satisfaits, sauf précisément le 5ᵉ postulat (postulat suivant lequel par tout point passe une unique parallèle à une droite donnée) : ici, par tout point p hors d'une « droite » $\mathcal{D}$ donnée, il passe une infinité de « droites » Δ ne coupant pas la « droite » initiale. C'est la découverte surprenante faite par Lobatchevski en 1826, ruinant l'espoir de déduire le 5ᵉ postulat des autres axiomes.

12. Quelques idées de Felix Hausdorff

Il y a bien d'autres circonstances où la structure métrique joue un rôle décisif; dans cette direction, nous allons décrire ici quelques idées importantes dues à Felix Hausdorff, l'un des fondateurs de la topologie moderne.

On peut ainsi introduire la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sans faire référence à la structure d'espace vectoriel ou de groupe. Si $(\mathcal{E}, d)$ est un espace métrique quelconque, on définit la *mesure de Hausdorff p-dimensionnelle* d'une partie A de $\mathcal{E}$ comme

$$(12.1)\qquad \mathcal{H}_p(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A), \qquad \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A) = \inf_{\operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon} \sum_i (\operatorname{diam} A_i)^p$$

où $\mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_i (\operatorname{diam} A_i)^p$ étendue à toutes les partitions dénombrables $A = \bigcup A_i$ avec $\operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon$. Si on se restreint aux parties boréliennes, on peut voir qu'on obtient une mesure dénombrablement additive pour tout $p \geqslant 0$. Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec sa structure euclidienne habituelle, cette mesure coïncide pour p entier avec la mesure d'aide euclidienne p-dimensionnelle, à un facteur de proportionnalité près lié au volume de la boule euclidienne de dimension p. Mais pour p non entier, on obtient encore des mesures très utiles qui servent par exemple à calculer la « dimension de Hausdorff » des objets fractals. La définition (12.1) fonctionne tout aussi bien dans un espace métrique quelconque, par exemple dans les variétés riemanniennes.

Une autre idée importante de Hausdorff est l'existence d'une structure métrique naturelle sur l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique $(\mathcal{E}, d)$. Si K, L

sont deux parties compactes de $\mathcal{E}$, la *distance de Hausdorff* de K et L est définie comme

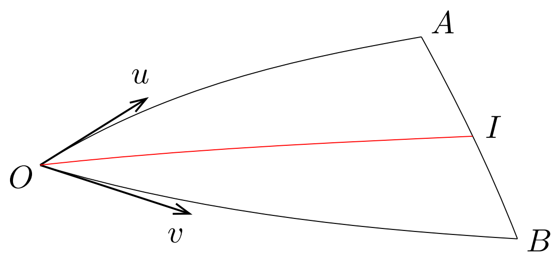
$$d_H(K,L) = \max\left\{\max_{x\in K}\min_{y\in L} d(x,y), \max_{y\in L}\min_{x\in K} d(x,y)\right\}. \tag{12.2}$$

On peut vérifier que d_H est bien une distance ; l'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ des parties compactes de $\mathcal{E}$ est ainsi muni d'une structure d'espace métrique. Lorsque $(\mathcal{E}, d)$ est compact, on peut montrer que $(\mathcal{K}(E), d_H)$ est lui-même compact.

13. Les travaux de Mikhail Gromov

L'étude des structures métriques constitue encore aujourd'hui un sujet de recherches extrêmement actif ; on peut citer en particulier les travaux de Mikhail Gromov sur les espaces de longueurs et les « espaces de modules » de variétés riemanniennes et leurs compactifications.

Un espace de longueurs est par définition un espace métrique $(\mathcal{E}, d)$ tel que pour tous points A, B de E il existe un point « milieu » I tel que $d(A,I) = d(I,B) = \frac{1}{2}d(A,B)$. Si l'espace $\mathcal{E}$ est complet, on peut alors construire par dichotomies succesives un chemin γ d'extrémités A, B tel que $d(A,\gamma(t)) = (1-t)d(A,B)$ et $d(\gamma(t),B) = t\,d(A,B)$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui peut être vu comme une géodésique joignant A et B. Il s'agit là d'une généralisation fructueuse des variétés riemanniennes – et donc en particulier des géométries euclidiennes et non euclidiennes. Un fait assez remarquable est que l'on peut définir par exemple le tenseur de courbure d'une variété riemannienne (M, g) en utilisant uniquement les propriétés infinitésimales de la distance dans l'espace de longueurs associé : soit O un point choisi comme origine, $A = \exp_O(\varepsilon u)$ et $B = \exp_O(\varepsilon v)$ où u, v sont des vecteurs tangents à M et $\varepsilon > 0$ un réel assez petit. Enfin, soit I le milieu de A, B pour la distance géodésique.



Alors le triangle géodésique infinitésimal OAB vérifie à la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{OA^2 + OB^2 - 2OI^2 - 2AI^2}{OA^2\,OB^2} = -\frac{1}{6}\frac{\langle R(u,v)u,v\rangle_g}{\|u\|_g^2\,\|v\|_g^2}, \tag{13.1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{OA^2 + OB^2 - 2OI^2 - 2AI^2}{OA^2\,OB^2 - (OI^2 - AI^2)^2} = -\frac{1}{6}\frac{\langle R(u,v)u,v\rangle_g}{\|u\wedge v\|_g^2}, \tag{13.2}$$

où R est le tenseur de courbure riemannien. Le numérateur $OA^2+OB^2-2OI^2-2AI^2$ est nul en géométrie euclidienne (théorème de la médiane !), et la déviation par rapport au cas euclidien s'exprime essentiellement en fonction de la courbure sectionnelle. *Preuve* : bel exercice pour le lecteur !

Si X et Y sont deux espaces métriques compacts quelconques , on définit leur *distance de Gromov-Hausdorff* $d_{GH}(X,Y)$ comme étant l'inf des distances $d_H(f(X),g(Y))$ pour tous les plongements isométriques possibles $f : X \to \mathcal{E}$, $g : Y \to \mathcal{E}$ de X et Y dans un même espace métrique compact $\mathcal{E}$. Ceci fournit par une notion précieuse pour l'étude des déformations des variétés riemanniennes compactes, et pour la compactification de leurs « espaces de modules ».

Chapitre II : Puissances, exponentielles, logarithmes de l'école primaire jusqu'à la terminale

Jean-Pierre Demailly, Université Joseph Fourier Grenoble I

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

version du 25 novembre 2007

L'enseignement du calcul à l'école primaire, les fondements du calcul approché et du calcul algébrique au collège, l'enseignement de l'analyse au lycée souffrent aujourd'hui dans notre pays d'insuffisances et d'incohérences très graves – c'est un constat : de plus en plus d'enseignants expriment ouvertement les difficultés qu'ils rencontrent en classe à ces divers niveaux. Pour aller au delà d'une simple impression générale et analyser les déficiences en détail, il est indispensable de se placer dans une perspective « longitudinale » – surtout pour une discipline comme les mathématiques où les notions s'introduisent, se construisent et s'étudient dans un enchaînement logique sur tout le parcours éducatif. Ce n'est pas principalement de logique formelle dont il s'agit ici ; c'est surtout de la « logique naturelle » ou « intuitive » nécessaire à l'élève pour se forger les schémas mentaux impliqués dans les notions appréhendées.

Nous avons choisi de nous concentrer sur l'introduction des exponentielles et des logarithmes qui, depuis un siècle au moins, s'effectue à la fin du lycée. Nul doute qu'il s'agisse là de notions tout à fait centrales, puisqu'elles interviennent dans tous les domaines de la science. C'est pourquoi l'analyse des connaissances nécessaires à l'introduction des logarithmes et des exponentielles doit (devrait) être considérée comme un élément essentiel pour l'élaboration des programmes d'enseignement des mathématiques.

Or, sur le seul point précis des prérequis à l'enseignement des logarithmes et des exponentielles, les programmes actuels présentent des lacunes sévères, qui se sont fortement aggravées depuis 1990. Les insuffisances constatées ne sont certes pas entièrement nouvelles. En effet, depuis 1960 au moins, les concepteurs de programmes – et beaucoup d'auteurs de manuels, même parmi ceux qui aujourd'hui contestent quelque peu les propositions actuelles – envisagent des approches qui laissent penser que l'introduction des logarithmes et des exponentielles nécessite l'utilisation d'outils « avancés » de l'analyse des fonctions d'une variable : au choix, utilisation du calcul intégral – utilisation de la primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ pour introduire le logarithme népérien – ou encore utilisation d'équations différentielles de type $y' = ky$.

Ce dernier choix, qui est celui du Groupe d'Experts des Programmes du Secondaire de l'an 2000 est pour nous assez stupéfiant. En effet, comme on le verra ci-après, les notions concernées ne réclament en réalité que des raisonnements élémentaires sur les puissances de nombres réels, leurs approximations décimales et la convergence des suites croissantes majorées [1]. Le GEPS, motivé en partie par la perspective de l'enseignement de la physique (ce qui est en soi une très bonne chose), a cru bon de recommander un « grand détour » par les équations différentielles, relevant ainsi le niveau de conceptualisation mis en jeu à celui des équations fonctionnelles, alors que les élèves de terminale maîtrisent aujourd'hui à grand peine le sens algébrique ou géométrique de la dérivée [2].

L'effet de ce choix, que j'ai pu constater *de visu* dans une très bonne classe de terminale S, est que le professeur est en général dans l'impossibilité de démontrer ou d'asseoir solidement toutes les étapes, de sorte que la définition reste enfermée dans un cercle vicieux : l'exponentielle est la solution d'une équation différentielle dont on a le plus grand mal à prouver l'existence de solutions, et bien entendu c'est sans broncher que l'on résout ensuite l'équation différentielle $y' = ky$ à l'aide de ces mêmes exponentielles. *In fine*, lorsque le logarithme a enfin été introduit, on parvient à définir a^x pour constater péniblement (par des preuves très alambiquées) que ceci redonne les puissances entières usuelles des nombres réels. Inutile de dire que l'élève normalement constitué aura la plus grande peine à se forger une conception cohérente de ces notions à partir des bribes de savoir lacunaires et de niveau disparate qu'on lui aura enseignées...

L'approche des années 1960–2000 n'était à vrai dire elle-même pas du tout idéale, puisqu'elle avait le désavantage patent de commencer par l'introduction du logarithme, moins intuitif que les puissances et les exponentielles, et qu'elle utilisait un théorème devenu quasi-inaccessible (surtout après les coupes sombres opérées dans les programmes à partir de 1990 !), à savoir l'existence de la primitive d'une fonction continue [3]. Une autre conséquence inévitable de ces approches – qu'il s'agisse de la définition du logarithme par la primitive de $1/x$ ou de l'invocation un peu magique des équations différentielles – est que l'introduction des logarithmes et des exponentielles est repoussée de manière quasi-obligatoire à la classe terminale [4].

Tout ceci est proprement hallucinant quand on sait que l'idée des logarithmes fut introduite par John Napier (dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614), à une époque où l'on ne connaissait pas encore le calcul différentiel et intégral, seulement développé par Newton et Leibnitz vers la fin du XVII ème siècle. L'idée principale

(1) Des idées analogues mais beaucoup plus abstraites sont utilisées par Bourbaki pour donner une preuve rigoureuse de l'isomorphisme entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, fondée uniquement sur des idées de topologie générale. Mais c'est assurément trop abstrait pour être directement transposable au lycée...

(2) Le choix du GEPS de Physique a été de proposer l'étude du phénomène de décroissance radioactive en liaison avec l'introduction de l'exponentielle par les équations différentielles, en mathématiques. L'idée d'établir un pont entre les deux disciplines nous apparaît louable. Cependant, sur ce sujet précis, nous estimons que la maturité mathématique moyenne des élèves de terminale est aujourd'hui devenue insuffisante pour que puisse leur apparaître de manière claire la complexité d'un phénomène statistique aussi subtil que la décroissance radioactive et sa modélisation continue par une équation différentielle – au moins dans une première approche destinée à l'introduction de la notion d'exponentielle.

(3) Une preuve « élémentaire » courte de l'existence des primitives de fonctions continues – ne nécessitant pas le concept de continuité uniforme – serait cependant possible dès la terminale pour peu que les programmes retrouvent quelque consistance - voir par exemple ma proposition de cours d'introduction à l'intégrale à la même adresse web que ci-dessus. Ceci relève aujourd'hui plutôt de l'université.

(4) Avant l'introduction des calculettes, la règle à calcul venait un peu compenser le « retard à l'allumage », mais ce garde-fou n'existe plus aujourd'hui.

utilisée par Napier était d'utiliser la comparaison entre progressions arithmétiques et géométriques – déjà bien connues des Grecs – assortie de quelques considérations cinématiques simples. À cette époque, les définitions et les preuves manquent encore de rigueur suivant les critères actuels, mais nous nous proposons de voir ici qu'on peut combler cette lacune par un exposé tout à la fois simple et complet, ne faisant appel à aucune notion difficile, ouvrant la voie à des progressions scolaires tout à fait envisageables.

Bien entendu, nous ne prétendons à aucune originalité scientifique sur un sujet aussi élémentaire. À la décharge des commissions chargées des programmes de lycée, il faut bien constater que le dépérissement des contenus de calcul et de la connaissance des algorithmes des opérations arithmétiques élémentaires en primaire et au collège rendrait périlleux – voire impossible – le cheminement que nous proposons : la nécessaire « connaissance intime des nombres » chère à René Thom est devenue à peu près « orthogonale » à l'esprit des programmes actuels, axés sur un formalisme algébrique réduit au minimum, et sur l'usage des calculettes en lieu et place d'une étude progressive du calcul exact et du calcul approché.

L'analyse « longitudinale » des nécessités d'enseignement des notions fondamentales que sont les exponentielles et les logarithmes place donc sous une lumière crue les graves déficiences des progressions scolaires actuelles. Nous espérons que ce texte participera d'une prise de conscience plus aigue de la nécessité urgente de revoir les programmes de mathématiques depuis la maternelle jusqu'à l'université.

1. Suites, limites, suites croissantes majorées

Nous renvoyons aux sections 1 et 2 de la partie concernant la géométrie pour l'introduction des nombres réels ; il est absolument indispensable que des définitions précises soient données, puisqu'il est impossible de faire des raisonnements qui se tiennent si on ne dispose pas de définition correcte et opérationnelle – c'est malheureusement le sort auquel sont livrés nos collégiens (et lycéens) aujourd'hui.

L'étape suivante, qui est le fondement même de l'enseignement de l'analyse, est l'introduction de la notion de limite – l'élève qui aura manipulé les développements décimaux et les encadrements au collège y aura déjà été très bien préparé, il faut donc envisager cette introduction dès la classe de seconde, et non pas en classe de première comme aujourd'hui, afin de laisser un temps de maturation plus important pour les notions essentielles de l'analyse.

En outre, nous préconisons d'introduire la notion de limite d'abord à l'occasion de l'étude des suites. Il y a pour cela deux raisons essentielles :

• La première raison est que ceci fait beaucoup mieux le lien avec le calcul décimal approché, lorsqu'on envisage par exemple les approximations décimales successives d'un nombre réel tel qu'une racine carrée.

• La deuxième raison est que l'enseignement actuel est beaucoup trop polarisé sur l'usage des calculettes et, au lycée, sur leur emploi pour l'étude des fonctions. Or la capacité des calculettes actuelles au calcul formel induit chez l'élève la conception erronée qu'une fonction est principalement une « formule algébrique » permettant d'évaluer une expression $f(x)$ – il suffit d'observer l'organisation des manuels modernes pour se convaincre que cette conception inappropriée sera extrêmement difficile à éradiquer. En réalité, la plupart des fonctions qui interviennent dans la nature – courbes de température ou de population, cours de la bourse, fonctions correspondant à des mesures expérimentales de phénomènes physiques – ne sont précisément pas données par des formules algébriques. C'est bel et bien la vision bourbakiste d'application d'un ensemble de départ vers un ensemble d'arrivée donnée par un graphe qui est la notion pertinente ! (et, en cela, les programmes de lycée de « mathématiques modernes » ne s'étaient donc pas trompés, on les a beaucoup trop vite jetés à la poubelle sans imaginer qu'ils comportaient tout de même une bonne part de vérité). L'approche des limites par les suites est un bon moyen de combattre l'idée fausse qu'une fonction coïncide avec une formule algébrique, et de donner lieu à des applications dont l'ensemble de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

Considérons par exemple la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = 2 - \frac{1}{u_n + 1}.$$

Des calculs aisés et l'utilisation d'une calculette donnent [5]

$$\begin{array}{lll}
u_0 & = 1 & = 1,00000000000\ldots \\
u_1 & = 3/2 & = 1,50000000000\ldots \\
u_2 & = 8/5 & = 1,60000000000\ldots \\
u_3 & = 21/13 & = 1,61538461538\ldots \\
u_4 & = 55/34 & = 1,61764705882\ldots \\
u_5 & = 144/89 & = 1,61797752808\ldots \\
u_6 & = 377/233 & = 1,61802575107\ldots \\
u_7 & = 987/610 & = 1,61803278688\ldots \\
u_8 & = 2584/1587 & = 1,61803381340\ldots \\
u_9 & = 6765/4181 & = 1,61803396316\ldots \\
u_{10} & = 17711/10946 & = 1,61803398501\ldots \\
u_{11} & = 28657/18657 & = 1,61803398820\ldots \\
u_{12} & = 75025/46368 & = 1,61803398867\ldots \\
u_{13} & = 196418/121393 & = 1,61803398873\ldots \\
u_{14} & = 514229/317811 & = 1,61803398874\ldots
\end{array}$$

On voit ici qu'on a $1 \leqslant u_n < 2$ pour tout n, et comme $u_1 > u_0$, on constate aussi de proche en proche (par récurrence sur n, si on veut) que $u_n > u_{n-1}$ entraîne $u_{n+1} > u_n$:

$$u_n > u_{n-1} \implies \frac{1}{1+u_n} < \frac{1}{1+u_{n-1}} \implies 2 - \frac{1}{1+u_n} > 2 - \frac{1}{1+u_{n-1}} \implies u_{n+1} > u_n,$$

de sorte qu'on a affaire à une suite croissante. La zone rouge montre les décimales qui ne sont pas encore stabilisées. On « sent bien » que la suite va avoir une limite égale au nombre réel $1,61803398874\ldots$. La preuve de l'existence de cette limite est un

(5) Les habitués reconnaîtront bien sûr un des avatars possibles de la suite de Fibonacci. On peut voir que la limite de u_n est le nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$, solution de l'équation $\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}$, d'où $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

théorème qui peut facilement (et donc *qui doit absolument*) être visualisé et démontré en classe de seconde – d'autant plus que c'est à notre sens le théorème fondateur de l'analyse et celui qui caractérise la notion même de nombre réel.

(1.1) Théorème. *Toute suite (u_n) croissante et majorée de nombres réels possède une limite, obtenue comme le nombre réel dont le développement décimal est donné par la suite des « décimales stabilisées» de l'écriture décimale des nombres u_n successifs. De même toute suite (u_n) décroissante et minorée de nombres réels possède une limite.*

Il est symptomatique que ce théorème soit aujourd'hui énoncé sans aucune justification jusqu'à la fin du lycée, la plupart des étudiants entrant aujourd'hui à l'université n'ont donc qu'une compréhension très confuse de ce qu'est un nombre réel ou de ce qu'est une limite... Même à l'époque des maths modernes où les programmes de lycée étaient très riches (malgré certains défauts patents - notamment en géométrie), ce théorème était présenté comme un axiome caractérisant les nombres réels. C'est à notre avis à la fois un appauvrissement mathématique [6] et une erreur didactique puisqu'une preuve « très évidente» peut en être donnée :

Preuve du théorème (1.1). Supposons d'abord d'abord qu'on ait affaire à une suite croissante majorée avec $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. On considère le développement décimal de chaque terme u_n, soit

$$u_n = E_n + 0, b_{1,n}b_{2,n}b_{3,n}b_{4,n}b_{5,n}b_{6,n} \ldots$$

où E_n est la partie entière de u_n (et on choisit disons le développement décimal propre de u_n). Si M est un majorant de la suite, alors $E_n \leqslant M$, donc (E_n) qui est une suite croissante d'entiers atteint sa valeur maximale E à partir d'un certain rang n_0, de sorte que $E_n = E$ pour $n \geqslant n_0$. On considère alors pour $n \geqslant n_0$ la suite des chiffres $0, 1, \ldots, 9$ formée par la première décimale $b_{1,n}$ de u_n. Celle-ci est croissante et va se stabiliser en sa valeur maximale b_1 à partir d'un rang $n_1 \geqslant n_0$. De proche en proche, une fois que les chiffres $b_{1,n}$, ..., $b_{p-1,n}$ sont stabilisés, il existe un rang $n_p \geqslant n_{p-1}$ à partir duquel le chiffre $b_{p,n}$ va se stabiliser en une valeur b_p. On voit alors que la suite (u_n) admet

$$\ell = E + 0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6 \ldots$$

comme limite, puisque $u_n \leqslant \ell$ et $u_n \geqslant \ell - 10^{-p}$ pour $n \geqslant n_p$.

Si la suite est décroissante minorée et $u_n \geqslant 0$, le raisonnement est identique, les approximations sont par excès et on regarde de la même manière les décimales stabilisées des chiffres décroissants successifs.

Dans le cas où (u_n) est croissante et formée de nombres tous négatifs, la suite $(-u_n)$ est décroissante positive et on est ramené au cas précédent. Enfin, le cas général d'une suite décroissante minorée dont les termes deviennent négatifs à partir d'un certain rang se ramène au cas d'une suite croissante majorée en considérant $(-u_n)$. □

[6] Lorsqu'à l'université on est enfin en mesure de proposer une construction plus solide des nombres réels, par exemple au moyen des coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy de nombres rationnels, c'est bien d'un théorème qu'il s'agit, et non d'un axiome. Le statut à donner à ce résultat est donc bien celui de théorème, surtout près de 150 ans après Dedekind et Cantor. Les nombres réels ne sont pas que des êtres vaporeux accessibles seulement par une approche axiomatique...

On notera que c'est le raisonnement du théorème (1.1) qui permet de donner la définition rigoureuse de la somme de deux nombres réels x et y quelconques en considérant les approximations décimales x_n et y_n à 10^{-n} près par défaut et en posant $x + y = \lim_{n\to+\infty} x_n + y_n$. De même pour le produit de deux nombres positifs $xy = \lim_{n\to+\infty} x_n y_n$ (le cas du produit de nombres réels de signes quelconques s'obtient à l'aide de la règle des signes). Pour l'existence de l'inverse $1/x$ (lorsque $x > 0$) et donc des quotients, on utilise le fait que la suite $1/x_n$ est décroissante minorée [7]. Comme l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives sur les décimaux, ces propriétés passent à la limite sur l'ensemble des nombres réels ; idem pour la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition [8].

Résultat des courses : nous avons été en mesure de définir rigoureusement les nombres réels dès le collège, et de démontrer leurs propriétés fondamentales à l'issue de la classe de seconde, de manière très simple. C'est là à notre avis un prérequis indispensable pour pouvoir faire de l'analyse dans de bonnes conditions, tout en donnant aux élèves des outils numériques concrets qui leur permettront de comprendre les questions posées.

À ce point, il devient parfaitement possible de justifier l'existence de la racine p-ième $x = \sqrt[p]{a}$ d'un nombre réel $a \geqslant 0$. En effet, par essais successifs, on obtient un encadrement par des nombres décimaux à n chiffres après la virgule, $x_n < x'_n = x_n + 10^{-n}$, avec $(x_n)^p < a < (x'_n)^p$ (à moins que le résultat « ne tombe juste » à une certaine étape, auquel cas le travail est fini). En particulier x_0 est la partie entière de la racine p-ième cherchée, et $x'_0 = x_0 + 1$ (sauf si le résultat « tombe juste » déjà dans les entiers). On obtient ainsi une suite croissante (x_n) d'approximations décimales par défaut, et une suite décroissante (x'_n) d'approximations décimales par excès, la suite (x_n) est majorée par $x'_0 = x_0 + 1$, et la suite (x'_n) est minorée par x_0.

Il est utile de savoir quelle est l'erreur commise sur la puissance p-ième du fait de l'approximation décimale. Pour cela, on utilise l'inégalité

$$(1.2) \qquad a^p - b^p \leqslant p(a-b)a^{p-1} \qquad \text{vraie pour tous } 0 \leqslant b \leqslant a,$$

---

(7) Bien entendu l'inverse $1/x_n$ d'un décimal n'est plus un décimal, mais on a déjà vu comment écrire un tel rationnel sous forme d'une représentation décimale périodique illimitée, cf. chapitre I.

(8) Pour une démonstration formelle complète et rigoureuse de ces propriétés – que nous ne recommandons absolument pas au niveau du lycée – on a besoin de l'observation suivante.

Observation. *Soit x un réel et x_n l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut obtenue par troncature à l'ordre n du développement décimal propre de x donné par la définition* (1.1)*. Si (ξ_n) est une suite de décimaux telle que $|x_n - \xi_n|$ tend vers 0, alors les décimales de ξ_n tendent vers le développement décimal de x si x n'est pas décimal, et sinon elles tendent soit vers le développement propre, soit vers le développement impropre – qui représentent tous deux le réel x par définition.*

Démonstration. Si x n'est pas décimal, il y a des rangs k arbitrairement grands pour lesquels la k-ième décimale de x n'est ni 0 ni 9, ou bien est un 9 suivi d'un 0 en rang $k+1$. Si on prend n assez grand pour que $|x_n - \xi_n| \leqslant 10^{-(k+1)}$ alors toutes les décimales de ξ_n et de x_n coïncident jusqu'à l'ordre $k-1$, la k-ième étant changée d'au plus une unité. Si x est décimal on a $x_n = x$ pour n assez grand et il est alors trivial que le développement de ξ_n à l'ordre $k-1$ coïncide avec le développement propre ou impropre de x suivant que ξ_n approche x par excès ou par défaut à moins de 10^{-k} près. CQFD

Le lemme montre qu'on peut en réalité utiliser n'importe quelle suite (ξ_n) d'approximations décimales s'approchant assez près de la suite des troncatures (x_n) pour représenter un réel x, de sorte que par exemple $(x_n + y_n) + z_n = x_n + (y_n + z_n)$ approchent à la fois $(x+y)+z$ et $x+(y+z)$.

Le théorème (1.1) montre également que la définition des nombres réels ne dépend pas de la base de numération choisie, c'est à dire que la définition (2.4) peut être posée dans une base quelconque autre que 10. Pour le voir, il suffit d'utiliser la conversion des développements « décimaux » finis d'une base dans une autre (ce qui ne fait intervenir dans tous les cas que des nombres rationnels), puis de passer à la limite à l'aide du théorème (1.1), qui est lui aussi valable dans n'importe quelle base.

qui se déduit de la formule

$$(1.3)\qquad a^p - b^p = (a-b)(a^p + a^{p-1}b + \ldots + ab^{p-1} + b^p)$$

[ou, alternativement, de l'égalité $a^{p+1} - b^{p+1} = a(a^p - b^p) + (a-b)b^p$ par récurrence sur p.] En appliquant ceci à $a = x'_n$ et $b = x_n$, on voit que

$$(x'_n)^p - (x_n)^p \leqslant p(x'_n - x_n)(x'_n)^{p-1} \leqslant p\frac{1}{10^n}(x'_0)^{p-1}.$$

Ceci entraîne que $\lim(x_n)^p = \lim(x'_n)^p = a$ quand n tend vers $+\infty$. Par définition même des nombres réels, les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers un réel x tel que $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$, donc $(x_n)^p \leqslant x^p \leqslant (x'_n)^p$ et $x^p = a$ à la limite [On peut naturellement commencer par traiter le cas des racines carrées ou cubiques, ce qui permet de réduire nettement la complexité des notations pour des élèves de seconde].

2. Puissances d'exposant fractionnaire ou réel

Nous sommes arrivés ici peut-être à l'entrée en classe de première (dans notre vision idéale d'un enseignement destiné à une filière de lycée centrée sur les mathématiques et les sciences exactes, et peut-être même à toutes les filières scientifiques ...). Il est grand temps d'introduire les notions de limite d'une fonction en un point, de continuité, de dérivée, que nous considérons comme une « deuxième couche » nécessaire après l'étude des suites et de leurs limites. Ceci suppose d'avoir déjà traité en seconde les exemples ad hoc, ceux des suites géométriques, des sommes de termes d'une progression géométrique $1 + a + \ldots + a^n$, des suites récurrentes définies par une fraction rationnelle du premier degré – pour peu que les équations du second degré aient été vues dès le début du lycée, comme c'était le cas avant que les programmes ne dégénèrent avec l'arrivée de la seconde indifférenciée.

Il résulte du théorème (1.1) qu'une fonction croissante $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ possède toujours des limites à droite et à gauche en tout point $x_0 \in]a,b[$, il suffit de considérer la suite décroissante $n \mapsto f(x_0 + 1/n)$ minorée par $f(x_0)$ et la suite croissante $n \mapsto f(x_0 - 1/n)$ majorée par par $f(x_0)$. L'exemple de la fonction partie entière $f(x) = E(x)$ montre que ces limites ne sont pas nécessairement égales.

(2.1) Puissances fractionnaires. Si q est un entier strictement positif, on pose

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a},$$

de sorte que $(a^{1/q})^q = a^1 = a$. Plus généralement, si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

La dernière égalité est due au fait que $((\sqrt[q]{a})^p)^q = (\sqrt[q]{a})^{pq} = ((\sqrt[q]{a})^q)^p = a^p$. On vérifie alors que les formules (2.1), (2.2), (2.3) restent valables pour les exposants rationnels. On a de plus les inégalités intéressantes suivantes.

(2.2) Deux inégalités utiles. Si h est un nombre réel positif ou nul et $q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(2.2\,\mathrm{a})\qquad (1+h)^q \geqslant 1 + qh,$$

$$(2.2\,\mathrm{b})\qquad (1+h)^{1/q} \leqslant 1 + \frac{1}{q}h,$$

En effet, la première inégalité résulte au choix de la formule du binôme, de la formule (1.3) avec $p = q$, $a = 1 + h$ et $b = 1$, ou d'un raisonnement direct par récurrence :

$$(1+h)^{q+1} = (1+h)^q(1+h) \geqslant (1+qh)(1+h) = 1+(q+1)h+qh^2 \geqslant 1+(q+1)h.$$

On notera que lorsque h est très petit, disons $h < 10^{-3}$ (et q pas trop grand), l'erreur qh^2 commise à chaque étape est faible, donc l'approximation par défaut $(1+h)^q \approx 1+qh$ sera tout à fait raisonnable. Si nous remplaçons maintenant h par $\frac{h}{q}$, il vient

$$\Big(1+\frac{h}{q}\Big)^q \geqslant 1+q\frac{h}{q} = 1+h$$

et donc $(1+h)^{1/q} \leqslant 1+\frac{1}{q}h$. □

(2.3) Conséquence. *Pour tout réel* $a > 0$, *on a* $\lim\limits_{q\to+\infty} a^{1/q} = 1$.

En effet, si $a \geqslant 1$ il suffit de poser $a = 1 + h$ de sorte que l'on obtient $a^{1/q} \geqslant 1$ et $a^{1/q} = (1+h)^{1/q} \leqslant 1+\frac{1}{q}h$, expression qui tend vers 1 quand q tend vers $+\infty$. Si $a < 1$, on utilise le fait que

$$a^{1/q} = \frac{1}{A^{1/q}}$$

avec $A = 1/a > 1$. □

(2.4) Puissances d'exposant réel. On cherche maintenir à définir a^x lorsque x est réel, en supposant par exemple $a \geqslant 1$ (si $a < 1$ on pourra s'y ramener en posant $a^x = 1/A^x$ avec $A = 1/a > 1$). Pour cela, on utilise les approximations décimales $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$ par défaut et par excès à 10^{-n} près. Comme x_n et x'_n sont des décimaux et donc des rationnels, on sait déjà définir a^{x_n} et $a^{x'_n}$. La suite (a^{x_n}) est croissante et majorée par $a^{x'_0}$, tandis que la suite $(a^{x'_n})$ est décroissante minorée par a^{x_0}. En outre leur quotient

$$\frac{a^{x'_n}}{a^{x_n}} = a^{x'_n - x_n} = a^{1/10^n}$$

tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ d'après la conséquence (2.3). Nous avons donc des suites de même limite (suites adjacentes), et il est légitime de poser

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x'_n}.$$

Notons que par passage à la limite sur les approximations décimales des exposants, les formules fondamentales (2.1), (2.2) et (2.3) restent valables.

On dit que la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ est la *fonction exponentielle* réelle de base $a > 0$. On réserve la terminologie de *fonction puissance* à la fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto x^\alpha$ (cette fois, l'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ est constant, tandis que dans l'exponentielle c'est l'exposant qui est la variable).

(2.5) Monotonie et continuité des fonctions exponentielles.

(i) *Si* $a = 1$, *alors* $a^x = 1^x = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Si* $a > 1$, *alors* $x \mapsto a^x$ *est une fonction strictement croissante, et on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

(iii) *Si* $a < 1$, *alors* $x \mapsto a^x$ *est une fonction strictement décroissante, et on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

(iv) *Dans tous les cas,* $x \mapsto a^x$ *est une fonction continue.*

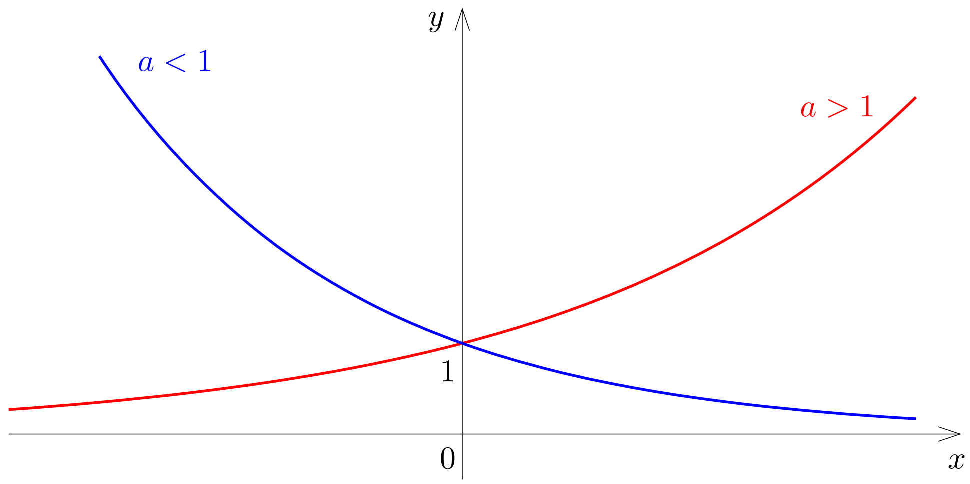


Fig. 1. Représentation graphique des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$.

Démonstration. La propriété (i) est évidente, car on a $1^x = 1$ pour tout x rationnel et donc tout x réel.

(ii) Si $a > 1$ et si $x < y$ sont des rationnels, alors $a^y = a^x \cdot a^{y-x}$, et comme $y - x = \frac{p}{q} > 0$ on a bien $a^{y-x} = \sqrt[q]{a^p} > 1$, donc $a^y > a^x$. Si $x < y$ sont des réels et $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$, $y_n \leqslant t \leqslant y'_n$ leurs approximations décimales par défaut et par excès, on va avoir $x'_n < y_n$ pour n assez grand, donc

$$a^x \leqslant a^{x'_n} < a^{y_n} \leqslant a^y.$$

Si on pose $a = 1 + h$ et qu'on choisit $N = E(x) =$ partie entière de x, alors $a^x \geqslant a^N \geqslant 1 + Nh$ tend bien vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. Par conséquent, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ tend vers 0, ce qui donne $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ en changeant x en $-x$.

(iii) résulte du fait que $a^x = \frac{1}{A^x}$ en posant $A = \frac{1}{a} > 1$.

(iv) Il suffit de voir que lorsque x tend vers x_0, alors $\frac{a^x}{a^{x_0}} = a^{x-x_0}$ tend vers 1, ce qui entraînera bien que $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Autrement dit, il suffit de voir que $\lim_{x\to 0} a^x = 1$. Si $a \geqslant 1$ et $x > 0$, considérons l'entier $q = E(1/x)$ de sorte que $q \leqslant 1/x$ et donc $x \leqslant 1/q$. Alors $1 \leqslant a^x \leqslant a^{1/q}$, et comme q tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, la conséquence (2.3) entraîne bien que $\lim_{x\to 0_+} a^x = 1$. C'est vrai aussi pour la limite à gauche en 0 puisque $\lim_{x\to 0_+} a^{-x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{a^x} = 1$. Enfin, le cas $a < 1$ s'obtient en posant $a^x = 1/A^x$ avec $A = 1/a > 1$. □

(2.6) Monotonie et continuité des fonctions puissances

(i) *Si* $\alpha = 0$, *alors* $x^\alpha = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) *Si* $\alpha > 0$, *alors* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction strictement croissante, et on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha = 0$.

(iii) *Si* $\alpha < 0$, *alors* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction strictement décroissante, et on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha = +\infty$.

(iv) *Dans tous les cas,* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction continue sur* $]0, +\infty[$, *elle se prolonge par continuité en* 0 *en posant* $0^\alpha = 0$ *si* $\alpha > 0$.

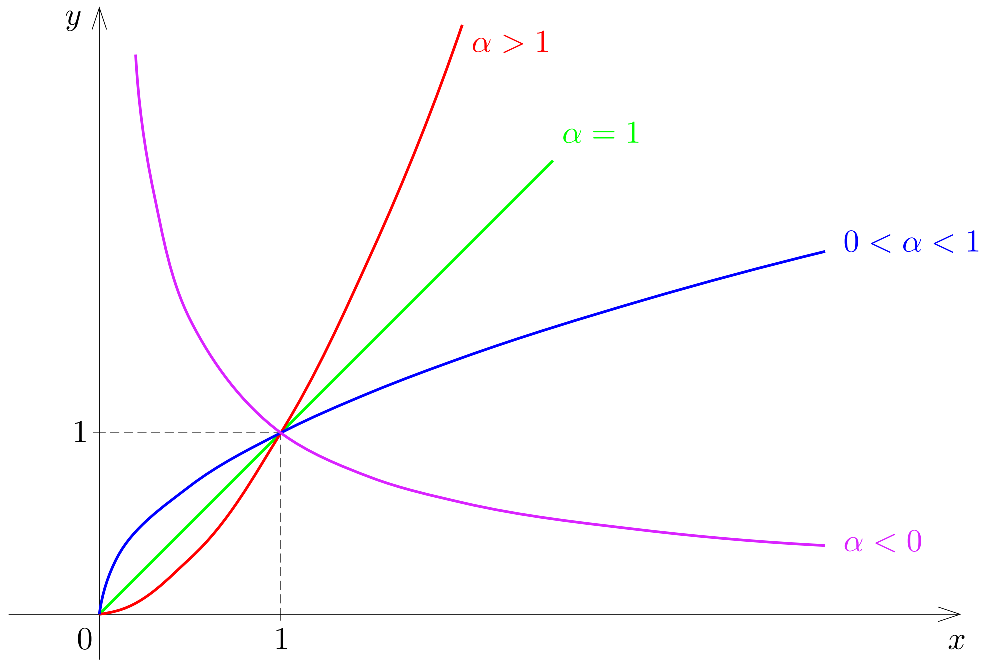


Fig. 2. Représentation graphique des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$.

Démonstration. La propriété (i) résulte de la définition même des puissances entières.

(ii) Si $0 < x < y$ alors pour $\alpha > 0$ on a bien $x^\alpha < y^\alpha$ puisque $y^\alpha/x^\alpha = (y/x)^\alpha > 1$ d'après 2.5 (ii) et le fait que $y/x > 1$. Maintenant, si q est un entier choisi assez grand pour que $\alpha > 1/q$, la propriété de croissance 2.5 (ii) donne aussi pour tout $x \geqslant 1$ les inégalités

$$x^\alpha \geqslant x^{1/q} \geqslant A \qquad \text{dès lors que } x \geqslant A^q.$$

Ceci montre bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. Pour $x \leqslant 1$, on a au contraire d'après 2.5 (iii)

$$0 < x^\alpha \leqslant x^{1/q} \leqslant \varepsilon \qquad \text{dès lors que } x \geqslant \varepsilon^q,$$

ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. On voit donc que $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha = 0$.

(iii) se déduit de (ii) en écrivant que $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

(iv) Si $x > x_0$ et $\alpha > 0$ on a

$$1 \leqslant x^\alpha / x_0^\alpha = (x/x_0)^\alpha \leqslant (x/x_0)^n$$

pour tout entier n qui majore le réel α. La continuité de la fonction $x \mapsto x^n$ qui résulte du théorème sur les produits de limites implique alors que $\lim_{x\to x_0+}(x/x_0)^n = 1$ et donc $\lim_{x\to x_0+} x^\alpha/x_0^\alpha = 1$. De même si $x < x_0$ on a

$$1 \leqslant x_0^\alpha / x^\alpha = (x_0/x)^\alpha \leqslant (x_0/x)^n$$

de sorte que $\lim_{x\to x_0-} x_0^\alpha/x^\alpha = 1$. Ceci prouve que $\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$, d'où la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha > 0$. Le cas $\alpha < 0$ s'en déduit de nouveau du fait que $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$. L'assertion finale sur le prolongement par continuité en 0 résulte de la limite vue en (ii). □

Bilan: nous avons été capables de définir les puissances réelles d'exposant arbitraire et les exponentielles réelles de bases arbitraires sans même avoir eu besoin pour l'instant du calcul de dérivées – et encore moins du calcul intégral. C'est déjà un pas très considérable ! Le calcul des dérivées de ces fonctions sera l'étape suivante.

3. Croissance des pentes et dérivée des fonctions puissances

Rappelons que la dérivée d'une fonction f définie au voisinage d'un point x est définie comme la limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{X\to x} \frac{f(X) - f(x)}{X - x} \tag{3.1}$$

du taux d'accroissement

$$\tau_f(x, X) = \frac{f(X) - f(x)}{X - x},$$

lorsque cette limite existe. Le taux d'accroissement représente la pente de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(X, f(X))$ du graphe de f. L'existence de la dérivée est équivalente à celle d'une tangente au point $(x, f(x))$, dont la pente est alors égale à $f'(x)$.

On a aussi les notions de dérivée à droite et de dérivée à gauche lorsque les limites à droite et à gauche ne sont pas nécessairement égales, et les notions géométriques correspondantes de demi-tangente à droite et de demi-tangente à gauche.

Nous commencerons par l'observation suivante – qui pourrait même relever du collège et de l'expérimentation graphique élémentaire des progressions géométriques.

(3.2) Observation. *Étant donné une progression géométrique $u_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, les écarts successifs $u_{n+1} - u_n = a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n$ forment une suite croissante.*

Démonstration. En effet ceci est vrai aussi bien pour $a \geqslant 1$, auquel cas a^n est une suite croissante et $a - 1 \geqslant 0$, que pour $0 < a < 1$, auquel cas a^n est une suite décroissante et $a - 1 < 0$. □

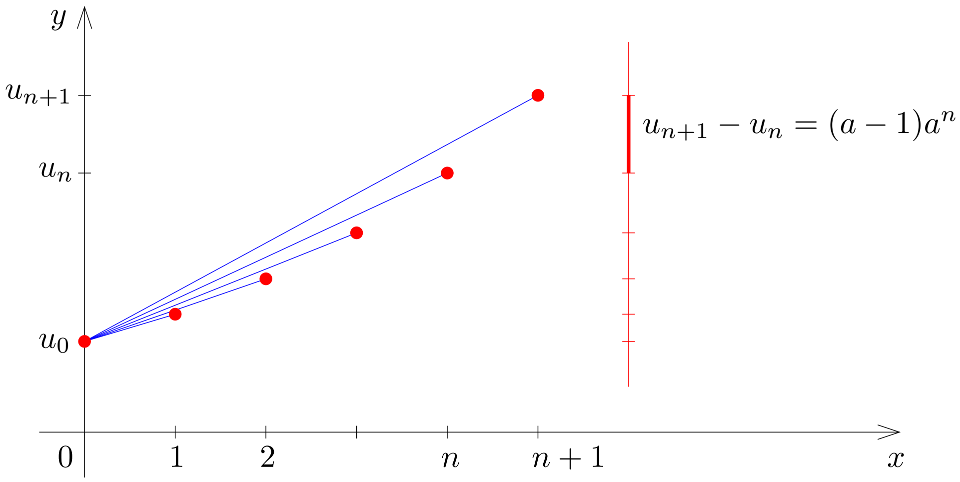


Fig. 3. Écarts $u_{n+1}-u_n$ dans une progression géométrique.

(3.3) Conséquence. *Pour tout réel $a>0$, les taux d'accroissement pris sur l'intervalle $[0,n]$ de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $p_a(n)=\frac{a^n-1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, forment une suite croissante*:

$$\frac{a^1-1}{1}\leqslant\frac{a^2-1}{2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{a^n-1}{n}\leqslant\ldots$$

Démonstration[9]. Pour tout entier $n\geqslant 1$, il faut voir que

$$\frac{a^n-1}{n}\leqslant\frac{a^{n+1}-1}{n+1},\quad\text{ce qui équivaut à}\quad(n+1)(a^n-1)\leqslant n(a^{n+1}-1),$$

ou encore à

$$a^n-1\leqslant n\big((a^{n+1}-1)-(a^n-1)\big)\quad\Leftrightarrow\quad a^n-1\leqslant n(a^{n+1}-a^n).$$

Mais on a

$$a^n-1=(a^n-a^{n-1})+(a^{n-1}-a^{n-2})+\ldots+(a^p-a^{p-1})+\ldots+(a^2-a)+(a-1)$$

et chacun des n termes a^p-a^{p-1} est majoré par $a^{n+1}-a^n$ d'après l'observation 3.2, ce qui donne l'inégalité voulue $a^n-1\leqslant n(a^{n+1}-a^n)$. $\square$

(9) On aurait pu systématiser le raisonnement en utilisant la notion de suite convexe.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) est convexe si les écarts successifs $v_n=u_{n+1}-u_n$ forment une suite croissante.*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère le taux d'accroissement de la suite (u_n) sur l'intervalle $[0,n]$

$$p_n=\frac{u_n-u_0}{n}=\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n},$$

qui s'interprète aussi comme la moyenne des n premiers écarts $v_i=u_{i+1}-u_i$. Géométriquement, ce taux représente la pente des droites bleues dans la Figure 3 ci-dessus.

Propriété. *Si une suite (u_n) est convexe, alors (avec les notations précédentes), la pente p_n vérifie $p_n\leqslant v_{n-1}$ et forme une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante.*

En effet, l'inégalité $p_n\leqslant v_{n-1}$ résulte de ce que chacun des termes v_i du numérateur de p_n est inférieur ou égal à v_{n-1}. On a donc $v_n\geqslant v_{n-1}\geqslant p_n$, d'où

$$p_{n+1}=\frac{(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})+v_n}{n+1}=\frac{np_n+v_n}{n+1}\geqslant\frac{np_n+p_n}{n+1}=p_n.\quad\square$$

(3.4) Généralisation. *Pour tout réel $a > 0$, le taux d'accroissement*

$$p_a(x) = \frac{a^x - 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*,$$

de la fonction $x \mapsto a^x$ pris sur l'intervalle $[0, x]$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration. On procède en trois étapes.

(a) *p_a est croissante sur l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ des entiers non nuls.* Pour cela, on applique la conséquence (3.3) en remplaçant a par a^{-1} et en changeant les signes (ce qui renverse le sens des inégalités). On obtient alors

$$\ldots \leqslant \frac{a^{-n} - 1}{-n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-2} - 1}{-2} \leqslant \frac{a^{-1} - 1}{-1}.$$

Il reste juste à vérifier que $p_a(-1) = 1 - a^{-1} \leqslant p_a(1) = a - 1$. Après multiplication par a, on voit que cette inégalité équivaut à $a - 1 \leqslant a^2 - a$, et ceci est bien vrai puisque $(a^2 - a) - (a - 1) = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geqslant 0$. On a par conséquent

$$\ldots \leqslant \frac{a^{-n} - 1}{-n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-2} - 1}{-2} \leqslant \frac{a^{-1} - 1}{-1} \leqslant \frac{a^{1} - 1}{1} \leqslant \frac{a^{2} - 1}{2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{n} - 1}{n} \leqslant \ldots$$

(b) *p_a est croissante sur l'ensemble des décimaux non nuls $\mathbb{D}_k^*$ de dénominateur 10^k.* On observe pour cela que $\mathbb{D}_k^*$ est l'ensemble des rationnels de la forme $x = n/10^k$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Comme $a^x = (a^{1/10^k})^n$, il suffit d'appliquer la suite précédente d'inégalités et de remplacer a par $a^{1/10^k}$. En divisant de plus tous les dénominateurs par 10^k, on obtient les inégalités désirées, à savoir

$$\frac{a^{-n/10^k} - 1}{-n/10^k} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-1/10^k} - 1}{-1/10^k} \leqslant \frac{a^{1/10^k} - 1}{1/10^k} \leqslant \frac{a^{2/10^k} - 1}{2/10^k} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{n/10^k} - 1}{n/10^k} \leqslant \ldots$$

(c) *p_a est croissante sur $\mathbb{R}^*$.* On procède par passage à la limite sur les décimaux. Pour $x, y \in \mathbb{R}^*$ avec $x \leqslant y$ quelconques, on considère les approximations décimales x_k de x et y_k de y à 10^{-k} près par défaut. Alors $x_k \leqslant y_k$ et $x_k, y_k \in \mathbb{D}_k^*$ pour k assez grand, donc $p_a(x_k) \leqslant p_a(y_k)$, ce qui donne $p_a(x) \leqslant p_a(y)$ quand k tend vers $+\infty$. □

Une première application de ce résultat est le calcul de la dérivée des fonctions puissances[10].

(3.5) Théorème. *On considère, pour α réel quelconque, la fonction $x \mapsto x^\alpha$, $x \geqslant 0$.*

(a) *Pour tous x, $X > 0$, $x \neq X$, le taux d'accroissement $\dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x}$ est compris entre les valeurs $\alpha\, x^{\alpha-1}$ et $\alpha\, X^{\alpha-1}$.*

(b) *La dérivée au point x est donnée par la formule $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, et cette formule est encore valable pour $x = 0$ si $\alpha > 1$.*

[10] Cette approche est inspirée d'un cours rédigé par Abdellah Bechata à partir d'une première version des présentes notes ...

Démonstration. (a) Posons $a = X/x$. La croissance de la fonction $t \mapsto \frac{a^t-1}{t} = \frac{(X/x)^t-1}{t}$ garantie par (3.4) entraîne pour $\alpha \geqslant 1$ l'inégalité

$$\frac{(X/x)^\alpha - 1}{\alpha} \geqslant \frac{(X/x)^1 - 1}{1} = \frac{X-x}{x} \underset{\bullet\times x^\alpha}{\Longrightarrow} \frac{X^\alpha - x^\alpha}{\alpha} \geqslant x^{\alpha-1}(X-x),$$

après multiplication par x^α. En multipliant maintenant par α et en divisant par $X - x$, il vient, compte tenu du signe de $X - x$,

$$\frac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \geqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X > x, \qquad \frac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X < x.$$

L'encadrement par l'autre borne $\alpha\, X^{\alpha-1}$ s'obtient en échangeant les rôles de x et X, ce qui donne pour tout $\alpha \geqslant 1$

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \alpha\, x^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \leqslant \alpha\, X^{\alpha-1} & \text{si } X > x, \\[2ex] \alpha\, X^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} & \text{si } X < x. \end{cases}$$

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, le raisonnement est identique, l'inégalité de départ est juste inversée, et on a donc renversement des inégalités de l'encadrement, soit

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} \alpha\, X^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} & \text{si } X > x, \\[2ex] \alpha\, x^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} \leqslant \alpha\, X^{\alpha-1} & \text{si } X < x. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, ces inégalités sont vraies aussi, de manière évidente $(0 = 0)$. Pour $\alpha < 0$, la multiplication par α inverse encore une autre fois les inégalités de l'encadrement, et on se retrouve dans la situation (3.6).

(b) La dérivée au point x est la limite du taux d'accroissement quand $X \to x$. Comme $\lim_{X\to x} X^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$ par continuité, on déduit de l'encadrement du (a) que la dérivée en x est donnée par

$$\lim_{X\to x} \frac{X^\alpha - x^\alpha}{X-x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

La dérivée en $x = 0$ s'obtient en considérant directement le rapport $x^\alpha/x = x^{\alpha-1}$ quand $x \to 0_+$, rapport qui tend bien vers 0 pour $\alpha > 1$. □

4. Logarithmes, logarithme népérien

Le théorème 2.5 montre que la fonction $x \mapsto a^x$ définit pour tout $a > 0$, $a \neq 1$, une application continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En d'autres termes, pour tout $y > 0$, l'équation $a^x = y$ possède une unique solution $x \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci définit d'après le théorème des fonctions réciproques une fonction continue bijective

$$\text{(4.1)} \qquad \log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

appelée *logarithme de base* a, qui est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a, caractérisée par l'équivalence

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{4.2}$$

Cette définition est tellement naturelle qu'il nous semblerait utile que les logarithmes de base entière – lorsqu'ils « tombent juste » – aient déjà été introduits de manière sommaire au collège à l'occasion de l'étude des puissance de 2, 3 ou 10, ou même d'une base a entière quelconque, un peu après l'étude des nombres écrits dans une base autre que 10 (on sait bien que la base 2 est le fondement de notre monde numérique, il serait indispensable qu'un élève qui a terminé sa scolarité obligatoire sache au moins ce que veut dire le mot « numérique», ne serait-ce que parce qu'il est aujourd'hui omniprésent dans les catalogues de HiFi). Dès la classe de sixième ou de cinquième, on pourrait très bien faire dessiner des frises représentant les temps géologiques en échelle logarithmique des puissances de 10 – voire expliquer ce qu'est le pH en chimie, pour des pH entiers, ce qui introduit utilement le logarithme décimal $\log_{10}$ en liaison avec l'usage de la notation scientifique 10^{-n} en sciences expérimentales. La généralisation progressive des puissances aux cas des exposants négatifs, puis au cas des racines carrées et n-ièmes permet d'étendre corrélativement les logarithmes $\log_a$ au cas des valeurs négatives, demi-entières, fractionnaires.

Au contraire, il nous semble didactiquement contestable, comme le font les programmes depuis au moins 45 ans, de commencer la théorie des logarithmes par l'introduction des logarithmes « naturels» (ce qui est en réalité un contresens historique), précisément parce que les logarithmes de base a entière sont plus intuitifs. Mais tout finit par arriver un jour, et l'étape que nous allons franchir consiste précisément en l'introduction de la fonction ln. Comme il est bien connu (et mal accepté par les programmes actuels !), la fonction ln a quelque chose à voir avec la dérivée des exponentielles [(11)].

(4.3) Théorème et définition. *La fonction* $x \mapsto a^x$ *admet une dérivée en* 0*, notée*

$$\ln(a) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}. \tag{4.3 a}$$

On a de plus pour tout réel $a > 0$ *l'encadrement*

$$1 - \frac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1. \tag{4.3 b}$$

Démonstration. Si $x \in [-1, 0\,[\, \cup\,]\, 0, 1]$, nous avons

$$p_a(-1) \leqslant p_a(x) \leqslant p_a(1) \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{a} \leqslant p_a(x) = \frac{a^x - 1}{x} \leqslant a - 1$$

puisque p_a est une fonction croissante d'après (3.4). Comme la suite $\mathbb{N}^* \ni n \mapsto p_a(1/n)$ est décroissante et minorée, le théorème (1.1) montre qu'il y a bien une limite à droite en 0

$$\ln(a) = \lim_{x \to 0_+} p_a(x), \qquad \text{et de plus} \quad 1 - \frac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1.$$

(11) Tout autant qu'avec le calcul intégral et la primitive de $x \mapsto 1/x$. On verra même ainsi a posteriori qu'on aurait pu se passer du théorème des fonctions réciproques pour démontrer l'existence des fonctions logarithmes $\log_a$, sachant que celles-ci se calculent à partir de la fonction ln qui, elle, peut être définie explicitement comme une dérivée.

Pour la limite à gauche, on écrit

$$\frac{a^{-x}-1}{-x} = \frac{a^{-x}(1-a^x)}{-x} = \frac{1}{a^x}\frac{a^x-1}{x} \qquad \text{pour } x>0,$$

et comme $\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$ d'après la continuité de la fonction $x \mapsto a^x$, on voit que la limite à gauche est égale à la limite à droite. Le théorème (4.3) est démontré. □

(4.4) Conséquence. *La fonction exponentielle de base a est partout dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a la formule*

$$(a^x)' = \ln(a)\, a^x.$$

Démonstration. On écrit

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x \ln(a). \qquad \square$$

Nous démontrons maintenant les propriétés fondamentales de la fonction ln.

(4.5) *Pour tous réels $a>0$ et $t\in\mathbb{R}$, on a $\ln(a^t) = t\ln a$.*

Démonstration. Si $t=0$, on a $\ln(a^0)=\ln(1)=0$ puisque la fonction $x\to 1^x=1$ est de dérivée nulle. Si $t\neq 0$, on écrit que par définition

$$\ln(a^t) = \lim_{h\to 0}\frac{(a^t)^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{th}-1}{h} = t\lim_{h\to 0}\frac{a^{th}-1}{th} = t\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = t\ln(a). \qquad \square$$

(4.6) *Pour tous réels $a,b>0$, on a $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.*

En effet $(ab)^x = a^x\cdot b^x$, et donc d'après la formule pour la dérivation d'un produit de fonctions, la dérivée en $x=0$ en donnée par

$$\ln(ab) = \big((ab)^x\big)'_{x=0} = (a^x)'_{x=0}\cdot b^0 + a^0\cdot(b^x)'_{x=0} = \ln(a)\cdot 1 + 1\cdot\ln(b) = \ln(a)+\ln(b). \quad \square$$

(4.7) *Pour tous réels $a,b>0$, on a $\ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)$.*

En effet (4.6) donne $\ln(a)=\ln((a/b)\cdot b)=\ln(a/b)+\ln(b)$. □

(4.8) Théorème. *La fonction $x\mapsto\ln(x)$ est strictement croissante, partout dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, et on a*

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

De plus, $\lim_{x\to 0_+}\ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

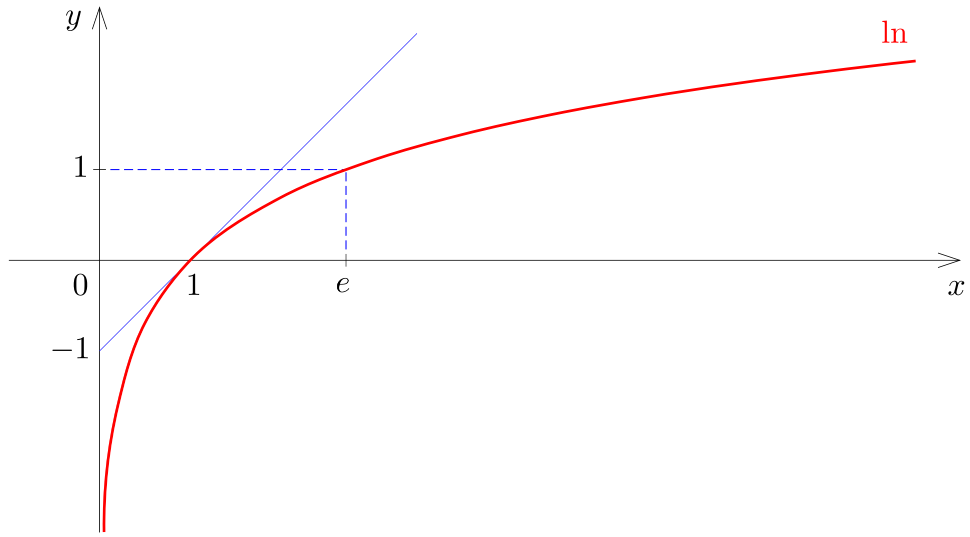


Fig. 4. Représentation graphique de la fonction ln.

Démonstration. Pour x, $X > 0$ quelconques tels que $X \neq x$, on écrit grâce à (4.7)

$$\frac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} = \frac{\ln\big(X/x\big)}{X - x}$$

Or, l'encadrement (4.3 b) avec $a = \dfrac{X}{x} > 0$ donne $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1$, soit

$$\frac{X - x}{X} = 1 - \frac{x}{X} \leqslant \ln(X) - \ln(x) \leqslant \frac{X}{x} - 1 = \frac{X - x}{x}\,,$$

par conséquent

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X} \leqslant \dfrac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} \leqslant \dfrac{1}{x} & \text{pour } X > x, \\[2ex] \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} \leqslant \dfrac{1}{X} & \text{pour } X < x. \end{cases}$$

Ceci entraîne bien

$$\big(\ln(x)\big)' = \lim_{X \to x} \frac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} = \frac{1}{x}.$$

La propriété de croissance stricte résulte des inégalités précédentes, qui montrent que $\ln(X) - \ln(x) \geqslant \frac{X-x}{X} > 0$ si $X > x > 0$ [on peut aussi, si on le souhaite, utiliser le fait que la dérivée est strictement positive]. Comme $\ln(2^n) = n\ln(2)$ avec $\ln(2) > 0$, on en déduit que $\ln(x) \geqslant n\ln(2)$ pour $x \geqslant 2^n$, et $\ln(x) \leqslant -n\ln(2)$ pour $x \leqslant 2^{-n}$. On a donc bien les limites annoncées quand $x \to 0_+$ et $x \to +\infty$. □

(4.9) Théorème. *Il existe un (unique) nombre réel noté e tel que* $\ln(e) = 1$. *La fonction exponentielle de base e et la fonction* ln

$$x \mapsto e^x, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \qquad x \mapsto \ln(x), \qquad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit on a

$$\ln(e^x) = x \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \textit{ et } \quad e^{\ln(x)} = x \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,$$

et $\ln = \log_e$ *s'identifie au logarithme de base* e*. La fonction* $\ln$ *est appelée fonction logarithme naturel (ou parfois encore népérien, en hommage à John Napier, aussi dénommé Neper en Latin*[12]*). De plus la dérivée de la fonction exponentielle* $x \mapsto e^x$ *est donnée par*

$$(e^x)' = e^x.$$

La fonction exponentielle de base e *est souvent appelée fonction exponentielle (tout court), et notée* $\exp$*, de sorte que* $\exp(x) = e^x$ *et* $\exp' = \exp$.

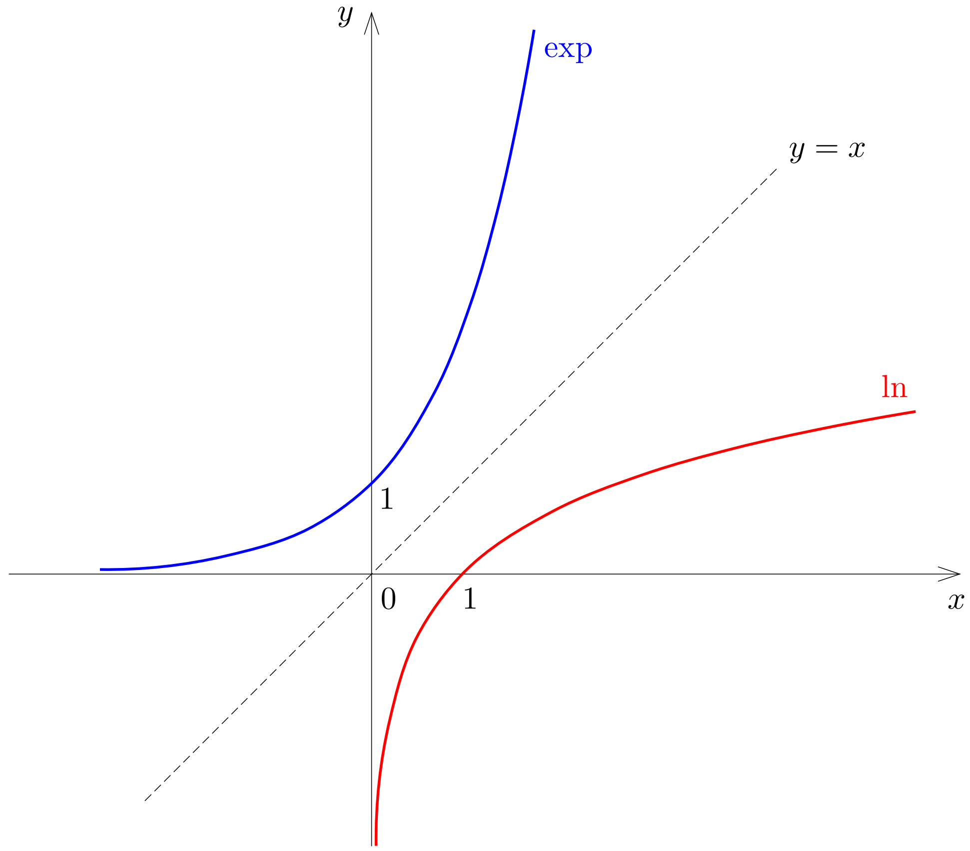


Fig. 5. Représentation graphique de ln et de exp.

Démonstration. L'unicité du nombre e résulte du fait que la fonction ln est strictement croissante. Pour prouver que e existe, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, ou raisonner directement comme suit. On fixe une base $a > 1$ ($a = 2$ conviendrait) et on cherche e sous la forme $e = a^t$. Alors $\ln(a^t) = t\ln(a)$ d'après (4.5), donc il suffit de prendre $t = 1/(\ln(a)) > 0$. La solution cherchée est $e = a^t = a^{1/\ln(a)}$.

Maintenant, (4.5) donne bien $\ln(e^x) = x\ln(e) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, on trouve $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x)$, mais comme ln est strictement croissante ceci ne peut avoir lieu que si $e^{\ln(x)} = x$. La formule donnant la dérivée de e^x est un cas particulier de (4.4). $\square$

(12) En réalité, les premières tables de logarithmes établies par Napier et par le mathématicien Henry Briggs dans les années qui suivirent étaient des logarithmes décimaux. C'est seulement avec les travaux de Huyghens en 1661 et plus tardivement avec ceux de Leibnitz sur les fonctions, en 1697, que le logarithme naturel fut définitivement dégagé dans sa forme moderne.

(4.10) Théorème. *Pour toute base $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction exponentielle de base a*

$$x \mapsto a^x, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

admet une fonction réciproque donnée par

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \qquad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \tag{4.10 a}$$

appelée, rappelons-le, logarithme de base a. En particulier on a $\ln = \log_e$. La dérivée de $\log_a$ est

$$\big(\log_a(x)\big)' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x} \tag{4.10 b}$$

et pour tous réels $x, y > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, le logarithme de base a vérifie les propriétés fondamentales

$$\log_a(x^t) = t\log_a(x), \tag{4.10 c}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{4.10 d}$$

analogues aux propriétés du logarithme népérien.

Démonstration. Si on pose $y = a^x$, on a $\ln(y) = x\ln(a)$ et donc $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. Il en résulte aussitôt que $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ est bien la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$. Toutes les autres propriétés se déduisent immédiatement de celles du logarithme népérien. □

Nous terminons par l'expression de la fonction puissance en termes de l'exponentielle et du logarithme :

$$x^a = (e^{\ln(x)})^a = e^{a\ln(x)} = \exp\big(a\ln(x)\big). \tag{4.11}$$

Ceci permet (au moins pour se rassurer !) de retrouver la dérivée et le sens de variation de $x \mapsto x^a$ à l'aide de la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$(x^a)' = \exp'\big(a\ln(x)\big)\cdot(a\ln(x))' = \exp\big(a\ln(x)\big)\cdot a\,\frac{1}{x} = x^a\cdot a\,\frac{1}{x} = a\,x^{a-1}. \tag{4.12}$$

(4.13) Conclusion. Il est possible de définir rigoureusement puissances, exponentielles et logarithmes dans une approche où toutes les propriétés essentielles se démontrent en respectant l'intuition numérique (on part des puissances, qui sont les plus intuitives, on passe aux exponentielles, qui généralisent les puissances, et enfin on arrive aux logarithmes). Notons de plus qu'aucun théorème avancé d'analyse ne nous a été nécessaire – le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème sur l'existence des fonctions réciproques pourraient même être évités. Mais bien entendu nous recommandons avec force que ces théorèmes soient tout de même énoncés au niveau du lycée, et encore mieux complètement démontrés : le procédé de dichotomie et le théorème des suites adjacentes peuvent rendre la chose « numériquement évidente », tout en donnant un procédé concret de résolution approchée d'une équation $f(x) = y$ (on pourra par exemple faire expérimenter les élèves sur la résolution d'équations polynomiales $f(x) = 0$ de degré 3 – c'est là un bon usage de la calculette !).

5. Calcul numérique du nombre e et de l'exponentielle e^x.

L'objectif est d'exprimer l'exponentielle sous forme de la limite d'une suite de polynômes (ce que l'on appelle une « série entière»). Là encore, on peut y aboutir au moyen de considérations très simples sur la formule du binôme et les limites de suites croissantes majorées. Le point de départ est la formule importante suivante.

(5.1) Formule. $$e^x = \lim_{n\to+\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.$$

Pour la vérifier, on observe que

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big) = \exp\Big(x\,\frac{\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)}{\frac{x}{n}}\Big).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)}{\frac{x}{n}} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\big(1+h\big)}{h} = \ln'(1) = 1,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$. Comme la fonction exp est continue, on en déduit bien

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \exp(x) = e^x. \qquad \square$$

On utilise maintenant la formule du binôme pour développer

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + \ldots + C_n^p h^p + \ldots + h^n\\ &= 1 + \frac{n}{1!}h + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}h^p + \ldots + h^n.\end{aligned}$$

En substituant $\frac{x}{n}$ à h il vient

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}\frac{x^p}{n^p} + \ldots + \frac{x^n}{n^n}\\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})}{p!}x^p + \ldots + \frac{x^n}{n^n}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous allons facilement en déduire la formule suivante.

(5.2) Théorème. *Pour tout nombre réel x, on a*

$$e^x = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!}.$$

En particulier

$$e = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!}.$$

Démonstration. Supposons d'abord $x \geqslant 0$. Si nous tronquons la somme du binôme à un ordre p fixé, nous trouvons

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}x^2+\ldots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})}{p!}x^p,$$

et le coefficient $1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ il vient donc

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

En faisant tendre maintenant p vers $+\infty$, on voit que la suite du membre de droite est convergente puisqu'elle est croissante et majorée par e^x (le fait que $x \geqslant 0$ nous sert de nouveau), donc

$$e^x \geqslant \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

Cherchons à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, on observe tout simplement que $1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n}) \leqslant 1$, donc

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

et par conséquent

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

Ceci conclut la preuve du théorème (5.2) dans le cas où $x \geqslant 0$ [et on pourrait bien sûr s'arrêter à ce point pour simplifier l'exposé...]. Pour traiter le cas d'un exposant négatif, on utilise une astuce : on considère la fonction « cosinus hyperbolique »

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right).$$

Dans ces conditions, il ne reste que les puissances paires de x dans le développement du binôme, avec les mêmes coefficients positifs que précédemment. Pour $x \geqslant 0$, on obtient donc de manière analogue

$$\cosh(x) = \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2p-2}}{(2p-2)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}. \tag{5.3}$$

Comme $e^{-x} = 2\cosh(x)-e^x$ avec

$$e^x = \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}\quad\left[+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right],$$

on multiplie (5.3) par 2 et il vient par soustraction

$$e^{-x} = \lim_{p\to+\infty} 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}\quad\left[-\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right].$$

C'est bien la formule cherchée dans le cas d'un exposant négatif. On notera qu'on obtient aussi du même coup le développement de la fonction « sinus hyperbolique » $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, qui ne laisse subsister que les monômes de degrés impairs

$$\text{(5.4)} \qquad \sinh(x) = \lim_{p\to+\infty} \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}. \qquad \square$$

(5.5) Application numérique. Pour évaluer numériquement e^x, on choisit un entier p assez grand, et on utilise la factorisation évidente

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1}\Big(1 + \frac{x}{2}\Big(1 + \frac{x}{3}\Big(\ldots\Big(1 + \frac{x}{p-1}\Big(1 + \frac{x}{p}\Big)\Big)\ldots\Big)\Big)\Big).$$

En prenant $x = 1$ et p assez grand ($p = 20$ suffit), on trouve ainsi la valeur approchée

$$e = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!} \approx 2,71828182845904.$$

(5.6) Autres conséquences. Ce qui précède montre que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ on a $e^x \geqslant x^p/p!$ dès que $x > 0$. En remplaçant p par $p+1$ on trouve $e^x \geqslant x^{p+1}/(p+1)!$ et donc $e^x/x^p \geqslant \frac{x}{(p+1)!}$. Par conséquent

$$\text{(5.6 a)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty.$$

En posant $x = -t$ avec $t \to -\infty$, il vient

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-t}}{(-t)^p} = \lim_{t\to-\infty} \frac{(-1)^p}{t^p e^t} = +\infty,$$

donc (quitte à revenir à la variable x)

$$\text{(5.6 b)} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^p e^x = 0.$$

On exprime les propriétés (5.6 a) et (5.6 b) en disant que dans une forme indéterminée *la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances.*

De manière analogue, on a pour $x \geqslant 1$ l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1 \leqslant x$, et en remplaçant x par $x^{a/2}$ on obtient $\frac{a}{2}\ln(x) \leqslant x^{a/2}$, donc $\ln(x)/x^a \leqslant \frac{2}{a}x^{-a/2}$ pour tout $a > 0$. Ceci implique

$$\text{(5.6 c)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0.$$

En faisant le changement de variable $x = 1/t$ avec $t \to 0_+$ on trouve également

$$\text{(5.6 d)} \qquad \lim_{x\to 0_+} x^a \ln(x) = 0.$$

On exprime les propriétés (5.6 c) et (5.6 d) en disant que dans une forme indéterminée *les fonctions puissances l'emportent sur la fonction logarithme.*

6. Exponentielles et équations différentielles linéaires d'ordre 1

Une fois que les exponentielles et les logarithmes sont maîtrisés – et nous pensons que le bon niveau pour cela serait celui de la classe de première – l'étude des fonctions peut être enrichie graduellement. En terminale, la maturité des élèves et des techniques qui leur sont disponibles devient suffisante pour aborder de manière plus systématique les fondements du calcul différentiel et des équations différentielles. Il serait très important de bien introduire les notations différentielles dx, df, df/dx qui sont nécessaires aux physiciens. Ceci doit se faire en liaison avec le calcul intégral. Nous aborderons ici uniquement les aspects les plus élémentaires liés aux équations différentielles du premier ordre, tels qu'ils peuvent être traités en classe terminale.

La formule de dérivation d'une fonction composée montre que pour tout nombre réel k, la fonction $y(x) = e^{kx}$ vérifie $y'(x) = k\,e^{kx}$, c'est donc une solution de « l'équation différentielle »

$$y' = ky. \tag{6.1}$$

Réciproquement :

(6.2) Théorème. *Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' = ky$ admet sur $\mathbb{R}$ les solutions $y(x) = \lambda\,e^{kx}$ où λ est une constante réelle, et il n'y en a pas d'autres.*

Démonstration. Posons $f(x) = y(x)\,e^{-kx}$. On trouve

$$f'(x) = y'(x)\,e^{-kx} + y(x)\cdot\big(-k\,e^{-kx}\big) = \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = 0.$$

Ceci implique que la fonction f est une constante λ, ce qui entraîne $y(x) = \lambda\,e^{kx}$. Ces fonctions sont bien des solutions de l'équation différentielle. □

Cherchons plus généralement les solutions de l'équation différentielle « non homogène »

$$y'(x) = k\,y(x) + u(x) \tag{6.3}$$

où $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On cherche dans ce cas les fonctions dérivables $y : I \to \mathbb{R}$ qui satisfont (6.3). En posant comme précédemment $f(x) = y(x)\,e^{-kx}$, on voit que l'équation (6.3) est équivalente à

$$f'(x) = \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = u(x)\,e^{-kx}.$$

la solution générale est donnée sous la forme $f(x) = \lambda + f_0(x)$ où f_0 est une primitive de $x \mapsto u(x)\,e^{-kx}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire. Ceci donne

$$y(x) = (\lambda + f_0(x))e^{kx}. \tag{6.4}$$

Cette solution peut encore se réécrire sous la forme

$$y(x) = \lambda\,e^{kx} + y_0(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

où $y_0(x) = f_0(x)\,e^{kx}$ est la solution particulière de l'équation correspondant à la constante $\lambda = 0$. Dans la pratique, si on connaît (ou si on aperçoit) une solution particulière

y_0 de l'équation (6.3), les autres solutions sont obtenues en ajoutant $\lambda\, e^{kx}$ à $y_0(x)$, ce qui évite d'avoir à faire un calcul de primitives.

Les fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ vérifient la propriété fonctionnelle fondamentale $f(x+y) = f(x)f(y)$. De manière générale, il est intéressant de savoir quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui « transforment additions en multiplications», c'est-à-dire quelles sont celles qui satisfont la propriété

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Remarquons que s'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ entraîne que la fonction f est la fonction nulle. Nous supposerons désormais f non nulle ; d'après ce qui précède $f(x)$ ne peut alors s'annuler. Dans ce cas, la propriété $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f(x/2)^2$ entraîne $f(x) > 0$, et on peut poser $g = \ln\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On voit que

$$g(x+y) = \ln\big(f(x+y)\big) = \ln\big(f(x)f(y)\big) = \ln\big(f(x)\big) + \ln\big(f(y)\big) = g(x) + g(y). \tag{6.7}$$

On dit qu'une telle fonction g est une fonction additive. Les fonctions g de la forme $g(x) = kx$ satisfont de façon évidente la propriété d'additivité, et on peut se demander s'il en existe d'autres. Malheureusement, il se trouve qu'il existe des fonctions discontinues « extrêmement tordues » – presque impossible à décrire – qui sont additives. Néanmoins la réponse est simple si on suppose que les fonctions en question sont *continues*.

(6.8) Théorème. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction additive, c'est-à-dire telle que*

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad \textit{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si g est continue, alors

$$g(x) = kx \qquad \textit{avec } k = g(1) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Comme $g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0)$ on voit déjà que $g(0) = 0$. De plus $g(0) = 0 = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x)$, donc $g(-x) = -g(x)$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel, la propriété d'additivité implique

$$g(nx) = g(x + x + \ldots + x) = g(x) + g(x) + \ldots + g(x) = n\, g(x).$$

En particulier $g(1) = g(n\frac{1}{n}) = n\, g(\frac{1}{n})$ donc $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}g(1)$. Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel positif ($p, q \in \mathbb{N}^*$), il vient

$$g(x) = g\Big(p\frac{1}{q}\Big) = p\, g\Big(\frac{1}{q}\Big) = p\frac{1}{q}g(1) = x\, g(1).$$

Cette propriété s'étend au rationnels négatifs du fait que $g(-x) = -g(x)$. En posant $k = g(1)$, on en déduit bien que $g(x) = kx$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Comme g est supposée continue, cette propriété s'étend par passage à la limite à tous les réels x, en considérant par exemple la suite (x_n) des approximations décimales à 10^{-n} près de x. □

Si nous revenons aux fonctions f continues non nulles qui vérifient (6.6), on voit que $g(x) = \ln f(x) = kx$, donc $f(x) = e^{kx}$. Nous pouvons énoncer :

(6.9) Théorème. *Les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues telles que*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \textit{pour tous } x, y \in \mathbb{R},$$

sont d'une part la fonction nulle $f = 0$ *et d'autre part les fonctions exponentielles* $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$, *ou encore* $f(x) = a^x$, $a > 0$.

Si on impose la condition plus forte que f soit dérivable et que l'on dérive la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y, on trouve

$$f'(x+y) = f(x)f'(y).$$

Pour $y = 0$, on trouve en particulier $f'(x) = f(x)f'(0) = k\,f(x)$ avec $k = f'(0)$. On conclut alors que $f(x) = \lambda\,e^{kx}$ d'après le théorème (6.2). Comme on doit avoir de plus $f(0) = f(0)f(0)$, il vient $\lambda = \lambda^2$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Ceci donne une autre démonstration du théorème (6.9), sous l'hypothèse plus restrictive que f soit dérivable.

7. Fonctions trigonométriques

Commençons par rappeler quelques considérations de base sur les fonctions trigonométriques. Celles-ci devraient sans aucun doute possible trouver leur place dans les classes de seconde et de première. On appelle *cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre l'origine dans un plan orthonormé Oxy, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2 + y^2 = 1$. Soit U le point de coordonnées $(1,0)$ et V le point de coordonnées $(0,1)$.

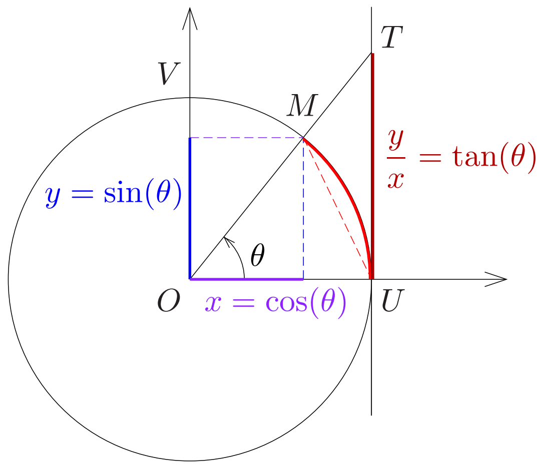


Fig. 6. Cercle trigonométrique et fonctions cos, sin, tan.

À un point $M \in \mathcal{C}$ et à l'angle de vecteurs orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}})$, on associe par définition

$$\text{(7.1)} \qquad \cos(\theta) = x, \qquad \sin(\theta) = y, \qquad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x},$$

qui sont représentés géométriquement sur la Figure 6. En effet, puisque $\overline{OU} = 1$, le théorème de Thalès donne

$$\overline{UT} = \frac{\overline{UT}}{\overline{OU}} = \frac{y}{x} = \tan(\theta).$$

Par définition, le mesure en radians de l'angle θ est la longueur de l'arc $\widehat{UM}$, affecté d'un signe moins si M est d'ordonnée négative, et compté à un multiple de 2π près. Rappelons que *la longueur d'un arc est par définition la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc.* D'après ce qui précède nous avons

$$(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = x^2 + y^2 = 1, \tag{7.2}$$
$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{OV}. \tag{7.3}$$

Nous aurons besoin de la formule très importante qui suit.

(7.4) Formule d'addition des angles. *Pour tout couple d'angles α, β, on a*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

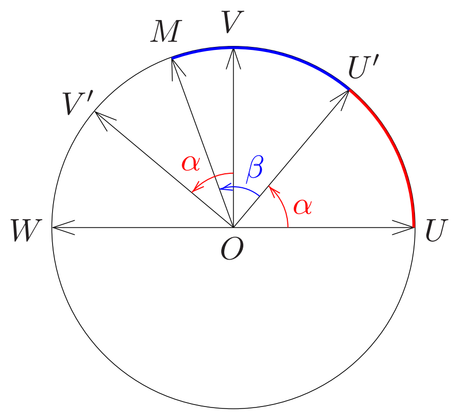


Fig. 7. Formule d'addition des angles.

Démonstration. Quitte à changer de repère, la formule (7.3) nous donne en effet

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\beta)\,\overrightarrow{OU'} + \sin(\beta)\,\overrightarrow{OV'},$$

et de manière analogue

$$\overrightarrow{OU'} = \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OV},$$
$$\overrightarrow{OV'} = \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OW} = -\sin(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV}.$$

En substituant $\overrightarrow{OU'}$ et $\overrightarrow{OV'}$ dans la formule donnant $\overrightarrow{OM}$, il vient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(\beta)\,\big(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OV}\big) + \sin(\beta)\,\big(-\sin(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV}\big)\\ &= \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)\,\overrightarrow{OU} + \big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big)\,\overrightarrow{OV}.\end{aligned}$$

Ceci donne les formules souhaitées puisque $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ sont précisément les composantes de $\overrightarrow{OM}$ suivant $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$. $\square$

On a d'autre part les encadrements très utiles suivants, qui vont conduire à la dérivation des fonctions trigonométriques ; pour cela, il convient bien sûr d'attendre que la notion de dérivée soit en place.

(7.5) Encadrements fondamentaux. *Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du cercle trigonométrique situés dans le quadrant supérieur droit, tels que $0 < x \leqslant x' \leqslant 1$ et $0 \leqslant y' \leqslant y < 1$, et soient $0 \leqslant \theta' \leqslant \theta$ les angles qui leur sont associés, mesurés en radians. Alors, si P est l'intersection de la droite (OM) avec la parallèle à Oy passant par M', et T, T' les intersections de (OM), (OM') respectivement, avec la parallèle à Oy passant par U, on a*

(a) $y - y' \leqslant M'M \leqslant M'P \leqslant T'T = \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'}$.

(b) $\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant \theta - \theta' \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta')$.

(c) *En particulier, si on prend $M' = U$, $\theta' = 0$ dans* (b), *il vient*

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta) \qquad \textit{pour } \theta \in [0, \pi/2[.$$

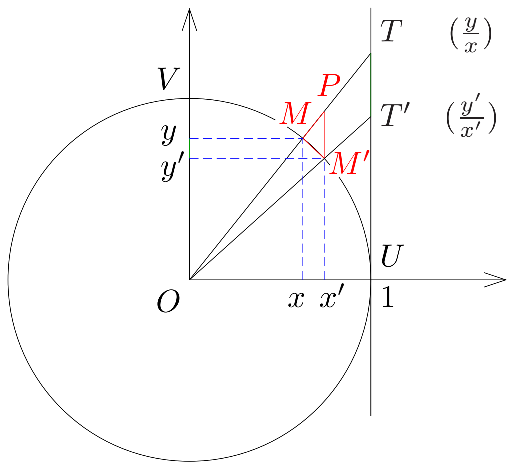


Fig. 8. Encadrement d'une corde $M'M$ du cercle trigonométrique.

Démonstration. (a) La minoration $M'M \geqslant y - y'$ résulte du fait que dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit, en vertu du théorème de Pythagore. Plus généralement, dans un triangle obtus, le côté opposé à l'angle obtus est plus grand que les deux autres côtés, et la majoration $M'M \leqslant M'P$ résulte de cette propriété appliquée au triangle $(M'MP)$ qui a son angle $\hat{M}$ obtus. Il est d'autre part évident que $T'T$ est plus grand que $M'P$ (dans le rapport $1/x' \geqslant 1$, d'après le théorème de Thalès) (13).

(13) Pour les esprits préférant l'algèbre, donnons une autre preuve plus algébrique. Comme la pente de la droite (OM) est $\frac{y}{x}$, les coordonnées de P sont $(x', \frac{y}{x}x')$, et on a

$$M'P = \frac{y}{x}x' - y', \qquad T'T = \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'} = \frac{1}{x'}M'P \geqslant M'P.$$

(b) L'encadrement du (a) peut se retraduire sous la forme

$$\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant M'M \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta').$$

Or la longueur d'arc $\widehat{M'M}$ est par définition la limite, pour des subdivisions assez fines, des longueurs $M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n$ de lignes polygonales $(M_0M_1\ldots M_n)$ telles que $M_0 = M'$ et $M_n = M$. Le résultat précédent donne

$$\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i) \leqslant M_iM_{i+1} \leqslant \tan(\theta_{i+1}) - \tan(\theta_i)$$

et en sommant de $i = 0$ à $i = n-1$ on trouve

$$\sin(\theta_n) - \sin(\theta_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} \leqslant \tan(\theta_n) - \tan(\theta_0).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, et tenant compte du fait que $\theta_0 = \theta'$, $\theta_n = \theta$ il vient

$$\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant \widehat{M'M} = \theta - \theta' \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta').$$

La propriété (b) est établie, et (c) est le cas particulier $\theta' = 0$.[14] □

Nous établissons maintenant les formules donnant les dérivées des fonctions trigonométriques.

(7.6) Lemme. *On a*

$$\sin'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \cos'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Grâce au théorème de Pythagore, nous obtenons directement

$$M'M = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \geqslant \sqrt{(y-y')^2} = y - y'.$$

D'autre part, par élévation au carré de l'expression de $M'P = \frac{y}{x}(x'-x) + (y-y')$, il vient

$$(M'P)^2 \geqslant 2\tfrac{y}{x}(x'-x)(y-y') + (y-y')^2$$

en négligeant le premier carré $(\frac{y}{x}(x'-x))^2$. Les égalités $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$ entraînent à leur tour

$$2x(x'-x) \leqslant (x+x')(x'-x) = x'^2 - x^2 = y^2 - y'^2 = (y-y')(y+y') \leqslant 2y(y-y'),$$

donc en substituant $2y(y-y')$ par $2x(x'-x)$ dans la minoration de $(M'P)^2$ on trouve

$$(M'P)^2 \geqslant 2(x'-x)^2 + (y-y')^2 \geqslant (x'-x)^2 + (y-y')^2 = (M'M)^2.$$

(14) Les inégalités $\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \tan\theta$ se lisent aussi sur la Fig. 6 au moyen d'un encadrement direct des aires

$$\text{aire triangle } OMU \leqslant \text{aire secteur angulaire } OMU \leqslant \text{aire triangle } OTU.$$

L'aire du secteur angulaire est proportionnelle à θ et vaut π pour $\theta = 2\pi$, elle vaut donc $\theta/2$. Les deux triangles ont une base de longueur 1, leur aire est égale à leur demi-hauteur, ce qui donne l'encadrement

$$\frac{1}{2}\sin\theta \leqslant \frac{1}{2}\theta \leqslant \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Nous avons cependant préféré donné une démonstration qui évite tout recours à la notion « élaborée » d'aire d'un domaine plan – pour en revenir à la définition première de la longueur d'arc – même si cette démonstration est légèrement plus subtile. Dans une première approche devant les élèves, on pourra évidemment opter plutôt pour la justification la plus simple d'un point de vue intuitif.

Démonstration. Notons que pour $h \in [0, \pi/2]$ on a $0 \leqslant \sin(h) \leqslant h$, d'après (7.5), et la relation d'addition $\cos(h) = \cos(h/2)\cos(h/2) - \sin(h/2)\sin(h/2)$ donne aussi

$$\cos(h) = 1 - 2\sin^2(h/2) \geqslant 1 - 2(h/2)^2 = 1 - h^2/2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{h}{2} \leqslant \frac{\cos(h)-1}{h} \leqslant 0,$$

ce qui implique $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$. Les inégalités ci-dessus entraînent a fortiori $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$. Maintenant l'encadrement (7.5 c) donne

$$\frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \leqslant \frac{\tan(h)}{h} = \frac{1}{\cos(h)}\frac{\sin(h)}{h} \quad \Rightarrow \quad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Ceci montre bien que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. □

(7.7) Théorème. *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *tout entier et on a*

$$\cos(x) = -\sin(x), \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. Les formules d'addition de l'angle donnent aussitôt

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h},$$
$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\,\frac{\sin(h)}{h}.$$

Ceci entraîne bien d'après le lemme 7.6 que le taux d'accroissement de cos tend vers $-\sin(x)$ et que celui de sin tend vers $\cos(x)$. □

8. Fonction exponentielle complexe

Nous pouvons maintenant expliquer le lien très remarquable qui existe entre la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques. Ce lien a été découvert par Euler en 1748, bien que l'interprétation géométrique sous-jacente n'ait été vraiment comprise qu'environ cinquante plus tard avec la définition géométrique des nombres complexes par Wessel, Argand et Gauss.[15]

Si on introduit le nombre complexe de module 1 et d'argument x défini par

$$f(x) = \cos(x) + i\sin(x),$$

ce qui définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à valeurs dans le cercle trigonométrique, alors les formules d'addition des angles (7.4) et de dérivation (7.7) se traduisent par les égalités

(8.1) $$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta),$$

(8.2) $$f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = i\,f(x).$$

[15] Les exposés modernes « court-circuitent » souvent l'introduction de l'exponentielle complexe en utilisant d'emblée la série entière $\sum z^n/n!$ de la variable complexe z, mais cette approche nous paraît prématurée pour l'enseignement secondaire. L'approche historique correspond certainement mieux au cheminement intellectuel fondamental de l'esprit, et nous l'estimons donc préférable sur le plan pédagogique.

En particulier f est la solution de l'équation différentielle $f' = if$. Comme de plus $f(0) = 1$, ceci suggère fortement de poser *par définition* $f(x) = e^{ix}$, c'est-à-dire (*formule d'Euler*)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{8.3}$$

La formule d'addition des angles (8.1) se retraduit alors sous la forme naturelle

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} \tag{8.4}$$

qui peut servir à mémoriser les formules donnant $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$. Comme $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$, on trouve les formules également dues à Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{8.5}$$

et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'égalité $(e^{ix})^n = e^{inx}$ se traduit en la *formule de Moivre*

$$\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx). \tag{8.6}$$

Plus généralement, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe quelconque, on posera par définition

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big). \tag{8.7}$$

Le nombre e^z est donc par définition le nombre complexe de module $|e^z| = e^x$ et d'argument y :

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}, \qquad \arg(e^z) = \mathrm{Im}\,z \pmod{2\pi}. \tag{8.8}$$

Il est immédiat de vérifier que l'exponentielle complexe satisfait la même propriété fonctionnelle fondamentale que l'exponentielle réelle, à savoir

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad \text{pour tous } z,\ z' \in \mathbb{C}, \tag{8.9}$$

du fait que l'on a à la fois $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$ et $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$.

Enfin, pour terminer, on observe que pour $k = a + ib \in \mathbb{C}$, la fonction

$$f(x) = e^{kx} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big)$$

satisfait la même équation différentielle $f' = kf$ que dans le cas réel. On a effet

$$f'(x) = (e^{ax})'e^{ibx} + e^{ax}(e^{ibx})' = a\,e^{ax}e^{ibx} + e^{ax}\big(ib\,e^{ibx}\big) = (a+ib)e^{ax}e^{ibx} = k\,e^{kx}.$$

On montre alors que les solutions complexes de l'équation différentielle complexe

$$f' = kf \tag{8.10}$$

sont exactement les fonctions $f(x) = \lambda\, e^{kx}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. La preuve est identique à celle du cas réel.

Une fois que l'on dispose du calcul intégral et de l'intégration des fonctions complexes, on peut constater par des intégrations par parties et par récurrence sur p que l'on a

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!} + z^{p+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^{tz} dt. \tag{8.11}$$

Puisque $|e^{tz}| = e^{t\mathrm{Re}(z)} \leqslant e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)}$ pour $t \in [0,1]$, il vient

$$\left| z^{p+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^{tz} dt \right| \leqslant |z|^{p+1}\, e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} dt = \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)}.$$

Comme la limite $e^{|z|} = \lim_{p\to+\infty} S_p$ avec $S_p = 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots + \frac{|z|^p}{p!}$ existe, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} = \lim_{p\to+\infty} S_{p+1} - S_p = 0,$$

et on en conclut que la formule déjà vue à la section 5 pour les exposants réels

$$e^z = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!} \tag{8.12}$$

est encore vraie pour tout nombre complexe z.

9. Équations différentielles linéaires du second ordre

On cherche ici à résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre, à savoir les équations de la forme

$$af'' + bf' + cf = 0. \tag{9.1}$$

On supposera, pour une généralité maximale, que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ est une fonction complexe, et que a, b, c sont des constantes complexes (avec $a \neq 0$, sinon l'équation n'est pas du second ordre). La linéarité de l'équation se traduit par le fait évident suivant :

(9.2) Propriété. *Si f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation* (9.1)*, alors toute combinaison linéaire $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ à coefficients constants λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ est encore solution.*

Cherchons les solutions qui sont des exponentielles $f(x) = e^{kx}$. On a $f'(x) = k\, e^{kx}$ et $f''(x) = k^2\, e^{kx}$, donc

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = (ak^2 + bk + c)e^{kx}. \tag{9.3}$$

Par conséquent $f(x) = e^{kx}$ est solution de l'équation (9.1) si et seulement si k est solution de l'équation du second degré

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{9.4}$$

appelée *équation caractéristique de l'équation différentielle* (on pourrait de même considérer des équations différentielles d'ordre 3 et plus, qui induirait une équation caractéristique polynomiale du même degré). Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est non nul, on a deux racines complexes k_1, k_2, donc deux solutions complexes $f_1(x) = e^{k_1 x}$, $f_2(x) = e^{k_2 x}$. Ceci montre que toute combinaison linéaire

$$f(x) = \lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \tag{9.5}$$

est solution de l'équation (9.1). Dans le cas où $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, le polynôme caractéristique admet une racine double $k = -b/2a$. Dans ce cas nous affirmons que les fonctions $f_1(x) = e^{kx}$ et $f_2(x) = x\,e^{kx}$ sont toutes deux solutions de l'équation différentielle. En effet, c'est vrai pour f_1 et :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= e^{kx} + kx\,e^{kx} = (kx+1)e^{kx}, \\ f_2''(x) &= k\,e^{kx} + k(kx+1)e^{kx} = (k^2x + 2k)e^{kx}, \\ af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x) &= \big((ak^2 + bk + c)x + (2ak + b)\big)e^{kx}. \end{aligned}$$

On observe qu'on a alors à la fois $ak^2 + bk + c = 0$ et $2ak + b = 0$. Dans le cas $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, toute combinaison linéaire

$$f(x) = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 x e^{kx} = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{kx}, \qquad \lambda_1, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9.6}$$

est donc solution de l'équation différentielle.

Réciproquement, on va voir qu'il n'y a pas d'autres solutions que les combinaisons linéaires déjà trouvées, ce qui fait l'objet du résultat ci-dessous. La preuve est assez subtile et nous apparaît comme se situant à la limite supérieure de ce qu'on peut décemment attendre de l'enseignement secondaire général (je pense cependant que le raisonnement sous-jacent aurait été considéré comme accessible aux terminales C des années 1971-1985, par exemple sous forme d'un problème à résoudre – même si son contenu excède peut-être très légèrement le niveau du cours de l'époque.) À ce point, il n'y aurait toutefois pas d'inconvénient majeur à admettre le résultat, la démonstration pouvant fort bien attendre une « deuxième couche » à appliquer en première année d'université, éventuellement dans un contexte un peu plus général.

(9.7) Théorème. *Les solutions d'une équation différentielle du second ordre*

$$af'' + bf' + cf = 0$$

à coefficients complexes sont données par les racines simples k_1, k_2 ou la racine double k de l'équation caractéristique $ak^2 + bk + c = 0$, de la manière suivante :

(a) *si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, ce sont les combinaisons linéaires*

$$f(x) = \lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\ ;$$

(b) *si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ce sont les combinaisons linéaires*

$$f(x) = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 x e^{kx} = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{kx}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une écriture astucieuse. Si f_1 et f_2 sont les solutions déjà trouvées, on cherche à écrire toute fonction f dérivable sous la forme d'une combinaison linéaire $f(x) = \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x)$ avec des coefficients $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ tels que

$$\begin{cases} f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \\ f' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'. \end{cases} \tag{9.8}$$

En effet, en multipliant la première ligne par f_2', la deuxième par $-f_2$ et en ajoutant, on trouve

$$f f_2' - f' f_2 = \lambda_1\big(f_1 f_2' - f_1' f_2\big).$$

De même, en multipliant la première ligne par $-f_1'$, la deuxième par f_1 et en ajoutant, on trouve

$$-f f_1' + f' f_1 = \lambda_2\big(f_1 f_2' - f_1' f_2\big).$$

Or un calcul donne

$$\begin{aligned} &\text{si } f_1(x) = e^{k_1 x} \text{ et } f_2(x) = e^{k_2 x}, && f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x}, \\ &\text{si } f_1(x) = e^{kx} \text{ et } f_2(x) = x\,e^{kx}, && f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = e^{2kx}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a toujours $f_1 f_2' - f_1' f_2 \neq 0$. Pour que (9.8) soit réalisé il suffit donc de prendre

$$\lambda_1 = \frac{f f_2' - f' f_2}{f_1 f_2' - f_1' f_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-f f_1' + f' f_1}{f_1 f_2' - f_1' f_2}.$$

Maintenant, en dérivant la première ligne de (9.8), il vient

$$f' = \lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 + \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'$$

et la deuxième ligne est donc équivalente à ce que $\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0$. On calcule enfin f'' à partir de la deuxième ligne de (9.8), ce qui donne

$$f'' = \lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' + \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2''. \tag{9.9}$$

En définitive, d'après (9.8) et (9.9)

$$\begin{aligned} af'' + bf' + cf &= a(\lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' + \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2'') + b(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2') + c(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \\ &= a(\lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2') + \lambda_1(af_1'' + bf_1' + cf_1) + \lambda_2(af_2'' + bf_2' + cf_2) \\ &= a(\lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2') \end{aligned}$$

puisque f_1 et f_2 sont solutions. On voit que la fonction f est solution si et seulement si $\lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = 0$, mais comme on a aussi $\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0$, on constate (en faisant des combinaisons linéaires comme ci-dessus) que c'est le cas si et seulement si $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$. Ceci montre que λ_1 et λ_2 sont des constantes et que f est nécessairement combinaison linéaire de f_1, f_2 à coefficients constants. □

Un cas particulier intéressant est celui de l'équation différentielle

$$f'' + \omega^2 f = 0 \tag{9.10}$$

où ω est un nombre réel positif. L'équation caractéristique est $k^2+\omega^2=0$, ses solutions sont $k_1=i\omega$ et $k_2=-i\omega$. Les solutions de(9.10) sont donc de la forme

$$f(x)=\lambda_1 e^{i\omega x}+\lambda_2 e^{-i\omega x}. \tag{9.11}$$

Grâce aux formules d'Euler, on peut aussi les écrire de manière équivalente en termes des fonctions cos et sin :

$$f(x)=\lambda\cos(\omega x)+\mu\,\sin(\omega x). \tag{9.12}$$

Sous cette dernière écriture, les solutions réelles sont obtenues pour des coefficients λ, μ réels. Dans ce cas, si on pose $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ (« amplitude des oscillations »), on peut trouver un angle φ (appelé « phase ») tel que $\cos(\varphi)=\lambda/\rho$ et $\sin(\varphi)=-\mu/\rho$, ce qui donne l'expression équivalente

$$f(x)=\rho\cos(\omega x+\varphi) \tag{9.12$'$}$$

avec des constantes ρ, φ quelconques.

(9.13) Remarque. Plus généralement, pour une équation $af''+bf'+cf=0$ à coefficients réels avec $\Delta=b^2-4ac<0$, on a deux racines conjuguées $k_1=-\frac{b}{2a}+i\omega$, $k_2=-\frac{b}{2a}-i\omega$ avec $\omega=\sqrt{|\Delta|}$. Ceci donne les solutions

$$f(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}\big(\lambda_1 e^{i\omega x}+\lambda_2 e^{-i\omega x}\big)$$

ou encore

$$f(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}\big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\,\sin(\omega x)\big), \tag{9.14}$$

les solutions réelles étant obtenues pour λ, μ réels. Une autre écriture équivalente consiste à poser

$$f(x)=\rho\,e^{-\frac{b}{2a}x}\,\cos(\omega x+\varphi) \tag{9.14$'$}$$

avec des constantes ρ, φ quelconques (fonction « oscillante amortie », si $b/a>0$).

Nous n'aborderons pas ici les questions de physique directement liées à la résolution des équations différentielles d'ordre 2, et qui devraient venir enrichir le cours de mathématiques : ondes, oscillations du pendule ou du peson à ressort, phénomènes oscillatoires amortis ...

10. Conclusions

Le mathématicien René Thom a souligné il y a plusieurs décennies que la « connaissance intime » du nombre n'existe que si tout nombre peut être conçu comme le résultat possible des diverses opérations mathématiques susceptibles d'être appliquées.

Il existe une continuité très forte entre l'apprentissage de la numération (énumérer 1, 2, 3, 4, ... aux premiers âges), celui des petits nombres jusqu'à la centaine un peu plus tard, l'acquisition des algorithmes opératoires du calcul écrit, le calcul mental, l'estimation correcte des ordres de grandeur et le calcul approché. Tous ces apprentissages sont liés à une intuition fine des grandeurs physiques (longueurs, poids, aires, volumes, ...), à leur expression en termes des unités fondamentales et leurs sous-unités, prémices de ce qui sera le calcul dimensionnel des physiciens et le calcul algébrique des mathématiciens au collège et au lycée. Le calcul écrit permet à l'élève de soulager sa mémoire lorsqu'il effectue ses premiers pas, il l'aide à fixer ses connaissances de manière solide, et il est surtout totalement nécessaire à la maîtrise des algorithmes opératoires sur des nombres de taille quelconque ; le calcul mental, indispensable dans la vie courante, utilise des procédures un peu différentes de celles du calcul écrit mais repose sur les mêmes fondements, à savoir une connaissance parfaitement fluide des tables d'opérations. La connaissance de la table de multiplication et le calcul des puissances de 10 (qui sont des opérations exactes !) sont essentiels à la maîtrise fine et contrôlée des ordres de grandeur, même si une intuition de la taille des nombres pré-existe sans doute dans le cerveau humain.

L'algorithme général de la division est le plus complet de tous puisqu'il implique à la fois addition, multiplication et soustraction. Il est extrêmement utile dans la maîtrise des ordres de grandeur du calcul approché : trouver le bon chiffre au diviseur requiert déjà une évaluation rapide du résultat d'une multiplication par un nombre à un chiffre. Plus tard, au collège, l'algorithme de la division appuyé par la manipulation des racines carrées doit constituer le fondement du calcul approché sur les nombres décimaux. La pratique des encadrements décimaux avec une précision quelconque aussi grande qu'on le souhaite permet à l'élève d'accéder de manière rigoureuse à la notion de nombre réel, et au delà, au lycée, à toute l'analyse mathématique.

C'est ainsi que l'enseignement du calcul est lié de manière fondamentale à celui de toutes les sciences. D'abord parce qu'il intervient sous la forme de la mesure des grandeurs et de la vérification des lois physiques dans les sciences expérimentales. Mais aussi parce que le calcul approché sur les nombres décimaux et la notion de limite constituent les fondements de l'analyse mathématique et du calcul différentiel, et que ceux-ci sont deux piliers essentiels sur lesquels viennent s'appuyer toutes les sciences exactes ou expérimentales, chaque fois que leurs lois doivent être modélisées sous forme mathématique.

Les programmes actuels du primaire, dans leur esprit tout autant que par les méthodes pédagogiques qu'ils présupposent, déconnectent l'apprentissage de la numération de celui des quatre opérations, ainsi que celui des quatre opérations entre elles. Ils minimisent de manière dramatique l'importance de la maîtrise des algorithmes du calcul écrit et par contre-coup obèrent gravement l'apprentissage du calcul mental. Ils ne prennent pas en charge de manière efficace les calculs sur les grandeurs (le lien entre longueur, aire et volumes a presque disparu, les volumes ont disparu au profit des seules « contenances »). Ils conduisent de tous ces points de vue à un retard qu'on peut estimer à deux années ou plus par rapport aux programmes de la période 1880–1970. L'organisation des études et tous les programmes de sciences du collège et du lycée sont eux-mêmes à reprendre si l'on veut aboutir à une situation où les élèves soient réellement en mesure d'accéder en grand nombre à une véritable culture scientifique – assise non pas seulement sur une imprégnation superficielle mais sur une réelle compréhension des mécanismes fondamentaux.

C'est bien là que se situent les enjeux si notre pays veut réellement enrayer la désaffection pour les études scientifiques constatée dans tous les nations occidentales. Au delà du manque de reconnaissance de la valeur du savoir dans notre société, ce phénomène nous paraît tenir en grande partie aux difficultés scolaires rencontrés par les élèves face à des programmes décousus substituant un catéchisme scolaire dogmatique à une compréhension intériorisée et approfondie, et entraînant par là même ennui, désintérêt ou refus. Il ne suffira pas de décréter chaque année une Semaine de la Science ou de mettre en place des séries de conférences de Culture Scientifique en fin de lycée ou en début d'université. Toutes les progressions scolaires déstructurées par des réformes incohérentes et inconsistantes depuis trois ou quatre décennies sont malheureusement à repenser, et les réformes à envisager sont donc considérables. Compte tenu de la perte d'expérience engendrée dans tout le système de formation par la dégradation ou l'abandon de pans essentiels de l'enseignement (calcul, géométrie, grammaire, orthographe, syntaxe de la langue, logique...), les réformes ne pourront vraisemblablement se faire que par paliers successifs, au moyen d'expérimentations approfondies sur le terrain.

Chapitre III : Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Henstock-Kurzweil pour les fonctions d'une variable

Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

version du 7 mars 2011

Introduction

L'objectif de ce texte est de proposer une « trame » pour l'enseignement de l'intégration depuis le lycée jusqu'aux premières années de l'université. Pour cela, nous développons les bases de la théorie de l'intégration telles qu'elles ont été posées et grandement éclaircies par Jaroslav Kurzweil et Ralph Henstock à la fin des années 1950. Au fil des chapitres, le niveau mathématique de l'exposition glisse progressivement d'un niveau très élémentaire jusqu'à un niveau de second cycle universitaire.

Même si au début une partie des résultats doit être admise ou démontrée de manière heuristique du fait des contraintes de temps ou des prérequis, nous pensons que la démarche mathématique utilisée dans l'enseignement doit respecter chaque fois que cela est possible les principes d'une progression par généralisations successives compatibles avec les exposés qui ont précédé (« progression concentrique »). Il est donc très utile d'introduire dès le début des définitions qui sont susceptibles d'être rendues rigoureuses et formalisées, et d'adopter un ordre de présentation des concepts et une articulation logique tels que la théorie n'aura pas à être substantiellement changée le jour où viendra la formalisation complète.[1]

[1] À l'heure actuelle, l'intégration est souvent abordée en plusieurs étapes qui sont les suivantes :
a) En terminale, une première étape qui consiste à introduire l'intégrale comme « aire sous la courbe », avec un état d'esprit qui se ressent obligatoirement de l'appauvrissement continuel de la conceptualisation depuis 2 décennies. Il en résulte qu'il est devenu très difficile de formaliser complètement la théorie, ce qui veut probablement dire qu'on ne peut guère espérer que le cours donne de véritables démonstrations, mais seulement au mieux quelques indications de preuves complétées par des considérations heuristiques.
b) Dans les premières années d'université, les enseignants présentent en général une version plus ou moins édulcorée de la théorie de « l'intégrale de Riemann », à l'aide d'encadrements par des fonctions en escalier, et des preuves qui tendent de plus en plus à disparaître du fait du recul des connaissances fondamentales requises (pratique des ε et δ, continuité uniforme, ...)
c) En Master 1ère année apparaîtra dans les bons cas une théorie plus solide de l'intégration reposant sur la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Mais il est de notoriété publique que ce sujet qui fâche a tendance aujourd'hui à être de moins en moins traité, surtout dans les filières dites « Master enseignement ».
Cette situation présente de nombreux inconvénients. La théorie de l'intégrale de Riemann n'est pas une

Le choix de l'intégrale de Kurzweil-Henstock présente l'avantage de fournir des définitions assez simples – peut-être plus simples que celle de Riemann puisque les encadrements de fonctions ne sont plus nécessaires, que l'on n'a plus besoin de la continuité uniforme, que tous les théorèmes de base se démontrent en quelques lignes – et, en même temps, d'être assez puissante pour contenir les parties élémentaires de la théorie de Lebesgue ... Dans ces conditions, il paraît quelque peu anachronique que la théorie n'ait pas encore trouvé sa juste place dans l'enseignement !

Nous suivons ici d'assez près le livre « Introduction to gauge integrals » de Charles Swartz [Sw], en l'allégeant autant que faire se peut, pour atteindre très rapidement la preuve des théorèmes fondamentaux (rapport entre intégration et primitive, intégration par parties, changement de variable, dérivabilité des intégrales indéfinies de fonctions continues...). Nous développons ensuite les résultats plus spécifiques à la théorie de Kurzweil-Henstock pour atteindre les théorèmes de convergence monotone et dominée. L'existence de la mesure de Lebesgue et ses propriétés fondamentales figurent parmi les conséquences directes, sans qu'il y ait besoin d'introduire au préalable le langage général des tribus et des mesures dénombrablement additives. Les étudiants auront donc en fait un premier exemple motivant sous la main lorsque ces notions plus générales seront introduites. Enfin, les définitions ad hoc des diverses intégrales généralisées, impropres et semi-convergentes deviennent également accessoires, puisque toutes ces notions peuvent être exprimées en une seule définition naturelle contenant les cas utiles : l'intégrale de Kurzweil-Henstock autorise par nature même la « semi-convergence » ...

Les premières étapes nous paraissent éventuellement utilisables au lycée, à condition d'admettre quelques-unes des démonstrations – et en prenant comme perspective que c'est l'intégrale de Kurzweil-Henstock qui sera développée ensuite, de sorte que les énoncés présentant des hypothèses artificielles superflues n'ont pas lieu d'être.

Le cours qui suit a été à l'origine inspiré par des notes synthétiques rédigées par Eric Charpentier [Ch] à l'Université de Bordeaux autour de 2002, et fait des emprunts à de multiples sources (cf. bibliographie). Ces notes ont été ensuite développées sous forme de cours polycopié par Jean-Yves Briend à Marseille [Br] (après que je l'ai informé des suggestions d'Eric Charpentier). Le présent texte a fait l'objet de plusieurs rédactions successives depuis l'automne 2005, et a lui-même inspiré ultérieurement des cours ou manuels mis en chantier par plusieurs collègues. Je voudrais dans ce cadre signaler d'utiles remarques et questions formulées par Xavier Buff, auteur du chapitre sur l'intégration pour le L2 dans la collection de manuels "Licence-Tout-en-Un" dirigée par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel [RW], et remercier ces deux derniers pour leur intérêt et leurs encouragements.

Nous renvoyons à notre site web pour un cours plus détaillé sur la théorie de Henstock-Kurzweil. Nous nous contenterons ici de donner seulement les premiers éléments de la théorie de l'intégration, mais avec un grand souci de rigueur. Compte tenu de

« bonne théorie », ni du point de vue didactique ni du point de vue mathématique. La présentation n'en est pas très simple : il faut manipuler constamment des encadrements de fonctions, utiliser la continuité uniforme pour démontrer l'intégrabilité des fonctions continues, faire des découpages de ε et δ parfois peu éclairants. Il y a de nombreuses restrictions ou pathologies, des théorèmes essentiels comme ceux de la convergence monotone ne sont pas valables, etc. Plus tard, l'introduction de l'intégrale de Lebesgue viendra balayer ce travail en montrant qu'il s'agissait en fait d'une théorie bancale et incomplète. Si les étudiants échappent à l'intégrale de Lebesgue – comme cela arrive à un nombre de plus en plus grand de CAPESiens – ils n'auront donc jamais eu l'occasion de se voir exposer une théorie « sérieuse » de l'intégration, ce qui est préoccupant.

cette ambition, l'exposé est nécessairement théorique, et donc beaucoup plus exigeant que d'autres textes ou manuels qui se contentent de donner des techniques de calcul, et qui s'appuient seulement sur une intuition de la notion d'aire en lieu et place de justifications mathématiques complètes. Un prérequis indispensable est d'avoir déjà assimilé l'art de couper les ε en quatre – ou d'être prêt à faire l'effort de creuser la question. Le public visé est celui des élèves de Terminale très motivés – la théorie de base ne fait jamais appel à aucune notion qui dépasse le niveau du lycée. La plupart des notes de bas de page sont destinés à des lecteurs plus avancés et ne peuvent normalement pas être comprises par des personnes qui aborderaient la théorie pour la première fois ; de même, les passages marqués d'un * ou de deux ** peuvent être omis en première lecture ; les sections 7, 8 et 9 sont nettement moins élémentaires et relèvent de l'université.

1. Sommes de Riemann

Dans toute cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction, définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe horizontal est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$0 \leqslant y \leqslant f(x) \;\text{ si } f(x) \geqslant 0, \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 0 \;\text{ si } f(x) \leqslant 0.$$

Pour une fonction f suffisamment régulière, nous souhaitons évaluer l'aire A de cette portion de plan, en comptant positivement les surfaces situées au-dessus de l'axe horizontal, et négativement celles situées au-dessous (Fig. 1). Nous parlerons de « l'aire algébrique »[(2)] située sous le graphe de f.

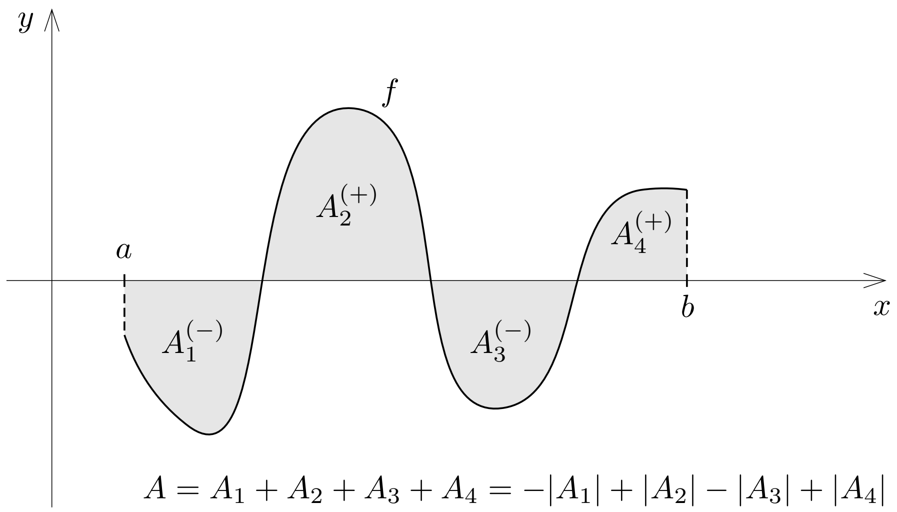


Fig. 1. Aire algébrique située sous le graphe de f.

(2) L'approche des intégrales par les aires nous paraît infiniment préférable à celle qui consiste à introduire a priori l'intégrale par le calcul des primitives, ne serait-ce que parce que cette façon de voir dépouille l'intégrale de son sens géométrique (et qu'en outre elle escamote l'unique façon de démontrer en général l'existence des primitives...)

L'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ au moyen d'une subdivision en sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, puis de sommer les aires de rectangles basés sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. La figure 2 ci-dessous résume le procédé.

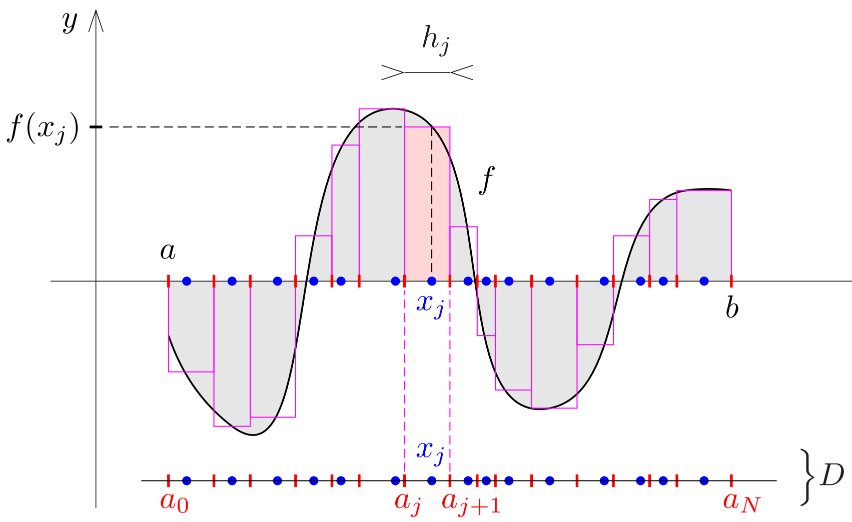


Fig. 2. Somme de Riemann associée à f sur D.

La somme des aires des rectangles figurés ci-dessus est donnée par $\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)$, et on est ainsi conduit à poser la définition suivante.

(1.1) Définition.

(a) *On appelle « subdivision pointée » de l'intervalle $[a, b]$ la donnée de $N + 1$ points*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = b$$

et de N points $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ tels que

$$\forall j = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad x_j \in [a_j, a_{j+1}].$$

Elle sera notée

$$D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < N}.$$

Les réels $h_j = a_{j+1} - a_j$ (amplitudes des intervalles) sont les « pas » de la subdivision.

(b) *Soit D une subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle « somme de Riemann » associée à f sur D, le réel*

$$\boxed{S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\, h_j.}$$

La somme de Riemann $S_D(f)$ est l'aire algébrique de la réunion des rectangles de largeur h_j et de hauteur $f(x_j)$ (Fig. 2). Il s'agit bien d'une aire algébrique, puisque $f(x_j)h_j$ est compté positivement si $f(x_j) > 0$ et négativement si $f(x_j) < 0$.

Intuitivement l'aire A cherchée est la limite de $S_D(f)$ quand les pas h_j tendent vers 0. Un choix possible consiste par exemple à prendre une subdivision en sous-intervalles égaux

$$a_j = a + jh = a + j\frac{b-a}{N}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N \quad \text{où} \quad h_j = h = \frac{b-a}{N},$$

que l'on peut combiner avec un choix quelconque des points x_j.

(1.2) Exemple. Comme premier exemple, considérons la fonction identité $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour $N \geq 1$, posons :

$$a_0 = 0\,,\; a_1 = \frac{1}{N}\,, \ldots,\; a_j = \frac{j}{N}\,, \ldots,\; a_N = 1$$

Les pas de cette subdivision sont tous égaux à $1/N$. Voici trois calculs de sommes de Riemann, selon que l'on place les points x_j au début, au milieu ou à la fin des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ (rappelons que la somme des N premiers entiers vaut $N(N+1)/2$).

(1.2 a) $\quad x_j = a_j \;:\qquad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N}\,\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N-1}{2N}\,,$

(1.2 b) $\quad x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2} \;:\qquad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2j+1}{2N}\,\frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2}\sum_{j=0}^{N-1} 2j+1 = \frac{1}{2}\,,$

(1.2 c) $\quad x_j = a_{j+1} \;:\qquad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j+1}{N}\,\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j+1 = \frac{N+1}{2N}\,.$

La seconde somme est égale à $1/2$ pour tout N, les deux autres tendent vers $1/2$ quand N tend vers l'infini. L'aire du triangle sous le graphe de la fonction est bien $1/2$:

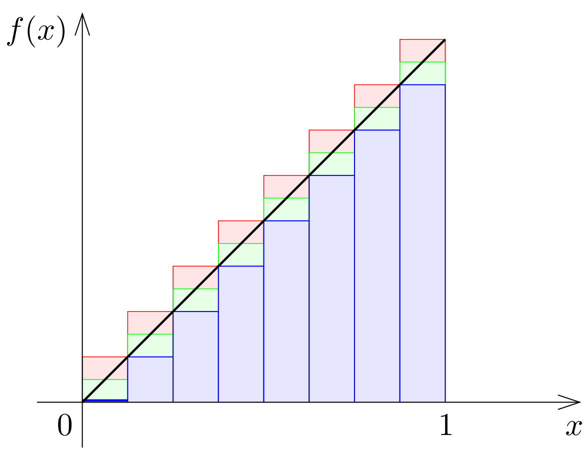


Fig. 3. Sommes de Riemann associées à l'identité sur $[0,1]$.

(1.3) Exemple*. Nous considérons ici une situation où la fonction f n'est plus bornée. On prend $[a,b] = [0,1]$ et f telle que $f(x) = 1/\sqrt{x}$ si $x \in \,]0,1]$ et $f(0) = 0$. On introduit une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < N}$ telle que $a_j = (j/N)^2$ pour

$0 \leqslant j \leqslant N$ et on pose $x_j = (t_j/N)^2$ avec $t_j \in [j, j+1]$. On a alors $a_{j+1} - a_j = (2j+1)/N^2$ et $f(x_j) = N/t_j$ si $t_j > 0$, d'où

$$S_D(f) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leqslant j \leqslant N-1,\, t_j > 0} \frac{2j+1}{t_j}.$$

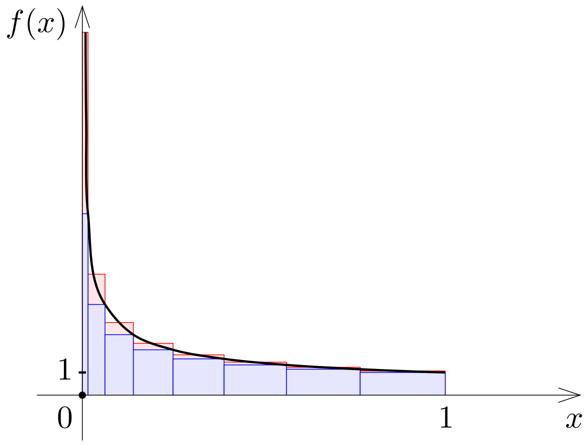


Fig. 4. Sommes de Riemann associées à $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

Le choix le plus simple est $t_j = j + \frac{1}{2}$, qui donne $\frac{2j+1}{t_j} = 2$ et donc $S_D(f) = 2$. Si on choisit plutôt $t_j = j + 1$, on obtient la valeur minimale possible pour $S_D(f)$, mais comme $\frac{2j+1}{j+1} \to 2$ quand $j \to +\infty$, il est facile de voir que l'on a encore $S_D(f) \to 2$ pour $N \to +\infty$ (on peut observer par exemple que $\frac{2j+1}{j+1} = 2 - \frac{1}{j+1} \geqslant 2 - 1/\sqrt{N}$ pour $\sqrt{N} \leqslant j \leqslant N$). Comme $a_{j+1} - a_j \leqslant (2N-1)/N^2 \to 0$ quand $N \to +\infty$, ce calcul amène à penser que l'aire du domaine non borné défini par $0 < x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x}$ est bien finie et égale à 2. □

Dans la suite, nous aurons besoin pour des raisons à la fois théoriques et pratiques de considérer des sommes de Riemann sur des subdivisions arbitraires. Il est facile de voir à partir de la définition 1.1 (b) que ces sommes vérifient les propriétés suivantes.

(1.4) Propriétés fondamentales.

(a) Linéarité. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques et λ, μ des constantes réelles, alors*

$$\boxed{S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g).}$$

(b) Monotonie. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques, alors*

$$\boxed{f \geqslant g \quad \Rightarrow \quad S_D(f) \geqslant S_D(g).}$$

En particulier, si $f \geqslant 0$, alors $S_D(f) \geqslant 0$.

(c) Formule de Chasles. *Soient $a < b < c$ des réels et f une fonction définie sur $[a, c]$. Si D_1 est une subdivision pointée de $[a, b]$ et D_2 une subdivision pointée de $[b, c]$, alors $D_1 \cup D_2$ est une subdivision pointée de $[a, c]$ et*

$$\boxed{S_{D_1 \cup D_2}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f).}$$

2. Définition de l'intégrale d'une fonction

La première idée qui vient à l'esprit est de considérer des subdivisions pointées $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < N}$ dont les pas $h_j = a_{j+1} - a_j$ sont tels que $0 < h_j \leqslant \delta$ avec δ tendant vers 0, et de regarder si les sommes de Riemann de Riemann $S_D(f)$ convergent bien vers une limite A. Cette limite sera alors interprétée comme étant l'aire cherchée. On aboutit à la définition suivante, qui est la définition historiquement introduite par Cauchy et Riemann.

(2.1) Définition. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) s'il existe un réel A qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de f, tel que pour toute marge d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée a priori, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait*

$$h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Le nombre réel A de la définition précédente est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et noté

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

et on dit que $\int_a^b f(x)\, dx$ est la limite des sommes de Riemann $S_D(f)$, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Dans cette définition, on peut par exemple se contenter de prendre une subdivision en N sous-intervalles de pas constant $h = \frac{b-a}{N}$, et on obtient alors la conséquence immédiate suivante.

(2.2) Convergence des sommes de Riemann. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a*

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{N \to +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\Big(a + \frac{j}{N}(b-a)\Big) && [\textit{cas } x_j = a_j] \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} f\Big(a + \frac{j}{N}(b-a)\Big) && [\textit{cas } x_j = a_{j+1}] \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\Big(a + \frac{2j+1}{2N}(b-a)\Big) && \Big[\textit{cas } x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}\Big]. \end{aligned}}$$

Si l'aire $\int_a^b f(x)\, dx$ située sous le graphe de f est connue d'une manière ou d'une autre, on peut alors en déduire la valeur des limites correspondantes ; il faut savoir pour cela que la fonction f est intégrable au sens de Riemann, on démontrera plus tard (cf. théorèmes 7.6 et 7.10) que c'est le cas si f est continue ou continue par morceaux.

(2.3) Exemple. Considérons la somme

$$\frac{1}{N^2}\left(\sqrt{1\,(N-1)}+\sqrt{2\,(N-2)}+\ldots+\sqrt{(N-1)\,1}\,\right)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{N}\left(\sqrt{\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)}+\sqrt{\frac{2}{N}\left(1-\frac{2}{N}\right)}+\ldots+\sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N}}\,\right).$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $x\to\sqrt{x(1-x)}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à : $\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx$. Or, le graphe $y=\sqrt{x(1-x)}$ de cette fonction est un demi-arc du cercle $x^2-x+y=0$, soit encore $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, c'est donc un demi-cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. La limite de la sommation est égale à l'aire du demi-disque, qui vaut $\pi/8$. □

Cependant, on s'aperçoit assez vite que la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann impose des restrictions assez gênantes sur la fonction f :

(2.4) Condition nécessaire. *Toute fonction f Riemann-intégrable est bornée.*

Démonstration. En effet, selon la définition 2.1, prenons $\delta>0$ donnant une erreur au plus ε. Pour une subdivision D de pas constant $h\leqslant\delta$, à savoir $h=(b-a)/N$ avec $N\geqslant(b-a)/\delta$, nous devons avoir la majoration $|S_D(f)-A|\leqslant\varepsilon$, donc

$$|S_D(f)|=\left|\frac{b-a}{N}\sum_{0\leqslant j<N}f(x_j)\right|\leqslant|A|+\varepsilon\quad\Rightarrow\left|\sum_{0\leqslant j<N}f(x_j)\right|\leqslant\frac{N}{b-a}(|A|+\varepsilon),$$

ceci pour tout choix des points $x_j\in[a_j,a_{j+1}]$. Choisissons pour l'un des points x_j un point $x\in[a,b]$ quelconque, et pour les autres les points a_j de la subdivision. Il vient alors

$$\forall x\in[a,b],\qquad |f(x)|\leqslant\sum_{0\leqslant j<N}|f(a_j)|+\frac{N}{b-a}(|A|+\varepsilon),$$

ce qui montre que f doit être bornée. □

Cette restriction que f soit bornée est très gênante, puisqu'on a vu à l'exemple (1.3) qu'il existait des fonctions non bornées pour lesquelles l'aire située sous le graphe est finie et calculable sans difficulté. D'autre part, d'un point de vue concret de calcul numérique, on peut être amené à faire des calculs d'aires pour des fonctions bornées qui « oscillent plus » à certains endroits qu'à d'autres :

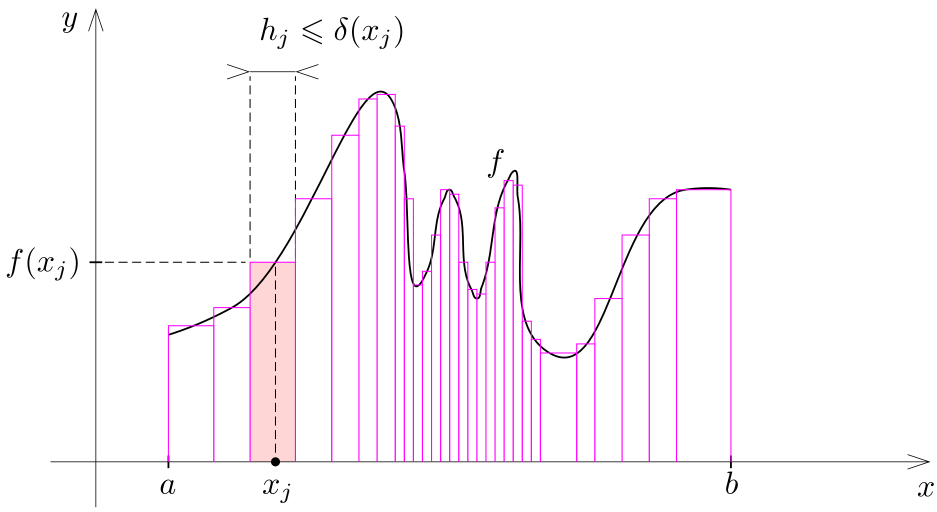


Fig. 5. Somme de Riemann à pas variable.

Dans ce cas, on sent bien intuitivement que l'on a intérêt à resserrer davantage les pas h_j aux endroits où f oscille davantage. Plutôt que de supposer que $h_j \leqslant \delta$ où δ est un réel positif fixé, il vaudra donc mieux demander que les pas h_j satisfassent une condition $h_j \leqslant \delta(x_j)$ où $\delta(x_j)$ est une quantité positive assez petite dépendant de l'endroit où l'on prend le rectangle de hauteur $f(x_j)$. On choisira alors des fonctions $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ positives qui serviront à majorer les pas h_j. Une telle fonction sera appelée une *jauge* sur $[a,b]$.

(2.5) Définition. *Soit $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction positive quelconque. Une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < N}$ de $[a,b]$ sera dite δ-fine si*

$$\forall j = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j).$$

Si δ_* et δ sont deux jauges telles que $\delta_* \leq \delta$, alors toute subdivision δ_*-fine est aussi δ-fine. Le résultat suivant, appelé *lemme de Cousin*, affirme que la définition précédente n'est jamais vide de contenu.

(2.6) Lemme. *Soit $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une jauge. Alors il existe une subdivision pointée D de l'intervalle $[a,b]$ qui est δ-fine.*

*Démonstration.** Elle est basée sur un procédé de dichotomie. Nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $[a,b]$ n'admet pas de subdivision pointée δ-fine. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$: si chacune des deux admettait une subdivision δ-fine, la réunion de ces deux subdivisions serait une subdivision δ-fine de $[a_0, b_0]$. Donc l'une des deux moitiés au moins n'admet pas de subdivision δ-fine : on note celle-ci $[a_1, b_1]$.

On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(b-a)/2^k$, dont aucun n'admet de subdivision δ-fine. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Soit x_0 cette limite. Puisque $\delta(x_0) > 0$, il existe k_0 tel que

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset [x_0 - \tfrac{1}{2}\delta(x_0), x_0 + \tfrac{1}{2}\delta(x_0)].$$

Donc la subdivision pointée de $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ formée seulement de l'intervalle tout entier et du point x_0 est δ-fine. D'où la contradiction.[3] □

(2.7) Définition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock (ou KH-intégrable) s'il existe un réel A qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de f, tel que pour toute marge d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée a priori, on peut trouver une jauge $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ en sorte que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a,b]$ on ait*

$$D\ \delta\text{-fine i.e. } \forall j,\ a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j) \quad \Rightarrow \quad |S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon.$$

(une telle jauge δ sera dite ε-adaptée à f). Le nombre réel A de la définition précédente est appelé intégrale de f sur $[a,b]$, on écrit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f) = \lim_{\mathrm{KH},\,D} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)}$$

et on dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est la limite (au sens de Kurzweil-Henstock) des sommes de Riemann, lorsque la subdivision D devient de plus en plus fine[4].

Cette définition est de façon évidente plus générale que celle de Riemann, par conséquent toute fonction intégrable au sens de Riemann est aussi intégrable au sens de Kurzweil-Henstock. D'autre part, si une jauge δ est ε-adaptée, alors toute jauge $\delta_* \leqslant \delta$ est encore ε-adaptée. Nous utiliserons cette observation à plusieurs reprises dans la section suivante. La notation dx intervient pour rappeler qu'à la limite on considère des rectangles « infiniment » fins de largeur $dx = a_{j+1} - a_j$, considérée comme accroissement infiniment petit de la variable x (voir Fig. 6 ci-après), et l'écriture symbolique $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de $f(x)\,dx$. »

---

(3) Le lecteur ayant quelques connaissances de topologie aura reconnu un cas élémentaire du théorème de Borel-Lebesgue relatif à la compacité du segment $[a,b]$. Cependant, notre but est de rester aussi élémentaire que possible – sans éluder les difficultés – donc il nous a paru préférable de faire la démonstration dans le cadre strict des subdivisions pointées. [On notera que celle-ci permet en fait d'énoncer un résultat un peu plus précis : *pour toute jauge δ il existe une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$ formée d'intervalles dont les longueurs sont de la forme $(b-a)/2^{k_j}$*. En effet, il suffit d'utiliser un raisonnement par l'absurde avec ce type d'intervalles pour aboutir à une contradiction.] Quoi qu'il en soit, la démonstration de 2.6 est probablement assez difficile pour la classe Terminale, c'est pour quoi nous l'avons marquée d'un astérisque *, comme toutes les parties plus délicates qui vont suivre.

(4) L'intégrale de Kurzweil-Henstock est parfois appelée aussi *intégrale de jauge* ou encore *intégrale de Riemann généralisée*. Elle a été introduite au milieu des années 1950, alors que l'intégrale de Riemann remonte au 19ème siècle. Bien qu'en apparence la définition de Kurzweil-Henstock diffère très peu de celle de l'intégrale de Riemann, il se trouve qu'elle jouit de propriétés beaucoup meilleures, tout en procurant des démonstrations souvent plus simples et en éliminant beaucoup d'hypothèses superflues, par exemple le fait que f soit nécessairement bornée.

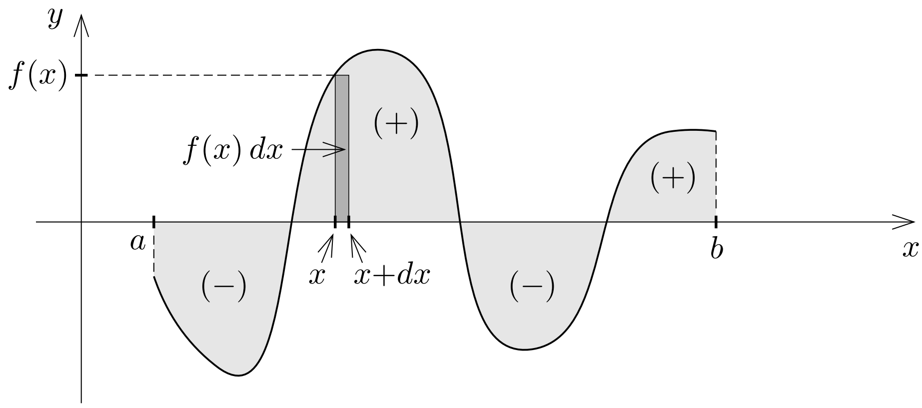


Fig. 6. Intégrale et son élément différentiel $f(x)\,dx$.

(2.8) Exemple. On appelle fonction en escalier sur $[a,b]$ une fonction f telle qu'il existe des points $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ de $[a,b]$ et des constantes réelles c_i telles que

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_p = b \quad \text{et} \quad f(x) = c_i \ \text{ sur }]u_i, u_{i+1}[\,,$$

les valeurs $f(u_i) \in \mathbb{R}$ étant elles-mêmes quelconques, éventuellement différentes des valeurs c_i.

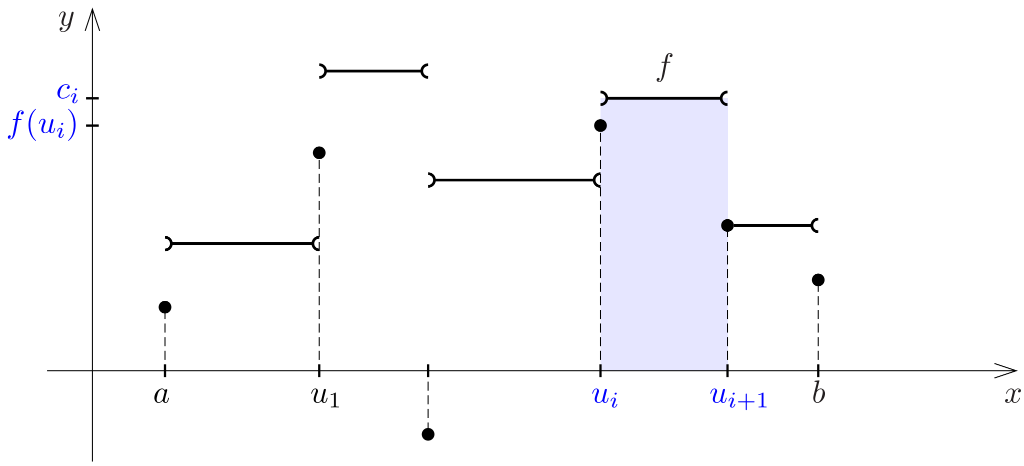


Fig. 7. Une fonction en escalier.

Nous affirmons :

Toute fonction en escalier f est intégrable au sens de Riemann, et on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(u_{i+1} - u_i).}$$

*Démonstration.** La fonction f est bornée, la borne supérieure de $|f|$ est donnée par

$$M = \sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f| = \max\{|c_i|,\ |f(u_j)|\}.$$

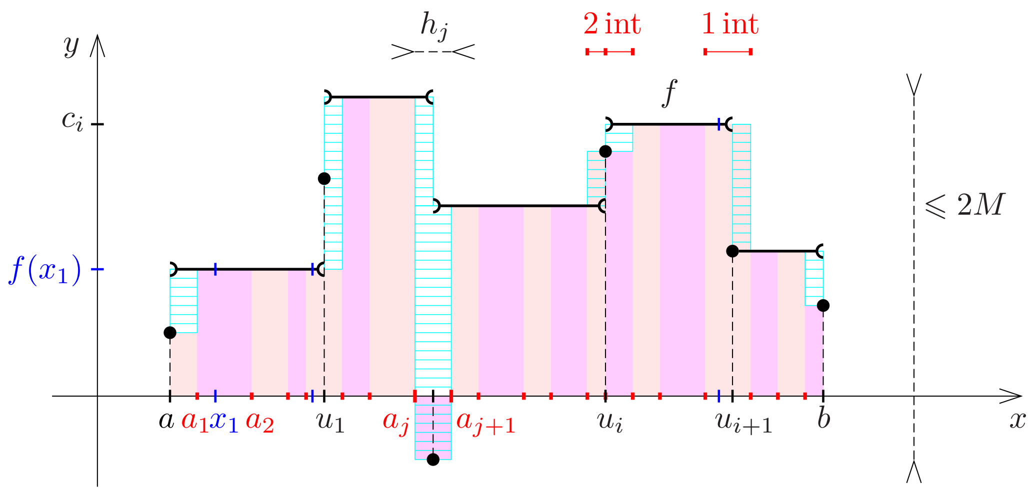


Fig. 8. Sommes de Riemann d'une fonction en escalier.

Soit $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision δ-fine pour une certaine constante $\delta > 0$ (les points a_j n'ont a priori aucun rapport avec les points de subdivision u_i de la fonction en escalier). La somme de Riemann $S_D(f) = \sum f(x_j)h_j$ est représentée par par la somme des aires des rectangles de couleur rosée de la Fig. 8 (avec les points a_j en rouge et les points de marquage x_j en bleu – tous ceux-ci n'étant pas représentés). La différence entre les aires $S_D(f)$ et $\sum c_i(u_{i+1} - u_i)$ (partie en noir du graphe) est représentée par les zones hachurées en bleu clair. Nous avons au plus $2p$ intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ qui contiennent l'un des points intermédiaires u_i, à savoir un à chaque extrêmité et un ou deux pour chacun des points u_i, $i = 1, \ldots, p-1$. Pour chacun de ces intervalles, le terme $f(x_j)h_j$ mis en jeu diffère de l'aire des deux rectangles délimités par le graphe de f par au plus $2Mh_j \leqslant 2M\delta$, puisque $|f(x) - f(x_j)| \leqslant 2M$ et $h_j \leqslant \delta$. Au total on a donc

$$\Big| S_D(f) - \sum_{0 \leqslant i \leqslant p-1} c_i(u_{i+1} - u_i) \Big| \leqslant 2p \times 2M\delta = 4pM\delta.$$

Il suffit alors de choisir $\delta = \varepsilon/(4pM)$ pour conclure. □

3. Propriétés élémentaires de l'intégrale

Les propriétés énoncées dans cette section sont, dans l'ordre, la linéarité, la monotonie et la relation de Chasles. Elles sont obtenues par passage à la limite à partir des propriétés analogues des sommes de Riemann $S_D(f)$ (propriétés 1.4 (a,b,c)), et valent pour l'intégrabilité au sens de Riemann et de Kurzweil-Henstock indifféremment.

(3.1) Linéarité. *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$ et λ, μ des constantes réelles, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Démonstration. En termes de limites de sommes de Riemann sur des subdivisions pointées D de $[a, b]$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx &= \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(\lambda f + \mu g) = \lim_{\mathrm{KH},\,D} \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)\\ &= \lambda \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f) + \mu \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(g)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$ □

Pour analyser plus en détail cet argument, reprenons le calcul en termes de jauges, une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ étant fixée a priori. Posons

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad B = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Il existe par hypothèse des jauges δ_1, δ_2 telles que si D est δ_1-fine alors $|S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon$ et si D est δ_2-fine alors $|S_D(g) - B| \leqslant \varepsilon$. Prenons une subdivision D δ-fine avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Comme $S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)$ on en déduit

$$\big|S_D(\lambda f + \mu g) - (\lambda A + \mu B)\big| \leqslant (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lambda f + \mu g$ est intégrable et que son intégrale est bien $\lambda A + \mu B$.

(3.2) Remarque. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction qui est nulle partout sauf en un nombre fini de points $u_i \in [a, b]$, alors f est Riemann-intégrable d'intégrale nulle[(5)]. C'est en effet un cas très particulier de fonction en escalier, et on peut appliquer la formule de l'exemple 2.8 avec $c_i = 0$. Il en résulte que si deux fonctions g, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffèrent en un nombre fini de points, alors l'intégrabilité de l'une équivaut à l'intégrabilité de l'autre et on a $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$ (puisque $f = g - h$ est d'intégrale nulle). □

(3.3) Monotonie. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$*

$$\boxed{f \geqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Démonstration. Cela résulte de l'inégalité sur les sommes de Riemann $S_D(f) \geqslant S_D(g)$, par passage à la limite. □

(3.4) Relation de Chasles. *Soient $a < b < c$ des réels et $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est intégrable sur $[a, b]$ et intégrable sur $[b, c]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.}$$

Ceci vaut aussi bien pour l'intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock que pour l'intégrabilité au sens de Riemann.

---

(5) Pour l'intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock, ce résultat est vrai plus généralement dans le cas où f est nulle partout en dehors d'un ensemble dénombrable de points $E \subset [a, b]$. Voir l'exercice 9.22.

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et choisissons des jauges $\delta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $\delta_2 : [b,c] \to \mathbb{R}_+^*$ ε-adaptées à f sur $[a,b]$ et $[b,c]$ respectivement. Autrement dit, si on écrit

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad A_2 = \int_b^c f(x)\,dx, \qquad A = A_1 + A_2,$$

on aura $|S_{D_1}(f) - A_1| \leqslant \varepsilon$ et $|S_{D_2}(f) - A_2| \leqslant \varepsilon$ pour toutes subdivisions pointées δ_1-fines D_1 de $[a,b]$ et δ_2-fines D_2 de $[b,c]$. Si nous supposons démontrée l'intégrabilité de f sur $[a,c]$, c'est-à-dire l'existence de la limite $\lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f)$ lorsque D parcourt les subdivisions pointées de $[a,c]$, alors on peut prendre une jauge δ sur $[a,c]$ telle que $\delta \leqslant \delta_1$ sur $[a,b]$ et $\delta \leqslant \delta_2$ sur $[b,c]$, et une subdivision $D = D_1 \cup D_2$ δ-fine égale à la réunion d'une subdivision D_1 δ_1-fine de $[a,b]$ et d'une subdivision D_2 δ_2-fine de $[b,c]$. On obtient dans ces conditions $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$, donc $|S_D(f) - A| \leqslant 2\varepsilon$ et la relation désirée

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f) = A = A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

s'ensuit en prenant ε arbitrairement petit. La seule difficulté qui reste est de démontrer l'existence de la limite $\lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f)$ pour des subdivisions $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a,c]$ ne comprenant pas nécessairement $a_j = b$ comme l'un des points intermédiaires, ce qui est a priori requis pour prouver l'intégrabilité de f sur $[a,c]$. La méthode consiste à redécouper l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ de D qui contient le point b, et à estimer de combien on modifie ainsi la somme de Riemann $S_D(f)$.

(3.5)* Preuve de l'intégrabilité de f sur $[a,c]$ sous les hypothèses de 3.4. Dans le cas de l'intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock, la preuve est très simple. On définit une jauge δ sur $[a,c]$ en posant

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x), (b-x)/2) & \text{si } x \in [a,b[, \\ \min(\delta_2(x), (x-b)/2) & \text{si } x \in]b,c], \\ \min(\delta_1(b), \delta_2(b)) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

de sorte que $\delta \leqslant \delta_1$ sur $[a,b]$ et $\delta \leqslant \delta_2$ sur $[b,c]$. Soit $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision δ-fine. Si $x_j < b$, alors on a $a_{j+1} \leqslant x_j + \delta(x_j) < x_j + (b - x_j) = b$. De même, si $x_j > b$, alors $a_j \geqslant x_j - \delta(x_j) > x_j - (x_j - b) = b$. Ceci montre que le seul cas où $[a_j, a_{j+1}]$ peut contenir le point b est le cas $x_j = b$, ce qui permet de découper l'intervalle pointé $([a_j, a_{j+1}], b)$ en les deux intervalles pointés $([a_j, b], b)$ et $([b, a_{j+1}], b)$. On produit ainsi une subdivision pointée D_1 δ_1-fine de $[a,b]$ et une subdivision pointée D_2 δ_2-fine de $[b,c]$ telles que $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$. On a donc $|S_D(f) - A| \leqslant 2\varepsilon$ et la conclusion s'ensuit comme précédemment. □

Dans le cas de l'intégrabilité au sens de Riemann, la preuve donnée ci-dessus n'est pas valable, car la jauge δ produite n'est pas constante. On sait cependant de plus que f est bornée, disons $|f| \leqslant M$ (si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $[b,c]$, elle y est nécessairement bornée d'après la condition 2.4). Prenons pour D une subdivision pointée δ-fine avec $\delta \leqslant \min(\delta_1, \delta_2)$. Si l'un des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ contient b en son intérieur, on remplace son point de marquage x_j par $x'_j = b$, ce qui donne après découpage comme ci-dessus une nouvelle subdivision $D' = D_1 \cup D_2$ δ-fine telle que

$$S_{D'}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f) \quad \Rightarrow \quad \big|S_{D'}(f) - A\big| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a de plus

$$\big|S_D(f) - S_{D'}(f)\big| = \big|\big(f(x_j) - f(b)\big)h_j\big| \leqslant 2M\delta,$$

par conséquent $\big|S_D(f) - A\big| \leqslant 4\varepsilon$ dès que $\delta \leqslant \min(\delta_1, \delta_2, \varepsilon/M)$. Ceci entraîne bien l'intégrabilité de f au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, c]$, ainsi que la formule de Chasles. □

Pour des réels a, b qui ne vérifient pas nécessairement $a < b$, on pose

$$(3.6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } a = b, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{si } a > b.$$

On peut vérifier que la relation de Chasles reste valable dans tous les cas, quel que soit l'ordre des réels a, b, c, à condition bien sûr que f soit intégrable sur chacun des intervalles mis en jeu.

4. Le théorème fondamental de l'Analyse

On appelle théorème fondamental de l'analyse, le fait que l'intégration (calcul d'aires) et la dérivation (calcul de tangentes et de différentielles) sont des opérations inverses l'une de l'autre.

(4.1) Théorème. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f' est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

Démonstration.[6] Commençons par une preuve heuristique (c'est-à-dire simplifiée, mais non rigoureuse). Soit $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision pointée assez fine. On a par définition

$$\int_a^b f'(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} f'(x_j)(a_{j+1} - a_j).$$

Mais $f'(x_j)$ peut être vu comme une approximation de la pente de f sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ et on a donc $f'(x_j)(a_{j+1} - a_j) \simeq f(a_{j+1}) - f(a_j)$, d'où

$$\int_a^b f'(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = f(b) - f(a).$$

(6) Le théorème 4.1 est un résultat particulièrement impressionnant de la théorie de Kurzweil-Henstock, que ni la théorie de Riemann ni même la théorie de Lebesgue ne permettent d'obtenir. Ce « défaut » de la théorie de Lebesgue avait amené A. Denjoy [Dj1] à proposer en 1912 une théorie de « l'intégrale totale » qui lui permit de rétablir la validité du Théorème 4.1 (cf. aussi les travaux de O. Perron [Pe]. Cette théorie se révélera a posteriori essentiellement équivalente à la théorie de Kurzweil-Henstock, mais avec un formalisme et des justifications beaucoup plus compliquées.

Il n'est pas difficile de rendre cet argument rigoureux. L'hypothèse de l'existence de $f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ signifie par définition que pour tout pout $x \in [a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$y \in [a,b], \quad 0 < |y-x| \leqslant \delta(x) \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{et donc}$$

$$y \in [a,b], \quad y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow \big|f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\big| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

(puisque l'inégalité est vraie aussi de manière évidente pour $y = x$). Prenons une subdivision pointée $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ δ-fine, c'est-à dire telle que $h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j)$. En appliquant l'égalité ci-dessus à $x = x_j$ et $y = a_j$ ou $y = a_{j+1}$, il vient

$$\big|f(a_j) - f(x_j) - (a_j - x_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon|a_j - x_j| = \varepsilon(x_j - a_j),$$
$$\big|f(a_{j+1}) - f(x_j) - (a_{j+1} - x_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon|a_{j+1} - x_j| = \varepsilon(a_{j+1} - x_j).$$

En faisant la différence, l'inégalité $|v-u| \leqslant |u| + |v|$ donne

$$\big|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon(a_{j+1} - a_j).$$

La sommation de ces inégalités pour $j = 0, 1, \ldots, N-1$ implique en définitive

$$\big|f(b) - f(a) - S_D(f')\big| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

par conséquent

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{\mathrm{KH},\, D} S_D(f') = f(b) - f(a). \qquad \square$$

Notons qu'on retrouve ainsi le résultat important suivant qui, alternativement (et de manière plus classique) est démontré au moyen du théorème des accroissements finis.

(4.2) Corollaire. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que $f' = 0$ (resp. $f' \geqslant 0$, $f' \leqslant 0$). Alors f est constante (resp. croissante, décroissante).*

Démonstration. En effet, pour tous points $a < b$ dans I, on voit que $f(b) - f(a)$ est égal à 0 (resp. positif ou nul, négatif ou nul). $\square$

Le théorème fondamental peut aussi se s'énoncer comme une formule de calcul d'une intégrale à partir de la primitive d'une fonction[7].

(4.3) Calcul des intégrales au moyen de primitives. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive F (c'est-à-dire si F est dérivable et $F' = f$), alors f est KH-intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \textit{encore noté} \quad \big[F(x)\big]_a^b.}$$

[7] On notera que pour en arriver là, on a eu besoin de nettement moins de théorie que dans l'approche classique de l'intégrale de Riemann. En effet, dans cette approche, il faut au préalable connaître l'intégrabilité des fonctions continues, et avoir démontré que la dérivée de l'intégrale indéfinie d'une fonction continue $f(x)$ est égale à cette fonction, pour en conclure que l'intégrale indéfinie est une primitive de f. Par ailleurs, toutes les hypothèses superflues (fonctions C^1 dans les intégrations par parties ou les changements de variable) disparaissent ...

Pour exploiter cette formule, il convient de connaître une liste suffisante de primitives de fonctions usuelles – en connaître un certain nombre par cœur devient vite indispensable pour être en mesure de calculer les intégrales de manière efficace. Compte tenu de la formule 4.3, la primitive F d'une fonction continue f, là où elle est définie, sera notée sous la forme

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C, \tag{4.4}$$

où C désigne une constante quelconque. Une écriture de la forme $\int f(x)\,dx$ est parfois appelée *intégrale indéfinie*. Voici une liste de primitives qui permet déjà de calculer un bon nombre d'intégrales usuelles. Les variables α, a, b représentent ici des nombres réels quelconques avec $a \neq 0$.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x + C \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \qquad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotan} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

5. Méthodes de calcul des primitives et des intégrales

Il convient d'observer qu'il est en général impossible d'expliciter en termes de fonctions usuelles la primitive de beaucoup de fonctions pourtant relativement simples. Ainsi on peut montrer que e^{x^2} ou $\ln(\sin x)$ ont des primitives qui ne peuvent pas s'exprimer en termes des fonctions trigonométriques, puissances, exponentielles, logarithmes et leurs composées. Lorsque le calcul est possible, on s'appuie le plus souvent sur l'une des deux formules importantes qui suivent.

(5.1) Formule d'intégration par parties. Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Le produit uv est alors dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Par conséquent $uv' = (uv)' - u'v$ est intégrable si et seulement si $u'v$ l'est, et dans ce cas

$$\big[u(x)v(x)\big]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

On a donc la formule

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx,}$$

qui peut encore se récrire de manière plus abrégée

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b v\,du.}$$

En termes de primitives et avec la notation des intégrales indéfinies, on peut aussi écrire

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.}$$

(5.1 a) Exemple. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel, on cherche à calculer une primitive F_n de $f_n(x) = x^n e^{-x}$. La fonction f_n est déjà écrite comme produit de deux fonctions, que l'on sait intégrer. Intégrons par parties en prenant $u(x) = x^n$ et $v'(x) = e^{-x}$ (d'où, par exemple, $v(x) = -e^{-x}$) :

$$\begin{aligned}
F_n(x) = \int x^n e^{-x}\,dx &= \big[x^n(-e^{-x})\big] - \int n\,x^{n-1}(-e^{-x})\,dx \\
&= -x^n e^{-x} - n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + nF_{n-1}(x) \quad (+C).
\end{aligned}$$

Comme $F_0(x) = -e^{-x}$, cette relation de récurrence permet de calculer F_n pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$F_n(x) = -\Big(\sum_{p=0}^{n} n(n-1)\ldots(p+1)x^p\Big)e^{-x} \quad (+C).$$

(5.1 b) Exemple. De même, pour $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, en posant $u'(x) = x^a$ et $v(x) = (\ln x)^n$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int x^a(\ln x)^n\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^n - \int \frac{x^{a+1}}{a+1}\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(a+1)^2}\int x^a(\ln x)^{n-2}\,dx.
\end{aligned}$$

Par récurrence, ceci donne

$$\int x^a(\ln x)^n\,dx = x^{a+1}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{(a+1)^{p+1}}(\ln x)^{n-p}.$$

(5.2) Formule de changement de variable. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il est souvent commode de changer de variable, en posant $x = \varphi(t)$ pour une certaine fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (on ne suppose pas nécessairement $a \leqslant b$ ni $\alpha \leqslant \beta$). Il vient alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \big[F\circ\varphi(t)\big]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

On a donc la formule fondamentale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi\,d\varphi.}$$

En pratique, on effectue les substitutions

$$\boxed{x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),}$$

en prenant soin de changer les bornes comme indiqué. En termes d'intégrales indéfinies, si F désigne une primitive de f, on peut écrire

$$\boxed{F(x) = F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)\varphi'(t)\,dt.}$$

Exemple. Le cas particulier $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$ implique

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \ln|\varphi(t)| + C.$$

De même, le cas $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \arctan x$ implique

$$\int \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2}\,dt = \arctan\varphi(t) + C.$$

Ceci permet par exemple de trouver successivement les formules

$$\begin{aligned}
&\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C \\
&\int \operatorname{cotan} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C \\
&\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx = \int \Big(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\Big)dx = \ln|\tan x| + C \\
&\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + C \\
&\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\,dx = \ln\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big| + C.
\end{aligned}$$

(5.3) Intégration des polynômes trigonométriques. Pour calculer l'intégrale d'un polynôme trigonométrique $\int P(\cos x, \sin x)\,dx$ on utilise ce qu'on appelle la *méthode de linéarisation*, qui consiste à trouver une combinaison linéaire de la forme

$$P(\cos x, \sin x) = a_0 + \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Pour cela on remplace $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de l'exponentielle complexe (formules d'Euler)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ce qui permet d'exprimer $P(\cos(x, \sin x)$ comme combinaison linéaire des fonctions e^{inx} et e^{-inx}. On remplace finalement ces fonctions par $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$ (ou bien, si P est réel, on prend la partie réelle du résultat. Par exemple

$$\begin{aligned}
\cos^2 x\ \sin^3 x &= \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^2 \Big(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\Big)^3 \\
&= \frac{i}{2^5}\big(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\big)\big(e^{3ix} - 3\,e^{ix} + 3\,e^{-ix} - e^{-3ix}\big) \\
&= \frac{i}{32}\Big(e^{5ix} - e^{3ix} - 2\,e^{ix} + 2\,e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}\Big) \\
&= \frac{1}{16}\big(-\sin 5x + \sin 3x + 2\sin x\big).
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int \cos^2 x\ \sin^3 x\,dx = \frac{1}{16}\Big(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x\Big) + C.$$

(5.4) Intégration des fractions rationnelles. Une fraction rationnelle est une fonction définie comme le quotient P/Q de deux polynômes P et Q à coefficients réels ou complexes. La division euclidienne de P par Q s'écrit $P = EQ + R$ avec un quotient E et un reste R qui sont des polynômes tels que $\deg R < \deg Q$. On a alors

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}.$$

Le quotient E s'appelle aussi *la partie entière* de la fraction rationnelle, et R/Q la *partie polaire*. Elle est telle que $\lim_{x \to \infty} R(x)/Q(x) = 0$.

(5.4 a) Cas où $Q(x) = (x - \alpha)^m$. En écrivant R comme un polynôme en $X = x - \alpha$, soit $R(x) = \sum_{0 \leqslant j < m} c_j (x - \alpha)^j$, on voit que P/Q admet une écriture de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{(x - \alpha)^j}.$$

Si α est réel, la primitive se calcule sans peine puisque

$$\int \frac{1}{x - \alpha}\,dx = \ln|x - \alpha| + C, \qquad \int \frac{1}{(x - \alpha)^j}\,dx = -\frac{1}{j - 1}\frac{1}{(x - \alpha)^{j-1}} + C \quad \text{si } j > 1.$$

(5.4 b) Cas où Q est un trinôme du second degré. Si $Q(x) = ax^2 + bx + c$, le calcul des racines réelles ou complexes donne une factorisation $Q(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Si les racines α, β sont réelles et distinctes, on écrit

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right),$$

ce qui donne aussitôt

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + C.$$

Dans le cas d'un trinôme réel ax^2+bx+c de discriminant $\Delta = b^2-4ac < 0$, les racines sont complexes et on procède différemment. On a en effet

$$Q(x) = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big) = a\big((x-\gamma)^2+\delta^2\big)$$

avec $\gamma = -b/2a$ et $\delta = \sqrt{|\Delta|}/2|a|$, les racines complexes étant $\alpha = \gamma + i\delta$, $\overline{\alpha} = \gamma - i\delta$. Après division euclidienne de P par Q, on est ramené à intégrer des expressions de la forme

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\,dx.$$

Dans ce cas on écrit $\lambda x + \mu = \lambda(x-\gamma) + (\lambda\gamma+\mu)$ et on observe que $(x-\gamma)$ est la moitié de la dérivée du dénominateur, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int \frac{\lambda x+\mu}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\,dx &= \int \frac{\lambda(x-\gamma)}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\,dx + \int \frac{\lambda\gamma+\mu}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\lambda\ln\big((x-\gamma)^2+\delta^2\big) + (\lambda\gamma+\mu)\int \frac{1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\lambda\ln\big((x-\gamma)^2+\delta^2\big) + \frac{\lambda\gamma+\mu}{\delta}\arctan\frac{x-\gamma}{\delta} + C.\end{aligned}$$

6. Calcul d'aires et de volumes

Nous commencerons par une application concrète très importante qui est le calcul des aires et des volumes.

(6.1) Calcul d'aires[7]. Par définition même, l'intégrale d'une fonction f calcule l'aire algébrique située sous son graphe. Pour un domaine plan quelconque, la frontière est en général délimitée par les graphes de plusieurs fonctions (deux au moins, davantage si le domaine comporte des « trous » ou des « renfoncements »).

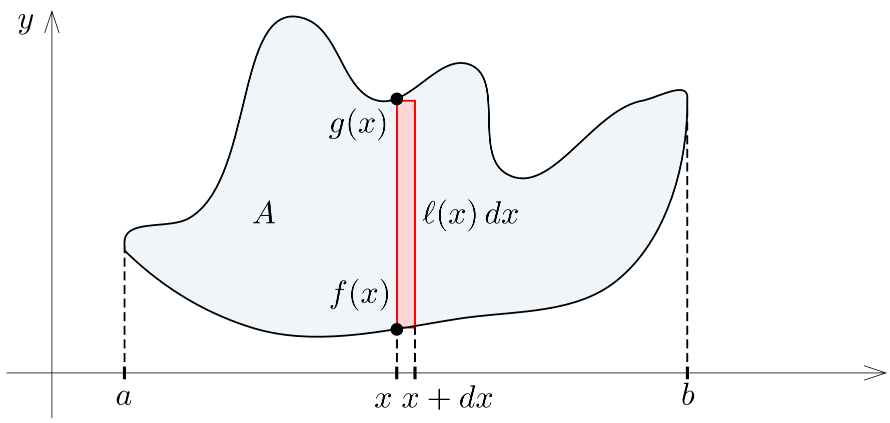


Fig. 9. Aire d'un domaine délimité par des graphes de fonctions.

Comme on le voit par soustraction des aires situées sous les graphes de f et g respectivement (et en remplaçant si nécessaire f, g par $f + C$, $g + C$ pour avoir des fonctions positives), l'aire du domaine plan est égale à la différence

$$A = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

L'aire d'un tel domaine plan est donc donnée par l'intégrale par rapport à x de la longueur $\ell(x) = g(x) - f(x)$ des sections « verticales » du domaine :

$$\boxed{A = \int_a^b \ell(x)\,dx = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx.}$$

À titre d'exemple, cherchons l'aire délimitée par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de demi-axes a et b. Le domaine délimité par l'ellipse est compris entre les graphes des fonctions $g(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ et $f(x) = -g(x)$ pour $x \in [-a, a]$, ce qui donne

$$A = \int_{-a}^a 2g(x)\,dx = 2b\int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Le changement de variable $x = a\sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne $dx = a\cos t\,dt$, d'où

$$A = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \pi ab. \qquad \square$$

(6.2) Calcul de volumes[8]**.** La procédure est essentiellement la même : on effectue des sections planes (disons par exemple en coupant par un plan horizontal $z = \text{Cte}$),

(8) La définition de l'aire (et de même du volume), pour des domaines « mesurables » arbitraires de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ requiert des concepts sophistiqués de la théorie de l'intégration que nous ne pouvons pas développer ici. La démonstration complète des formules 6.1 et 6.2 s'appuie ainsi sur le célèbre théorème dit de Fubini. Nous renvoyons à la section 9 du chapitre III de notre exposé complet pour une preuve détaillée dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Il n'est pas incorrect ici de considérer que les formules données pour la surface et le volume sont en quelque sorte des définitions de ces grandeurs.

et on suppose connue l'aire $S(z)$ d'une telle section plane (cette aire aura en général été évaluée elle-même par un calcul intégral comme expliqué au paragraphe 6.1).

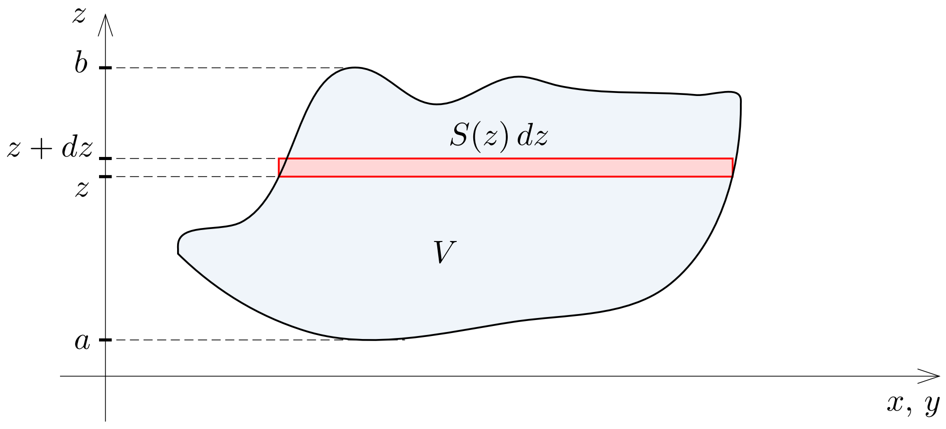


Fig. 10. Calcul d'un volume par tranchage dans la direction z.

Dans ce cas, le volume est donné par

$$\boxed{V = \int_a^b S(z)\,dz.}$$

Une application immédiate est le calcul du volume de la boule de rayon R d'équation $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. L'aire de la section $z = \text{Cte}$ est l'aire $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ du disque $x^2 = y^2 \leqslant R^2 - z^2$ de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$. On trouve donc

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)\,dz = 2\pi\big[R^2 z - z^3/3\big]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Une autre application est la formule donnant le volume d'un cône – éventuellement « oblique » – ayant une base d'aire A connue et une hauteur h.

On entend ici par cône la réunion des segments issus d'un point (sommet), ayant pour autre extrémité un point quelconque d'un domaine plan (choisi comme base). Pour faire le calcul, il est commode de choisir le sommet du cône comme origine et de fixer un repère orthonormé tel que la base du cône soit contenue dans le plan $z = h$.

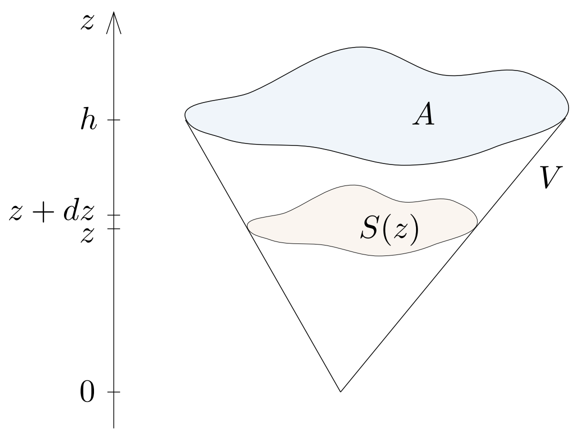


Fig. 11. Calcul du volume d'un cône.

Comme l'aire de l'homothétique de rapport λ d'un domaine plan est multipliée par λ^2, et comme le domaine d'aire $S(z)$ est homothétique du domaine d'aire A dans le rapport $\lambda = z/h$, on a

$$S(z) = \frac{z^2}{h^2} A.$$

On en déduit que le volume du cône vaut

$$V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{z^2}{h^2} A\,dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^h \frac{1}{h^2} A,$$

ce qui prouve la formule classique

$$V = \frac{1}{3} Ah.$$

On peut appliquer le même raisonnement pour un cône sphérique, c'est-à-dire un cône ayant pour sommet le centre d'une sphère, et pour base un domaine de cette sphère (plutôt qu'un domaine plan). Si R est le rayon de la sphère et A l'aire du domaine sphérique, on trouve alors comme précédemment $V = \frac{1}{3} AR$. Dans le cas où la base est la sphère toute entière, le cône est la boule elle-même, d'où $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. On en déduit ainsi la valeur de l'aire de la sphère

$$A = 4\pi R^2.$$

7. Encadrement par des fonctions en escalier. Intégrabilité des fonctions continues ou monotones par morceaux [9]

Nous nous proposons de démontrer ici que quelques classes usuelles de fonctions (notamment les fonctions continues ou monotones par morceaux) sont intégrables.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. L'idée est de considérer des encadrements

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \tag{7.1}$$

de f par des fonctions en escalier φ, ψ, comme figuré sur le schéma ci-dessous.

[9] À partir de ce point, le niveau théorique de l'exposé augmente sensiblement, nous considérons donc que cela relève plutôt de l'enseignement supérieur – le théorème (7.10) peut être admis d'emblée en Terminale si l'on souhaite ensuite être en mesure d'énoncer et de démontrer le corollaire 7.7.

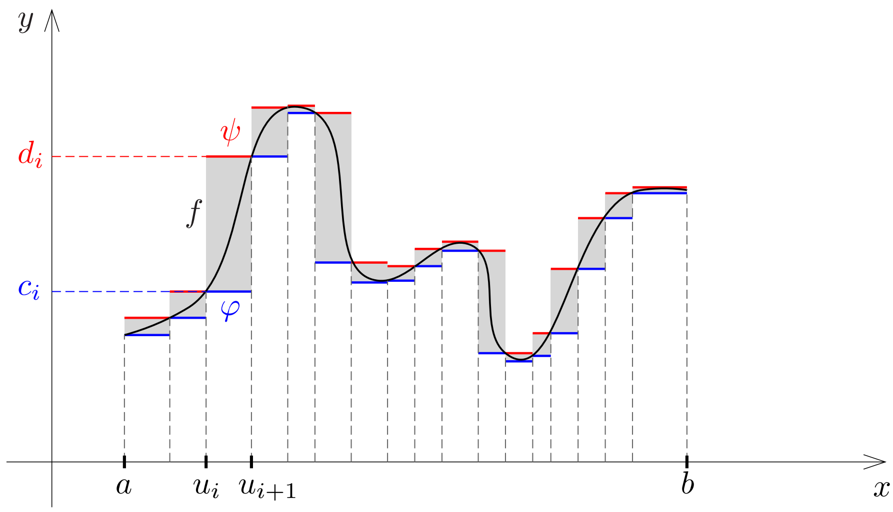


Fig. 12. Encadrement d'une fonction bornée f par des fonctions en escalier.

On peut supposer ici que les fonctions en escalier φ et ψ sont exprimées au moyen de la même subdivision $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_p = b$, sinon il est toujours possible de redécouper les subdivisions qui les définissent pour arriver à une subdivision commune [de plus, comme les valeurs $\varphi(u_i)$, $\psi(u_i)$ ne jouent pas de rôle dans les intégrales, on peut choisir par exemple $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$]. Dans cette situation, l'erreur due à l'encadrement de l'aire est précisément

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} (d_i - c_i)(u_{i+1} - u_i) \tag{7.2}$$

(somme des aires des rectangles dessinés en grisé sur la Fig. 12). On obtient ainsi le

(7.3) Critère d'intégrabilité au sens de Riemann. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction. On suppose que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un encadrement* $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ *de* f *par des fonctions en escalier* φ, ψ *telles que*

$$\boxed{\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} (d_i - c_i)(u_{i+1} - u_i) \leqslant \varepsilon.}$$

Alors f *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \leqslant f\Big\} = \inf\Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \geqslant f\Big\}.}$$

Démonstration. Considérons les ensembles de valeurs prises par les intégrales de fonctions en escalier φ qui minorent et ψ qui majorent, c'est-à-dire

$$E_1 = \Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \leqslant f\Big\}, \quad E_2 = \Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \geqslant f\Big\},$$

et $S = \sup E_1$, $I = \inf E_2$, Il est clair que pour tout $A_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx \in E_1$ et tout $A_2 = \int_a^b \psi(x)\,dx \in E_2$ on a $A_1 \leqslant A_2$. L'hypothèse de la condition signifie que pour un choix adéquat de φ, ψ on a $A_2 - A_1 \leqslant \varepsilon$. Ceci entraîne bien $S = \sup E_1 = I = \inf E_2$. Comme toute fonction en escalier est intégrable avec des jauges constantes (cf. exemple 2.4), il existe $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&\forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \qquad h_j \leqslant \delta_1 \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(\varphi) - A_1| \leqslant \varepsilon,\\
&\forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \qquad h_j \leqslant \delta_2 \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(\psi) - A_2| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Or nous avons $A_1 \leqslant S = I \leqslant A_2$ et $A_2 - A_1 \leqslant \varepsilon$. Prenons une subdivision pointée $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$ vérifiant $h_j \leqslant \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Nous obtenons dans ces conditions $S_D(\varphi) \leqslant S_D(f) \leqslant S_D(\psi)$, donc

$$S_D(f) \leqslant S_D(\psi) \leqslant A_2 + \varepsilon \leqslant I + 2\varepsilon, \qquad S_D(f) \geqslant S_D(\varphi) \geqslant A_1 - \varepsilon \geqslant S - 2\varepsilon.$$

Par suite en posant $A = S = I$ il vient $|S_D(f) - A| \leqslant 2\varepsilon$. La suffisance du critère d'intégrabilité est démontrée. □

(7.4)* Complément. *Le critère 7.3 est en fait une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. Pour voir la nécessité de la condition, supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable et soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ satisfaisant la définition 2.5. Considérons une subdivision pointée δ-fine $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ quelconque. En faisant varier indépendamment chaque x_j dans l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sup_{\{x_j\}} S_D(f) &= \sup_{\{x_j\}} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j(a_{j+1} - a_j),\\
\inf_{\{x_j\}} S_D(f) &= \inf_{\{x_j\}} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} m_j(a_{j+1} - a_j)
\end{aligned}$$

où $M_j = \sup_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x)$, $m_j = \inf_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x)$. Puisque $A - \varepsilon \leqslant S_D(f) \leqslant A + \varepsilon$, on voit en passant au sup et à l'inf que

$$A - \varepsilon \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} m_j(a_{j+1} - a_j) \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} M_j(a_{j+1} - a_j) \leqslant A + \varepsilon.$$

Ceci entraîne en particulier qu'aucune des bornes M_j ne peut être égale à $+\infty$ et qu'aucune des bornes m_j ne peut être égale à $-\infty$, et par conséquent que f est bornée. Si on définit les fonctions en escalier φ, ψ par

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in \,]a_j, a_{j+1}[, \qquad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

on obtient un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ tel que

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant 2\varepsilon,$$

et on voit que la condition du critère 7.3 est bien satisfaite. □

Une application directe de 7.3 est la preuve de l'intégrabilité des fonctions monotones ou continues (dans la suite de ce paragraphe, tous les résultats concerneront donc l'intégrabilité au sens de Riemann.)

(7.5) Théorème. *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. Supposons par exemple f croissante et soit $a = u_1 < \ldots < u_p = b$ une subdivision δ-fine de $[a, b]$, où $\delta > 0$ est une constante. De manière évidente, on définit un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ de f par des fonctions en escalier en posant

$$\varphi(x) = f(u_j) \text{ sur }]u_j, u_{j+1}[, \qquad \psi(x) = f(u_{j+1}) \text{ sur }]u_j, u_{j+1}[$$

(et $\varphi(u_j) = \psi(u_j) = f(u_j)$ comme déjà convenu). Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx &= \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} \big(f(u_{j+1}) - f(u_j)\big)(u_{j+1} - u_j)\\ &\leqslant \delta \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} \big(f(u_{j+1}) - f(u_j)\big) = \delta\big(f(b) - f(a)\big).\end{aligned}$$

On voit ainsi que la condition 7.3 est vérifiée en prenant δ assez petit. □

(7.6) Théorème *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en tout point $x \in [a, b]$ implique l'existence d'un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$\forall x' \in [a, b], \quad x' \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0\leqslant j<N}$ une subdivision pointée δ-fine. En prenant $x = x_j$ et en faisant parcourir à x' l'intervalle $[a_j, a_{j+1}] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]$, on déduit de la majoration $|f(x') - f(x_j)| \leqslant \varepsilon$ que les bornes inf et sup

$$m_j = \inf_{x'\in[a_j,a_{j+1}]} f(x'), \quad M_j = \sup_{x'\in[a_j,a_{j+1}]} f(x')$$

sont comprises entre $f(x_j) - \varepsilon$ et $f(x_j) + \varepsilon$, par conséquent $M_j - m_j \leqslant 2\varepsilon$. On obtient ainsi un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ de f par des fonctions en escalier φ, ψ telles que

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in]a_j, a_{j+1}[, \qquad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

et de plus

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx &= \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} (M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j)\\ &\leqslant 2\varepsilon \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} a_{j+1} - a_j = 2\varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

Ceci montre que le critère 7.3 est satisfait, donc f est intégrable.[10] □

(7.7) Théorème. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive F, donnée par*

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].}$$

Les autres primitives sont les fonctions de la forme $F_1(x) = F(x) + C$ où C est une constante.

Démonstration. Nous savons que l'intégrale donnant $F(x)$ existe par le Théorème 7.6. La relation de Chasles donne

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de continuité dit que $f(x) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \varepsilon$ pour $|t - x| \leqslant \delta(x)$, on a donc

$$f(x) - \varepsilon = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon)\,dt \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon)\,dt = f(x) + \varepsilon$$

pour $|h| \leqslant \delta(x)$, ce qui signifie que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Si on a une autre primitive F_1, il vient $(F_1 - F)' = f' - f' = 0$, donc $F_1 - F = C$ constante. □

(7.8) Proposition.

(a) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue positive ou nulle, on a $\int_a^b f(x) = 0$ si et seulement si $f = 0$.*

(b) *Si f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues et $f \leqslant g$, on a $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ dès que f et g se sont pas égales.*

Démonstration. (a) Si f n'est pas nulle, il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, et on pose alors $\varepsilon = f(x_0)/2$. La continuité de f en x_0 implique qu'il existe un intervalle $[x_0, x_0 + \eta]$ (ou $[x_0 - \eta, x_0]$, si $x_0 = b$) sur lequel $f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On voit donc qu'il existe un sous-intervalle $[c,d]$ de de $[a,b]$ de longueur $d - c = \eta > 0$ sur lequel $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \geqslant \varepsilon$. Par suite $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx \geqslant (d-c)\,\varepsilon > 0$.

(b) Si $f \leqslant g$ et $f \neq g$, alors $h = g - f \geqslant 0$ n'est pas nulle, donc $\int_a^b h(x)\,dx > 0$ d'après (a). □

[10] On remarquera que dans cette preuve l'utilisation explicite de la propriété de continuité uniforme de la fonction f n'a pas été nécessaire, ce qui est une simplification appréciable susceptible de rendre la preuve abordable dès la classe terminale [avec des vitamines tout de même !].

(7.9) Formule de la moyenne. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un point $c \in \,]a,b[$ tel que la « valeur moyenne de f sur $[a,b]$ » soit égale à $f(c)$:*

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).}$$

Démonstration. Soit $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$. Supposons d'abord f non constante. D'après la proposition 7.8 (b) appliquée aux inégalités $m \leqslant f \leqslant M$, nous avons

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a), \quad \text{soit} \quad m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M.$$

La formule de la moyenne est donc une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(]a,b[)$ est un intervalle qui contient l'intervalle $]m,M[$. Si f est égale à une constante C, le résultat est évident, les deux membres de la formule étant égaux à C quel que le soit le choix de $c \in \,]a,b[$. $\square$

(7.10) Une généralisation. *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue (resp. monotone) par morceaux s'il existe une subdivision*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$$

telle que f soit continue (resp. monotone) sur chaque intervalle $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ et possède des limites à droite et à gauche finies en chaque point α_j tel que $j < N$ (resp. $j > 0$). Toute fonction continue ou monotone par morceaux est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. En effet, la restriction $f_{|[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}$ diffère d'une fonction continue (resp. monotone) par une fonction en escalier nulle sur $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ (et prenant des valeurs adéquates en α_j et α_{j+1}). Par conséquent $f_{|[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}$ est intégrable au sens de Riemann, et l'intégrabilité de f sur $[a,b]$ résulte de la relation de Chasles. $\square$

Nous démontrons maintenant une généralisation du théorème fondamental 4.1. Observons d'abord que comme une fonction nulle sauf sur un ensemble fini est d'intégrale nulle (remarque 3.2), on peut envisager d'intégrer des fonctions f qui sont seulement définies sur le complémentaire $[a,b] \smallsetminus Z$ d'un ensemble fini Z : on se ramène au cas d'une fonction partout définie en étendant f arbitrairement sur $[a,b]$, par exemple en posant $\tilde{f}(x) = 0$ sur Z. L'intégrale ainsi calculée est indépendante du prolongement $\tilde{f}$ choisi.

(7.11) Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble fini $Z = \{u_i\,;\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$ tel que f soit dérivable sur $[a,b] \smallsetminus Z$. Alors f' (prolongée arbitrairement aux points u_i) est KH-intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

*Démonstration.** On reprend la démonstration du théorème 4.1. La dérivabilité de f sur $[a,b] \smallsetminus Z$ implique l'existence d'une fonction $\delta : [a,b] \smallsetminus Z \to]0,+\infty[$ telle que

$$y \in [a,b], \quad y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow \big|f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\big| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

pour tout $x \in [a,b] \smallsetminus Z$, ce qui donne

$$\big|f(a_{j+1})-f(a_j)-(a_{j+1}-a_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon|a_{j+1}-a_j|$$

pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j,a_{j+1}],x_j)\}$ δ-fine, lorsque $x_j \in [a,b] \smallsetminus Z$. D'autre part, si $x_j = u_i \in Z$, la continuité de f au point u_i entraîne l'existence de $\delta_i > 0$ tel que tout point $x \in [u_i-\delta_i, u_i+\delta_i]$ satisfasse $|f(x)-f(u_i)| \leqslant \varepsilon\, 2^{-i}$. On choisit de plus δ_i assez petit pour que $\delta_i|f'(u_i)| \leqslant \varepsilon\, 2^{-i}$, et on pose $\delta(u_i) = \delta_i$. Dans ce cas il vient

$$|f(a_{j+1})-f(a_j)| \leqslant \big|(f(a_{j+1}-f(u_i))-(f(a_j-f(u_i))\big| \leqslant 2\varepsilon\, 2^{-i}$$

si $x_j = u_i$ et $a_{j+1}-a_j \leqslant \delta(x_j) = \delta(u_i) = \delta_i$, ce qui implique

$$\big|f(a_{j+1})-f(a_j)-(a_{j+1}-a_j)f'(u_i)\big| \leqslant 3\varepsilon\, 2^{-i}.$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$\big|f(b)-f(a)-S_D(f')\big| \leqslant \varepsilon(b-a)+3\varepsilon,$$

(car $\sum_{1\leqslant i\leqslant p} 3\varepsilon\, 2^{-i} \leqslant 3\varepsilon$), et le théorème est démontré. □

(7.12)* Remarque. On peut voir facilement que le théorème 7.11 est en fait encore vrai avec un ensemble $Z = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dénombrable.

(7.13) Corollaire. *Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ admet une primitive F sur $]a,b[$, et si cette primitive F admet une limite à droite $F(a+0)$ en a et une limite à gauche $F(b-0)$ en b, alors f est KH-intégrable sur $[a,b]$ (si f n'est pas a priori définie en a et b, on peut lui attribuer des valeurs $f(a)$, $f(b) \in \mathbb{R}$ arbitraires), et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0)-F(a+0) = \lim_{x\to b-0} F(x) - \lim_{x\to a+0} F(x).}$$

Démonstration. Il suffit en effet de prolonger F par continuité sur $[a,b]$ en posant $F(a) = \lim_{x\to a+0} F(x)$ et $F(b) = \lim_{x\to b-0} F(x)$, puis d'appliquer le théorème 7.11 à sa dérivée F' qui est définie sur $]a,b[= [a,b] \smallsetminus Z$ avec $Z = \{a,b\}$. □

Un exemple typique d'application du corollaire 7.13 est celui de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{sur l'intervalle }]-1,1[.$$

Dans ce cas, on a en effet une primitive $F(x) = \arcsin(x)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$. On obtient par conséquent

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi.$$

Plus généralement, le corollaire 7.13 nous amène à la définition des « intégrales impropres ».

(7.14) Intégrales « impropres ». *Soit* $I = [a, b[\subset \mathbb{R}$ *un intervalle semi-ouvert, où* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *et soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable (par exemple continue ou monotone par morceaux) sur tout intervalle* $[a, \beta] \subset [a, b[$. *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente au point* b *si la limite*

$$A = \lim_{\beta \to b_-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

existe dans $\mathbb{R}$ *(en particulier finie), et on pose alors* $\int_a^b f(x)\,dx = A$.

On donne une définition analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert $]a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *en considérant la limite* $\lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ *avec* $[\alpha, b] \subset]a, b]$, *et on dit qu'on a convergence sur un intervalle ouvert* $]a, b[$ *si les intégrales sur* $]a, c]$ *et* $[c, b[$ *convergent pour tout point intermédiaire* $c \in]a, b[$.

(7.15) Exemples. On vérifiera que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \frac{1}{b-1}$$

convergent respectivement pour $a < 1$ et $b > 1$, et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c}$$

converge pour tout $c > 0$. En utilisant le calcul de la primitive de $x^n e^{-x}$ donné au point (5.1 a), on obtient également le résultat classique

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!\,.$$

(7.16) Convergence absolue.** *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction KH-intégrable sur tout intervalle fermé borné* $[a, \beta]$. *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est absolument convergente si de plus* $|f|$ *est KH-intégrable sur chaque intervalle* $[a, \beta] \subset [a, b[$ *et si la limite*

$$\lim_{\beta \to b_-} \int_a^\beta |f(x)|\,dx$$

existe dans $\mathbb{R}$ *(donc en particulier si elle est finie).*

On donne une définition analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert $]a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, en considérant la limite $\lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ avec $[\alpha, b] \subset\,]a,b]$, et on dit qu'on a convergence sur un intervalle ouvert $]a,b[$ si les intégrales sur $]a,c]$ et $[c,b[$ convergent pour tout point intermédiaire $c \in\,]a,b[$.

Le critère de Cauchy* permet de voir qu'il y a convergence (resp. convergence absolue) de l'intégrale sur $[a,b[$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta_\varepsilon < b$ tel que pour tous $\beta, \gamma \in [\beta_\varepsilon, b[$, $\beta < \gamma$, on ait

$$\Big|\int_\beta^\gamma f(x)\,dx\Big| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{resp.} \quad \int_\beta^\gamma |f(x)|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\big|\int_\beta^\gamma f(x)\,dx\big| \leqslant \int_\beta^\gamma |f(x)|\,dx$, il est clair que la convergence absolue implique la convergence.

8. Convergence uniforme, continuité et dérivabilité d'intégrales en fonction de paramètres**

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions réelles. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers une limite $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si la distance uniforme de f_n à f tend vers 0 c'est-à-dire si

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

(8.1) Théorème de convergence uniforme. *Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions réelles convergeant uniformément vers une limite f. Si les fonctions f_n sont Riemann-intégrables* (*resp. KH-intégrables*)*, alors f est Riemann-intégrable* (*resp. KH-intégrable*) *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Posons $A_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$. Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tels que $|f_n - f| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Nous avons $|f_p - f_q| \leqslant 2\varepsilon$ pour $p, q \geqslant n_0$, d'où $|A_p - A_q| \leqslant 2\varepsilon(b-a)$. La suite (A_n) est donc une suite de Cauchy, par conséquent la limite $A = \lim_{n \to +\infty} A_n$ existe. De plus, il existe une jauge δ (resp. une jauge constante dans le cas de l'intégrabilité au sens de Riemann) telle que pour toute subdivision pointée D de pas $h_j \leqslant \delta(x_j)$ on ait $|S_D(f_{n_0}) - A_{n_0}| \leqslant \varepsilon$. Il vient à la limite $|A - A_{n_0}| \leqslant 2\varepsilon(b-a)$ tandis que $|S_D(f) - S_D(f_{n_0})| \leqslant \sum |f(x_j) - f_{n_0}(x_j)|\,h_j \leqslant \varepsilon(b-a)$. En mettant bout à bout ces inégalités il vient

$$|S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon + 3\varepsilon(b-a),$$

donc f est bien intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale $A = \lim A_n$. □

(8.2) Remarque. Pour obtenir l'intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock de la limite $f = \lim f_n$, il suffirait d'avoir une estimation de la forme $|f_n - f| \leqslant \varepsilon_n g$ avec $g \geqslant 0$ KH-intégrable (non nécessairement bornée) et $\varepsilon_n \to 0$. Nous obtiendrons de toutes façons des théorèmes de convergence beaucoup meilleurs encore dans ce cas, cf. chapitre II.

Rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I est dite *réglée* si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point de l'intérieur I°, ainsi qu'une limite à droite en $a = \inf I$ si $a \in I$ et à gauche en $b = \sup I$ si $b \in I$.

(8.3) Lemme. *Toute fonction réglée sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est limite uniforme de fonctions en escalier.*

(8.4) Corollaire. *Toute fonction réglée sur sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ y est Riemann-intégrable.*

Démonstration du lemme et de son corollaire. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\delta(x) > 0$ et des constantes $c^+ = \lim_{\xi\to x+0} f(\xi)$, $c^- = \lim_{\xi\to x-0} f(\xi)$ telles que $|f(x) - c^-| \leqslant \varepsilon$ sur $[x - \delta(x), x] \cap [a, b]$ et $|f(x) - c^+| \leqslant \varepsilon$ sur $[x, x + \delta(x)] \cap [a, b]$. D'après le lemme I.2.6, on peut trouver une subdivision pointée $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$ δ-fine. Ceci nous permet de définir une fonction en escalier φ en posant

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad \varphi(a_j) = f(a_j),$$
$$\varphi_{|]a_j,x_j[} = c_j^- = \lim_{\xi\to x_j-0} f(\xi), \quad \varphi_{|]x_j,a_{j+1}[} = c_j^+ = \lim_{\xi\to x_j+0} f(\xi).$$

Par construction nous avons $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$ sur $[a, b]$. Il en résulte que f est Riemann-intégrable comme limite uniforme de fonctions en escalier. □

On va maintenant tirer du théorème de convergence uniforme les propriétés usuelles de continuité et de dérivabilité sous le signe somme des intégrales dépendant de paramètres. Des résultats beaucoup plus forts sont vrais, mais on aura besoin pour cela de théorèmes de convergence plus subtils que le théorème 8.1 (cf. Chapitre II, section 5).

(8.5) Lemme. *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque et $f : [a, b]\times T \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une application continue. Alors, si $t_0 \in T$, la famille de fonctions $f_t : x \mapsto f(x, t)$ converge uniformément vers la fonction $f_{t_0} : x \mapsto f(x, t_0)$ quand $T \ni t$ tend vers t_0. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de t_0 tel que pour $t \in T \cap V$, on ait $|f(x, t) - f(x, t_0)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration. Pour tout $x_0 \in [a, b]$, l'hypothèse de continuité au point (x_0, t_0) implique qu'il existe un voisinage V_{x_0,t_0} de t_0 (dépendant de x_0) et un voisinage

$$U_{(x_0,t_0)} = [x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0)] \times V_{x_0,t_0} \quad \text{de } (x_0, t_0)$$

tel que $(x, t) \in U_{(x_0,t_0)} \cap ([a, b] \times T)$ implique $|f(x, t) - f(x_0, t_0)| \leqslant \varepsilon/2$. En appliquant ceci en particulier pour $t = t_0$ et en faisant la différence, on voit que que pour tout $t \in T \cap V_{x_0,t_0}$ et tout $x \in [x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0)]$ on a $|f(x, t) - f(x, t_0)| \leqslant \varepsilon$. D'après le lemme I.2.6, il existe une subdivision pointée $D = ([a_i, a_{i+1}], x_i)$ de $[a, b]$ qui est δ-fine. Par conséquent $[a_i, a_{i+1}] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$, et en prenant $t \in V = \bigcap_i V_{x_i,t_0}$ on voit que la conclusion du lemme est vérifiée. □

De là, on déduit aussitôt le théorème de continuité des intégrales dépendant de paramètres.

(8.6) Continuité sous le signe somme. *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque et $f : [a,b] \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une application continue. Alors l'application*

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

est continue sur T.

Démonstration. Avec les notations du lemme 8.5, on trouve

$$|F(t) - F(t_0)| \leqslant \int_a^b \big|f(x,t) - f(x,t_0)\big|\,dx \leqslant (b-a)\varepsilon$$

pour $t \in T \cap V$, ce qui prouve la continuité de F au point t_0. □

(8.7) Dérivation sous le signe somme. *Soit T un intervalle de la droite réelle et $f : [a,b] \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction telle que*

(a) *f est continue sur $[a,b] \times T$;*

(b) *f admet en tout point une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ qui est elle-même continue sur $[a,b] \times T$.*

Alors l'application $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$ est de classe C^1 sur T et pour tout $t_0 \in T$ on a

$$\boxed{F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx}.$$

Démonstration. Soit $t \in T$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto f(x,t)$ sur l'intervalle $[t_0, t]$, on voit que

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x})\,dx$$

pour un certain point $c = c_{t,x} \in \,]t_0, t[$. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le lemme 8.5 à la fonction continue $g(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, on voit qu'il existe un voisinage $V = \,]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ de t_0 tel que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in V$. Sous cette hypothèse on a également $c(x,t) \in \,]t_0, t[\, \subset V$, donc $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)| \leqslant \varepsilon$ et par suite

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx \right| = \left| \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(x, c_{t,x}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \Big)\,dx \right| \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

On a donc bien $F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx$, et cette relation montre que F' est continue d'après le théorème 8.6. □

Pour un paramètre $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, nous avons le résultat analogue suivant.

(8.8) Différentiabilité sous le signe somme. *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ une partie ouverte et $f : [a,b] \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction telle que*

(a) *f est continue sur $[a,b] \times T$;*

(b) *f admet en tout point des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)$ qui sont elles-mêmes continues sur $[a,b] \times T$.*

Alors l'application $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$ est de classe C^1 sur T et on a

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\,dx.}$$

Démonstration. Il suffit en effet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme séparément pour chaque variable t_j pour voir que les dérivées partielles $\partial F/\partial t_j$ existent, et d'invoquer ensuite le théorème de continuité pour voir que ces dérivées partielles sont continues sur T. □

Il est bon parfois de connaître également la formule de différentiation sous le signe somme dans le cas où l'intégrale est calculée sur des intervalles dépendant du paramètre.

(8.9) Formule générale de dérivation sous le signe somme. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $T \subset \mathbb{R}$ des intervalles. On considère une intégrale de la forme*

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

où $a, b : T \to I$ sont des fonctions de classe C^1 et $f : I \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ continue sur $I \times T$. Alors l'application F est de classe C^1 sur T et on a

$$\boxed{F'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + b'(t)f(b(t),t) - a'(t)f(a(t),t).}$$

Démonstration. On pose

$$\Phi(t,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dx.$$

Plaçons-nous sur un sous-intervalle fermé borné $T' = [t_1, t_2] \subset T$, et soit

$$A = \min_{t \in T'} a(t) \in I, \qquad B = \max_{t \in T'} b(t) \in I.$$

Nous avons $[A,B] \subset I$, donc les hypothèses des théorèmes 8.5 et 8.6 sont satisfaites sur $[A,B] \times T'$. On voit par conséquent que Φ admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v,t), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u,t)$$

(pour cette dernière égalité, il suffit d'échanger les bornes u et v). De plus, ces trois dérivées partielles sont continues en les variables (t, u, v). Pour $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ c'est clair par hypothèse, tandis que pour $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ cela résulte de l'estimation

$$\Big|\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,u,v)-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_0,u_0,v_0)\Big| \leqslant M(|u-u_0|+|v-v_0|)+\Big|\int_{u_0}^{v_0}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\Big)\,dx\Big|$$

dans laquelle M est un majorant de $|\frac{\partial f}{\partial t}|$ sur la pavé $[A, B] \times T'$. On déduit de tout cela que $\Phi(t, u, v)$ et $F(t) = \Phi(t, a(t), b(t))$ sont de classe C^1. De plus

$$F'(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,a(t),b(t)) + \frac{\partial\Phi}{\partial u}(t,a(t),b(t))\,a'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial v}(t,a(t),b(t))\,b'(t)$$

ce qui donne la formule (8.9) attendue. □

9. Intégrales à valeurs vectorielles et formule de Taylor**

L'objet de cette section est d'étendre la définition des intégrales au cas des fonctions $f : [a, b] \to E$ à valeurs dans un espace E de Banach, c'est-à-dire un *espace normé complet* $(E, \|\ \ \|)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va voir que la théorie de l'intégrale de Kurzweil-Henstock permet de généraliser, d'unifier et de simplifier considérablement des énoncés classiques comme le théorème des accroissements finis ou les différentes formules de Taylor pour les fonctions à valeurs vectorielles. On définit d'abord les sommes de Riemann associées à une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0\leqslant j<N}$ par

$$(9.1) \qquad \boxed{S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1}(a_{j+1}-a_j)\,f(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j\,f(x_j),}$$

la seule différence avec le cas réel étant qu'il s'agit désormais d'une combinaison linéaire à valeurs dans E. On pose alors comme précédemment la définition suivante.

(9.2) Définition. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction quelconque à valeurs dans un espace de Banach E. On dit que f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock (ou KH-intégrable) s'il existe un élément $A \in E$ qui représente la valeur de l'intégrale, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ donné a priori, on peut trouver une jauge $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ en sorte que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait*

$$D\ \delta\text{-fine, i.e. } \forall j,\ a_{j+1}-a_j \leqslant \delta(x_j) \quad\Rightarrow\quad |S_D(f)-A| \leqslant \varepsilon.$$

L'élément $A \in E$ de la définition précédente est appelé intégrale de f sur $[a, b]$, et on écrit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mathrm{KH},\,D} S_D(f) = \lim_{\mathrm{KH},\,D}\sum_{j=0}^{N-1}(a_{j+1}-a_j)f(x_j).}$$

L'inégalité triangulaire donne aussitôt $\|S_D(f)\| \leqslant S_D(\|f\|)$, d'où :

(9.3) Proposition. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction KH-intégrable à valeurs dans un espace de Banach E. Alors on a*

$$\boxed{\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\|\,dx}$$

dès que $\|f\|$ est KH-intégrable sur $[a,b]$ (on notera que la KH-intégrabilité de f n'entraîne pas nécessairement celle de $\|f\|$).

On considère maintenant des fonctions différentiables à valeurs dans des espaces de Banach. Soient G, E des espaces de Banach, U une partie de G et $f : U \to E$ une fonction. On dit que f est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $\ell = df(x) \in \mathcal{L}_c(G,E)$ telle qu'on puisse écrire

$$f(y) = f(x) + \ell(y-x) + o(\|y-x\|)$$

pour $y \in U$ voisin de x, c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que $y \in U$, $\|y-x\| \leqslant \delta(x)$ implique

$$\big\|f(y) - (f(x) + \ell(y-x))\big\| \leqslant \varepsilon\|y-x\|. \tag{9.4}$$

Dans le cas où U est une partie de la droite réelle $G = \mathbb{R}$, ceci équivaut à l'existence d'une dérivée $f'(x) \in E$, i.e.

$$f'(x) = \lim_{y\in U,\, y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in E, \tag{9.4$'$}$$

la relation entre $f'(x)$ et $\ell = df(x)$ étant que $f'(x) = \ell(1)$. Le « théorème fondamental de l'Analyse » s'énonce alors :

(9.5) Théorème. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue en tout point de $[a,b]$ et dérivable en dehors d'un ensemble dénombrable $Z = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Alors la dérivée $f' : [a,b] \smallsetminus Z \to E$, prolongée arbitrairement sur Z, est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock sur $[a,b]$ et*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

Démonstration : c'est une copie pure et simple de la preuve de (7.11), à l'invocation près de la norme de E à la place de la valeur absolue usuelle. La dérivabilité de f sur $[a,b] \smallsetminus Z$ implique l'existence d'une fonction $\delta : [a,b] \smallsetminus Z \to \,]0,+\infty[$ telle que

$$y \in [a,b], \quad y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow \big\|f(y) - f(x) - (y-x)f'(x)\big\| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

pour tout $x \in [a,b] \smallsetminus Z$. En prenant $y = a_j$ puis $y = a_{j+1}$ et en sommant, ceci donne

$$\big|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1}-a_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon|a_{j+1}-a_j|$$

pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j,a_{j+1}],x_j)\}$ δ-fine, lorsque $x_j \in [a,b] \smallsetminus Z$. D'autre part, si $x_j = u_i \in Z$, la continuité de f au point u_i entraîne l'existence de

$\delta_i > 0$ tel que tout point $x \in [u_i - \delta_i, u_i + \delta_i]$ satisfasse $\|f(x) - f(u_i)\| \leqslant \varepsilon\, 2^{-i}$. On choisit de plus δ_i assez petit pour que $\delta_i \|f'(u_i)\| \leqslant \varepsilon\, 2^{-i}$, et on pose $\delta(u_i) = \delta_i$. Dans ce cas il vient

$$\|f(a_{j+1}) - f(a_j)\| \leqslant \big\|(f(a_{j+1} - f(u_i)) - (f(a_j - f(u_i))\big\| \leqslant 2\varepsilon\, 2^{-i}$$

si $x_j = u_i$ et $a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j) = \delta(u_i) = \delta_i$, ce qui implique

$$\big\|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j) f'(u_i)\big\| \leqslant 3\varepsilon\, 2^{-i}.$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$\big\|f(b) - f(a) - S_D(f')\big\| \leqslant \varepsilon(b-a) + 6\varepsilon,$$

(car $\sum_{i\in\mathbb{N}} 3\varepsilon\, 2^{-i} = 6\varepsilon$), et le théorème est démontré. □

Supposons maintenant que $f : U \to E$ soit une fonction différentiable sur une partie U d'un espace de Banach G, et soit $\gamma : [a,b] \to U$ une fonction continue et disons de classe C^1 par morceaux. Alors $f\circ\gamma$ est continue sur $[a,b]$ et différentiable en dehors des points anguleux de γ (en nombre fini par hypothèse). Comme $(f\circ\gamma)' = (df\circ\gamma)(\gamma')$, il vient

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (df\circ\gamma)(\gamma'(t))\, dt \tag{9.6}$$

et en passant au sup de la norme pour l'intégrande $\|(df\circ\gamma)(\gamma'(t))\| \leqslant \|df(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\|$, on en déduit l'inégalité dite des *accroissements finis*

$$\big\|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\big\| \leqslant \sup_{z\in \mathrm{Im}(\gamma)} \|df(z)\| \times \mathrm{longueur}(\gamma) \tag{9.6$'$}$$

où $\mathrm{longueur}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t))\|\, dt$. En particulier, si $[x,y]$ est un segment contenu dans l'ensemble U, paramétré par $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$, on trouve

$$\big\|f(y) - f(x)\big\| \leqslant \sup_{z\in[x,y]} \|df(z)\| \times \|y - x\|. \tag{9.6$''$}$$

On notera qu'en fait (9.6), (9.6′) et (9.6″) sont vérifiés dès lors que γ est continu sur $[a,b]$ et différentiable en dehors d'un ensemble dénombrable, et qu'il suffit de même que f soit continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ et différentiable en dehors d'une partie dénombrable de $\mathrm{Im}(\gamma)$ (resp. de $[x,y]$). Le cas particulier de (9.6) avec $\gamma(t) = x + th$, $t \in [0,1]$, donne également

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 df(x+th)(h)\, dt \tag{9.6$'''$}$$

dès que f est différentiable sur le segment $[x, x+h]$. Par récurrence sur p, on définit la dérivée p-ième

$$d^p f : U \to \mathcal{L}_c(G^p, E) \qquad \text{par } d^p f = d(d^{p-1} f),$$

où $\mathcal{L}_c(G^p, E) \simeq \mathcal{L}_c(G, \mathcal{L}_c(G^{p-1}, E))$ désigne l'espace des applications p-multilinéaires continues de $G^p = G \times \ldots \times G$ dans E. La dérivée p-ième est donc définie sous l'hypothèse que $d^{p-1}f$ existe et soit elle-même différentiable sur $U \subset G$; on dit alors que f est p fois différentiable sur U. Dans ce cas, on obtient la

(9.7) Formule de Taylor avec reste intégral. *Soit $f : U \to E$ une fonction p fois différentiable sur U. Alors pour tout segment $[x, x+h] \subset U$ on a*

$$\boxed{\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} d^{p-1}f(x)(h)^{p-1} \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(x+th)(h)^p \, dt. \end{aligned}}$$

On notera que (9.7) se réduit à (9.6‴) pour $p = 1$ et que la preuve s'obtient immédiatement par récurrence à l'aide d'une intégration par parties, sachant que la dérivée de $t \mapsto d^p f(x+th)(h)^p$ est $t \mapsto d^{p+1} f(x+th)(h)^{p+1}$:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(x+th)(h)^p \, dt = \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f(x+th)(h)^{p+1} \, dt.$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, la version générale de la « formule de la moyenne » démontrée à l'exercice 11.31 (c) implique qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(x+th)(h)^p \, dt &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} \, dt \times d^p f(x+\theta h)(h)^p \\ &= \frac{1}{p!} d^p f(x+\theta h)(h)^p, \end{aligned}$$

d'où

$$(9.7') \quad f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1} + \frac{1}{p!} d^p f(x+\theta h)(h)^p.$$

La formule (9.7′) se réduit à $f(x+h) - f(x) = df(x+\theta h)(h)$ pour $p = 1$. Ces derniers résultats ne sont pas vrais pour une fonction à valeurs vectorielles $f : U \to E$ avec $\dim_{\mathbb{R}} E \geqslant 2$. Ainsi pour $p = 1$, $E = \mathbb{C}$ et $f(x) = e^{ix}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(e^{2i\pi\theta}) \times 2\pi, \qquad \forall \theta \in]0, 1[.$$

Sous une hypothèse plus faible, la formule de Taylor avec reste intégral montre l'existence d'un developpement limité :

(9.8) Formule de Taylor-Young. *Supposons que $f : U \to E$ soit $(p-1)$ fois différentiable sur U et que $d^{p-1}f$ soit différentiable en x. Alors pour $h \to 0$ on a*

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \ldots + \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p + o(\|h\|^p).}$$

Démonstration. En effet, on peut appliquer (9.7) à l'ordre $p-1$ et estimer terme à terme le reste intégral

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^{p-1} f(x+th)(h)^{p-1}\, dt,$$

au moyen de l'égalité de définition

$$d^{p-1} f(x+th) = d^{p-1} f(x) + d^p f(x+th)(th) + \|th\| \varepsilon(th),$$

qui exprime l'hypothèse de différentiabilité de $d^{p-1} f$ au point x. Étant donné $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|h\| \leqslant \delta$ implique $\|\varepsilon(h)\| \leqslant \eta$. Comme $\int_0^1 t\, \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!}\, dt = \frac{1}{p!}$, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1}\, dt &= \frac{1}{(p-1)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1}, \\
\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^p f(x)(th)(h)^{p-1}\, dt &= \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p, \\
\left\| \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} \|th\| \varepsilon(th)(h)^{p-1}\, dt \right\| &\leqslant \frac{\eta}{p!} \|h\|^p \qquad \text{pour } \|h\| \leqslant \delta,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de (9.8). $\square$

On va maintenant donner une expression commode de la dérivée p-ième en termes de différences finies itérées. Pour $h \in G$, on introduit « l'opérateur aux différences finies »

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

On suppose ici f définie et différentiable sur U, avec U *ouvert*, de sorte que $\Delta_h f$ est bien définie au voisinage de tout point $x \in U$ si h est assez petit. Pour $x \in U$ et $k \in G$ assez petit, la formule (9.6‴) donne

$$\Delta_k f(x) = f(x+k) - f(x) = \int_0^1 df(x+tk)(k)\, dt. \tag{9.9}$$

Supposons f deux fois différentiable au point x (c'est-à-dire f différentiable au voisinage de x et df différentiable en x). On peut alors écrire

$$\Delta_h \Delta_k f(x) = \Delta_k f(x+h) - \Delta_k f(x) = \int_0^1 \big(df(x+h+tk) - df(x+tk)\big)(k)\, dt. \tag{9.9′}$$

L'hypothèse de différentiabilité de df en x permet d'écrire

$$df(x+h) = df(x) + d^2 f(x)(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

et on trouve donc par différence

$$\begin{aligned} df(x+h+tk) - df(x+tk) = &\ \big(df(x) + d^2f(x)(h+tk) + \|h+tk\|\varepsilon(h+tk)\big) \\ &- \big(df(x) + d^2f(x)(tk) + \|tk\|\varepsilon(tk)\big) \\ =&\ d^2f(x)(h) + \|h+tk\|\varepsilon(h+tk) - \|tk\|\varepsilon(tk). \end{aligned}$$

En évaluant cette différence (qui est un élément de de $\mathcal{L}_c(G,E)$) sur le vecteur k, on obtient

$$\begin{aligned} &\big\|\big(df(x+h+tk) - df(x+tk)\big)(k) - d^2f(x)(h,k)\big\| \\ &\qquad \leqslant (\|h\| + t\|k\|)\|k\| \times \|\varepsilon(h+tk)\| + (t\|k\|)\|k\| \times \|\varepsilon(tk)\|. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$ on a $\|\varepsilon(h)\| \leqslant \eta$ si $\|h\| \leqslant \delta$ est assez petit. Pour $\|h\| \leqslant \delta/2$ et $\|k\| \leqslant \delta/2$, on en déduit alors

$$\big\|\big(df(x+h+tk) - df(x+tk)\big)(k) - d^2f(x)(h,k)\big\| \leqslant \eta(\|h\| + 2t\|k\|)\|k\|.$$

Par intégration sur $[0,1]$ et compte tenu de l'égalité (9.9′) il vient

$$\big\|\Delta_h\Delta_k f(x) - d^2f(x)(h,k)\big\| \leqslant \int_0^1 \eta(\|h\| + 2t\|k\|)\|k\|\,dt = \eta(\|h\| + \|k\|)\|k\|.$$

Si nous remplaçons (h,k) par $(\lambda h, \lambda k)$ avec λ tendant vers 0, alors η peut être pris arbitrairement petit, et on en déduit après division par λ^2 que

$$d^2f(x)(h,k) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda^2}\Delta_{\lambda h}\Delta_{\lambda k} f(x). \tag{9.10}$$

Comme

$$\Delta_h\Delta_k f(x) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x),$$

on voit que les opérateurs Δ_h et Δ_k commutent. Par suite $d^2f(x)(h,k) = d^2f(x)(k,h)$ et nous pouvons énoncer :

(9.11) Corollaire. *Si f est deux fois différentiable en un point x d'un ouvert U, alors $d^2f(x) \in \mathcal{L}_c(G^2,E)$ est toujours une application bilinéaire symétrique.*

Plus généralement, si f est p fois différentiable en $x \in U$, on a

$$\boxed{d^pf(x)(h_1,\ldots,h_p) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda^p}\Delta_{\lambda h_1}\ldots\Delta_{\lambda h_p} f(x)} \tag{9.12}$$

et donc $d^pf(x) \in \mathcal{L}_c(G^p,E)$ est *p-multilinéaire symétrique.* La démonstration est très analogue au cas $p=2$, on écrit par récurrence

$$\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_p} f(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 d^{p-1}f(x + t_2h_2 + \ldots + t_ph_p)(h_2,\ldots h_p)\,dt_2\ldots dt_p$$

à l'aide d'une itération de (9.9), ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1}\ldots\Delta_{h_p} f(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 &\big(d^{p-1}f(x + h_1 + t_2h_2 + \ldots + t_ph_p) - \\ &d^{p-1}f(x + t_2h_2 + \ldots + t_ph_p)\big)(h_2,\ldots h_p)\,dt_2\ldots dt_p. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve se poursuit de manière analogue en exprimant la condition de différentiabilité de $g = d^{p-1}f$ en x, qui fait apparaître par différence $d^pf(x)(h_1,\ldots,h_p)$ et des termes d'erreur contrôlés par $\eta\big(\sum\|h_j\|\big)\|h_2\|\ldots\|h_p\|$ au second membre. □

Références bibliographiques

[Ba1] Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration,* Graduate Studies in Mathematics (American Mathematical Society, Providence, RI), vol. 32 (2001) [suitable for advanced undergraduates].

[Ba2] Robert G. Bartle. *Return to the Riemann integral,* American Mathematical Monthly **103** (1996) 625-632 [brief and easy to read].

[BS] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis,* Third Edition, John Wiley & Sons (2000) [suitable for advanced undergraduates].

[Br] Jean-Yves Briend. *Intégration I, Licence de Mathématiques,* (page web) http://www.cmi.univ-mrs.fr/~briend/cours/cours.php.

[Ch] Eric Charpentier. *L'intégrale de Riemann complète,* (page web) http://www.math.u-bordeaux.fr/~echarpen/.

[Dj1] Arnaud Denjoy. *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue,* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **154** (1912) 859–862.

[Dj2] Arnaud Denjoy. *Sur les fonctions dérivées sommables,* Bulletin Soc. Math. France **43** (1915) 161–248.

[DS] John DePree and Charles Swartz. *Introduction to Real Analysis,* John Wiley & Sons, New York (1988) [advanced undergraduate students, very readable].

[Go1] Russell Gordon. *Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* Amer. Math. Soc. (1994) [comprehensive introduction to the subject].

[Go2] Russell Gordon. *Historical overview of Riemann and Henstock integrals,* Real Analysis Exchange **22** (1) (1996/7) 23–33.

[Go3] Russell Gordon. *The use of tagged partitions in elementary real analysis,* Amer. Math. Monthly **105** (1998) 107-117.

[He] Ralph Henstock. *The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable,* J. London Math. Soc., **30** (1955) 273–286.

[Ku1] Jaroslaw Kurzweil. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependance on a parameter,* Czech. Math. J. **7** (1957) 418–446.

[Ku2] Jaroslav Kurzweil. *Henstock-Kurzweil integration: its relation to topological vector spaces,* World Scientific Publ. Co. (2000) [for advanced specialists in integration theory].

[LL] Jitan Lu and Peng-Yee Lee. *On singularity of Henstock integrable functions,* Real Analysis Exchange **25** (1999), 795–798.

[Ma] Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, Techniques, Évolutions,* De Broeck Université, Bruxelles, deuxième édition, 1997 (première édition 1992).

[ML] Robert M. McLeod. *The Generalized Riemann Integral,* Carus Monograph (Mathematical Association of America, Washington, DC), vol. 20 (1980) [niveau introductif].

[Mu] Pat Muldowney. *A general theory of integration in function spaces, including Wiener and Feynman integration,* Pitman Research Notes in Math. Series, John Wiley & Sons, New York (1987).

[Pe] Oskar Perron. *Über den integralbegriff,* Sitzber. Heidelberg Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse Abt. A, **16** (1914) 1–16.

[RW] Ouvrage collectif, *Mathématiques - Tout-en-un pour la Licence - Niveau L2, Cours et exercices corrigés,* Collection dirigée par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, Dunod, 2007.

[Sc] Eric Schechter. *An Introduction to the gauge integral* (*also known as the generalized Riemann integral, the Henstock integral, the Kurzweil integral, the Henstock-Kurzweil integral, the HK-integral, the Denjoy-Perron integral, etc.*), (web page) http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/.

[Sw] Charles Swartz. *Introduction to Gauge Integrals,* World Scientific Publ. Co., (2001) [suitable for advanced undergraduates].

[Ye] Lee Peng Yee. *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* World Scientific Publ. Co., Series in Real Analysis **2** (1989) [exposition of research-level material].

[YV] Lee Peng Yee and Rudolf Výborný. *The Integral. An Easy Approach after Kurzweil and Henstock,* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (2000) [a combined textbook/research monograph, suitable for advanced undergraduates].

A. Appendice : proposition de programmes pour le collège

Nous indiquons ici une première ébauche de programmes de mathématiques pour le collège, en supposant acquis les programmes primaires suivis par les classes SLECC, et en nous appuyant sur la progression logique suggérée précédemment pour la géométrie.

Suivant la philosophie générale du GRIP, les différents points des programmes seront traités à partir d'un cours structuré et systématique (propre à donner de bonnes habitudes, et au delà, à rassurer l'élève !) : définitions, exemples, contre-exemples, énoncés de propriétés et théorèmes, démonstrations (ou justifications partielles), exercices d'application divers, problèmes à résoudre.

Chaque fois que possible, on introduira des illustrations par des problèmes inspirés d'applications dans d'autres disciplines comme la physique, la technologie, la géographie . . .

Nous diviserons les programmes de mathématiques en trois parties :
a) Algèbre et arithmétique
b) Géométrie
c) Ensemble, logique et combinatoire

Cette dernière partie est destinée pour une bonne part à préciser le vocabulaire et les notations utilisés, elle est étudiée surtout en fonction des nécessités qui apparaissent dans les autres parties du cours.

La géométrie est introduite au début d'une manière partiellement intuitive – c'est-à-dire que l'on est conduit à admettre certaines propriétés qui ne pourront être complètement démontrées qu'un peu plus tard. L'utilisation d'une démarche « axiomatique » plus rigoureuse deviendra éventuellement possible à partir de la classe de 4^{e}, une fois les prérequis nécessaires maîtrisés pour expliquer les démonstrations les plus essentielles et les plus riches de sens.

A.1. Classe de 6^{e}

a) *Arithmétique et algèbre*

Révisions sur le calcul et les 4 opérations (décimaux et fractions), inégalités strictes et larges ; comparaisons de nombres écrits sous différentes formes.

Introduction du calcul littéral : équation $ax = b$ (où a, b sont des nombres explicites positifs, des fractions explicites et x l'inconnue).

Puissances entières ; progressions arithmétiques et géométriques.

Divisibilité ; nombres premiers, crible d'Erathostène ; décomposition en facteurs premiers(1) ; pgcd, ppcm (calcul par le min, max des exposants) ; réduction des fractions au même dénominateur.

Propriété de commutativité, associativité, élément neutre dans le cas de l'addition et de la multiplication; distributivité.

(1) On admet l'unicité de la décomposition, l'existence s'obtient par le calcul effectif sur les exemples.

Identités remarquables
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; visualisation géométrique.

Nombres négatifs (entiers négatifs, fractions d'entiers positifs ou négatifs, décimaux négatifs) ; exemples : températures, altitudes. Équations $ax + b = 0$.

b) *Géométrie*

Définitions: distance de deux points, inégalité triangulaire ; critère d'alignement au moyen du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, pour aboutir à la définition des segments, droites, demi-droites.

Repérage d'un point sur un axe gradué orienté. Mesures algébriques.

Angles non orientés ; définition, mesure au rapporteur. Longueur d'un arc de cercle.

Droites parallèles et perpendiculaires dans le plan, énoncé des propriétés.

Propriétés des angles correspondants et des angles alternes-internes, réciproques; somme des angles d'un triangle; somme des angles d'un quadrilatère.

Constructions avec les instruments usuels (règle, compas, rapporteur) : milieu, médiatrice, bissectrice; construction d'un triangle connaissant les (longueurs des) 3 côtés, ou un côté et deux angles adjacents, ou un angle et deux côtés adjacents.

Géométrie dans l'espace : patrons du cube, d'un parallélépipède rectangle, d'une pyramide ; patrons du tétraèdre et de l'octaèdre régulier (comme réunion de deux pyramides à faces triangulaires équilatérales).

Calcul de longueurs, d'aires, de volumes (révisions et compléments[(2)]) : calcul d'aire par triangulation dans des cas simples.

c) *Ensembles, logique, combinatoire*

Ensembles, éléments, notation $x \in A$; $A \subset B$, ensemble vide $\emptyset$; ensembles (finis) définis en extension ; ensembles définis en compréhension : notation $\{x\,;P(x)\}$ ou $\{x \in A; P(x)\}$ d'un ensemble défini par une propriété $P(x)$ des éléments (on travaillera par exemple sur la parité, l'imparité, les inégalités, les objets ayant plusieurs caractéristiques indépendantes, etc).

Notation $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ sera introduit en 5e).

Intersection, réunion, différence d'ensembles ; exemples numériques, combinatoires (jeu de cartes) et géométriques.

Diagrammes de Venn – partitions, pourcentages et fréquences.

A.2. Classe de 5^{e}

a) *Arithmétique et algèbre*

Révisions : équations $ax + b = 0$; inégalités strictes, larges ; inéquations $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$.

(2) Les formules pour le volume du cône, de la pyramide et de la boule sont au programme, mais pas les démonstrations correspondantes.

Révisions et compléments sur les puissances : formules $a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

Puissances d'exposants négatifs. Notation scientifique en base 10. Représentation des nombres rationnels sous forme de produits de puissances de nombres premiers. Notation du logarithme $y = \log_a(x)$ dans le cas où a, x, y sont entiers, y compris le cas où y est négatif. Echelles logarithmiques très simples (exemples : octaves des gammes musicales, représentation des temps géologiques en échelle logarithmique).

Racines carrées – approximation par encadrement décimal, algorithme d'extraction « à la main », preuve algébrique de l'irrationnalité de racine carrée de 2 par un argument de parité.

Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (= développements décimaux illimités); développements propres et impropres. Valeur absolue d'un réel.

Coordonnées cartésiennes dans le plan (repère orthonormé ou orthogonal). Représentation d'un carré de côtés non parallèles aux axes.

Fonctions $x \mapsto ax$, $ax + b$; tracé du graphe point par point ; alignement de 3 points quelconques du graphe : le graphe est donc une droite. Interprétation du coefficient directeur a comme pente.

Équations de la forme $ux + vy + w = 0$ dans le plan ; représentation graphique sous la forme $y = ax + b$ (droite « non verticale ») ou $x = c$ (droite « verticale »).

Révisions sur l'utilisation de la commutatitivité, associativité, distributivité ; développement d'expressions algébriques ; l'opération d'élévation à la puissance $a * b = a^b$ n'est ni commutative ni associative dans les entiers positifs.

Graphe de la fonction $x \mapsto x^2$, lecture de la racine carrée sur le graphe, graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) *Géométrie*

Notion d'isométrie entre deux figures ou deux objets (lorsqu'ils sont définis par un nombre fini de points remarquables A_i et A'_i) : on dit qu'il y a isométrie si toutes les distances A_iA_j et $A'_iA'_j$ des points qui se correspondent sont égales ; on commencera par le cas des triangles et des quadrilatères plans (dans ce cas l'égalité des 4 côtés et d'une seule des diagonales ne suffit pas). Figures symétriques par réflexion par rapport à un axe ou par symétrie centrale.

Notion de corps solide, de mouvement et de déplacement(3). On admettra que 2 objets isométriques se déduisent l'un de l'autre soit par un déplacement soit par un déplacement suivi d'une symétrie miroir ; travaux pratiques de construction et de décalquage avec du papier calque.

Enoncé des 3 cas d'isométrie des triangles (côtés égaux, un côté égal et deux angles adjacents égaux, un angle égal et côtés adjacents égaux).

Caractérisation des parallélogrammes, losanges, rectangles, carrés (démonstrations à partir des cas d'isométrie des triangles).

(3) En Physique, un corps solide est un objet matériel dont les distances mutuelles des atomes sont fixes ; un *mouvement d'un solide* est une succession continue de positions $A_i(t)$ de ses différents points au cours du temps t, de sorte que les distances $A_i(t)A_j(t)$ restent invariables.

Théorème de Pythagore ; démonstration chinoise par les aires. Réciproque.

Distance de deux points (x, y), (x', y') dans un repère orthonormé.

Homothéties de centre l'origine ; écriture de la transformation en coordonnées cartésiennes ; cas de la symétrie par rapport à un point (choisi comme origine).

Symétries orthogonales par rapport à une droite; définition géométrique ; interprétation géométrique des symétries définies analytiquement par $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, -y)$, (y, x) ; définition analytique des quarts de tour et du demi-tour de centre l'origine.

Hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices, concourance de ces droites. Cercle inscrit, circonscrit, construction à la règle et au compas.

Coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans l'espace. Diagonale du parallélépipède rectangle, distance de deux points dans l'espace relativement à un repère orthonormé. Représentation graphiques de projections planes d'objets simples de l'espace (projections sur les 3 plans de coordonnées dans un repère orthonormé).

c) *Ensembles, logique, combinatoire*

Ensembles produits $E \times F$, $E \times F \times G \ldots$; couples, triplets, n-uplets.

Application d'un ensemble E dans un ensemble F. Premiers exemples sur des ensembles finis : diagramme sagittal ; histogrammes de température en fonction du mois de l'année, de population en fonction de l'année...). Graphe dans $E \times F$ associé à une application. Application définie par un graphe dans $E \times F$.

Calcul élémentaire de probabilités illustrant la notion de couple, triplet, n-uplet : tirer 8 avec 2 dés ; tirages avec remise dans une urne ; séries de piles ou faces...

A.3. Classe de 4^{e}

a) *Arithmétique et algèbre*

Révision : développement en facteurs premiers et divisibilité ; condition sur les exposants pour qu'un nombre soit un carré parfait. Irrationnalité de la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait.

Bases de numérations autres que 10 : exemple des bases 2, 8, 16 (et 60); conversion d'une base dans une autre.

Système de deux équations linéaires à 2 inconnues x, y ; résolution algébrique et résolution graphique à l'aide de l'intersection de deux droites (on se ramène par exemple à $y = ax + b = a'x + b'$). Interprétation du parallélisme en terme des pentes a et a' ; interprétation de l'orthogonalité de deux droites (on introduira la notion de pente infinie).

Identités remarquables pour les expressions $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Visualisation géométrique de la quantité $(a + b)^3$.

Graphe des fonctions $x \mapsto x^n$ (par exemple $n = 3, 4$). Racines carrées (révision), racines cubiques, racines n-ièmes, approximations numériques par encadrement.

Fonction $x \mapsto 1/x$ et plus généralement k/x avec k constante réelle. Notion (intuitive) d'asymptote.

Proportionnalité, directe, inverse, quadratique ; transformation des aires et volumes par homothétie.

b) *Géométrie*

Théorème de Thalès. Vérification à l'aide de coordonnées. Réciproque.

Triangles semblables ; les 3 cas de similitude des triangles.

Relations métriques dans le triangle rectangle.

Justification complète du volume du cône et de la pyramide(4).

Définition « axiomatique » d'un plan euclidien : c'est un ensemble P de points pour lesquels on peut mesurer la distance mutuelle de deux points quelconques $d(M, M')$, et vérifiant l'unique axiome suivant :

(Pythagore+Descartes) on peut munir $\mathcal{P}$ d'un « système de coordonnées orthonormé » $P \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto (x, y)$, satisfaisant la formule de « Pythagore » (5)

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Repère orthonormé OIJ associé à un tel système de coordonnées (points de coordonnées $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$). Effet sur le système de coordonnées d'un retournement en x ou en y, d'une translation de la feuille de papier millimétré, des quarts de tour.

Preuve analytique de l'inégalité triangulaire $AC \leqslant AB + BC$ (en choisissant la demi-droite $[A, C)$ comme demi-axe Ox).

Le milieu I d'un segment $[A, B]$, qui est par définition un point tel que $AI = IB = \frac{1}{2}AB$ est donné en coordonnées par $x_I = (x_A + x_B)/2$, $y_I = (y_A + y_B)/2$, et on a la « formule de la médiane » $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + (1/2)AB^2$ (qui démontre au passage l'unicité du milieu).

Caractérisation des parallélogrammes par l'intersection des diagonales en leur milieu ; condition analytique sur les coordonnées.

Equation de la médiatrice du segment associé à deux points $A(u, v)$ et $A'(u', v')$ (comme ensemble des points équidistants de A et A').

Définition du cosinus, sinus et de la tangente d'un angle dans un triangle rectangle. Calcul pour les angles remarquables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°). Etude de l'hexagone, de l'octogone – encadrement du nombre π.

Problèmes de géométrie dans l'espace très simples se ramenant à des questions de géométrie plane – par exemple : relation entre la hauteur d'une pyramide droite à base carrée, la longueur des arêtes et les angles des faces ; octaèdre régulier.

---

(4) On observe la proportionnalité du volume avec la hauteur et l'aire de la base : pour la hauteur on utilise un argument de dilatation ; on observe en outre (par tranchage très fin et glissement) qu'une pyramide oblique a le même volume qu'une pyramide droite, et que par quadrillage il y a proportionnalité à l'aire de la base. L'obtention de la constante $1/3$ s'obtient en découpant un cube de côté c en 3 pyramides obliques de base c^2 et de hauteur $h = c$ (patrons à découper et à assembler !)

(5) Il sera commode de « visualiser » cet axiome à l'aide d'une feuille de papier millimétré transparent qu'on place sur le plan géométrique $\mathcal{P}$, et qu'on peut déplacer ou retourner – il existe donc une infinité de systèmes de coordonnées orthonormés possibles, dépendant de la position de la feuille de papier millimétré.

c) *Ensembles, logique, combinatoire*

Composition des applications ; notation $f \circ g$; associativité de la composition.

Notion de bijection d'un ensemble E sur un ensemble F ; exemples et contre-exemples.

Permutations d'ensembles à 3 ou 4 éléments ; table de Pythagore du groupe des permutations S_3 ainsi obtenu ; table du groupe des isométries d'un carré de centre l'origine et de côtés parallèles aux axes (interprétation comme groupe de permutation des sommets et comme symétries/quarts de tours)[6].

Probabilités : révisions et compléments. Raisonnements utilisant des dénombrements à l'aide d'arbres dans des situations très simples : ensembles produits, paires non ordonnées . . .

A.4. Classe de 3e

a) *Arithmétique et algèbre*

Division euclidienne et divisibilité dans les entiers ; algorithme d'Euclide. Identité de Bézout. Théorème de Gauss. Unicité de la décomposition en facteurs premiers (démonstration). Condition sur le développement en facteurs premiers pour qu'un nombre entier soit une puissance n-ième exacte d'un entier. Cas d'un nombre rationnel mis sous forme irréductible. Irrationalité de la racine n-ième d'un nombre rationnel dans le cas où tous les exposants des puissances de nombres premiers mis en jeu ne sont pas divisibles par n.

Puissances rationnelles $a^{p/q}$, notation $\log_a(x)$ du logarithme dans le cas d'une valeur rationnelle. Formule $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$. Applications (gammes musicales, décibels, pH ...)

Moyennes, moyennes pondérées ; moyenne géométrique ; inégalité avec la moyenne arithmétique.

Fonctions polynômes. Somme, produit, division euclidienne des polynômes.

Factorisation d'un polynôme de degré 2 ou 3 lorsque l'on en connaît déjà une racine.

Fractions rationnelles simples ; simplifications.

Système de 2 équations linéaires à 2 inconnues ; résolution par combinaison linéaire, par substitution; formule générale avec le déterminant 2×2.

b) *Géométrie.*

Révision du programme de 4e : définition axiomatique du plan euclidien, caractérisation des parallélogrammes (. . .).

Notion de bipoints équipollents, notion de vecteurs ; composantes d'un vecteur dans un système de coordonnées ; addition des vecteurs : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel; notion de vecteurs colinéaires et de même sens ou de sens opposés.

---

(6) On donnera à cette occasion la définition de ce qu'est un groupe, mais l'étude générale de la notion n'est pas au programme.

Généralisation des notions précédentes au cas de l'espace. Notion de vecteur directeur d'une droite. Équation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace. Caractérisation du parallélisme.

Inéquations et systèmes d'inéquations $ax + by + c > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$); demi-droites, demi-plans et secteurs angulaires.

Cercle trigonométrique, angles orientés, radians, expression de la longueur d'un arc de cercle de rayon quelconque ; fonctions cosinus, sinus, tangente.

Formules $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ et conséquences (preuve par le calcul vectoriel).

Rotations de centre l'origine. Expression analytique ; angles modulo les multiples de 2π.

Produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$; expression analytique en coordonnées, bilinéarité ; orthogonalité ; expressions $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \cos(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \sin(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$.

Distance d'un point à une droite du plan. Projection orthogonale sur une droite, symétries orthogonales. Expressions analytiques.

Centre de gravité d'un triangle ; caractérisation vectorielle ; calcul des coordonnées du centre de gravité(7). Relations métriques dans le triangle, compléments.

Angles au centre, angles inscrits, relation mutuelle.

Equation du cercle, intersection d'un cercle et d'une droite, intersections de cercles ; calcul analytique dans le cas où l'axe des centres OO' est l'axe Ox. Cercles tangents. Puissance d'un point par rapport à un cercle ; tangentes menées d'un point à un cercle.

Calcul de l'aire latérale d'un tronc de cône circulaire, relation entre le demi-angle au sommet et l'angle du secteur circulaire obtenu par développement sur un plan.

Démonstration de la formule d'aire de la sphère et du volume de la boule (preuve d'Archimède à l'aide du théorème de Thalès et d'une projection cylindrique).

c) *Ensembles, logique, combinatoire*

Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble; dénombrement de $\mathcal{P}(E)$ au moyen d'un arbre.

Arrangements de p objets pris parmi n, permutations (calcul à l'aide d'un arbre d'abord sur des exemples explicites avec n petit).

Combinaisons de p objets pris parmi n ; triangle de Pascal ; formule générale du binôme $(a + b)^n$.

Applications injectives, surjectives ; dénombrement de l'ensemble des applications (resp. des applications injectives) entre ensembles finis.

Probabilités élémentaires (révisions ; application des formules précédentes : tirage de cartes, tirages dans des urnes avec et sans remise ; échantillons de population).

(7) Suggestion de thème d'étude : prouver à l'aide du calcul vectoriel l'alignement et positions relatives des points remarquables du triangle (centre de gravité, centre des cercles inscrit et circonscrit, intersection des hauteurs).