Puissances, exponentielles, logarithmes de l'école primaire jusqu'à la terminale

Jean-Pierre Demailly, Université Joseph Fourier Grenoble I

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

version du 20 janvier 2010

1. L'école primaire et les quatre opérations

Il est indispensable que l'école primaire enseigne de nouveau le calcul écrit, afin d'aboutir à une maîtrise complète des algorithmes opératoires – les calculettes ne doivent être utilisées que lorsque l'élève y est parvenu. La pratique sûre et effective du calcul écrit suppose une connaissance fluide des tables d'addition et de multiplication (et leur lecture inverse : « tables de soustraction » et de « division »). Les points suivants sont à peu près incontournables :

- bien que le calcul mental, comme le calcul écrit, implique la connaissance fluide des tables, ses procédures sont différentes, du fait de la nécessaire mémorisation des résultats intermédiaires. On procède ainsi par manipulation des unités, dizaines, centaines, milliers plutôt que sur les chiffres pris isolément, en partant d'ailleurs en général plutôt des chiffres de poids fort que des chiffres de poids faible comme c'est le cas avec les algorithmes posés usuels. En outre, la taille réduite des nombres mis en jeu ne permet pas d'atteindre le degré de généralité nécessaire pour une compréhension complète des algorithmes du calcul posé.
- s'il existe chez le jeune enfant une sorte de perception intuitive de la taille des nombres précédant son aptitude au calcul exact (perception qu'il convient bien sûr de ne pas contrecarrer), la fiabilité de la maîtrise du calcul approché et des ordres de grandeur n'est atteinte qu'au moyen d'éléments préalables du calcul exact, par exemple le calcul des puissances de dix combiné à la table de multiplication.
- enfin, même dans l'optique de la maîtrise du seul calcul approché, l'apprentissage d'un algorithme tel que celui de la division est un atout décisif : lorsque le diviseur comporte deux chiffres ou plus, l'obtention des chiffres du quotient fait fonctionner de manière très effective l'aptitude au calcul approché de la multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à plusieurs chiffres. En la circonstance, on sait bien que l'enfant a besoin de points de repère précis et d'objectifs clairement définis pour construire ses schémas mentaux, et il ne suffit pas de déclarer le calcul approché comme un objectif pour qu'il se réalise par miracle.

Bien entendu la maîtrise des algorithmes est très loin de se suffire à elle-même, l'enfant ne peut accéder au sens des opérations qu'en résolvant des problèmes concrets portant sur des grandeurs de la vie courante (nombre de pommes, monnaie, longueurs, poids…). Ce sens ne peut se construire que si les quatre opérations sont introduites simultanément, afin que l'enfant puisse comparer (et éventuellement opposer) l'usage des différentes opérations. C'est donc le plus tôt possible, dès le cours préparatoire et même dès la maternelle, que les quatre opérations doivent être étudiées (pour la maternelle, bien sûr, il s'agira seulement de petits nombres, – mais observons que le problème du partage des bonbons y soulève déjà la question de la division !)

À la fin du cycle primaire, la pratique sûre de la division posée permet d'observer la périodicité des restes et donc du développement décimal d'une fraction. Ceci est particulièrement apparent sur de nombreuses fractions de petit dénominateur conduisant à une périodicité très courte (dénominateurs tels que 3, 7, 9, 11, 21, 27, 33, 37, 41, 63, 77, 99, 101, 271 (...) et leurs multiples par 2 et 5, qui conduisent à une période de longueur 6 au plus).

2. Puissances, racines carrées, nombres réels

Avec la maîtrise des opérations élémentaires apparaissent naturellement les progressions arithmétiques et géométriques simples

$$\begin{array}{ccccccccc} 0, & a, & 2a, & 3a, & 4a, & 5a, & 6a, & 7a, & \ldots \\ 1, & a, & a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & \ldots \end{array}$$

avec $n\,a = a + a + \ldots + a$ (répété n fois) et $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (répété n fois). Au minimum, le cas particulier des carrés, des cubes et des puissances de 10 relève déjà du primaire.

Très vite, aux alentours de la cinquième ou de la quatrième au plus tard, les principales règles de calcul sur les puissances d'exposant entier naturel doivent être systématisées :

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \tag{2.1}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x, \tag{2.2}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \tag{2.3}$$

chaque fois que a, b sont des nombres strictement positifs et x, y des entiers naturels. Les nombres négatifs ayant été abordés au début du collège, il est possible de généraliser aux multiples et puissances négatives

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \ldots & -5a, & -4a, & -3a, & -2a, & -a, & 0, & a, & 2a, & 3a, & 4a, & 5a, & 6a, & 7a & \ldots \\ \ldots & a^{-5}, & a^{-4}, & a^{-3}, & a^{-2}, & a^{-1}, & 1, & a, & a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7 & \ldots \end{array}$$

qui complètent les progressions arithmétiques et géométriques du « côté gauche », en posant pour tout entier n positif

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

On voit alors que les règles de calcul (2.1), (2.2), (2.3) s'étendent aux exposants négatifs.

À l'heure actuelle les nombres réels apparaissent dès le collège, avec l'introduction de la racine carrée. Cependant, l'usage prématuré des calculettes lié à l'absence de pratique suffisante du calcul décimal approché « à la main », par exemple des divisions, conduit à une vision pauvre, trop formelle, de la notion de racine carrée.

Il convient absolument que les élèves soient confrontés au problème numérique de l'extraction de la racine carrée, par exemple de $\sqrt{2}$:

$$(1,4)^2 = 1,96 \quad (1,5)^2 = 2,25 \qquad \text{donc} \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$
$$(1,41)^2 = 1,9881 \quad (1,42)^2 = 2,0164 \qquad \text{donc} \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42,$$
$$(1,414)^2 = 1,999396 \quad (1,415)^2 = 2,002225 \qquad \text{donc} \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \quad \ldots$$

Nous recommandons cette réintroduction dès la sixième ou la cinquième, en même temps que la preuve du théorème de Pythagore, qui met en évidence la nécessité géométrique des racines carrées. L'algorithme manuel de clacul des racines carrées est à recommander fortement !

En même temps, il ne faut pas hésiter à donner une définition précise de la notion de nombre réel, qui est une bonne occasion d'avoir une première approche implicite de la notion de limite :

(2.4) Définition. *Un nombre réel est un nombre exprimé par un développement décimal illimité quelconque, non nécessairement périodique, autrement dit une suite* $\pm\ \square\square\ldots\square\square,\square\square\square\square\square\ldots$ *de chiffres* $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre infini à droite de celle-ci, précédée du signe* $+$ *ou du signe* $-$ *(l'absence de signe signifiant implicitement qu'on met le signe* $+$*, sauf pour* $0 = 0,000\ldots$ *qui n'a pas de signe).*
D'un point de vue géométrique, un nombre réel correspond à un point sur un axe orienté, qui serait positionné à l'aide d'une « règle graduée de précision infinie *».*

Nous préconisons de manière très ferme l'enseignement de l'algorithme d'extraction de la racine carrée « à la main », qui, comme tout algorithme effectif, met l'enfant en situation de maîtriser son environnement numérique (et lui fait voir, en la circonstance, l'absence de raison particulière qu'une racine carrée d'un nombre entier possède en général un développement décimal périodique). Ce serait là une excellente consolidation post-primaire de la pratique du calcul posé ; l'expérience montre que les enfants qui maîtrisent bien la division passent très facilement à l'algorithme de la racine carrée (une heure ou deux suffisent), de sorte que cet apprentissage n'engendre aucune perte de temps. Malheureusement, il n'est possible de tester ceci aujourd'hui que sur une fraction infime de la population scolaire, tellement la soupe est devenue insipide et la maîtrise des algorithmes opératoires incertaine . . .

Pour que la définition (2.4) devienne rigoureuse et précise, on doit expliquer aussi les développements décimaux propres et impropres [5]. On fait constater à l'élève que $0,999999\ldots = 1$, en effet si $x = 0,999999\ldots$, alors $10\,x = 9,999999\ldots$, donc $10\,x - x = 9$ et ceci conduit à admettre nécessairement que $x = 1$, si on veut que les règles de calcul sur les nombres décimaux continuent à fonctionner sur les développements décimaux illimités. Plus généralement on a par exemple

$$0,34999999\ldots = 0,35 = 0,35000000\ldots$$

[5] Une fois que cela est fait, la définition (2.4) peut être considérée comme une définition formelle parfaitement acceptable des nombres réels – même si celle-ci a l'inconvénient, qui tient plus d'un léger manque d'élégance, de sembler dépendre du choix de la base 10.

Ces observations apparaissent comme des précisions à apporter à la définition (2.4) :

(2.5) Complément à la définition des nombres réels. *Les nombres décimaux ont deux écritures possibles, l'une finie (ou, ce qui revient au même, comportant une infinité de* 0 *consécutifs), appelée « développement propre », l'autre sous forme de « développement impropre » avec une infinité de* 9 *consécutifs et le chiffre précédent réduit d'une unité. Les nombres réels non décimaux n'ont qu'un seul développement décimal illimité.*

À ce stade, dès la cinquième disons, on devrait pouvoir aboutir aux caractérisations importantes qui suivent (sous réserve que tous les programmes précédents aient été reconstruits de manière solide !) :

(2.6) Caractérisation des rationnels et des décimaux.

(a) *Un développement décimal représente un nombre rationnel (fraction de nombres entiers) si et seulement si ce développement est périodique à partir d'un certain rang.*

(b) *Parmi les nombres rationnels, les nombres décimaux sont ceux dont le développement comporte au choix une infinité de* 0 *consécutifs (« développement décimal propre ») ou une infinité de* 9 *consécutifs (« développement décimal impropre »).*

(c) *Les nombres réels non décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement ne comporte pas une suite infinie de décimales consécutives qui sont tous des* 0 *ou tous des* 9 *; ils ont donc soit une infinité de décimales qui ne sont ni des* 0 *ni des* 9*, soit une alternance infinie (éventuellement irrégulière) de* 0 *et de* 9 *à partir d'un certain rang.*

Démonstration. (a) En effet, étant donné une fraction p/q simplifiée qui n'est pas un nombre décimal (c'est-à-dire que q a d'autres facteurs premiers que 2 et 5), l'algorithme de division avec virgule de p par q « ne tombe pas juste » et conduit à des restes qui figurent parmi 1, 2, ... , $q-1$. Au bout de $q-1$ étapes au plus après la virgule, on retombe nécessairement sur un reste déjà trouvé, de sorte que le développement est périodique et que la période est au plus de longueur $q-1$.[6]

Inversement, si on a un développement périodique, disons de longueur 5, soit par exemple

$$x = 0,10723114231142311423114\ldots,$$

on observe que la division 1 : 99999 donne

$$\frac{1}{99999} = 0,00001000010000100001\ldots,$$

[6] De façon plus formelle, si on regarde les restes de la division de 10^m par un entier $q \in \mathbb{N}^*$ quelconque, il doit exister deux entiers $m < n$ dans l'intervalle $[0, q-1]$ tels que 10^m et 10^n ont le même reste, donc q divise $10^n - 10^m$. Autrement dit, q divise l'entier $10^m(10^a - 1)$ avec $a = n - m$. La fraction p/q s'écrit encore $10^{-m}\frac{p}{10^a-1} = 10^{-n}(k + \frac{r}{10^a-1})$ où r est le reste de la division de p par $10^a - 1$ et k son quotient. Comme r est un entier d'au plus a chiffres et que $1/(10^a - 1) = 0,00\ldots00100\ldots001\ldots$ avec une périodicité de a chiffres, on voit que $r/(10^a - 1) = 0, r_1r_2\ldots r_{a-1}r_ar_1r_2\ldots r_{a-1}r_a\ldots$ où $r_1r_2\ldots r_{a-1}r_a$ est l'écriture décimale de r (précédée d'autant de 0 que nécessaire pour atteindre exactement a chiffres). Suivant le signe de p, ceci implique un développement décimal de la forme

$$\frac{p}{q} = \pm\, k'_N k'_{N-1}\ldots k'_1 k'_0, k_1k_2\ldots k_m r_1r_2\ldots r_{a-1}r_ar_1r_2\ldots r_{a-1}r_a\ldots$$

de sorte que

$$\frac{23114}{99999} = 23114 \times \frac{1}{99999} = 0,23114231142311423114\ldots$$
$$\frac{23114}{99999000} = 0,00023114231142311423114\ldots$$

En définitive, comme $0,107 = \dfrac{107}{1000}$, on obtient

$$x = \frac{107}{1000} + \frac{23114}{99999000} = \frac{107 \times 99999 + 23114}{99999000} = \frac{10723007}{99999000}$$

qui est bien un nombre rationnel. Ce procédé de mise en forme de fraction s'étend facilement à tout développement décimal périodique. L'affirmation (b) est seulement une reformulation de la définition (2.5), et (c) lui est équivalente. Le dernier cas de (c) est illustré par exemple par le rationnel $1/11 = 0,09090909\ldots$ □

Toutes ces considérations sont consolidées par l'introduction du calcul algébrique et polynomial, la manipulation des inégalités et des encadrements, les identités remarquables. Il me paraît important de visualiser géométriquement $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$. Il serait utile de distribuer dans toutes les écoles primaires et tous les collèges de France des assemblages de pièces en bois permettant de visualiser $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ (car ce sujet peut même être abordé de manière concrète dès la fin de l'école primaire, à l'occasion de l'introduction des aires et des volumes). L'identité $(10a+b)^2 - 100a^2 = (20a+b)b$ intervient dans la justification de l'algorithme de la racine carrée. À un niveau plus élémentaire (dès le CM1) – et avec une justification seulement géométrique sur des carrés découpés dans du papier millimétré – la formule

$$(10a+5)^2 = 100a(a+1) + 25$$

peut servir au calcul mental efficace de carrés de nombres se terminant par 5 : $(75)^2 = 5625$, le nombre 56 étant obtenu en faisant $a(a+1) = 7 \times 8$.

3. Suites, limites, suites croissantes majorées

L'étape suivante, qui est le fondement même de l'enseignement de l'analyse, est l'introduction de la notion de limite – l'élève qui aura manipulé les développements décimaux et les encadrements au collège y aura déjà été très bien préparé, il faut donc envisager cette introduction dès la classe de seconde, et non pas en classe de première comme aujourd'hui, afin de laisser un temps de maturation plus important pour les notions essentielles de l'analyse.

En outre, nous préconisons d'introduire la notion de limite d'abord à l'occasion de l'étude des suites. Il y a pour cela deux raisons essentielles :

• La première raison est que ceci fait beaucoup mieux le lien avec le calcul décimal approché, lorsqu'on envisage par exemple les approximations décimales successives d'un nombre réel tel qu'une racine carrée.

• La deuxième raison est que l'enseignement actuel est beaucoup trop polarisé sur l'usage des calculettes et, au lycée, sur leur emploi pour l'étude des fonctions. Or la capacité des calculettes actuelles au calcul formel induit chez l'élève la conception erronée qu'une fonction est principalement une « formule algébrique » permettant d'évaluer une expression $f(x)$ – il suffit d'observer l'organisation des manuels modernes pour se convaincre que cette conception inappropriée sera extrêmement difficile à éradiquer. En réalité, la plupart des fonctions qui interviennent dans la nature – courbes de température ou de population, cours de la bourse, fonctions correspondant à des mesures expérimentales de phénomènes physiques – ne sont précisément pas données par des formules algébriques. C'est bel et bien la vision bourbakiste d'application d'un ensemble de départ vers un ensemble d'arrivée donnée par un graphe qui est la notion pertinente ! (et, en cela, les programmes de lycée de « mathématiques modernes » ne s'étaient donc pas trompés, on les a beaucoup trop vite jetés à la poubelle sans imaginer qu'ils comportaient tout de même une bonne part de vérité). L'approche des limites par les suites est un bon moyen de combattre l'idée fausse qu'une fonction coïncide avec une formule algébrique, et de donner lieu à des applications dont l'ensemble de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

Considérons par exemple la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = 2 - \frac{1}{u_n + 1}.$$

Des calculs aisés et l'utilisation d'une calculette donnent [7]

$$\begin{array}{lll}
u_0 & = 1 & = 1,00000000000\ldots \\
u_1 & = 3/2 & = 1,50000000000\ldots \\
u_2 & = 8/5 & = 1,60000000000\ldots \\
u_3 & = 21/13 & = 1,61538461538\ldots \\
u_4 & = 55/34 & = 1,61764705882\ldots \\
u_5 & = 144/89 & = 1,61797752808\ldots \\
u_6 & = 377/233 & = 1,61802575107\ldots \\
u_7 & = 987/610 & = 1,61803278688\ldots \\
u_8 & = 2584/1587 & = 1,61803381340\ldots \\
u_9 & = 6765/4181 & = 1,61803396316\ldots \\
u_{10} & = 17711/10946 & = 1,61803398501\ldots \\
u_{11} & = 28657/18657 & = 1,61803398820\ldots \\
u_{12} & = 75025/46368 & = 1,61803398867\ldots \\
u_{13} & = 196418/121393 & = 1,61803398873\ldots \\
u_{14} & = 514229/317811 & = 1,61803398874\ldots
\end{array}$$

(7) Les habitués reconnaîtront bien sûr un des avatars possibles de la suite de Fibonacci. On peut voir que la limite de u_n est le nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$, solution de l'équation $\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}$, d'où $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

On voit ici qu'on a $1 \leqslant u_n < 2$ pour tout n, et comme $u_1 > u_0$, on constate aussi de proche en proche (par récurrence sur n, si on veut) que $u_n > u_{n-1}$ entraîne $u_{n+1} > u_n$:

$$u_n > u_{n-1} \implies \frac{1}{1+u_n} < \frac{1}{1+u_{n-1}} \implies 2-\frac{1}{1+u_n} > 2-\frac{1}{1+u_{n-1}} \implies u_{n+1} > u_n,$$

de sorte qu'on a affaire à une suite croissante. La zone rouge montre les décimales qui ne sont pas encore stabilisées. On « sent bien » que la suite va avoir une limite égale au nombre réel $1,61803398874\ldots$. La preuve de l'existence de cette limite est un théorème qui peut facilement (et donc *qui doit absolument*) être visualisé et démontré en classe de seconde – d'autant plus que c'est à notre sens le théorème fondateur de l'analyse et celui qui caractérise la notion même de nombre réel.

(3.1) Théorème. *Toute suite (u_n) croissante et majorée de nombres réels possède une limite, obtenue comme le nombre réel dont le développement décimal est donné par la suite des « décimales stabilisées » de l'écriture décimale des nombres u_n successifs. De même toute suite (u_n) décroissante et minorée de nombres réels possède une limite.*

Il est symptomatique que ce théorème soit aujourd'hui énoncé sans aucune justification jusqu'à la fin du lycée, la plupart des étudiants entrant aujourd'hui à l'université n'ont donc qu'une compréhension très confuse de ce qu'est un nombre réel ou de ce qu'est une limite... Même à l'époque des maths modernes où les programmes de lycée étaient très riches (malgré certains défauts patents - notamment en géométrie), ce théorème était présenté comme un axiome caractérisant les nombres réels. C'est à notre avis à la fois un appauvrissement mathématique [8] et une erreur didactique puisqu'une preuve « très évidente » peut en être donnée :

Preuve du théorème (3.1). Supposons d'abord d'abord qu'on ait affaire à une suite croissante majorée avec $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. On considère le développement décimal de chaque terme u_n, soit

$$u_n = E_n + 0,b_{1,n}b_{2,n}b_{3,n}b_{4,n}b_{5,n}b_{6,n}\ \ldots$$

où E_n est la partie entière de u_n (et on choisit disons le développement décimal propre de u_n). Si M est un majorant de la suite, alors $E_n \leqslant M$, donc (E_n) qui est une suite croissante d'entiers atteint sa valeur maximale E à partir d'un certain rang n_0, de sorte que $E_n = E$ pour $n \geqslant n_0$. On considère alors pour $n \geqslant n_0$ la suite des chiffres $0, 1, \ldots, 9$ formée par la première décimale $b_{1,n}$ de u_n. Celle-ci est croissante et va se stabiliser en sa valeur maximale b_1 à partir d'un rang $n_1 \geqslant n_0$. De proche en proche, une fois que les chiffres $b_{1,n}$, …, $b_{p-1,n}$ sont stabilisés, il existe un rang $n_p \geqslant n_{p-1}$ à partir duquel le chiffre $b_{p,n}$ va se stabiliser en une valeur b_p. On voit alors que la suite (u_n) admet

$$\ell = E + 0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ \ldots$$

comme limite, puisque $u_n \leqslant \ell$ et $u_n \geqslant \ell - 10^{-p}$ pour $n \geqslant n_p$.

(8) Lorsqu'à l'université on est enfin en mesure de proposer une construction plus solide des nombres réels, par exemple au moyen des coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy de nombres rationnels, c'est bien d'un théorème qu'il s'agit, et non d'un axiome. Le statut à donner à ce résultat est donc bien celui de théorème, surtout près de 150 ans après Dedekind et Cantor. Les nombres réels ne sont pas que des êtres vaporeux accessibles seulement par une approche axiomatique...

Si la suite est décroissante minorée et $u_n \geqslant 0$, le raisonnement est identique, les approximations sont par excès et on regarde de la même manière les décimales stabilisées des chiffres décroissants successifs.

Dans le cas où (u_n) est croissante et formée de nombres tous négatifs, la suite $(-u_n)$ est décroissante positive et on est ramené au cas précédent. Enfin, le cas général d'une suite décroissante minorée dont les termes deviennent négatifs à partir d'un certain rang se ramène au cas d'une suite croissante majorée en considérant $(-u_n)$. $\square$

On notera que c'est le raisonnement du théorème (3.1) qui permet de donner la définition rigoureuse de la somme de deux nombres réels x et y quelconques en considérant les approximations décimales x_n et y_n à 10^{-n} près par défaut et en posant $x + y = \lim_{n\to+\infty} x_n + y_n$. De même pour le produit de deux nombres positifs $xy = \lim_{n\to+\infty} x_n y_n$ (le cas du produit de nombres réels de signes quelconques s'obtient à l'aide de la règle des signes). Pour l'existence de l'inverse $1/x$ (lorsque $x > 0$) et donc des quotients, on utilise le fait que la suite $1/x_n$ est décroissante minorée [(9)]. Comme l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives sur les décimaux, ces propriétés passent à la limite sur l'ensemble des nombres réels ; idem pour la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition [(10)].

Résultat des courses : nous avons été en mesure de définir rigoureusement les nombres réels dès le collège, et de démontrer leurs propriétés fondamentales à l'issue de la classe de seconde, de manière très simple. C'est là à notre avis un prérequis indispensable pour pouvoir faire de l'analyse dans de bonnes conditions, tout en donnant aux élèves des outils numériques concrets qui leur permettront de comprendre les questions posées.

À ce point, il devient parfaitement possible de justifier l'existence de la racine p-ième $x = \sqrt[p]{a}$ d'un nombre réel $a \geqslant 0$. En effet, par essais successifs, on obtient un encadrement par des nombres décimaux à n chiffres après la virgule, $x_n < x'_n = x_n + 10^{-n}$, avec $(x_n)^p < a < (x'_n)^p$ (à moins que le résultat « ne tombe juste » à une certaine étape,

(9) Bien entendu l'inverse $1/x_n$ d'un décimal n'est plus un décimal, mais on a déjà vu comment écrire un tel rationnel sous forme d'une représentation décimale périodique illimitée, cf. note (6).

(10) Pour une démonstration formelle complète et rigoureuse de ces propriétés – que nous ne recommandons absolument pas au niveau du lycée – on a besoin de l'observation suivante.

Observation. *Soit x un réel et x_n l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut obtenue par troncature à l'ordre n du développement décimal propre de x donné par la définition (3.1). Si (ξ_n) est une suite de décimaux telle que $|x_n - \xi_n|$ tend vers 0, alors les décimales de ξ_n tendent vers le développement décimal de x si x n'est pas décimal, et sinon elles tendent soit vers le développement propre, soit vers le développement impropre – qui représentent tous deux le réel x par définition.*

Démonstration. Si x n'est pas décimal, il y a des rangs k arbitrairement grands pour lesquels la k-ième décimale de x n'est ni 0 ni 9, ou bien est un 9 suivi d'un 0 en rang $k+1$. Si on prend n assez grand pour que $|x_n - \xi_n| \leqslant 10^{-(k+1)}$ alors toutes les décimales de ξ_n et de x_n coïncident jusqu'à l'ordre $k-1$, la k-ième étant changée d'au plus une unité. Si x est décimal on a $x_n = x$ pour n assez grand et il est alors trivial que le développement de ξ_n à l'ordre $k-1$ coïncide avec le développement propre ou impropre de x suivant que ξ_n approche x par excès ou par défaut à moins de 10^{-k} près. CQFD

Le lemme montre qu'on peut en réalité utiliser n'importe quelle suite (ξ_n) d'approximations décimales s'approchant assez près de la suite des troncatures (x_n) pour représenter un réel x, de sorte que par exemple $(x_n + y_n) + z_n = x_n + (y_n + z_n)$ approchent à la fois $(x+y)+z$ et $x+(y+z)$.

Le théorème (3.1) montre également que la définition des nombres réels ne dépend pas de la base de numération choisie, c'est à dire que la définition (2.4) peut être posée dans une base quelconque autre que 10. Pour le voir, il suffit d'utiliser la conversion des développements « décimaux » finis d'une base dans une autre (ce qui ne fait intervenir dans tous les cas que des nombres rationnels), puis de passer à la limite à l'aide du théorème (3.1), qui est lui aussi valable dans n'importe quelle base.

auquel cas le travail est fini). En particulier x_0 est la partie entière de la racine p-ième cherchée, et $x'_0 = x_0 + 1$ (sauf si le résultat « tombe juste » déjà dans les entiers). On obtient ainsi une suite croissante (x_n) d'approximations décimales par défaut, et une suite décroissante (x'_n) d'approximations décimales par excès, la suite (x_n) est majorée par $x'_0 = x_0 + 1$, et la suite (x'_n) est minorée par x_0.

Il est utile de savoir quelle est l'erreur commise sur la puissance p-ième du fait de l'approximation décimale. Pour cela, on utilise l'inégalité

$$(3.2) \qquad a^p - b^p \leqslant p(a-b)a^{p-1} \qquad \text{vraie pour tous } 0 \leqslant b \leqslant a,$$

qui se déduit de la formule

$$(3.3) \qquad a^p - b^p = (a-b)(a^p + a^{p-1}b + \ldots + ab^{p-1} + b^p)$$

[ou, alternativement, de l'égalité $a^{p+1} - b^{p+1} = a(a^p - b^p) + (a-b)b^p$ par récurrence sur p.] En appliquant ceci à $a = x'_n$ et $b = x_n$, on voit que

$$(x'_n)^p - (x_n)^p \leqslant p(x'_n - x_n)(x'_n)^{p-1} \leqslant p\frac{1}{10^n}(x'_0)^{p-1}.$$

Ceci entraîne que $\lim(x_n)^p = \lim(x'_n)^p = a$ quand n tend vers $+\infty$. Par définition même des nombres réels, les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers un réel x tel que $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$, donc $(x_n)^p \leqslant x^p \leqslant (x'_n)^p$ et $x^p = a$ à la limite [On peut naturellement commencer par traiter le cas des racines carrées ou cubiques, ce qui permet de réduire nettement la complexité des notations pour des élèves de seconde].

4. Puissances d'exposant fractionnaire ou réel

Nous sommes arrivés ici peut-être à l'entrée en classe de première (dans notre vision idéale d'un enseignement destiné à une filière de lycée centrée sur les mathématiques et les sciences exactes, et peut-être même à toutes les filières scientifiques ...). Il est grand temps d'introduire les notions de limite d'une fonction en un point, de continuité, de dérivée, que nous considérons comme une « deuxième couche » nécessaire après l'étude des suites et de leurs limites. Ceci suppose d'avoir déjà traité en seconde les exemples ad hoc, ceux des suites géométriques, des sommes de termes d'une progression géométrique $1 + a + \ldots + a^n$, des suites récurrentes définies par une fraction rationnelle du premier degré – pour peu que les équations du second degré aient été vues dès le début du lycée, comme c'était le cas avant que les programmes ne dégénèrent avec l'arrivée de la seconde indifférenciée.

Il résulte du théorème (3.1) qu'une fonction croissante $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ possède toujours des limites à droite et à gauche en tout point $x_0 \in]a,b[$, il suffit de considérer la suite décroissante $n \mapsto f(x_0 + 1/n)$ minorée par $f(x_0)$ et la suite croissante $n \mapsto f(x_0 - 1/n)$ majorée par par $f(x_0)$. L'exemple de la fonction partie entière $f(x) = E(x)$ montre que ces limites ne sont pas nécessairement égales.

(4.1) Puissances fractionnaires. Si q est un entier strictement positif, on pose

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a},$$

de sorte que $(a^{1/q})^q = a^1 = a$. Plus généralement, si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

La dernière égalité est due au fait que $((\sqrt[q]{a})^p)^q = (\sqrt[q]{a})^{pq} = ((\sqrt[q]{a})^q)^p = a^p$. On vérifie alors que les formules (2.1), (2.2), (2.3) restent valables pour les exposants rationnels. On a de plus les inégalités intéressantes suivantes.

(4.2) Inégalité de Bernoulli. Si h est un nombre réel positif ou nul et $q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(1+h)^q \geqslant 1 + qh, \tag{4.2 a}$$

$$(1+h)^{1/q} \leqslant 1 + \frac{1}{q}h. \tag{4.2 b}$$

En effet, la première inégalité résulte au choix de la formule du binôme, de la formule (3.3) avec $p = q$, $a = 1 + h$ et $b = 1$, ou d'un raisonnement direct par récurrence :

$$(1+h)^{q+1} = (1+h)^q(1+h) \geqslant (1+qh)(1+h) = 1 + (q+1)h + qh^2 \geqslant 1 + (q+1)h.$$

On notera que lorsque h est très petit, disons $h < 10^{-3}$ (et q pas trop grand), l'erreur qh^2 commise à chaque étape est faible, donc l'approximation par défaut $(1+h)^q \approx 1+qh$ sera tout à fait raisonnable. Si nous remplaçons maintenant h par $\frac{h}{q}$, il vient

$$\left(1 + \frac{h}{q}\right)^q \geqslant 1 + q\frac{h}{q} = 1 + h$$

et donc $(1+h)^{1/q} \leqslant 1 + \frac{1}{q}h$. □

(4.3) Conséquence. *Pour tout réel $a > 0$, on a* $\lim_{q \to +\infty} a^{1/q} = 1$.

En effet, si $a \geqslant 1$ il suffit de poser $a = 1 + h$ de sorte que l'on obtient $a^{1/q} \geqslant 1$ et $a^{1/q} = (1+h)^{1/q} \leqslant 1 + \frac{1}{q}h$, expression qui tend vers 1 quand q tend vers $+\infty$. Si $a < 1$, on utilise le fait que

$$a^{1/q} = \frac{1}{A^{1/q}}$$

avec $A = 1/a > 1$. □

(4.4) Puissances d'exposant réel. On cherche maintenir à définir a^x lorsque x est réel, en supposant par exemple $a \geqslant 1$ (si $a < 1$ on pourra s'y ramener en posant $a^x = 1/A^x$ avec $A = 1/a > 1$). Pour cela, on utilise les approximations décimales $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$ par défaut et par excès à 10^{-n} près. Comme x_n et x'_n sont des décimaux et donc des rationnels, on sait déjà définir a^{x_n} et $a^{x'_n}$. La suite (a^{x_n}) est croissante et majorée par $a^{x'_0}$, tandis que la suite $(a^{x'_n})$ est décroissante minorée par a^{x_0}. En outre leur quotient

$$\frac{a^{x'_n}}{a^{x_n}} = a^{x'_n - x_n} = a^{1/10^n}$$

tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ d'après la conséquence (4.3). Nous avons donc des suites de même limite (suites adjacentes), et il est légitime de poser

$$a^x = \lim_{n \to +\infty} a^{x_n} = \lim_{n \to +\infty} a^{x'_n}.$$

Notons que par passage à la limite sur les approximations décimales des exposants, les formules fondamentales (2.1), (2.2) et (2.3) restent valables.

On dit que la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ est la *fonction exponentielle* réelle de base $a > 0$. On réserve la terminologie de *fonction puissance* à la fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto x^\alpha$ (cette fois, l'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ est constant, tandis que dans l'exponentielle c'est l'exposant qui est la variable).

(4.5) Monotonie et continuité des fonctions exponentielles.

(i) *Si $a = 1$, alors $a^x = 1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Si $a > 1$, alors $x \mapsto a^x$ est une fonction strictement croissante, et on a $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.*

(iii) *Si $a < 1$, alors $x \mapsto a^x$ est une fonction strictement décroissante, et on a $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

(iv) *Dans tous les cas, $x \mapsto a^x$ est une fonction continue.*

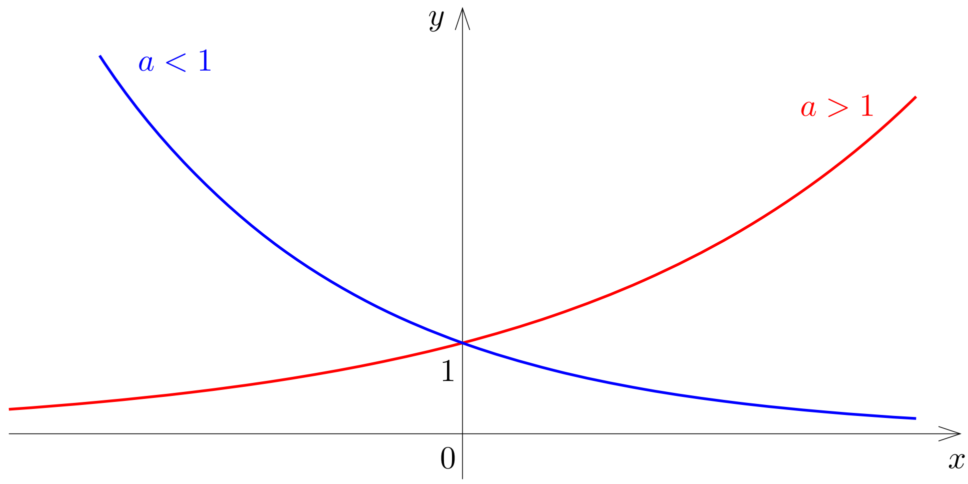

Fig. 1. Représentation graphique des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$.

Démonstration. La propriété (i) est évidente, car on a $1^x = 1$ pour tout x rationnel et donc tout x réel.

(ii) Si $a > 1$ et si $x < y$ sont des rationnels, alors $a^y = a^x \cdot a^{y-x}$, et comme $y - x = \frac{p}{q} > 0$ on a bien $a^{y-x} = \sqrt[q]{a^p} > 1$, donc $a^y > a^x$. Si $x < y$ sont des réels et $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$, $y_n \leqslant t \leqslant y'_n$ leurs approximations décimales par défaut et par excès, on va avoir $x'_n < y_n$ pour n assez grand, donc

$$a^x \leqslant a^{x'_n} < a^{y_n} \leqslant a^y.$$

Si on pose $a = 1 + h$ et qu'on choisit $N = E(x) =$ partie entière de x, alors $a^x \geqslant a^N \geqslant 1 + Nh$ tend bien vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. Par conséquent, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ tend vers 0, ce qui donne $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ en changeant x en $-x$.

(iii) résulte du fait que $a^x = \frac{1}{A^x}$ en posant $A = \frac{1}{a} > 1$.

(iv) Il suffit de voir que lorsque x tend vers x_0, alors $\frac{a^x}{a^{x_0}} = a^{x-x_0}$ tend vers 1, ce qui entraînera bien que $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Autrement dit, il suffit de voir que $\lim_{x \to 0} a^x = 1$. Si $a \geqslant 1$ et $x > 0$, considérons l'entier $q = E(1/x)$ de sorte que $q \leqslant 1/x$ et donc $x \leqslant 1/q$. Alors $1 \leqslant a^x \leqslant a^{1/q}$, et comme q tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, la conséquence (4.3) entraîne bien que $\lim_{x \to 0_+} a^x = 1$. C'est vrai aussi pour la limite à gauche en 0 puisque $\lim_{x \to 0_+} a^{-x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{a^x} = 1$. Enfin, le cas $a < 1$ s'obtient en posant $a^x = 1/A^x$ avec $A = 1/a > 1$. □

(4.6) Monotonie et continuité des fonctions puissances

(i) *Si* $\alpha = 0$, *alors* $x^\alpha = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) *Si* $\alpha > 0$, *alors* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction strictement croissante, et on a* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0_+} x^\alpha = 0$.

(iii) *Si* $\alpha < 0$, *alors* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction strictement décroissante, et on a* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to 0_+} x^\alpha = +\infty$.

(iv) *Dans tous les cas,* $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction continue sur* $]0, +\infty[$, *elle se prolonge par continuité en* 0 *en posant* $0^\alpha = 0$ *si* $\alpha > 0$.

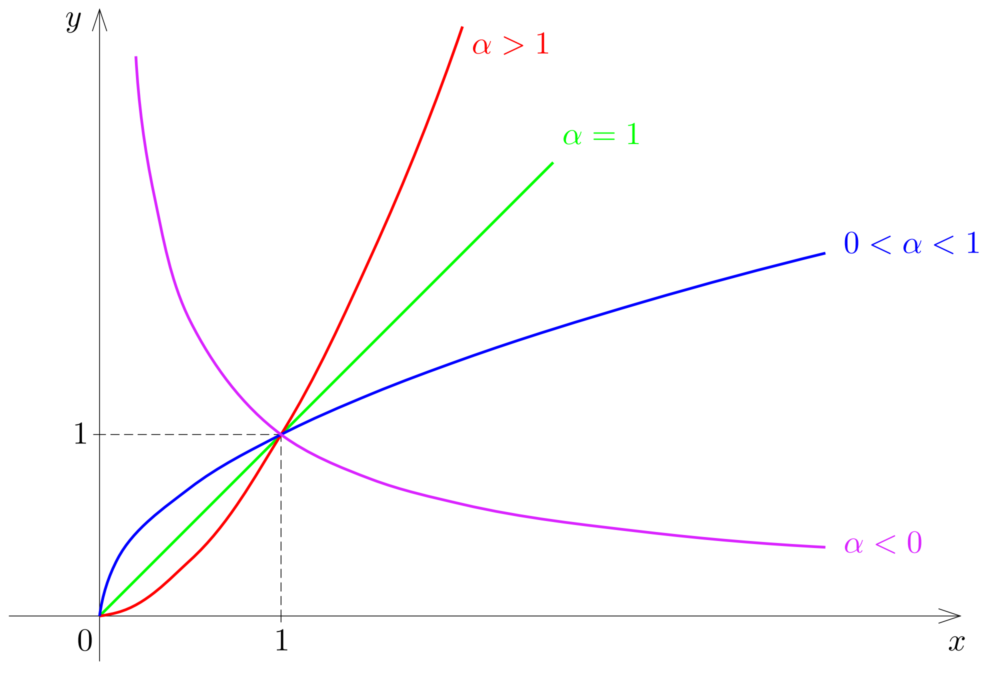

Fig. 2. Représentation graphique des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$.

Démonstration. La propriété (i) résulte de la définition même des puissaances entières.

(ii) Si $0 < x < y$ alors pour $\alpha > 0$ on a bien $x^\alpha < y^\alpha$ puisque $y^\alpha / x^\alpha = (y/x)^\alpha > 1$ d'après 4.5 (ii) et le fait que $y/x > 1$. Maintenant, si q est un entier choisi assez grand pour que $\alpha > 1/q$, la propriété de croissance 4.5 (ii) donne aussi pour tout $x \geqslant 1$ les inégalités

$$x^\alpha \geqslant x^{1/q} \geqslant A \qquad \text{dès lors que } x \geqslant A^q.$$

Ceci montre bien que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. Pour $x \leqslant 1$, on a au contraire d'après 4.5 (iii)

$$0 < x^\alpha \leqslant x^{1/q} \leqslant \varepsilon \qquad \text{dès lors que } x \geqslant \varepsilon^q,$$

ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. On voit donc que $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha = 0$.

(iii) se déduit de (ii) en écrivant que $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

(iv) Si $x > x_0$ et $\alpha > 0$ on a

$$1 \leqslant x^\alpha/x_0^\alpha = (x/x_0)^\alpha \leqslant (x/x_0)^n$$

pour tout entier n qui majore le réel α. La continuité de la fonction $x \mapsto x^n$ qui résulte du théorème sur les produits de limites implique alors que $\lim_{x\to x_0+}(x/x_0)^n = 1$ et donc $\lim_{x\to x_0+} x^\alpha/x_0^\alpha = 1$. De même si $x < x_0$ on a

$$1 \leqslant x_0^\alpha/x^\alpha = (x_0/x)^\alpha \leqslant (x_0/x)^n$$

de sorte que $\lim_{x\to x_0-} x_0^\alpha/x^\alpha = 1$. Ceci prouve que $\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$, d'où la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha > 0$. Le cas $\alpha < 0$ s'en déduit de nouveau du fait que $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$. L'assertion finale sur le prolongement par continuité en 0 résulte de la limite vue en (ii). □

Bilan: nous avons été capables de définir les puissances réelles d'exposant arbitraire et les exponentielles réelles de bases arbitraires sans même avoir eu besoin pour l'instant du calcul de dérivées – et encore moins du calcul intégral. C'est déjà un pas très considérable ! Le calcul des dérivées de ces fonctions sera l'étape suivante.

5. Croissance des pentes et dérivée des fonctions puissances

Rappelons que la dérivée d'une fonction f définie au voisinage d'un point x est définie comme la limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{X\to x} \frac{f(X)-f(x)}{X-x} \tag{5.1}$$

du taux d'accroissement

$$\tau_f(x,X) = \frac{f(X)-f(x)}{X-x},$$

lorsque cette limite existe. Le taux d'accroissement représente la pente de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(X, f(X))$ du graphe de f. L'existence de la dérivée est équivalente à celle d'une tangente au point $(x, f(x))$, dont la pente est alors égale à $f'(x)$.

On a aussi les notions de dérivée à droite et de dérivée à gauche lorsque les limites à droite et à gauche ne sont pas nécessairement égales, et les notions géométriques correspondantes de demi-tangente à droite et de demi-tangente à gauche.

Nous commencerons par l'observation suivante – qui pourrait même relever du collège et de l'expérimentation graphique élémentaire des progressions géométriques.

(5.2) Observation. *Étant donné une progression géométrique $u_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, les écarts successifs $u_{n+1} - u_n = a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n$ forment une suite croissante.*

Démonstration. En effet ceci est vrai aussi bien pour $a \geqslant 1$, auquel cas a^n est une suite croissante et $a - 1 \geqslant 0$, que pour $0 < a < 1$, auquel cas a^n est une suite décroissante et $a - 1 < 0$. □

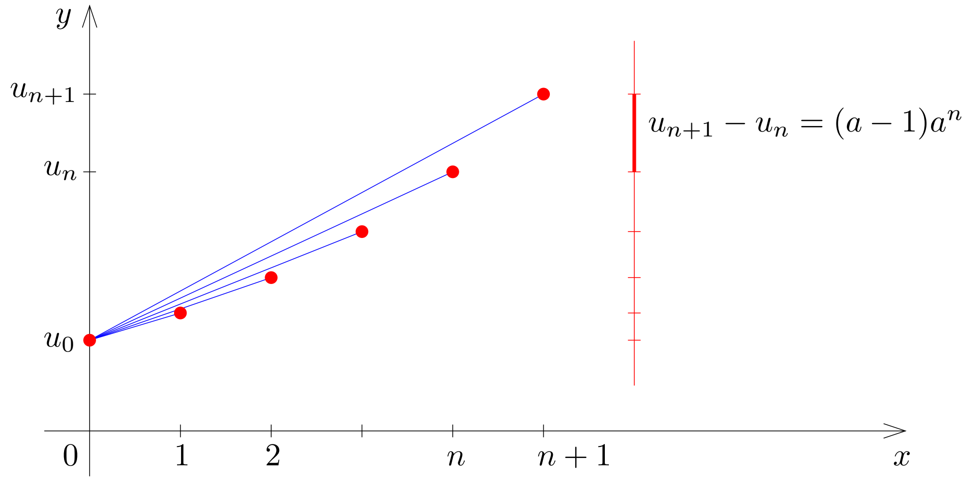

Fig. 3. Écarts $u_{n+1} - u_n$ dans une progression géométrique.

(5.3) Conséquence. *Pour tout réel $a > 0$, les taux d'accroissement pris sur l'intervalle $[0, n]$ de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $p_a(n) = \frac{a^n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, forment une suite croissante:*

$$\frac{a^1 - 1}{1} \leqslant \frac{a^2 - 1}{2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^n - 1}{n} \leqslant \ldots$$

Démonstration[11]. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il faut voir que

$$\frac{a^n - 1}{n} \leqslant \frac{a^{n+1} - 1}{n+1}, \quad \text{ce qui équivaut à} \quad (n+1)(a^n - 1) \leqslant n(a^{n+1} - 1),$$

ou encore à

$$a^n - 1 \leqslant n\big((a^{n+1} - 1) - (a^n - 1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad a^n - 1 \leqslant n(a^{n+1} - a^n).$$

[11] On aurait pu systématiser le raisonnement en utilisant la notion de suite convexe.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) est convexe si les écarts successifs $v_n = u_{n+1} - u_n$ forment une suite croissante.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le taux d'accroissement de la suite (u_n) sur l'intervalle $[0, n]$

$$p_n = \frac{u_n - u_0}{n} = \frac{v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}}{n},$$

qui s'interprète aussi comme la moyenne des n premiers écarts $v_i = u_{i+1} - u_i$. Géométriquement, ce taux représente la pente des droites bleues dans la Figure 3 ci-dessus.

Propriété. *Si une suite (u_n) est convexe, alors (avec les notations précédentes), la pente p_n vérifie $p_n \leqslant v_{n-1}$ et forme une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante.*

En effet, l'inégalité $p_n \leqslant v_{n-1}$ résulte de ce que chacun des termes v_i du numérateur de p_n est inférieur ou égal à v_{n-1}. On a donc $v_n \geqslant v_{n-1} \geqslant p_n$, d'où

$$p_{n+1} = \frac{(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + v_n}{n+1} = \frac{np_n + v_n}{n+1} \geqslant \frac{np_n + p_n}{n+1} = p_n. \quad \square$$

Mais on a

$$a^n - 1 = (a^n - a^{n-1}) + (a^{n-1} - a^{n-2}) + \ldots + (a^p - a^{p-1}) + \ldots + (a^2 - a) + (a - 1)$$

et chacun des n termes $a^p - a^{p-1}$ est majoré par $a^{n+1} - a^n$ d'après l'observation 5.2, ce qui donne l'inégalité voulue $a^n - 1 \leqslant n(a^{n+1} - a^n)$. $\square$

(5.4) Généralisation. *Pour tout réel $a > 0$, le taux d'accroissement*

$$p_a(x) = \frac{a^x - 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*,$$

de la fonction $x \mapsto a^x$ pris sur l'intervalle $[0, x]$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration. On procède en trois étapes.

(a) p_a *est croissante sur l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ des entiers non nuls.* Pour cela, on applique la conséquence (5.3) en remplaçant a par a^{-1} et en changeant les signes (ce qui renverse le sens des inégalités). On obtient alors

$$\ldots \leqslant \frac{a^{-n} - 1}{-n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-2} - 1}{-2} \leqslant \frac{a^{-1} - 1}{-1}.$$

Il reste juste à vérifier que $p_a(-1) = 1 - a^{-1} \leqslant p_a(1) = a - 1$. Après multiplication par a, on voit que cette inégalité équivaut à $a - 1 \leqslant a^2 - a$, et ceci est bien vrai puisque $(a^2 - a) - (a - 1) = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geqslant 0$. On a par conséquent

$$\ldots \leqslant \frac{a^{-n} - 1}{-n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-2} - 1}{-2} \leqslant \frac{a^{-1} - 1}{-1} \leqslant \frac{a^1 - 1}{1} \leqslant \frac{a^2 - 1}{2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^n - 1}{n} \leqslant \ldots$$

(b) p_a *est croissante sur l'ensemble des décimaux non nuls $\mathbb{D}_k^*$ de dénominateur 10^k.* On observe pour cela que $\mathbb{D}_k^*$ est l'ensemble des rationnels de la forme $x = n/10^k$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Comme $a^x = (a^{1/10^k})^n$, il suffit d'appliquer la suite précédente d'inégalités et de remplacer a par $a^{1/10^k}$. En divisant de plus tous les dénominateurs par 10^k, on obtient les inégalités désirées, à savoir

$$\frac{a^{-n/10^k} - 1}{-n/10^k} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{-1/10^k} - 1}{-1/10^k} \leqslant \frac{a^{1/10^k} - 1}{1/10^k} \leqslant \frac{a^{2/10^k} - 1}{2/10^k} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a^{n/10^k} - 1}{n/10^k} \leqslant \ldots$$

(c) p_a *est croissante sur* $\mathbb{R}^*$. On procède par passage à la limite sur les décimaux. Pour $x, y \in \mathbb{R}^*$ avec $x \leqslant y$ quelconques, on considère les approximations décimales x_k de x et y_k de y à 10^{-k} près par défaut. Alors $x_k \leqslant y_k$ et $x_k, y_k \in \mathbb{D}_k^*$ pour k assez grand, donc $p_a(x_k) \leqslant p_a(y_k)$, ce qui donne $p_a(x) \leqslant p_a(y)$ quand k tend vers $+\infty$. $\square$

Une première application de ce résultat est le calcul de la dérivée des fonctions puissances[12].

[12] Cette approche est inspirée d'un cours rédigé par Abdellah Bechata à partir d'une première version des présentes notes ...

(5.5) Théorème. *On considère, pour α réel quelconque, la fonction $x \mapsto x^\alpha$, $x \geqslant 0$.*

(a) *Pour tous x, $X > 0$, $x \neq X$, le taux d'accroissement $\dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x}$ est compris entre les valeurs $\alpha\, x^{\alpha-1}$ et $\alpha\, X^{\alpha-1}$.*

(b) *La dérivée au point x est donnée par la formule $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, et cette formule est encore valable pour $x = 0$ si $\alpha > 1$.*

Démonstration. (a) Posons $a = X/x$. La croissance de la fonction $t \mapsto \frac{a^t - 1}{t} = \frac{(X/x)^t - 1}{t}$ garantie par (5.4) entraîne pour $\alpha \geqslant 1$ l'inégalité

$$\frac{(X/x)^\alpha - 1}{\alpha} \geqslant \frac{(X/x)^1 - 1}{1} = \frac{X - x}{x} \underset{\bullet \times x^\alpha}{\Longrightarrow} \frac{X^\alpha - x^\alpha}{\alpha} \geqslant x^{\alpha-1}(X - x),$$

après multiplication par x^α. En multipliant maintenant par α et en divisant par $X - x$, il vient, compte tenu du signe de $X - x$,

$$\frac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \geqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X > x, \qquad \frac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X < x.$$

L'encadrement par l'autre borne $\alpha\, X^{\alpha-1}$ s'obtient en échangeant les rôles de x et X, ce qui donne pour tout $\alpha \geqslant 1$

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \alpha\, x^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \leqslant \alpha\, X^{\alpha-1} \ \text{ si } X > x, \\[2ex] \alpha\, X^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X < x. \end{cases}$$

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, le raisonnement est identique, l'inégalité de départ est juste inversée, et on a donc renversement des inégalités de l'encadrement, soit

$$(5.7) \qquad \begin{cases} \alpha\, X^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \leqslant \alpha\, x^{\alpha-1} \ \text{ si } X > x, \\[2ex] \alpha\, x^{\alpha-1} \leqslant \dfrac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} \leqslant \alpha\, X^{\alpha-1} \ \text{ si } X < x. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, ces inégalités sont vraies aussi, de manière évidente $(0 = 0)$. Pour $\alpha < 0$, la multiplication par α inverse encore une autre fois les inégalités de l'encadrement, et on se retrouve dans la situation (5.6).

(b) La dérivée au point x est la limite du taux d'accroissement quand $X \to x$. Comme $\lim_{X \to x} X^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$ par continuité, on déduit de l'encadrement du (a) que la dérivée en x est donnée par

$$\lim_{X \to x} \frac{X^\alpha - x^\alpha}{X - x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

La dérivée en $x = 0$ s'obtient en considérant directement le rapport $x^\alpha / x = x^{\alpha-1}$ quand $x \to 0_+$, rapport qui tend bien vers 0 pour $\alpha > 1$. □

6. Logarithmes, logarithme népérien

Le théorème 4.5 montre que la fonction $x \mapsto a^x$ définit pour tout $a > 0$, $a \neq 1$, une application continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En d'autres termes, pour tout $y > 0$, l'équation $a^x = y$ possède une unique solution $x \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci définit d'après le théorème des fonctions réciproques une fonction continue bijective

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

appelée *logarithme de base* a, qui est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a, caractérisée par l'équivalence

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{6.2}$$

Cette définition est tellement naturelle qu'il nous semblerait utile que les logarithmes de base entière – lorsqu'ils « tombent juste » – aient déjà été introduits de manière sommaire au collège à l'occasion de l'étude des puissance de 2, 3 ou 10, ou même d'une base a entière quelconque, un peu après l'étude des nombres écrits dans une base autre que 10 (on sait bien que la base 2 est le fondement de notre monde numérique, il serait indispensable qu'un élève qui a terminé sa scolarité obligatoire sache au moins ce que veut dire le mot « numérique », ne serait-ce que parce qu'il est aujourd'hui omniprésent dans les catalogues de HiFi). Dès la classe de sixième ou de cinquième, on pourrait très bien faire dessiner des frises représentant les temps géologiques en échelle logarithmique des puissances de 10 – voire expliquer ce qu'est le pH en chimie, pour des pH entiers, ce qui introduit utilement le logarithme décimal $\log_{10}$ en liaison avec l'usage de la notation scientifique 10^{-n} en sciences expérimentales. La généralisation progressive des puissances aux cas des exposants négatifs, puis au cas des racines carrées et n-ièmes permet d'étendre corrélativement les logarithmes $\log_a$ au cas des valeurs négatives, demi-entières, fractionnaires.

Au contraire, il nous semble didactiquement contestable, comme le font les programmes depuis au moins 45 ans, de commencer la théorie des logarithmes par l'introduction des logarithmes « naturels » (ce qui est en réalité un contresens historique), précisément parce que les logarithmes de base a entière sont plus intuitifs. Mais tout finit par arriver un jour, et l'étape que nous allons franchir consiste précisément en l'introduction de la fonction ln. Comme il est bien connu (et mal accepté par les programmes actuels !), la fonction ln a quelque chose à voir avec la dérivée des exponentielles [13].

(6.3) Théorème et définition. *La fonction $x \mapsto a^x$ admet une dérivée en 0, notée*

$$\ln(a) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}. \tag{6.3 a}$$

On a de plus pour tout réel $a > 0$ l'encadrement

$$1 - \frac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1. \tag{6.3 b}$$

---

[13] Tout autant qu'avec le calcul intégral et la primitive de $x \mapsto 1/x$. On verra même ainsi a posteriori qu'on aurait pu se passer du théorème des fonctions réciproques pour démontrer l'existence des fonctions logarithmes $\log_a$, sachant que celles-ci se calculent à partir de la fonction ln qui, elle, peut être définie explicitement comme une dérivée.

Démonstration. Si $x \in [-1, 0\,[\cup]\,0, 1]$, nous avons

$$p_a(-1) \leqslant p_a(x) \leqslant p_a(1) \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{a} \leqslant p_a(x) = \frac{a^x - 1}{x} \leqslant a - 1$$

puisque p_a est une fonction croissante d'après (5.4). Comme la suite $\mathbb{N}^* \ni n \mapsto p_a(1/n)$ est décroissante et minorée, le théorème (3.1) montre qu'il y a bien une limite à droite en 0

$$\ln(a) = \lim_{x \to 0_+} p_a(x), \qquad \text{et de plus} \quad 1 - \frac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1.$$

Pour la limite à gauche, on écrit

$$\frac{a^{-x} - 1}{-x} = \frac{a^{-x}(1 - a^x)}{-x} = \frac{1}{a^x} \frac{a^x - 1}{x} \qquad \text{pour } x > 0,$$

et comme $\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$ d'après la continuité de la fonction $x \mapsto a^x$, on voit que la limite à gauche est égale à la limite à droite. Le théorème (6.3) est démontré. □

(6.4) Conséquence. *La fonction exponentielle de base a est partout dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a la formule*

$$(a^x)' = \ln(a)\, a^x.$$

Démonstration. On écrit

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln(a). \qquad \square$$

Nous démontrons maintenant les propriétés fondamentales de la fonction ln.

(6.5) *Pour tous réels $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\ln(a^t) = t \ln a$.*

Démonstration. Si $t = 0$, on a $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ puisque la fonction $x \to 1^x = 1$ est de dérivée nulle. Si $t \neq 0$, on écrit que par définition

$$\ln(a^t) = \lim_{h \to 0} \frac{(a^t)^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{th} - 1}{h} = t \lim_{h \to 0} \frac{a^{th} - 1}{th} = t \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = t \ln(a). \qquad \square$$

(6.6) *Pour tous réels $a, b > 0$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.*

En effet $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, et donc d'après la formule pour la dérivation d'un produit de fonctions, la dérivée en $x = 0$ en donnée par

$$\ln(ab) = \big((ab)^x\big)'_{x=0} = (a^x)'_{x=0} \cdot b^0 + a^0 \cdot (b^x)'_{x=0} = \ln(a) \cdot 1 + 1 \cdot \ln(b) = \ln(a) + \ln(b). \quad \square$$

(6.7) *Pour tous réels $a, b > 0$, on a $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.*

En effet (6.6) donne $\ln(a) = \ln((a/b) \cdot b) = \ln(a/b) + \ln(b)$. □

(6.8) Théorème. *La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante, partout dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, et on a*

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

De plus, $\lim_{x \to 0_+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

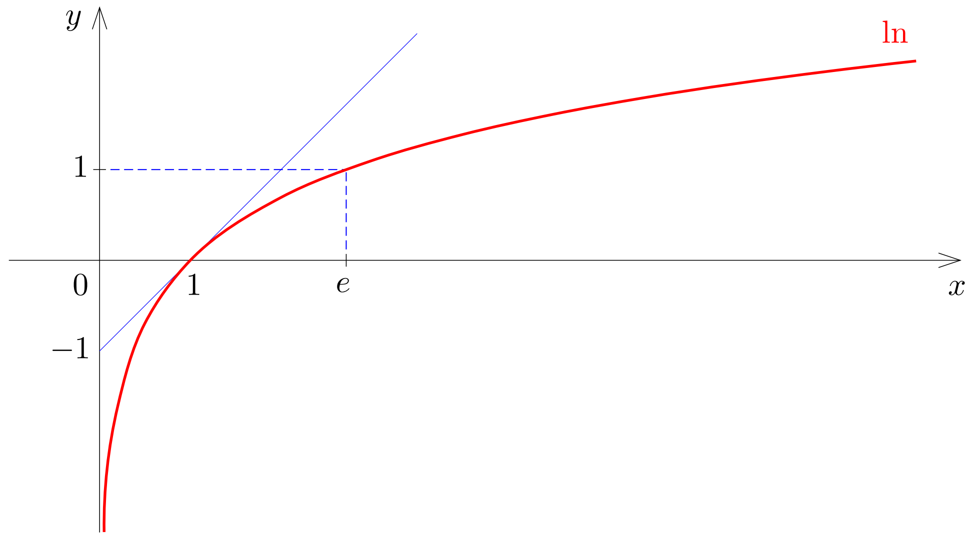

Fig. 4. Représentation graphique de la fonction ln.

Démonstration. Pour x, $X > 0$ quelconques tels que $X \neq x$, on écrit grâce à (6.7)

$$\frac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} = \frac{\ln\big(X/x\big)}{X - x}$$

Or, l'encadrement (6.3 b) avec $a = \dfrac{X}{x} > 0$ donne $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1$, soit

$$\frac{X - x}{X} = 1 - \frac{x}{X} \leqslant \ln(X) - \ln(x) \leqslant \frac{X}{x} - 1 = \frac{X - x}{x}\,,$$

par conséquent

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X} \leqslant \dfrac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} \leqslant \dfrac{1}{x} & \text{pour } X > x, \\[2ex] \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} \leqslant \dfrac{1}{X} & \text{pour } X < x. \end{cases}$$

Ceci entraîne bien

$$\big(\ln(x)\big)' = \lim_{X \to x} \frac{\ln(X) - \ln(x)}{X - x} = \frac{1}{x}.$$

La propriété de croissance stricte résulte des inégalités précédentes, qui montrent que $\ln(X) - \ln(x) \geqslant \frac{X-x}{X} > 0$ si $X > x > 0$ [on peut aussi, si on le souhaite, utiliser le fait que la dérivée est strictement positive]. Comme $\ln(2^n) = n \ln(2)$ avec $\ln(2) > 0$, on en déduit que $\ln(x) \geqslant n \ln(2)$ pour $x \geqslant 2^n$, et $\ln(x) \leqslant -n \ln(2)$ pour $x \leqslant 2^{-n}$. On a donc bien les limites annoncées quand $x \to 0_+$ et $x \to +\infty$. □

(6.9) Théorème. *Il existe un (unique) nombre réel noté e tel que $\ln(e) = 1$. La fonction exponentielle de base e et la fonction* ln

$$x \mapsto e^x, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \qquad x \mapsto \ln(x), \qquad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit on a

$$\ln(e^x) = x \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \textit{ et } \quad e^{\ln(x)} = x \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,$$

et $\ln = \log_e$ *s'identifie au logarithme de base* e*. La fonction* $\ln$ *est appelée fonction logarithme naturel (ou parfois encore népérien, en hommage à John Napier, aussi dénommé Neper en Latin*(14)*). De plus la dérivée de la fonction exponentielle* $x \mapsto e^x$ *est donnée par*

$$(e^x)' = e^x.$$

La fonction exponentielle de base e *est souvent appelée fonction exponentielle (tout court), et notée* exp*, de sorte que* $\exp(x) = e^x$ *et* $\exp' = \exp$.

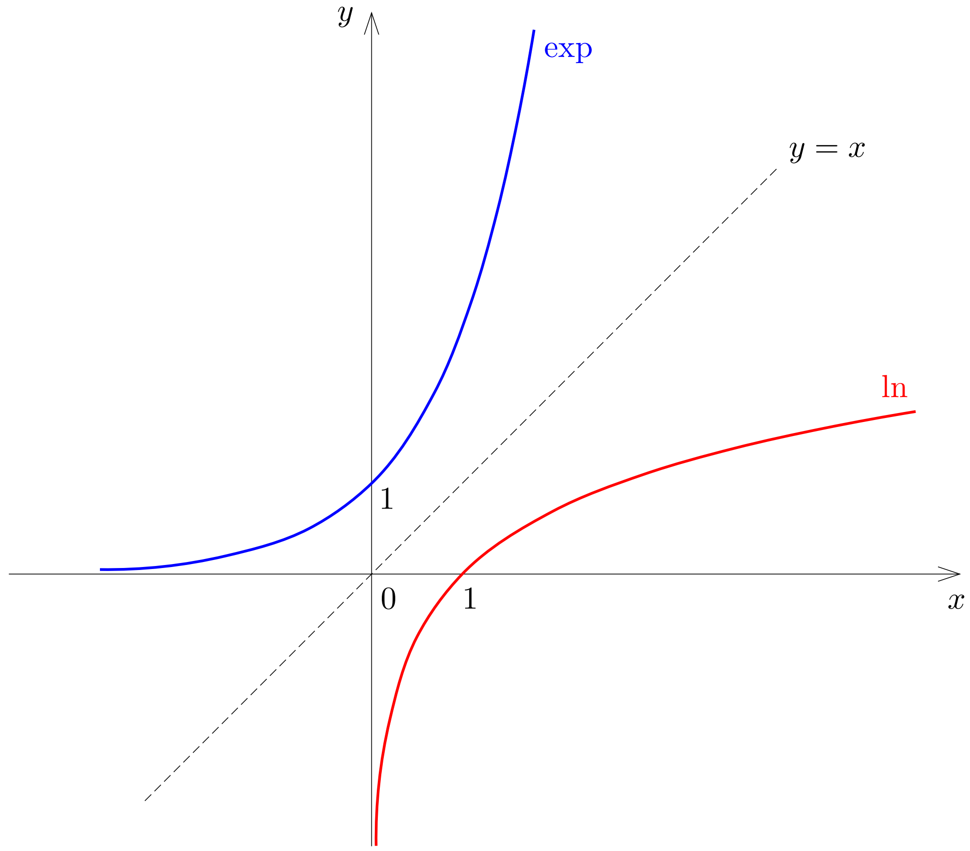

Fig. 5. Représentation graphique de ln et de exp.

Démonstration. L'unicité du nombre e résulte du fait que la fonction ln est strictement croissante. Pour prouver que e existe, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, ou raisonner directement comme suit. On fixe une base $a > 1$ ($a = 2$ conviendrait) et on cherche e sous la forme $e = a^t$. Alors $\ln(a^t) = t\ln(a)$ d'après (6.5), donc il suffit de prendre $t = 1/(\ln(a)) > 0$. La solution cherchée est $e = a^t = a^{1/\ln(a)}$.

Maintenant, (6.5) donne bien $\ln(e^x) = x\ln(e) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, on trouve $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x)$, mais comme ln est strictement croissante ceci ne peut avoir lieu que si $e^{\ln(x)} = x$. La formule donnant la dérivée de e^x est un cas particulier de (6.4). $\square$

(14) En réalité, les premières tables de logarithmes établies par Napier et par le mathématicien Henry Briggs dans les années qui suivirent étaient des logarithmes décimaux. C'est seulement avec les travaux de Huyghens en 1661 et plus tardivement avec ceux de Leibnitz sur les fonctions, en 1697, que le logarithme naturel fut définitivement dégagé dans sa forme moderne.

(6.10) Théorème. *Pour toute base $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction exponentielle de base a*

$$x \mapsto a^x, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

admet une fonction réciproque donnée par

$$\text{(6.10 a)} \qquad x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \qquad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

appelée, rappelons-le, logarithme de base a. En particulier on a $\ln = \log_e$. La dérivée de $\log_a$ est

$$\text{(6.10 b)} \qquad \big(\log_a(x)\big)' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}$$

et pour tous réels $x, y > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, le logarithme de base a vérifie les propriétés fondamentales

$$\text{(6.10 c)} \qquad \log_a(x^t) = t\log_a(x),$$

$$\text{(6.10 d)} \qquad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

analogues aux propriétés du logarithme népérien.

Démonstration. Si on pose $y = a^x$, on a $\ln(y) = x\ln(a)$ et donc $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. Il en résulte aussitôt que $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ est bien la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$. Toutes les autres propriétés se déduisent immédiatement de celles du logarithme népérien. □

Nous terminons par l'expression de la fonction puissance en termes de l'exponentielle et du logarithme :

$$\text{(6.11)} \qquad x^a = (e^{\ln(x)})^a = e^{a\ln(x)} = \exp\big(a\ln(x)\big).$$

Ceci permet (au moins pour se rassurer !) de retrouver la dérivée et le sens de variation de $x \mapsto x^a$ à l'aide de la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$\text{(6.12)} \qquad (x^a)' = \exp'\big(a\ln(x)\big)\cdot(a\ln(x))' = \exp\big(a\ln(x)\big)\cdot a\,\frac{1}{x} = x^a\cdot a\,\frac{1}{x} = a\,x^{a-1}.$$

(6.13) Conclusion. Il est possible de définir rigoureusement puissances, exponentielles et logarithmes dans une approche où toutes les propriétés essentielles se démontrent en respectant l'intuition numérique (on part des puissances, qui sont les plus intuitives, on passe aux exponentielles, qui généralisent les puissances, et enfin on arrive aux logarithmes). Notons de plus qu'aucun théorème avancé d'analyse ne nous a été nécessaire – le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème sur l'existence des fonctions réciproques pourraient même être évités. Mais bien entendu nous recommandons avec force que ces théorèmes soient tout de même énoncés au niveau du lycée, et encore mieux complètement démontrés : le procédé de dichotomie et le théorème des suites adjacentes peuvent rendre la chose « numériquement évidente », tout en donnant un procédé concret de résolution approchée d'une équation $f(x) = y$ (on pourra par exemple faire expérimenter les élèves sur la résolution d'équations polynomiales $f(x) = 0$ de degré 3 – c'est là un bon usage de la calculette !).

7. Calcul numérique du nombre e et de l'exponentielle e^{ix}.

L'objectif est d'exprimer l'exponentielle sous forme de la limite d'une suite de polynômes (ce que l'on appelle une « série entière »). Là encore, on peut y aboutir au moyen de considérations très simples sur la formule du binôme et les limites de suites croissantes majorées. Le point de départ est la formule importante suivante.

(7.1) Formule. $$e^x = \lim_{n\to+\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.$$

Pour la vérifier, on observe que

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big) = \exp\Big(x\,\frac{\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)}{\frac{x}{n}}\Big).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)}{\frac{x}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\big(1+h\big)}{h} = \ln'(1) = 1,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$. Comme la fonction exp est continue, on en déduit bien

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \exp(x) = e^x. \qquad \square$$

On utilise maintenant la formule du binôme pour développer

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + \ldots + C_n^p h^p + \ldots + h^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!}h + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}h^p + \ldots + h^n.\end{aligned}$$

En substituant $\frac{x}{n}$ à h il vient

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}\frac{x^p}{n^p} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})}{p!}x^p + \ldots + \frac{x^n}{n^n}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous allons facilement en déduire la formule suivante.

(7.2) Théorème. *Pour tout nombre réel x, on a*

$$e^x = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!}.$$

En particulier

$$e = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!}.$$

Démonstration. Supposons d'abord $x \geqslant 0$. Si nous tronquons la somme du binôme à un ordre p fixé, nous trouvons

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \geqslant 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}x^2+\ldots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})}{p!}x^p,$$

et le coefficient $1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n})$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. En passant à la limite quand $n\to+\infty$ il vient donc

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

En faisant tendre maintenant p vers $+\infty$, on voit que la suite du membre de droite est convergente puisqu'elle est croissante et majorée par e^x (le fait que $x \geqslant 0$ nous sert de nouveau), donc

$$e^x \geqslant \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

Cherchons à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, on observe tout simplement que $1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n}) \leqslant 1$, donc

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \leqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

et par conséquent

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \leqslant \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}.$$

Ceci conclut la preuve du théorème (7.2) dans le cas où $x \geqslant 0$ [et on pourrait bien sûr s'arrêter à ce point pour simplifier l'exposé...]. Pour traiter le cas d'un exposant négatif, on utilise une astuce : on considère la fonction « cosinus hyperbolique »

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n+\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\Big).$$

Dans ces conditions, il ne reste que les puissances paires de x dans le développement du binôme, avec les mêmes coefficients positifs que précédemment. Pour $x \geqslant 0$, on obtient donc de manière analogue

$$\cosh(x) = \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2p-2}}{(2p-2)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}. \tag{7.3}$$

Comme $e^{-x} = 2\cosh(x)-e^x$ avec

$$e^x = \lim_{p\to+\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}\quad\Big[+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\Big],$$

on multiplie (7.3) par 2 et il vient par soustraction

$$e^{-x} = \lim_{p\to+\infty} 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}\quad\Big[-\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\Big].$$

C'est bien la formule cherchée dans le cas d'un exposant négatif. On notera qu'on obtient aussi du même coup le développement de la fonction « sinus hyperbolique » $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, qui ne laisse subsister que les monômes de degrés impairs

$$(7.4) \qquad \sinh(x) = \lim_{p\to+\infty} \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}. \qquad \square$$

(7.5) Application numérique. Pour évaluer numériquement e^x, on choisit un entier p assez grand, et on utilise la factorisation évidente

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1}\Big(1 + \frac{x}{2}\Big(1 + \frac{x}{3}\Big(\ldots\Big(1 + \frac{x}{p-1}\Big(1 + \frac{x}{p}\Big)\Big)\ldots\Big)\Big)\Big).$$

En prenant $x = 1$ et p assez grand ($p = 20$ suffit), on trouve ainsi la valeur approchée

$$e = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!} \approx 2,71828182845904.$$

(7.6) Autres conséquences. Ce qui précède montre que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ on a $e^x \geqslant x^p/p!$ dès que $x > 0$. En remplaçant p par $p+1$ on trouve $e^x \geqslant x^{p+1}/(p+1)!$ et donc $e^x/x^p \geqslant \frac{x}{(p+1)!}$. Par conséquent

$$(7.6\,\mathrm{a}) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty.$$

En posant $x = -t$ avec $t \to -\infty$, il vient

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-t}}{(-t)^p} = \lim_{t\to-\infty} \frac{(-1)^p}{t^p e^t} = +\infty,$$

donc (quitte à revenir à la variable x)

$$(7.6\,\mathrm{b}) \qquad \lim_{x\to-\infty} x^p e^x = 0.$$

On exprime les propriétés (7.6 a) et (7.6 b) en disant que dans une forme indéterminée *la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances.*

De manière analogue, on a pour $x \geqslant 1$ l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1 \leqslant x$, et en remplaçant x par $x^{a/2}$ on obtient $\frac{a}{2}\ln(x) \leqslant x^{a/2}$, donc $\ln(x)/x^a \leqslant \frac{2}{a}x^{-a/2}$ pour tout $a > 0$. Ceci implique

$$(7.6\,\mathrm{c}) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0.$$

En faisant le changement de variable $x = 1/t$ avec $t \to 0_+$ on trouve également

$$(7.6\,\mathrm{d}) \qquad \lim_{x\to 0_+} x^a \ln(x) = 0.$$

On exprime les propriétés (7.6 c) et (7.6 d) en disant que dans une forme indéterminée *les fonctions puissances l'emportent sur la fonction logarithme.*

8. Exponentielles et équations différentielles linéaires d'ordre 1

Une fois que les exponentielles et les logarithmes sont maîtrisés – et nous pensons que le bon niveau pour cela serait celui de la classe de première – l'étude des fonctions peut être enrichie graduellement. En terminale, la maturité des élèves et des techniques qui leur sont disponibles devient suffisante pour aborder de manière plus systématique les fondements du calcul différentiel et des équations différentielles. Il serait très important de bien introduire les notations différentielles dx, df, df/dx qui sont nécessaires aux physiciens. Ceci doit se faire en liaison avec le calcul intégral. Nous aborderons ici uniquement les aspects les plus élémentaires liés aux équations différentielles du premier ordre, tels qu'ils peuvent être traités en classe terminale.

La formule de dérivation d'une fonction composée montre que pour tout nombre réel k, la fonction $y(x) = e^{kx}$ vérifie $y'(x) = k\,e^{kx}$, c'est donc une solution de « l'équation différentielle »

$$y' = ky. \tag{8.1}$$

Réciproquement :

(8.2) Théorème. *Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' = ky$ admet sur $\mathbb{R}$ les solutions $y(x) = \lambda\,e^{kx}$ où λ est une constante réelle, et il n'y en a pas d'autres.*

Démonstration. Posons $f(x) = y(x)\,e^{-kx}$. On trouve

$$f'(x) = y'(x)\,e^{-kx} + y(x)\cdot\big(-k\,e^{-kx}\big) = \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = 0.$$

Ceci implique que la fonction f est une constante λ, ce qui entraîne $y(x) = \lambda\,e^{kx}$. Ces fonctions sont bien des solutions de l'équation différentielle. □

Cherchons plus généralement les solutions de l'équation différentielle « non homogène »

$$y'(x) = k\,y(x) + u(x) \tag{8.3}$$

où $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On cherche dans ce cas les fonctions dérivables $y : I \to \mathbb{R}$ qui satisfont (8.3). En posant comme précédemment $f(x) = y(x)\,e^{-kx}$, on voit que l'équation (8.3) est équivalente à

$$f'(x) = \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = u(x)\,e^{-kx}.$$

la solution générale est donnée sous la forme $f(x) = \lambda + f_0(x)$ où f_0 est une primitive de $x \mapsto u(x)\,e^{-kx}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire. Ceci donne

$$y(x) = (\lambda + f_0(x))e^{kx}. \tag{8.4}$$

Cette solution peut encore se réécrire sous la forme

$$y(x) = \lambda\,e^{kx} + y_0(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{8.5}$$

où $y_0(x) = f_0(x)\,e^{kx}$ est la solution particulière de l'équation correspondant à la constante $\lambda = 0$. Dans la pratique, si on connaît (ou si on aperçoit) une solution particulière

y_0 de l'équation (8.3), les autres solutions sont obtenues en ajoutant $\lambda\, e^{kx}$ à $y_0(x)$, ce qui évite d'avoir à faire un calcul de primitives.

Les fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ vérifient la propriété fonctionnelle fondamentale $f(x+y) = f(x)f(y)$. De manière générale, il est intéressant de savoir quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui « transforment additions en multiplications », c'est-à-dire quelles sont celles qui satisfont la propriété

$$(8.6) \qquad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que s'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ entraîne que la fonction f est la fonction nulle. Nous supposerons désormais f non nulle ; d'après ce qui précède $f(x)$ ne peut alors s'annuler. Dans ce cas, la propriété $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f(x/2)^2$ entraîne $f(x) > 0$, et on peut poser $g = \ln \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On voit que

$$(8.7) \quad g(x+y) = \ln\big(f(x+y)\big) = \ln\big(f(x)f(y)\big) = \ln\big(f(x)\big) + \ln\big(f(y)\big) = g(x) + g(y).$$

On dit qu'une telle fonction g est une fonction additive. Les fonctions g de la forme $g(x) = kx$ satisfont de façon évidente la propriété d'additivité, et on peut se demander s'il en existe d'autres. Malheureusement, il se trouve qu'il existe des fonctions discontinues « extrêmement tordues » – presque impossible à décrire – qui sont additives. Néanmoins la réponse est simple si on suppose que les fonctions en question sont *continues.*

(8.8) Théorème. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction additive, c'est-à-dire telle que*

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad \textit{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si g est continue, alors

$$g(x) = kx \qquad \textit{avec } k = g(1) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Comme $g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0)$ on voit déjà que $g(0) = 0$. De plus $g(0) = 0 = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x)$, donc $g(-x) = -g(x)$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel, la propriété d'additivité implique

$$g(nx) = g(x + x + \ldots + x) = g(x) + g(x) + \ldots + g(x) = n\, g(x).$$

En particulier $g(1) = g(n\frac{1}{n}) = n\, g(\frac{1}{n})$ donc $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}g(1)$. Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel positif ($p, q \in \mathbb{N}^*$), il vient

$$g(x) = g\Big(p\frac{1}{q}\Big) = p\, g\Big(\frac{1}{q}\Big) = p\frac{1}{q}g(1) = x\, g(1).$$

Cette propriété s'étend au rationnels négatifs du fait que $g(-x) = -g(x)$. En posant $k = g(1)$, on en déduit bien que $g(x) = kx$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Comme g est supposée continue, cette propriété s'étend par passage à la limite à tous les réels x, en considérant par exemple la suite (x_n) des approximations décimales à 10^{-n} près de x. $\square$

Si nous revenons aux fonctions f continues non nulles qui vérifient (8.6), on voit que $g(x) = \ln f(x) = kx$, donc $f(x) = e^{kx}$. Nous pouvons énoncer :

(8.9) Théorème. *Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R},$$

sont d'une part la fonction nulle $f = 0$ et d'autre part les fonctions exponentielles $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$, ou encore $f(x) = a^x$, $a > 0$.

Si on impose la condition plus forte que f soit dérivable et que l'on dérive la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y, on trouve

$$f'(x+y) = f(x)f'(y).$$

Pour $y = 0$, on trouve en particulier $f'(x) = f(x)f'(0) = k\,f(x)$ avec $k = f'(0)$. On conclut alors que $f(x) = \lambda\,e^{kx}$ d'après le théorème (8.2). Comme on doit avoir de plus $f(0) = f(0)f(0)$, il vient $\lambda = \lambda^2$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Ceci donne une autre démonstration du théorème (8.9), sous l'hypothèse plus restrictive que f soit dérivable.

9. Fonctions trigonométriques

Commençons par rappeler quelques considérations de base sur les fonctions trigonométriques. Celles-ci devraient sans aucun doute possible trouver leur place dans les classes de seconde et de première. On appelle *cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre l'origine dans un plan orthonormé Oxy, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2 + y^2 = 1$. Soit U le point de coordonnées $(1,0)$ et V le point de coordonnées $(0,1)$.

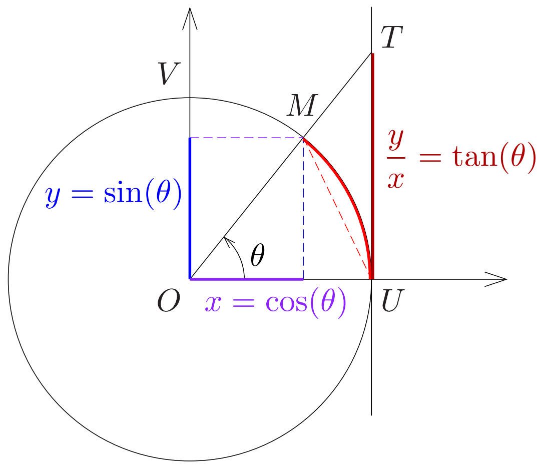

Fig. 6. Cercle trigonométrique et fonctions cos, sin, tan.

À un point $M \in \mathcal{C}$ et à l'angle de vecteurs orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}})$, on associe par définition

$$\text{(9.1)} \qquad \cos(\theta) = x, \qquad \sin(\theta) = y, \qquad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x},$$

qui sont représentés géométriquement sur la Figure 6. En effet, puisque $\overline{OU} = 1$, le théorème de Thalès donne

$$\overline{UT} = \frac{\overline{UT}}{\overline{OU}} = \frac{y}{x} = \tan(\theta).$$

Par définition, le mesure en radians de l'angle θ est la longueur de l'arc $\widehat{UM}$, affecté d'un signe moins si M est d'ordonnée négative, et compté à un multiple de 2π près. Rappelons que *la longueur d'un arc est par définition la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc.* D'après ce qui précède nous avons

$$(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = x^2 + y^2 = 1, \tag{9.2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{OV}. \tag{9.3}$$

Nous aurons besoin de la formule très importante qui suit.

(9.4) Formule d'addition des angles. *Pour tout couple d'angles α, β, on a*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

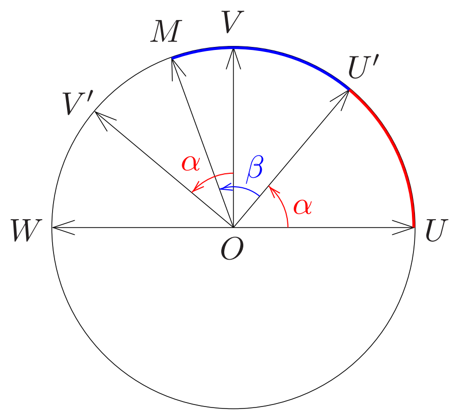

Fig. 7. Formule d'addition des angles.

Démonstration. Quitte à changer de repère, la formule (9.3) nous donne en effet

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\beta)\,\overrightarrow{OU'} + \sin(\beta)\,\overrightarrow{OV'},$$

et de manière analogue

$$\overrightarrow{OU'} = \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OV},$$
$$\overrightarrow{OV'} = \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OW} = -\sin(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV}.$$

En substituant $\overrightarrow{OU'}$ et $\overrightarrow{OV'}$ dans la formule donnant $\overrightarrow{OM}$, il vient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(\beta)\,\big(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{OV}\big) + \sin(\beta)\,\big(-\sin(\alpha)\,\overrightarrow{OU} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{OV}\big)\\ &= \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)\,\overrightarrow{OU} + \big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big)\,\overrightarrow{OV}.\end{aligned}$$

Ceci donne les formules souhaitées puisque $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ sont précisément les composantes de $\overrightarrow{OM}$ suivant $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$. $\square$

On a d'autre part les encadrements très utiles suivants, qui vont conduire à la dérivation des fonctions trigonométriques ; pour cela, il convient bien sûr d'attendre que la notion de dérivée soit en place.

(9.5) Encadrements fondamentaux. *Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du cercle trigonométrique situés dans le quadrant supérieur droit, tels que $0 < x \leqslant x' \leqslant 1$ et $0 \leqslant y' \leqslant y < 1$, et soient $0 \leqslant \theta' \leqslant \theta$ les angles qui leur sont associés, mesurés en radians. Alors, si P est l'intersection de la droite (OM) avec la parallèle à Oy passant par M', et T, T' les intersections de (OM), (OM') respectivement, avec la parallèle à Oy passant par U, on a*

(a) $y - y' \leqslant M'M \leqslant M'P \leqslant T'T = \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'}$.

(b) $\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant \theta - \theta' \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta')$.

(c) *En particulier, si on prend $M' = U$, $\theta' = 0$ dans* (b)*, il vient*

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta) \qquad \textit{pour } \theta \in [0, \pi/2[.$$

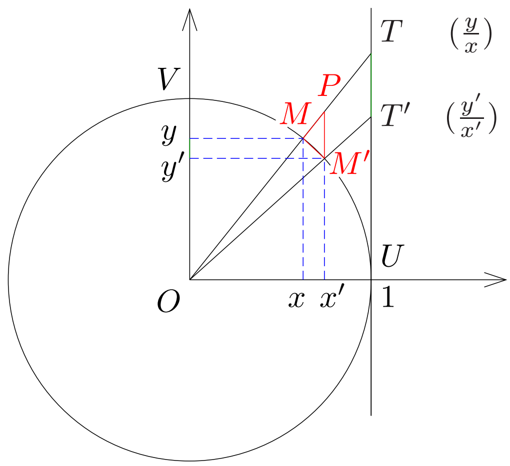

Fig. 8. Encadrement d'une corde $M'M$ du cercle trigonométrique.

Démonstration. (a) La minoration $M'M \geqslant y - y'$ résulte du fait que dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit, en vertu du théorème de Pythagore. Plus généralement, dans un triangle obtus, le côté opposé à l'angle obtus est plus grand que les deux autres côtés, et la majoration $M'M \leqslant M'P$ résulte de cette propriété appliquée au triangle $(M'MP)$ qui a son angle $\hat{M}$ obtus. Il est d'autre part évident que $T'T$ est plus grand que $M'P$ (dans le rapport $1/x' \geqslant 1$, d'après le théorème de Thalès) [15].

[15] Pour les esprits préférant l'algèbre, donnons une autre preuve plus algébrique. Comme la pente de la droite (OM) est $\frac{y}{x}$, les coordonnées de P sont $(x', \frac{y}{x}x')$, et on a

$$M'P = \frac{y}{x}x' - y', \qquad T'T = \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'} = \frac{1}{x'}M'P \geqslant M'P.$$

(b) L'encadrement du (a) peut se retraduire sous la forme

$$\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant M'M \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta').$$

Or la longueur d'arc $\overset{\frown}{M'M}$ est par définition la limite, pour des subdivisions assez fines, des longueurs $M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n$ de lignes polygonales $(M_0M_1 \ldots M_n)$ telles que $M_0 = M'$ et $M_n = M$. Le résultat précédent donne

$$\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i) \leqslant M_iM_{i+1} \leqslant \tan(\theta_{i+1}) - \tan(\theta_i)$$

et en sommant de $i = 0$ à $i = n - 1$ on trouve

$$\sin(\theta_n) - \sin(\theta_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} \leqslant \tan(\theta_n) - \tan(\theta_0).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, et tenant compte du fait que $\theta_0 = \theta'$, $\theta_n = \theta$ il vient

$$\sin(\theta) - \sin(\theta') \leqslant \overset{\frown}{M'M} = \theta - \theta' \leqslant \tan(\theta) - \tan(\theta').$$

La propriété (b) est établie, et (c) est le cas particulier $\theta' = 0$.[16] □

Nous établissons maintenant les formules donnant les dérivées des fonctions trigonométriques.

(9.6) Lemme. *On a*

$$\sin'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \cos'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Grâce au théorème de Pythagore, nous obtenons directement

$$M'M = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \geqslant \sqrt{(y - y')^2} = y - y'.$$

D'autre part, par élévation au carré de l'expression de $M'P = \frac{y}{x}(x' - x) + (y - y')$, il vient

$$(M'P)^2 \geqslant 2\tfrac{y}{x}(x' - x)(y - y') + (y - y')^2$$

en négligeant le premier carré $(\frac{y}{x}(x' - x))^2$. Les égalités $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$ entraînent à leur tour

$$2x(x' - x) \leqslant (x + x')(x' - x) = x'^2 - x^2 = y^2 - y'^2 = (y - y')(y + y') \leqslant 2y(y - y'),$$

donc en substituant $2y(y - y')$ par $2x(x' - x)$ dans la minoration de $(M'P)^2$ on trouve

$$(M'P)^2 \geqslant 2(x' - x)^2 + (y - y')^2 \geqslant (x' - x)^2 + (y - y')^2 = (M'M)^2.$$

(16) Les inégalités $\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \tan\theta$ se lisent aussi sur la Fig. 6 au moyen d'un encadrement direct des aires

$$\text{aire triangle } OMU \leqslant \text{aire secteur angulaire } OMU \leqslant \text{aire triangle } OTU.$$

L'aire du secteur angulaire est proportionnelle à θ et vaut π pour $\theta = 2\pi$, elle vaut donc $\theta/2$. Les deux triangles ont une base de longueur 1, leur aire est égale à leur demi-hauteur, ce qui donne l'encadrement

$$\frac{1}{2}\sin\theta \leqslant \frac{1}{2}\theta \leqslant \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Nous avons cependant préféré donné une démonstration qui évite tout recours à la notion « élaborée » d'aire d'un domaine plan – pour en revenir à la définition première de la longueur d'arc – même si cette démonstration est légèrement plus subtile. Dans une première approche devant les élèves, on pourra évidemment opter plutôt pour la justification la plus simple d'un point de vue intuitif.

Démonstration. Notons que pour $h \in [0, \pi/2]$ on a $0 \leqslant \sin(h) \leqslant h$, d'après (9.5), et la relation d'addition $\cos(h) = \cos(h/2)\cos(h/2) - \sin(h/2)\sin(h/2)$ donne aussi

$$\cos(h) = 1 - 2\sin^2(h/2) \geqslant 1 - 2(h/2)^2 = 1 - h^2/2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{h}{2} \leqslant \frac{\cos(h) - 1}{h} \leqslant 0,$$

ce qui implique $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$. Les inégalités ci-dessus entraînent a fortiori $\lim_{h \to 0} \cos(h) = 1$. Maintenant l'encadrement (9.5 c) donne

$$\frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \leqslant \frac{\tan(h)}{h} = \frac{1}{\cos(h)} \frac{\sin(h)}{h} \quad \Rightarrow \quad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Ceci montre bien que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. □

(9.7) Théorème. *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *tout entier et on a*

$$\cos(x) = -\sin(x), \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. Les formules d'addition de l'angle donnent aussitôt

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \cos(x)\,\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h},$$
$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x)\,\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\,\frac{\sin(h)}{h}.$$

Ceci entraîne bien d'après le lemme 9.6 que le taux d'accroissement de cos tend vers $-\sin(x)$ et que celui de sin tend vers $\cos(x)$. □

10. Fonction exponentielle complexe

Nous pouvons maintenant expliquer le lien très remarquable qui existe entre la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques. Ce lien a été découvert par Euler en 1748, bien que l'interprétation géométrique sous-jacente n'ait été vraiment comprise qu'environ cinquante plus tard avec la définition géométrique des nombres complexes par Wessel, Argand et Gauss.(17)

Si on introduit le nombre complexe de module 1 et d'argument x défini par

$$f(x) = \cos(x) + i\sin(x),$$

ce qui définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à valeurs dans le cercle trigonométrique, alors les formules d'addition des angles (9.4) et de dérivation (9.7) se traduisent par les égalités

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) f(\beta), \tag{10.1}$$
$$f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = i\,f(x). \tag{10.2}$$

(17) Les exposés modernes « court-circuitent » souvent l'introduction de l'exponentielle complexe en utilisant d'emblée la série entière ˚ $z^n/n!$ de la variable complexe z, mais cette approche nous paraît prématurée pour l'enseignement secondaire. L'approche historique correspond certainement mieux au cheminement intellectuel fondamental de l'esprit, et nous l'estimons donc préférable sur le plan pédagogique.

En particulier f est la solution de l'équation différentielle $f' = if$. Comme de plus $f(0) = 1$, ceci suggère fortement de poser *par définition* $f(x) = e^{ix}$, c'est-à-dire (*formule d'Euler*)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{10.3}$$

La formule d'addition des angles (10.1) se retraduit alors sous la forme naturelle

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} \tag{10.4}$$

qui peut servir à mémoriser les formules donnant $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$. Comme $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$, on trouve les formules également dues à Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \tag{10.5}$$

et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'égalité $(e^{ix})^n = e^{inx}$ se traduit en la *formule de Moivre*

$$\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx). \tag{10.6}$$

Plus généralement, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe quelconque, on posera par définition

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big). \tag{10.7}$$

Le nombre e^z est donc par définition le nombre complexe de module $|e^z| = e^x$ et d'argument y :

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}, \qquad \arg(e^z) = \mathrm{Im}\, z \pmod{2\pi}. \tag{10.8}$$

Il est immédiat de vérifier que l'exponentielle complexe satisfait la même propriété fonctionnelle fondamentale que l'exponentielle réelle, à savoir

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad \text{pour tous } z,\ z' \in \mathbb{C}, \tag{10.9}$$

du fait que l'on a à la fois $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$ et $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$.

Enfin, pour terminer, on observe que pour $k = a + ib \in \mathbb{C}$, la fonction

$$f(x) = e^{kx} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big)$$

satisfait la même équation différentielle $f' = kf$ que dans le cas réel. On a effet

$$f'(x) = (e^{ax})'e^{ibx} + e^{ax}(e^{ibx})' = a\,e^{ax}e^{ibx} + e^{ax}\big(ib\,e^{ibx}\big) = (a+ib)e^{ax}e^{ibx} = k\,e^{kx}.$$

On montre alors que les solutions complexes de l'équation différentielle complexe

$$f' = kf \tag{10.10}$$

sont exactement les fonctions $f(x) = \lambda\, e^{kx}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. La preuve est identique à celle du cas réel.

Une fois que l'on dispose du calcul intégral et de l'intégration des fonctions complexes, on peut constater par des intégrations par parties et par récurrence sur p que l'on a

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!} + z^{p+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^{tz} dt. \tag{10.11}$$

Puisque $|e^{tz}| = e^{t\mathrm{Re}(z)} \leqslant e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)}$ pour $t \in [0,1]$, il vient

$$\Big| z^{p+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^{tz} dt \Big| \leqslant |z|^{p+1}\, e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} dt = \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} e^{\max(\mathrm{Re}(z),0)}.$$

Comme la limite $e^{|z|} = \lim_{p\to+\infty} S_p$ avec $S_p = 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots + \frac{|z|^p}{p!}$ existe, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} = \lim_{p\to+\infty} S_{p+1} - S_p = 0,$$

et on en conclut que la formule déjà vue à la section 7 pour les exposants réels

$$e^z = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!} \tag{10.12}$$

est encore vraie pour tout nombre complexe z.

11. Équations différentielles linéaires du second ordre

On cherche ici à résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre, à savoir les équations de la forme

$$af'' + bf' + cf = 0. \tag{11.1}$$

On supposera, pour une généralité maximale, que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ est une fonction complexe, et que a, b, c sont des constantes complexes (avec $a \neq 0$, sinon l'équation n'est pas du second ordre). La linéarité de l'équation se traduit par le fait évident suivant :

(11.2) Propriété. *Si f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation* (11.1)*, alors toute combinaison linéaire $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ à coefficients constants λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ est encore solution.*

Cherchons les solutions qui sont des exponentielles $f(x) = e^{kx}$. On a $f'(x) = k\, e^{kx}$ et $f''(x) = k^2\, e^{kx}$, donc

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = (ak^2 + bk + c)e^{kx}. \tag{11.3}$$

Par conséquent $f(x) = e^{kx}$ est solution de l'équation (11.1) si et seulement si k est solution de l'équation du second degré

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{11.4}$$

appelée *équation caractéristique de l'équation différentielle* (on pourrait de même considérer des équations différentielles d'ordre 3 et plus, qui induirait une équation caractéristique polynomiale du même degré). Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est non nul, on a deux racines complexes k_1, k_2, donc deux solutions complexes $f_1(x) = e^{k_1 x}$, $f_2(x) = e^{k_2 x}$. Ceci montre que toute combinaison linéaire

$$f(x) = \lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x}, \qquad \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \tag{11.5}$$

est solution de l'équation (11.1). Dans le cas où $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, le polynôme caractéristique admet une racine double $k = -b/2a$. Dans ce cas nous affirmons que les fonctions $f_1(x) = e^{kx}$ et $f_2(x) = x\,e^{kx}$ sont toutes deux solutions de l'équation différentielle. En effet, c'est vrai pour f_1 et :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= e^{kx} + kx\,e^{kx} = (kx+1)e^{kx}, \\ f_2''(x) &= k\,e^{kx} + k(kx+1)e^{kx} = (k^2x + 2k)e^{kx}, \\ af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x) &= \big((ak^2 + bk + c)x + (2ak + b)\big)e^{kx}. \end{aligned}$$

On observe qu'on a alors à la fois $ak^2 + bk + c = 0$ et $2ak + b = 0$. Dans le cas $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, toute combinaison linéaire

$$f(x) = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 x e^{kx} = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{kx}, \qquad \lambda_1,\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11.6}$$

est donc solution de l'équation différentielle.

Réciproquement, on va voir qu'il n'y a pas d'autres solutions que les combinaisons linéaires déjà trouvées, ce qui fait l'objet du résultat ci-dessous. La preuve est assez subtile et nous apparaît comme se situant à la limite supérieure de ce qu'on peut décemment attendre de l'enseignement secondaire général (je pense cependant que le raisonnement sous-jacent aurait été considéré comme accessible aux terminales C des années 1971-1985, par exemple sous forme d'un problème à résoudre – même si son contenu excède peut-être très légèrement le niveau du cours de l'époque.) À ce point, il n'y aurait toutefois pas d'inconvénient majeur à admettre le résultat, la démonstration pouvant fort bien attendre une « deuxième couche » à appliquer en première année d'université, éventuellement dans un contexte un peu plus général.

(11.7) Théorème. *Les solutions d'une équation différentielle du second ordre*

$$af'' + bf' + cf = 0$$

à coefficients complexes sont données par les racines simples k_1, k_2 ou la racine double k de l'équation caractéristique $ak^2 + bk + c = 0$, de la manière suivante :

(a) *si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, ce sont les combinaisons linéaires*

$$f(x) = \lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x}, \qquad \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C}\ ;$$

(b) *si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ce sont les combinaisons linéaires*

$$f(x) = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 x e^{kx} = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{kx}, \qquad \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une écriture astucieuse. Si f_1 et f_2 sont les solutions déjà trouvées, on cherche à écrire toute fonction f dérivable sous la forme d'une combinaison linéaire $f(x) = \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x)$ avec des coefficients $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ tels que

$$\left\{\begin{aligned} f &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \\ f' &= \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'. \end{aligned}\right. \tag{11.8}$$

En effet, en multipliant la première ligne par f_2', la deuxième par $-f_2$ et en ajoutant, on trouve

$$ff_2' - f'f_2 = \lambda_1\big(f_1f_2' - f_1'f_2\big).$$

De même, en multipliant la première ligne par $-f_1'$, la deuxième par f_1 et en ajoutant, on trouve

$$-ff_1' + f'f_1 = \lambda_2\big(f_1f_2' - f_1'f_2\big).$$

Or un calcul donne

$$\begin{aligned} &\text{si } f_1(x) = e^{k_1x} \text{ et } f_2(x) = e^{k_2x}, && f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x}, \\ &\text{si } f_1(x) = e^{kx} \text{ et } f_2(x) = x\,e^{kx}, && f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = e^{2kx}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a toujours $f_1f_2' - f_1'f_2 \neq 0$. Pour que (11.8) soit réalisé il suffit donc de prendre

$$\lambda_1 = \frac{ff_2' - f'f_2}{f_1f_2' - f_1'f_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-ff_1' + f'f_1}{f_1f_2' - f_1'f_2}.$$

Maintenant, en dérivant la première ligne de (11.8), il vient

$$f' = \lambda_1'f_1 + \lambda_2'f_2 + \lambda_1f_1' + \lambda_2f_2'$$

et la deuxième ligne est donc équivalente à ce que $\lambda_1'f_1 + \lambda_2'f_2 = 0$. On calcule enfin f'' à partir de la deuxième ligne de (11.8), ce qui donne

$$f'' = \lambda_1'f_1' + \lambda_2'f_2' + \lambda_1f_1'' + \lambda_2f_2''. \tag{11.9}$$

En définitive, d'après (11.8) et (11.9)

$$\begin{aligned} af'' + bf' + cf &= a(\lambda_1'f_1' + \lambda_2'f_2' + \lambda_1f_1'' + \lambda_2f_2'') + b(\lambda_1f_1' + \lambda_2f_2') + c(\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2) \\ &= a(\lambda_1'f_1' + \lambda_2'f_2') + \lambda_1(af_1'' + bf_1' + cf_1) + \lambda_2(af_2'' + bf_2' + cf_2) \\ &= a(\lambda_1'f_1' + \lambda_2'f_2') \end{aligned}$$

puisque f_1 et f_2 sont solutions. On voit que la fonction f est solution si et seulement si $\lambda_1'f_1' + \lambda_2'f_2' = 0$, mais comme on a aussi $\lambda_1'f_1 + \lambda_2'f_2 = 0$, on constate (en faisant des combinaisons linéaires comme ci-dessus) que c'est le cas si et seulement si $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$. Ceci montre que λ_1 et λ_2 sont des constantes et que f est nécessairement combinaison linéaire de f_1, f_2 à coefficients constants. □

Un cas particulier intéressant est celui de l'équation différentielle

$$f'' + \omega^2 f = 0 \tag{11.10}$$

où ω est un nombre réel positif. L'équation caractéristique est $k^2+\omega^2=0$, ses solutions sont $k_1=i\omega$ et $k_2=-i\omega$. Les solutions de(11.10) sont donc de la forme

$$f(x)=\lambda_1 e^{i\omega x}+\lambda_2 e^{-i\omega x}. \tag{11.11}$$

Grâce aux formules d'Euler, on peut aussi les écrire de manière équivalente en termes des fonctions cos et sin :

$$f(x)=\lambda\cos(\omega x)+\mu\,\sin(\omega x). \tag{11.12}$$

Sous cette dernière écriture, les solutions réelles sont obtenues pour des coefficients λ, μ réels. Dans ce cas, si on pose $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ (« amplitude des oscillations »), on peut trouver un angle φ (appelé « phase ») tel que $\cos(\varphi)=\lambda/\rho$ et $\sin(\varphi)=-\mu/\rho$, ce qui donne l'expression équivalente

$$f(x)=\rho\cos(\omega x+\varphi) \tag{11.12$'$}$$

avec des constantes ρ, φ quelconques.

(11.13) Remarque. Plus généralement, pour une équation $af''+bf'+cf=0$ à coefficients réels avec $\Delta=b^2-4ac<0$, on a deux racines conjuguées $k_1=-\frac{b}{2a}+i\omega$, $k_2=-\frac{b}{2a}-i\omega$ avec $\omega=\sqrt{|\Delta|}$. Ceci donne les solutions

$$f(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}\big(\lambda_1 e^{i\omega x}+\lambda_2 e^{-i\omega x}\big)$$

ou encore

$$f(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}\big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\,\sin(\omega x)\big), \tag{11.14}$$

les solutions réelles étant obtenues pour λ, μ réels. Une autre écriture équivalente consiste à poser

$$f(x)=\rho\,e^{-\frac{b}{2a}x}\,\cos(\omega x+\varphi) \tag{11.14$'$}$$

avec des constantes ρ, φ quelconques (fonction « oscillante amortie », si $b/a>0$).

Nous n'aborderons pas ici les questions de physique directement liées à la résolution des équations différentielles d'ordre 2, et qui devraient venir enrichir le cours de mathématiques : ondes, oscillations du pendule ou du peson à ressort, phénomènes oscillatoires amortis ...