Unité d'Enseignement MAT123

Analyse

Z. Djadli, B. Ycart

Université Joseph Fourier, Grenoble

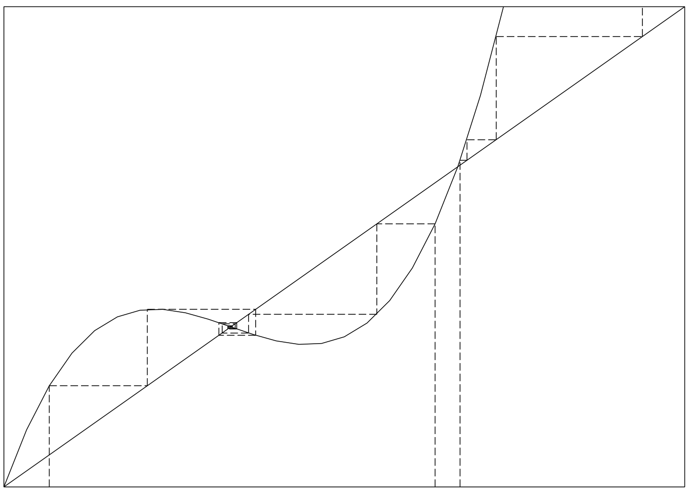

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Opérations

Nous ne présenterons pas de construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Cette section rappelle quelques notations, les propriétés des opérations (addition, multiplication) et de la relation d'ordre.

Nous utilisons les notations classiques suivantes pour les ensembles emboîtés de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notation	Ensemble	Exemples
$\mathbb{N}$	Entiers naturels	$0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Entiers relatifs	$-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Rationnels	$1.2, 1/2, 0.0012, \frac{355}{113}, \ldots$
$\mathbb{R}$	Réels	$\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}, \ldots$
$\mathbb{C}$	Complexes	$1+2i, 1+i\sqrt{3}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \ldots$

L'exposant * signifie "privé de 0". Ainsi, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Pour les calculs usuels (à la main, sur les calculettes ou par ordinateur), ce sont forcément des nombres décimaux, donc rationnels, que l'on manipule. Pourtant l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un cadre de calcul mathématiquement suffisant, pour plusieurs raisons, qui seront énoncées dans la suite de ce chapitre. La première, reconnue dès l'antiquité grecque, est que certaines quantités, qui pourtant apparaissent couramment en géométrie élémentaire, ne s'expriment pas comme rapports d'entiers. La plus simple est la diagonale d'un carré de côté 1, à savoir $\sqrt{2}$: nous verrons plus loin que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; $\sqrt[3]{5}$, π, ou e n'en sont pas non plus.

Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre sont rappelées ci-dessous.

Addition

- *Associativité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
- *Elément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x + 0 = 0 + x = x$
- *Opposé :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x + (-x) = x - x = 0$
- *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad x + y = y + x$

L'ensemble des réels muni de l'addition est un *groupe commutatif.*
Multiplication L'ensemble $\mathbb{R}^*$ (ensemble des réels privé de 0), muni de la multiplication, est un autre groupe commutatif.

- *Associativité :* $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ , \quad x(yz) = (xy)z$
- *Elément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x\,1 = 1\,x = x$
- *Inverse :* $\forall x \in \mathbb{R}^*\ , \quad x\,(1/x) = (1/x)\,x = 1$
- *Commutativité :* $\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \quad xy = yx$
- *Distributivité :* $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ , \quad x(y+z) = (xy) + (xz)$

L'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication est un *corps commutatif.*

Relation d'ordre

- *Réflexivité :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq x$
- *Transitivité :* $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ , \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
- *Antisymétrie :* $\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$
- *Ordre total :* $\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x$

Les trois premières propriétés définissent une relation d'ordre. Ici l'ordre est total car deux réels quelconques peuvent toujours être comparés.

Pour des raisons de commodité, on utilise couramment les notations $\geq, <, >$:

Notation	Définition
$x \geq y$	$y \leq x$
$x < y$	$x \leq y$ et $x \neq y$
$x > y$	$x \geq y$ et $x \neq y$

On utilise aussi les ensembles de réels notés $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Ensemble	Définition	Notation
Réels positifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x \geq 0\}$	$\mathbb{R}^+$
Réels strictement positifs	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x > 0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$
Réels négatifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq 0\}$	$\mathbb{R}^-$
Réels strictement négatifs	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x < 0\}$	$\mathbb{R}^{-*}$

La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication par un réel positif.

- $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$
- $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ , \quad x < y \Longrightarrow x+z < y+z$
- $\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \ \forall z \in \mathbb{R}^+\ , \quad x \leq y \Longrightarrow x\,z \leq y\,z$
- $\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \ \forall z \in \mathbb{R}^{+*}\ , \quad x < y \Longrightarrow x\,z < y\,z$

Comme conséquence de ces relations de compatibilité, on obtient les règles suivantes qui permettent de combiner des inégalités.

$$\forall x,y,z,t \in \mathbb{R}\ , \quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Longrightarrow x+z \leq y+t$$

On peut donc ajouter deux inégalités de même sens (*attention : on ne peut pas ajouter deux inégalités de sens opposés ni soustraire deux inégalités de même sens*).

$$\forall x,y \in \mathbb{R}\ , \ \forall z,t \in \mathbb{R}^+\ , \quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Longrightarrow x\,z \leq y\,t$$

On peut multiplier deux inégalités de même sens, si elles concernent des réels positifs ou nuls. Pour se ramener à des inégalités de même sens, ou à des réels positifs, il peut être utile de changer de signe ou de passer à l'inverse.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad (x \leq y) \Longrightarrow (-x \geq -y)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad (x \leq y) \Longrightarrow (1/x \geq 1/y)$

1.2 Bornes

On dit qu'un ensemble de réels A admet un *plus grand élément* (respectivement *plus petit élément*) s'il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in A$, $y \leq x$ (respectivement : $y \geq x$). Le fait que l'ordre sur $\mathbb{R}$ soit total entraîne que tout ensemble *fini* de réels admet un plus petit élément et un plus grand élément. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble fini de réels, nous noterons $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$ le plus petit et $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ le plus grand élément. Nous réserverons les notations min et max aux ensembles finis. Un ensemble *infini* de réels n'admet pas nécessairement de plus petit ou de plus grand élément. Voici quelques exemples.

Ensemble	Plus petit élément	Plus grand élément
$\mathbb{N}$	0	Non
$\mathbb{Z}$	Non	Non
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	1
$\{(-1)^n(1-1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	Non
$\{(-1)^n(1+1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n + 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	$3/2$
$\{(-1)^n - 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	Non

Non seulement $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément mais de plus aucun réel n'est plus grand que tous les éléments de $\mathbb{N}$. Par contre, les 5 derniers ensembles du tableau ci-dessus sont *bornés* au sens suivant.

Définition 1.2.1 *Soit A une* partie *de $\mathbb{R}$ (un ensemble de réels). On dit que A est :*

- majorée *si* $\exists M \in \mathbb{R}\,, \forall a \in A\,, \quad a \leq M$
- minorée *si* $\exists m \in \mathbb{R}\,, \forall a \in A\,, \quad a \geq m$
- bornée *si A est à la fois majorée et minorée.*

Si M est un majorant de A, alors $M+1$, $M+2$ et plus généralement tout réel plus grand que M sont aussi des majorants. Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1.2.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément.*
2. *Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément.*

Définition 1.2.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, on appelle* borne supérieure *de A et on note* $\sup(A)$ *le plus petit des majorants de A.*
2. *Si A est minorée, on appelle* borne inférieure *de A et on note* $\inf(A)$ *le plus grand des minorants de A.*

Du fait que l'ordre des réels est total, la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, sont nécessairement uniques. Lorsque A admet un plus grand élément, la borne supérieure de A est ce plus grand élément. Lorsque A admet un plus petit élément, la borne inférieure de A est ce plus petit élément. On étend la définition de sup et inf aux ensembles non majorés et non minorés par la convention suivante.

1. *Si A n'est pas majorée,* $\sup(A) = +\infty$
2. *Si A n'est pas minorée,* $\inf(A) = -\infty$

Reprenons comme exemples les 6 ensembles du tableau précédent.

Ensemble	Borne inférieure	Borne supérieure
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	0	1
$\{(-1)^n(1-1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	1
$\{(-1)^n(1+1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n + 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	$3/2$
$\{(-1)^n - 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	1

Dans le cas où A est majorée et n'admet pas de plus grand élément, alors $\sup(A)$ n'appartient pas à A, mais on trouve néanmoins des éléments de A arbitrairement proches de la borne supérieure.

Proposition 1.2.4 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors*
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \sup(A) - \varepsilon \leq a \leq \sup(A)$$
2. *Si A est minorée, alors*
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \inf(A) \leq a \leq \inf(A) + \varepsilon$$

Démonstration : Comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, $\sup(A) - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant. Il existe donc un élément de A supérieur à $\sup(A) - \varepsilon$. Comme $\sup(A)$ est un majorant, cet élément est inférieur à $\sup(A)$. □

Nous allons souvent rencontrer dans ce cours des ε strictement positifs arbitrairement petits. On peut s'en faire une idée concrète en pensant $\varepsilon = 0.001$, ou bien $\varepsilon = 10^{-6}$. Prenons comme exemple $A = \{1/n^2\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. La borne inférieure est $\inf(A) = 0$. La proposition 1.2.4 permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de l'ensemble inférieur à ε.

$$1/n^2 \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{1/\varepsilon}\,.$$

Pour $\varepsilon = 0.001$, $1/40^2 < \varepsilon$.

La proposition 1.2.4 admet la réciproque suivante.

Proposition 1.2.5 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si x est un majorant de A tel que*
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad x - \varepsilon \leq a\,,$$
alors $x = \sup(A)$.
2. *Si x est un minorant de A tel que*
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad a \leq x + \varepsilon\,,$$
alors $x = \inf(A)$.

Démonstration : Si
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad x - \varepsilon \leq a\,,$$
alors pour tout $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc si x est un majorant, c'est bien le plus petit.
Le raisonnement pour $\inf(A)$ est analogue. □

La borne supérieure peut donc être caractérisée de deux manières différentes.
- $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A
- $\sup(A)$ est le seul majorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre $x - \varepsilon$ et x.

De manière analogue,
- $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A
- $\inf(A)$ est le seul minorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre x et $x + \varepsilon$.

En liaison avec la proposition précédente, voici pour terminer cette section une simple application des notions de borne supérieure et inférieure, que l'on retrouve dans beaucoup de démonstrations.

Proposition 1.2.6 *Soient a et b deux réels.*

1. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \geq b - \varepsilon$ alors $a \geq b$.*
2. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$ alors $a \leq b$.*

Démonstration : Considérons la première affirmation. l'ensemble $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ a pour borne supérieure b. L'hypothèse affirme que a est un majorant de cet ensemble. Il est donc au moins égal à la borne supérieure, par définition de celle-ci. Or d'après la proposition 1.2.5, la borne supérieure de $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ est b. La seconde affirmation est analogue. □

L'ensemble $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ de la démonstration précédente est un *intervalle* de $\mathbb{R}$. Nous les décrivons dans la section suivante.

1.3 Intervalles

Définition 1.3.1 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires :*

$$\forall c, d \in I\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad (c \leq x \leq d) \implies (x \in I)\ .$$

Par exemple, $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, car tout réel compris entre deux réels positifs est positif. Mais $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un, car il contient 1 et -1 sans contenir 0. L'ensemble vide et les singletons sont des cas très particuliers de la définition 1.3.1. Nous allons utiliser sup et inf pour caractériser tous les intervalles contenant au moins deux éléments. Ils se répartissent en 9 types décrits dans le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Description	Définition	Notation
fermé borné (segment)	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
borné, semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x < b\}$	$[a, b[$
borné, semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x \leq b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ x \leq b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < b\}$	$]-\infty, b[$
droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

Voici la discussion pour les intervalles bornés. Si un intervalle I est borné et contient deux éléments, il admet une borne inférieure et une borne supérieure distinctes. Notons

$$a = \inf(I) \quad \text{et} \quad b = \sup(I)\ .$$

Par définition de sup et inf, tout élément x de I est entre a et b :

$$\forall x \in I\ ,\quad a \leq x \leq b\ .$$

Nous allons montrer que tout réel x tel que $a < x < b$ appartient à I. En effet, si $a < x < b$, x n'est ni un majorant, ni un minorant de I. Il existe donc deux éléments y et z de I tels que $y < x < z$. Par la définition 1.3.1, x appartient à I. Selon que a et b appartiennent ou non à I, on obtient les 4 premiers types du tableau.

Considérons maintenant un intervalle minoré mais non majoré. Soit a la borne inférieure. Tout élément de I est au moins égal à a. Montrons que I contient tous les réels x strictement supérieurs à a. Comme x n'est pas un minorant, I contient un élément $y < x$, et comme I n'est pas majoré, il contient un élément $z > x$. Donc x appartient à I. Selon que a appartient ou non à I, on obtient 2 types d'intervalles non majorés. Les deux types d'intervalles non minorés sont analogues.

Enfin, si un intervalle I n'est ni majoré, ni minoré, pour tout réel x, on peut trouver un y et un z dans I tels que $y < x < z$, ce qui entraîne $x \in I$. Donc $I = \mathbb{R}$.

1.4 Rationnels et irrationnels

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs. La somme de deux rationnels, ainsi que leur produit, sont des rationnels. Muni de l'addition et de la multiplication, $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné, comme $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure. L'ensemble des rationnels dont le carré est inférieur ou égal à 2 est non vide, majoré, mais il n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est une application du résultat suivant.

Proposition 1.4.1 *Soient m et n deux entiers strictement positifs. Le nombre $\sqrt[n]{m}$ est soit entier, soit irrationnel.*

Démonstration : Nous allons démontrer que si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, alors il est entier. Soient p et q deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$. Alors, $q^n m = p^n$. Mais alors q divise p^n, or q et p sont premiers entre eux. Ce n'est possible que si $q = 1$ et $m = p^n$. □

Observons que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle ; il en est de même pour leur produit. Par contre la somme ou le produit de deux irrationnels peuvent être rationnels (par exemple $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$).

Les rationnels et les irrationels sont intimement mêlés, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.4.2 *Si un intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins deux points distincts, il contient au moins un rationnel et un irrationnel.*

On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit I un intervalle contenant au moins deux points, a et b, tels que $a < b$. Soit q un entier strictement supérieur à $1/(b - a)$ et p le plus petit entier strictement supérieur à aq. On a donc :

$$p - 1 \leq aq < p \ ,$$

et comme q est strictement positif,

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q} \ .$$

D'où :
$$a < \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b \; .$$
Donc l'intervalle $]a, b[$, inclus dans I, contient le rationnel $\frac{p}{q}$.

De même, l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$ contient un rationnel r ; donc $]a, b[$ contient $r\sqrt{2}$, qui est irrationnel. $\square$

En fait, tout intervalle contenant au moins deux points contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Les rationnels que l'on manipule le plus souvent sont les nombres décimaux, somme d'un entier et d'un multiple entier de 10^{-n}, où n est le nombre de chiffres après la virgule :
$$3.141592 = 3 + \frac{141592}{1000000} = 3 + 141592\,10^{-6} \; .$$
Les nombres décimaux sont le moyen le plus courant d'approcher les réels.

1.5 Approximation des réels

Nous définissons d'abord les outils de base de l'approximation que sont la valeur absolue, la distance et la partie entière.

La *valeur absolue* d'un réel x, notée $|x|$, est $\max\{x, -x\}$. Elle est égale à x si x est positif, $-x$ sinon.

Si x et y sont deux réels quelconques, la valeur absolue du produit xy est le produit des valeurs absolues ; $|xy| = |x||y|$. Par contre, on peut seulement encadrer la valeur absolue de la somme.

Proposition 1.5.1 *Soient x et y deux réels quelconques. Leur valeur absolue est majorée par la somme des valeurs absolues, et minorée par la différence des valeurs absolues.*
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \; , \quad \big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \; . \tag{1.5.1}$$

Démonstration : Quitte à échanger x et y, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|x| \geq |y|$. Si l'un des deux est nul, alors les inégalités sont vérifiées : ce sont des égalités. Sinon, il suffit d'examiner les 4 cas possibles selon le signe de x et y.

1. $x > 0$ et $y > 0$: $|x+y| = x+y = |x| + |y| > |x| - |y|$
2. $x > 0$ et $y < 0$: $|x+y| = x+y = |x| - |y| < |x| + |y|$
3. $x < 0$ et $y > 0$: $|x+y| = -x-y = |x| - |y| < |x| + |y|$
4. $x < 0$ et $y < 0$: $|x+y| = -x-y = |x| + |y| > |x| - |y|$

$\square$

En remplaçant y par $-y$, on obtient le même encadrement pour la valeur absolue d'une différence.
$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$$

On appelle *distance* entre deux réels x et y la valeur absolue de leur différence. La proposition 1.5.1 entraîne :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad |x - z| \leq |x - y| + |y - z|\ .$$

Pour aller d'un point à un autre, on ne peut qu'allonger le parcours si on s'impose de passer par un troisième : c'est l'*inégalité triangulaire.*

Etant donné un réel x, nous dirons que a est une *approximation* (ou une *valeur approchée*) de x "à ε près" si la distance de a à x est inférieure à ε, ce qui équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

$$|x - a| < \varepsilon \iff x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\iff a \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ .$$

Les approximations décimales se construisent à l'aide de la partie entière. La *partie entière* d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

On en déduit :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x\ .$$

La partie entière de π est 3. Attention : la partie entière de $-\pi$ est -4, et non -3. On appelle "partie décimale" de x et on note $D(x)$, la différence de x avec sa partie entière.

$$D(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[\ .$$

Soit x un réel, et p un entier. Considérons la partie entière de $x\,10^p$:

$$\lfloor x\,10^p \rfloor \leq x\,10^p < \lfloor x\,10^p \rfloor + 1\ ,$$

donc,

$$\lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p} \leq x < \lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p} + 10^{-p}\ ,$$

Le nombre décimal $\lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p}$ est une approximation de x par défaut à 10^{-p} près. En théorie, on peut donc approcher x par un nombre décimal à n'importe quelle précision. En pratique, la précision habituelle sur des calculs d'ordinateurs est de l'ordre de 10^{-15}.

1.6 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ A possède une borne supérieure, finie ou infinie.
2. ☒ Si A est minorée alors A possède une borne inférieure finie.
3. ☐ Si $x \leq \sup(A)$ alors $x \in A$.
4. ☐ Si A contient au moins 2 réels distincts, alors A contient un rationnel.
5. ☐ Si A est infinie, alors A contient une infinité d'irrationnels.

6. ☒ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant lui-même deux points distincts, alors A contient une infinité d'irrationnels.
7. ☒ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, alors A contient une infinité de rationnels.

Vrai-Faux 1.2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $|A| = \{|x|\,,\ x \in A\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si A est majorée alors $|A|$ possède une borne supérieure finie.
2. ☒ 0 est un minorant de $|A|$.
3. ☒ $|A|$ possède toujours une borne inférieure finie.
4. ☐ $|A|$ possède toujours une borne supérieure finie.
5. ☒ Si A est un intervalle alors $|A|$ est un intervalle.
6. ☐ Si $|A|$ est un intervalle alors A est un intervalle.
7. ☐ Si A est un intervalle ouvert alors $|A|$ est un intervalle ouvert.
8. ☒ Si A est un intervalle fermé alors $|A|$ est un intervalle fermé.

Vrai-Faux 1.3 Soient a un réel quelconque. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a < \varepsilon)$, alors $a < 0$.
2. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $a \geq 1$.
3. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - 2\varepsilon)$.
4. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $(\forall \varepsilon \geq 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$.
5. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1/\sqrt{n})$, alors $a > 1$.
6. ☐ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a < 1/\sqrt{n})$, alors $a < 0$.
7. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1 - 1/\sqrt{n})$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$.

Vrai-Faux 1.4 Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $a + b$ est rationnel alors, soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. ☒ Si $a + b$ est irrationnel alors, soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. ☒ Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. ☐ Si a est irrationnel alors la partie décimale de $a + b$ est irrationnelle.
5. ☒ Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

Vrai-Faux 1.5 Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $|ab| = |a|\,|b|$
2. ☒ $|a| - |b| \leq |a - b|$.
3. ☐ $|a - b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

4. $\boxtimes$ $|a-b| = |a-(a+b)/2| + |(a+b)/2-b|$.
5. $\square$ $|a-b| = |a-(a+b)| + |(a+b)-b|$.
6. $\square$ Si $|a-b| < |a|$ alors $|ab| = ab$.
7. $\square$ $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
8. $\boxtimes$ $\lfloor a+b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
9. $\boxtimes$ $\lfloor a+b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
10. $\square$ $D(a+b) = D(a) + D(b)$.

1.7 Exercices

Exercice 1.1 Pour chacun des ensembles de réels suivants :

$$\{(-1)^n\,,\ n\in\mathbb{N}\}\ ,\ \{(-1)^n/n\,,\ n\in\mathbb{N}^*\}\ ,\ \{(-1)^n n\,,\ n\in\mathbb{N}\}\ ,$$

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+1}{n+2}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}\ ,$$

$$\left\{\frac{m+n}{m+2n}\,,\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{2m+n}{m+2n}\,,\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{m-n}{m+2n}\,,\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 1.2 On considère les ensembles de réels suivants :

$$\{x\in\mathbb{R}\,,\ |x|>1\}\ \{x\in\mathbb{R}\,,\ x^2\leq 1\}\ \{x\in\mathbb{R}\,,\ x^3<1\}$$

$$\{x\in\mathbb{R}^*\,,\ 1/x\leq 1\}\ \{x\in\mathbb{R}^*\,,\ 1/x>1\}\ \{x\in\mathbb{R}^*\,,\ 1/x^2<1\}$$

$$\{x\in\mathbb{R}^+,\ \sin x\leq 0\}\ \left\{x\in\mathbb{R}^{+*},\ \sin\frac{1}{x}\leq 0\right\}\ \left\{x\in\mathbb{R}^{+*},\ |\sin\frac{1}{x}|<\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

1. Ecrire l'ensemble comme un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
2. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
3. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 1.3 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A\subset B$ implique $\sup(A)\leq\sup(B)$ et $\inf(A)\geq\inf(B)$
2. Montrer que $A\cup B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}\quad\text{et}\quad\inf(A\cup B)=\min\{\inf(A),\inf(B)\}$$

3. Montrer que si l'intersection $A \cap B$ est non vide, alors elle admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cap B) \geq \max\{\inf(A), \inf(B)\}$$

4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)\ .$$

5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que, si A et B sont inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors

$$\sup(AB) = (\sup(A)(\sup(B)) \quad \text{et} \quad \inf(AB) = (\inf(A))(\inf(B))\ .$$

Exercice 1.4 Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$$1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2} + \sqrt{3}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2\,,$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,,\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2\ .$$

Exercice 1.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant deux points distincts. Montrer que I contient :

1. une infinité de rationnels
2. une infinité d'irrationnels
3. une infinité de nombres décimaux
4. une infinité de nombres multiples entiers d'une certaine puissance négative de 2 (nombres dyadiques).

1.8 Compléments

Point fixe d'une application croissante

Pour illustrer l'utilisation de la notion de borne supérieure, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.8.1 *Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même :*

$$\forall x, y \in [0,1]\,, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)\,.$$

Alors f admet un point fixe :

$$\exists a \in [0,1]\,, \quad f(a) = a\,.$$

Démonstration : Soit A l'ensemble des réels x dans $[0,1]$ tels que l'image de x dépasse x :

$$A = \{x \in [0,1]\,,\ f(x) \geq x\}\,.$$

Par hypothèse l'ensemble A est non vide puisqu'il contient 0, et il est majoré par 1. Notons a sa borne supérieure. Nous allons montrer d'abord $f(a) \geq a$, puis $f(a) \leq a$.

Par la proposition 1.2.4, pour tout ε, il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon \leq x \leq a$. Comme x est dans A, $f(x) \geq x$, et puisque f est croissante, $f(x) \leq f(a)$. Donc :

$$f(a) \geq f(x) \geq x \geq a - \epsilon\,.$$

Pour tout ε, $f(a) \geq a - \varepsilon$, donc $f(a) \geq a$ par la proposition 1.2.6.

De $f(a) \geq a$, on déduit $f(f(a)) \geq f(a)$ car f est croissante. Donc $f(a) \in A$, par définition de A. Donc $f(a) \leq a$, car a est la borne supérieure de A. □

Vous pouvez refaire cette démonstration en remplaçant A par

$$B = \{x \in [0,1]\,,\ f(x) \leq x\}\,,$$

et en étudiant la borne inférieure de B.

Papier normalisé

Les dimensions des feuilles de papier que vous avez sous les yeux sont irrationnelles ! Les normes européennes ont fixé les dimensions du papier de sorte que quand on divise en deux une feuille, la plus grande et la plus petite dimension des deux moitiés restent dans le même rapport que celles de la feuille entière. Par exemple soient L et l la plus grande et la plus petite dimension d'une feuille A0. Quand on la divise en deux, on obtient deux feuilles A1 dont la plus grande dimension est l et la plus petite $L/2$. On doit avoir :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}\,,$$

soit $L^2/2 = l^2$. Le rapport L/l vaut donc $\sqrt{2}$. Les dimensions de la feuille A0 sont choisies de sorte que sa surface soit 1 mètre carré. Exprimée en mètres, L doit donc vérifier $L^2/\sqrt{2} = 1$, soit $L = 2^{1/4}$. Voici les dimensions (théoriques) des feuilles de papier de A0 à A4.

Papier	L	l
A0	$2^{1/4}$	$2^{-1/4}$
A1	$2^{-1/4}$	$2^{-3/4}$
A2	$2^{-3/4}$	$2^{-5/4}$
A3	$2^{-5/4}$	$2^{-7/4}$
A4	$2^{-7/4}$	$2^{-9/4}$

Les approximations décimales à 10^{-3} près de $2^{-9/4}$ et $2^{-7/4}$ sont 0.210 et 0.297 ; ce sont bien les dimensions de vos feuilles de papier, exprimées en mètres.

La constante de Ramanujan

Le mathématicien indien S. Ramanujan (1887-1920) a donné dans sa courte vie beaucoup d'énoncés justes et très peu d'explications sur sa démarche. Contrairement à la légende, il n'a jamais affirmé :

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} \in \mathbb{N} .$$

Les trois nombres e, π et $\sqrt{163}$ sont irrationnels. Il n'est bien sûr pas exclu qu'en combinant des irrationnels on tombe sur des rationnels ou même des entiers. L'exemple le plus célèbre est celui de la formule d'Euler : $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1}} = -1$.

Voici les 30 premiers chiffres significatifs de $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$:

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.999999999999\ldots$$

La partie entière a 18 chiffres, et les 12 premières décimales valent 9. Mais la 13-ième décimale vaut 2 et le nombre n'est pas entier. Ce fait était connu bien avant Ramanujan, par Hermite en 1859. Pourquoi alors le nombre $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ porte-t-il le nom de "constante de Ramanujan" ? A cause d'un poisson d'avril monté par M. Gardner en 1975 : on ne prête qu'aux riches !

Nombres incommensurables

Pour les grecs, les nombres représentaient des longueurs. Or ils avaient compris qu'il existait des longueurs, comme le côté et la diagonale d'un carré, qui ne pouvaient pas être mesurées en nombres entiers dans la même unité. C'est la raison pour laquelle on dit que deux réels dont le rapport n'est pas rationnel sont incommensurables. C'est le cas de 1 et $\sqrt{2}$, mais aussi de $\sqrt{2}$ et π, de π et e, etc...

Supposons que l'on utilise un nombre y comme unité pour mesurer les multiples d'un autre : $\{nx\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout n, on trouve un nombre entier d'unités, $\lfloor nx/y \rfloor$, puis un reste qui est inférieur à y. Si x/y est rationnel, il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles. Par contre si $x/y \notin \mathbb{Q}$, non seulement il y a une infinité de restes possibles, mais ces restes sont *denses* dans l'intervalle $[0, y]$. Nous commençons par le cas particulier $y = 1$.

Proposition 1.8.2 *Soit x un irrationnel. L'ensemble des parties décimales des multiples de x est dense dans* $[0, 1]$.

En d'autres termes, pour tout intervalle inclus dans $[0,1]$, il existe un entier n tel que $D(nx) = nx - \lfloor nx \rfloor$ appartient à cet intervalle.

Démonstration : Soit $A = \{D(nx)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous allons montrer que la borne inférieure de A est 0.

Le fait que x soit irrationnel entraîne que A ne contient ni 0 ni 1, et aussi que les éléments de A sont tous différents. Commençons par la règle d'addition suivante, valable pour deux réels y et z quelconques :

$$D(y+z) = \begin{cases} D(y)+D(z) & \text{si } D(y)+D(z) < 1 \\ D(y)+D(z)-1 & \text{si } D(y)+D(z) \geq 1 \end{cases}$$

Pour un n donné, notons δ la partie décimale de nx et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Comme x est irrationnel, $1/\delta$ l'est aussi et on a $k\delta < 1 < (k+1)\delta$, donc $0 < (k+1)\delta - 1 < \delta$. La partie décimale de $(k+1)nx$ est $(k+1)\delta - 1 < \delta$. Ceci entraîne que l'ensemble A ne peut pas avoir de plus petit élément. Notons a sa borne inférieure. C'est aussi la borne inférieure de $A_n = \{D(mx)\,,\ m > n\}$, puisque A n'a pas de plus petit élément.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $a < D(nx) < a+\varepsilon$. Mais aussi, il existe $m > n$ tel que $a < D(mx) < a+D(nx)$, donc $0 < D(nx)-D(mx) < \varepsilon$. Posons $\delta = D(nx)-D(mx)$ et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Toujours parce que x est irrationnel, $1/\delta$ ne peut pas être entier. Ecrivons :

$$k(m-n)x = k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) - 1 + (1-k\delta)\ .$$

Cette écriture montre que $D(k(m-n)x) = 1 - k\delta < \delta < \varepsilon$. Comme ε est quelconque, nous avons montré que la borne inférieure de A est 0.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et $\varepsilon < b-a$. Soit n un entier tel que $D(nx) = \delta < \varepsilon$. Soit k le plus petit entier tel que $a < k\delta < b$. On a $a < D(knx) < b$, ce qui montre que l'ensemble A est dense dans $[0,1]$. □

Considérons maintenant deux réels x et y incommensurables. Si z est un réel, on notera $z \mod y$ ("z modulo y"), le réel $yD(z/y)$, qui appartient à l'intervalle $[0,y[$. Si x et y sont incommensurables, alors l'ensemble $\{nx \mod y\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,y]$. Ceci découle de la proposition 1.8.2 appliquée à x/y.

Par exemple, puisque π est irrationnel, 2π et $1/(2\pi)$ le sont aussi. Donc 1 et 2π sont incommensurables. D'après ce qui précède, $\{n \mod 2\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,2\pi]$. On déduit de la continuité des fonctions sin et cos que $\{\sin(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1,1]$.

La numérisation des raisons

Au temps d'Euclide[1], les rapports de longueurs, ou raisons (*ratio* en latin), ne sont pas considérés et manipulés comme des nombres. Tout le moyen-âge arabe ou européen cherchera à apprivoiser une numérisation des raisons, avec des contributions remarquables comme celles d'Omar Kayyam et Nicolas d'Oresme, par la pratique des

[1] Ceci est tiré de *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars (1987)

proportions. Mais dans la mesure où on ne savait pas rendre compte d'une telle numérisation par une procédure théorique ayant la netteté de celle d'Euclide, il restait, dans la pratique des mathématiciens exigeants, une profonde différence de nature opératoire entre des quantités comme 1, 3, 5/3, $\sqrt{2}$ ou π. Cette différence est balayée d'un coup par Simon Stevin (1548-1620) dans son *traité des incommensurables grandeurs* en 1585. Voici ce qu'il écrit.

"C'est chose vulgaire, entre les auteurs d'arithmétique, de traiter de nombres comme $\sqrt{8}$ et semblables, et qu'ils appellent absurdes, irrationnels, irréguliers, sourds[2], etc. Ce que nous nions, à quelque nombre à venir. Mais par quelle raison l'adversaire le pourra-t-il prouver ? Il me dit premièrement que racine de 8 est à nombre arithmétique (comme 3 ou 4) incommensurable, *ergo* $\sqrt{8}$ est absurde. Vu que l'incommensurance ne cause pas d'absurdité des termes incommensurables, ce qui s'éprouve par la ligne et superficie qui sont grandeurs incommensurables ; c'est-à-dire qu'ils ne reçoivent point de commune mesure, toutefois ni ligne ni superficie n'est quantité absurde ni explicable : car disant que celle-là est la ligne et celle-ci, superficie, nous les expliquons. Et encore que cette incommensurance procréait (ce qui toutefois ne peut être, mais posons les cas) absurdité à l'une des quantités comparées, nous trouverons le nombre arithmétique autant coupable que le radical, car, comme la sphère autant que le cube et le cube autant que la sphère, est cause de leur dissimilitude ; ainsi, de ces nombres. Mais pour faire autre preuve par deux quantités d'un même genre de grandeur, prenons le côté et diagonale d'un carré, qui sont les lignes entre elles (par la dernière proposition du livre X d'Euclide) incommensurables, toutefois ni diagonale, ni côté (abstrait de nombre) n'est ligne absurde ou irrationnelle, l'incommensurance donc des quantités n'est pas l'absurdité d'icelles, mais c'est plutôt leur naturelle mutuelle habitude.

Il me manque de lui expliquer quelle chose soit $\sqrt{8}$. Je lui réponds qu'il m'explique quelle chose soit 3/4 (qui selon son dire est rationnel) et je la lui expliquerai."

Les coupures de Dedekind

La construction rigoureuse de l'ensemble des réels ne date que de la seconde moitié du 19ème siècle. De mombreux mathématiciens y ont participé, parmi eux Julius Dedekind (1831-1877). Voici ce qu'il écrivit dans *Continuité et nombres rationnels* en 1872, pour définir ce que l'on nommera *coupures de Dedekind.*

"[. . .] La comparaison faite ci-dessus entre le domaine des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non-lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?

Tout doit être contenu dans la réponse donnée à cette question, et elle seule fournit un fondement scientifique aux recherches portant sur tous les domaines continus. On n'obtient rien bien sûr par de vagues discours sur la connexion ininterrompue existant dans les plus infimes parties ; il s'agit d'indiquer une caractéristique de la continuité, utilisable comme base de déductions effectives. J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais

[2]Le mot *sourd* vient du vocable arabe signifiant *irrationnel*

finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions".

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Vocabulaire

Définition 2.1.1 *Soit E un ensemble. On appelle suite à valeurs dans E une application de $\mathbb{N}$ dans E. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.*

Dans ce chapitre, nous nous préoccuperons surtout des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous dirons aussi suites de réels) et très peu des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ (suites de complexes). Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera typiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les entiers n sont les *indices* de la suite et leurs images u_n sont les *termes* de la suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet différent de l'ensemble $\{u_n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$. En particulier une suite aura toujours une infinité de termes, même si ces termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la suite est $(u_n) = (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$, et l'ensemble $\{u_n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble $\{-1,1\}$.

Il existe deux manières de définir une suite de réels à partir d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

- *définition explicite :*
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = f(n)\,,$$
où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple :
  1. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = n$
  2. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = 1/(n+1)$
  3. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = 2^{-n}$.
- *définition par récurrence :*
$$u_0\in\mathbb{R}\,,\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = F(u_n)\,,$$
où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les mêmes exemples peuvent être définis par :
  1. $u_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n + 1$
  2. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n/(u_n+1)$

3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n/2$.

Voici deux exemples génériques.

Définition 2.1.2

1. *Soit a un réel. On appelle suite arithmétique de raison a une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_{n+1} = u_n + a \, .$$

2. *Soit r un réel. On appelle suite géométrique de raison r une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_{n+1} = r \, u_n \, .$$

On vérifie facilement par récurrence qu'une suite arithmétique de raison a a pour terme général $u_n = u_0 + na$. De même, une suite géométrique de raison r a pour terme général $u_n = u_0 \, r^n$.

Définition 2.1.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est*

- constante *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n$
- croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \leq u_n$
- strictement croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} > u_n$
- strictement décroissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} < u_n$
- monotone *si elle est croissante ou décroissante*
- majorée *si* $\{u_n \, , n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré*
- minorée *si* $\{u_n \, , n \in \mathbb{N}\}$ *est minoré*
- bornée *si* $\{u_n \, , n \in \mathbb{N}\}$ *est borné*
- périodique *si* $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+p} = u_n$

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 : $(u_n)_{n\geq n_0}$. L'expression "à partir d'un certain rang" reviendra souvent dans ce qui suit. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété P *à partir d'un certain rang* signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi "P est vraie pour n assez grand". Voici quelques exemples.

Définition 2.1.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est*

- *constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+1} = u_n$
- *croissante à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$
- *périodique à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+p} = u_n$

Par exemple, la suite $(\lfloor 4/(n+1) \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $n_0 = 4$. La suite des décimales de $1/90$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$. La suite $(|n-5|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 = 5$. La suite des décimales de $53/2475$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$. Quel que soit le nombre rationnel x, la suite des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est "majorée à partir d'un certain rang", alors elle est majorée tout court. En effet si $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, M\} \ .$$

De même une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

Les opérations sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.

- *addition :* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- *multiplication :* $(u_n)(v_n) = (u_n v_n)$
- *multiplication par un réel :* $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- *comparaison :* $(u_n) \leq (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \leq v_n$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux suites peut être nul sans que les deux suites le soient.

Etant donnée une suite (u_n), on appelle *suite extraite* ou *sous-suite*, une suite formée de certains termes de (u_n), c'est-à-dire une suite de la forme $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple si (u_n) est la suite géométrique $((-2)^n)$, et $\varphi(k) = 2k$, alors $(v_k) = (4^k)$: on a extrait de la suite (u_n) la suite des termes d'indice pair.

2.2 Convergence

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel l (sa limite) si tout intervalle ouvert contenant l, contient aussi tous les u_n pour n assez grand.

Définition 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et l un réel. On dit que la suite (u_n)* converge vers *l, (ou* tend vers *l, ou* a pour limite *l) si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0\,,\quad |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

On notera :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \quad \textit{ou bien} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l\ .$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Observons que le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, dépend de ε. La figure 2.1 représente les 50 premiers termes de la suite $(u_n) = (1 + \sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La limite est $l = 1$. On a :

$$|u_n - l| = \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\ .$$

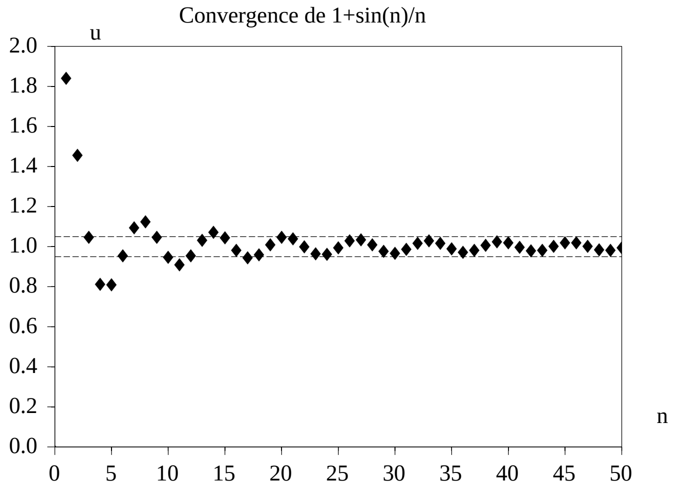

FIG. 2.1 – Convergence de la suite $1 + \sin(n)/n$.

Fixons $\varepsilon > 0$ (sur la figure $\varepsilon = 0.05$). Posons $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ ($n_0 = 21$ pour $\varepsilon = 0.05$). Pour tout $n \geq n_0$, $1/n < \varepsilon$, donc $|u_n - l| < \varepsilon$. Sur la figure 2.1, on constate en fait que $u_n \in [0.95, 1.05]$ pour $n \geq 18$.

On étend la notion de convergence aux limites infinies de la façon suivante.

Définition 2.2.2 *Soit (u_n) une suite de réels.*

1. *On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0\ , \quad u_n \geq A\ .$$

2. *On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0\ , \quad u_n \leq A\ .$$

Il est commode de pouvoir dire qu'une suite "tend vers l'infini", mais cela induit une certaine ambiguïté sur la notion de convergence.

De même qu'il faut voir ε comme un "petit" réel (proche de 0), dans la définition 2.2.2 il faut comprendre A comme grand (proche de l'infini). Une suite tend vers $+\infty$ si ses termes restent au-dessus de n'importe quelle quantité, à partir d'un certain rang.

Voici quelques exemples classiques.

- *Suites arithmétiques :* $(u_n) = (u_0 + an)$
  1. Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  2. Si $a = 0$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  3. Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- *Suites géométriques :* $(u_n) = (u_0\, r^n)$
  1. Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante (tend vers 0).

2. Si $r \leq -1$, et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
3. Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
4. Si $r = 1$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
5. Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.

- *Suites de Riemann :* $(u_n) = (n^\alpha)$
  1. Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  2. Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
  3. Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

Pour bien comprendre la notion de convergence, nous allons en étudier quelques conséquences faciles, rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.3 *Soit (u_n) une suite de réels :*

1. *si (u_n) converge, alors sa limite est unique*
2. *si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est bornée*
3. *si pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$ et si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang*
4. *si (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l*
5. *si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Démonstration : Les démonstrations des 5 points se ressemblent.

1. Supposons que (u_n) vérifie la définition 2.2.1 pour deux réels l et l' distincts. Posons $\varepsilon = |l - l'|/3$. Alors les intervalles $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $[l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$ sont disjoints. A partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir aux deux à la fois : c'est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$, et n_0 tel que u_n reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $n \geq n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, l+\varepsilon\} ,$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, l-\varepsilon\} .$$
3. Soit l la limite. Si l n'était pas un entier, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier, donc aucun des u_n. Donc l doit être un entier. Posons $\varepsilon = 1/2$. L'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ ne contient qu'un seul entier, l. Comme à partir d'un certain rang tous les u_n sont dans cet intervalle, et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à l.
4. Soit $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) \geq n_0$ pour tout $k \geq k_0$. Si tous les (u_n) sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.

5. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Soit k'_0 tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Alors pour tout $n \geq \max\{2k_0, 2k'_0+1\}$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. La démonstration pour une limite infinie est analogue.

□

2.3 Opérations sur les limites

La combinaison de la notion de limite avec les opérations habituelles sur les suites se passe sans trop de mauvaises surprises : globalement, les résultats que l'on attend sont vrais. Nous les énoncerons dans le théorème 2.3.2. Les démonstrations sont basées sur le lemme suivant.

Lemme 2.3.1

1. *La somme de deux suites convergeant vers* 0 *converge vers* 0.
2. *Le produit d'une suite convergeant vers* 0 *par une suite bornée, converge vers* 0.

Démonstration :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \varepsilon/2$. De même, soit n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|v_n| < \varepsilon/2$. Alors pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,
$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$
d'où le résultat.
2. Si la suite (u_n) est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout entier n, $|u_n| \leq M$. Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n| \leq \varepsilon/M$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc :
$$|u_n\, v_n| = |u_n|\,|v_n| \leq M|v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \,.$$
D'où le résultat.

□

Théorème 2.3.2

1. *La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.*
2. *Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.*

Démonstration : Pour nous ramener au lemme 2.3.1, observons d'abord qu'une suite (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - l)$ tend vers 0.

1. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', alors $(u_n - l)$ et $(v_n - l')$ convergent vers 0. Donc $(u_n - l + v_n - l')$ converge vers 0 d'après le point *1.* du lemme 2.3.1, d'où le résultat.
2. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', nous voulons montrer que $(u_n v_n - ll')$ converge vers 0. Ecrivons :

$$u_n v_n - ll' = u_n(v_n - l') + (u_n - l)l' \ .$$

Il suffit donc de montrer séparément que les deux suites $(u_n(v_n - l'))$ et $((u_n - l)l')$ tendent vers 0, d'après le premier point du lemme 2.3.1. Mais chacune de ces deux suites est le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée ((u_n) est bornée car elle est convergente). D'où le résultat, par le point *2.* du lemme 2.3.1.

$\square$

Le théorème 2.3.2 est l'outil de base pour étudier des convergences de suites à partir des exemples classiques de la section précédente. On utilise aussi la composition par une fonction continue. On peut donner deux définitions équivalentes de la continuité, dont l'une est parfaitement adaptée aux suites convergentes.

Définition 2.3.3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est continue au point x si et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.*

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce cours sont continues en tout point où elles sont définies, et nous l'admettrons pour l'instant. Par exemple, la fonction $f\ : x \mapsto 1/x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donc si une suite (u_n) converge vers $l \neq 0$, la suite des inverses $(1/u_n)$ converge vers $1/l$. En utilisant le théorème 2.3.2, on en déduit que le quotient de deux suites convergentes converge vers le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit non nulle.

Voici un exemple de calcul de limite, résumant l'ensemble des techniques que nous avons vues jusqu'ici. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{2n + \cos(n)}{n\sin(1/n) + \sqrt{(n+1)(n+2)}} \ .$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{2 + \frac{\cos(n)}{n}}{\sin(1/n) + \sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}} \ .$$

Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{2}{n})$, $(\sin(1/n))$ et $(\frac{\cos(n)}{n})$ tendent vers 0. On en déduit que (u_n) tend vers 2.

Dans le cas où les limites de (u_n) et (v_n) peuvent être infinies, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. Nous les résumons dans les tableaux 2.1 et 2.2. Dans ces deux tableaux les points d'interrogations sont des indéterminations : tous les cas sont possibles. Par exemple :

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers 0.
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.
- $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$: la suite $(u_n + v_n)$ ne converge pas.

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TAB. 2.1 – Limites possibles de $(u_n + v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TAB. 2.2 – Limites possibles de $(u_n v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

2.4 Convergence des suites monotones

La notion de limite est très liée aux notions de borne supérieure et borne inférieure du chapitre précédent. Etant donnée une suite (u_n), nous appellerons borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités

$$\sup\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \inf\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Théorème 2.4.1

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.*
2. *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
3. *Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.*
4. *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Si l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, alors il admet une borne supérieure finie, par le théorème 1.2.2 : notons-la l. Par la proposition 1.2.4, pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$. Mais si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l \ ,$$

donc (u_n) converge vers l.

Si la suite n'est pas majorée, pour tout A, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$A \leq u_{n_0} \leq u_n \ ,$$

donc la suite (u_n) tend vers l'infini.

Si la suite (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)$. □

Définition 2.4.2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Elles sont dites* adjacentes *si*

1. *(u_n) est croissante,*
2. *(v_n) est décroissante,*
3. *$(v_n - u_n)$ tend vers* 0.

Proposition 2.4.3 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration : Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors $(v_n - u_n)$ est décroissante. Si $(v_n - u_n)$ tend vers 0, alors pour tout n, $v_n - u_n \geq 0$. Donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \ .$$

La suite (u_n) est croissante, et majorée par v_0, donc elle converge. La suite (v_n) est décroissante, et minorée par u_0, donc elle converge. Comme la différence tend vers 0, les deux limites sont égales (théorème 2.3.2). □

Voici un exemple très classique. Posons

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!} \ .$$

La suite (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \ .$$

La différence tend vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite. Cette limite est le nombre $\mathrm{e} \simeq 2.718$. Les deux suites fournissent un encadrement extrêmement précis de e, pour un nombre de termes calculés relativement faible. Pour $n = 10$, la différence $v_n - u_n$ vaut $2.76 \cdot 10^{-8}$, et pour $n = 100$, elle vaut $1.07 \cdot 10^{-160}$.

Ce même encadrement est aussi un moyen de montrer que e est irrationnel. Supposons en effet que e s'écrive $e = p/q$, avec p et q entiers. On aurait $u_q < p/q < v_q$, soit

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!} .$$

Multiplions ces inégalités par $(q\,q!)$. Le nombre entier $(p\,q!)$ devrait être encadré strictement par deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.

2.5 Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 2.5.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n .$$

Démonstration : Supposons $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons l cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $u_n - v_n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Observons que la conclusion reste vraie si au lieu d'être comparables pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n le sont "à partir d'un certain rang". Ceci vaut d'ailleurs pour tous les résultats de cette section. Par contre le fait de supposer $u_n < v_n$ implique seulement $\lim u_n \leq \lim v_n$: bien que $1/n < 2/n$, les deux suites ont la même limite.

Le théorème 2.5.1 ne permet pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 2.5.2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$, alors u_n tend vers 0.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$:

$$|u_n| \leq |v_n| \leq \varepsilon ,$$

d'où le résultat. □

On en déduit le corollaire suivant que l'on trouve dans certains livres sous le nom de "théorème des gendarmes".

Corollaire 2.5.3 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq v_n \leq w_n .$$

alors (v_n) converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2.5.2 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. $\square$

Voici un exemple d'application. Soit

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n+2} \; .$$

Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant.

$$\frac{n-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+2} \; .$$

Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers 1, donc $\lim u_n = 1$.

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 2.5.4 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.*
2. *Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Pour tout A, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$:

$$v_n \geq u_n \geq A \; ,$$

donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. L'autre affirmation est analogue. $\square$

On dispose d'un vocabulaire adapté à la comparaison des suites.

Définition 2.5.5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels.*

1. *On dit que la suite (u_n) est* dominée *par la suite (v_n) si :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \, , \; \forall n \in \mathbb{N} \, , \quad |u_n| \leq M|v_n| \; .$$

On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit "u_n est un grand O de v_n".

2. *On dit que la suite (u_n) est* négligeable *devant la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geq n_0 \, , \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n| \; .$$

On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit "u_n est un petit o de v_n".

3. *On dit que la suite (u_n) est* équivalente *à la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geq n_0 \, , \quad |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n| \; .$$

On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit "u_n est équivalent à v_n".

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une suite (v_n) non nulle ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n.

Proposition 2.5.6 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que les v_n sont tous non nuls. Alors :*

1. *(u_n) est* dominée *par (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) est bornée :*
$$\exists M \in \mathbb{R} \,,\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M \,.$$
2. *(u_n) est* négligeable *devant (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 0 :*
$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \,,\ \forall n \geq n_0 \,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon \,.$$
3. *(u_n) est* équivalente *à (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 1 :*
$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \,,\ \forall n \geq n_0 \,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon \,.$$

Par exemple :
$$\sqrt{4n^2+1} = O(n) \ ,\ \sqrt{4n^2+1} = o(n^2) \ ,\ \sqrt{4n^2+1} \sim 2n \,.$$
L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :
$$n! \ \sim \ \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \,.$$
Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple.
$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}} \,.$$
Comme $1 + n = o(n^2)$, $n^2+n+1 \sim n^2$, donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$, donc $\lim u_n = 1/2$. Attention, il ne faut pas utiliser des équivalents pour des sommes. Par exemple :
$$u_n = n + (-1)^n \sim n \quad \text{et} \quad v_n = -n + (-1)^n \sim -n$$
Pourtant, $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0.

Il est bon d'avoir en tête une échelle des "infiniment petits" et des "infiniment grands", c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. *Infiniment petits*
$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1$$
2. *Infiniment grands*
$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

2.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = F(u_n) \ .$$

La suite est celle des itérés successifs de l'application F à partir de u_0 :

$$u_1 = F(u_0), u_2 = F(F(u_0)) = F \circ F(u_0), u_3 = F \circ F \circ F(u_0), \ldots$$

On notera $F^{\circ n}$ la composée de F avec elle-même n fois :

$$u_n = F^{\circ n}(u_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(u_0) \ .$$

Il existe un moyen simple de visualiser les premiers termes de la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ à partir du graphe de la fonction F, représenté dans le plan. Portons u_0 en abscisse et traçons le segment vertical allant de $(u_0, 0)$ à $(u_0, F(u_0))$. Traçons ensuite le segment horizontal rejoignant la première bissectrice, de $(u_0, F(u_0))$ à $(F(u_0), F(u_0))$. L'abscisse du nouveau point est u_1. On itère alors le procédé en traçant alternativement des segments verticaux et horizontaux. On obtient ainsi une sorte de "toile d'araignée" (figure 2.2).

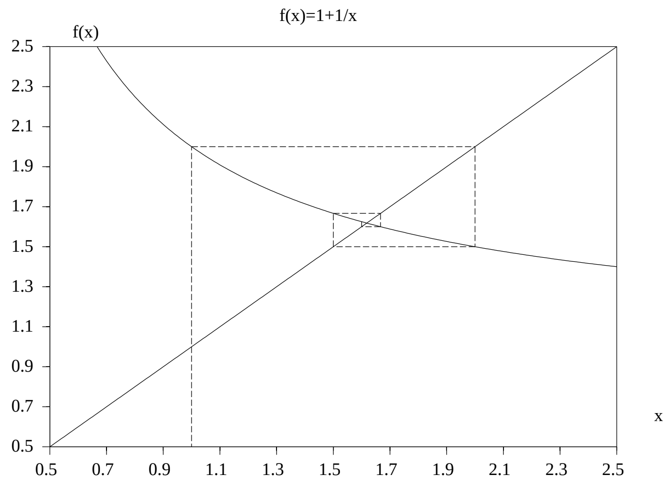

FIG. 2.2 – Représentation d'itérés successifs par une "toile d'araignée".

Cette représentation graphique suffit pour se faire une idée du comportement qualitatif d'une suite récurrente réelle. Elle permet de détecter les convergences ou divergences ainsi que les comportements oscillants.

Pour étudier la suite (u_n), le premier travail consiste à identifier les limites possibles. Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n+1}), qui est une suite extraite, converge vers la même limite l. Donc, si F est continue en l (définition 2.3.3), on doit avoir

$$l = F(l) \ ,$$

On dit que l est un *point fixe* de F : si $u_0 = l$, alors la suite est constante. Il peut se faire que F ait plusieurs points fixes. Le comportement de la suite u_n (monotonie, convergence ou non vers un point fixe), dépend de u_0.

Plutôt qu'une discussion générale, nous allons traiter l'exemple historique sans doute le plus célèbre : les rapports des nombres de Fibonacci. Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et pour $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

Voici les 20 premiers.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

La suite (a_n) est une suite croissante d'entiers, elle ne s'annule pas. Pour $n \geq 1$, posons $u_n = a_{n+1}/a_n$. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \ .$$

C'est une récurrence du type $u_{n+1} = F(u_n)$, avec

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} \ .$$

La figure 2.2 représente les premières valeurs de u_n en toile d'araignée. Pour étudier (u_n), commençons par chercher les points fixes de l'application F, en résolvant l'équation

$$1 + \frac{1}{x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0 \ .$$

L'équation a deux solutions,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

La première solution, $\phi \simeq 1.618$, est le célèbre nombre d'or ; on le retrouve (paraît-il) un peu partout, des pyramides d'Egypte aux coquilles de nautiles en passant par la Joconde. Comme u_n reste positif, la seule limite possible pour (u_n) est ϕ. Nous allons démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 2.6.1

1. *La suite des termes pairs* (u_{2k}) *est croissante*
2. *La suite des termes impairs* (u_{2k+1}) *est décroissante*
3. *Chacune de ces deux suites converge vers* ϕ *(elles sont adjacentes).*

En d'autres termes, les termes u_n approchent ϕ, alternativement à gauche et à droite.

Démonstration : En soustrayant les deux équations

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \ ,$$

on obtient

$$u_{n+1} - \phi = \frac{\phi - u_n}{u_n \phi} \; .$$

Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ sont de signe opposé. Puisque $u_0 < \phi$, on obtient par récurrence que pour tout $k \geq 1$:

$$u_{2k} < \phi < u_{2k+1} \; .$$

On peut aussi exprimer $u_{n+2} - \phi$ en fonction de $u_n - \phi$:

$$u_{n+2} - \phi = \frac{u_n - \phi}{\phi^2 (u_n + 1)} \; .$$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$. On en déduit par récurrence que pour les termes pairs :

$$0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0) \; ,$$

et pour les termes impairs

$$0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\phi^2}(u_{2k+1} - \phi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi) \; .$$

Donc la suite des termes pairs est croissante et la suite des termes impairs décroissante. Mais de plus :

$$\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k}) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} - \phi = O(\phi^{-2k})$$

Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers ϕ, car $\phi > 1$, donc ϕ^{-2k} tend vers 0. □

2.7 Suites de Cauchy

Est-il possible de savoir si une suite converge (vers une limite finie), sans connaître sa limite ? La notion de suite de Cauchy répond à cette question. Elle traduit l'idée intuitive que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

Définition 2.7.1 *Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout ε les distances entre termes $|u_{n+k} - u_n|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang :*

$$\forall \varepsilon \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geq n_0 \, , \; \forall k \in \mathbb{N} \, , \quad |u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon \; .$$

Il n'est pas surprenant qu'une suite convergente soit une suite de Cauchy.

Théorème 2.7.2 *Si une suite de réels converge vers une limite finie, alors c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration : En utilisant l'inégalité triangulaire, écrivons :

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - l + l - u_n| \leq |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon/2$, donc aussi $|u_{n+k} - l| \leq \varepsilon/2$. On a donc, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

L'intérêt de cette notion est qu'elle *caractérise* les suites réelles convergentes : la réciproque du théorème précédent est vraie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.7.3 *Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.*

Nous donnerons une démonstration de ce théorème en complément du cours (section 2.11).

2.8 Suites à valeurs complexes

On étend aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des suites de réels, sauf celles qui font référence à l'ordre. On ne parle pas de suite complexe croissante, décroissante, majorée ou minorée, car contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas naturellement muni d'une relation d'ordre. Pour les propriétés où la distance $|x - y|$ intervient, la valeur absolue est remplacée par le module, qui se note de la même façon. Par exemple une suite (z_n) est bornée si pour tout n, $|z_n| \leq M$. Elle converge vers $l \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \ \exists n_0 \, , \ \forall n \geq n_0 \ , \quad |z_n - l| \leq \varepsilon \ ,$$

qu'il faut comprendre comme "tous les termes de la suite restent dans un disque de rayon ε autour de la limite à partir d'un certain rang" (voir la figure 2.3 pour une illustration).

Le théorème suivant montre que la convergence d'une suite de complexes équivaut à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Théorème 2.8.1 *Soit (z_n) une suite de complexes. La suite (z_n) converge vers l dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.*

Démonstration : Elle est essentiellement basée sur l'encadrement suivant entre le module d'un nombre complexe et les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire. Soit $z = a + ib$ un complexe, alors

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |z| \leq |a| + |b| \qquad (2.8.1)$$

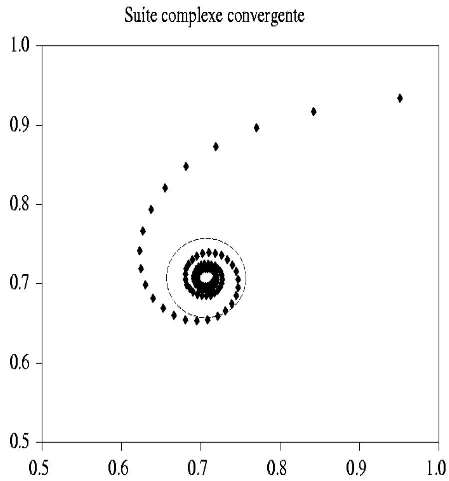

FIG. 2.3 – Convergence dans $\mathbb{C}$ de la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n/4}/n)$.

On note a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de z_n. Si $|z_n - l|$ reste inférieur à ε, alors il en est de même pour $|a_n - \mathrm{Re}(l)|$ et $|b_n - \mathrm{Im}(l)|$, par la première inégalité de (2.8.1). Réciproquement, si $|a_n - \mathrm{Re}(l)|$ et $|b_n - \mathrm{Im}(l)|$ sont inférieurs à $\varepsilon/2$, alors $|z_n - l|$ est inférieur à ε, par la seconde inégalité de (2.8.1). □

Posons par exemple

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/4}}{n} .$$

Les parties réelle et imaginaire sont :

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\cos(n/4)}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin(n/4)}{n}$$

Les deux suites convergent vers $\sqrt{2}/2$, et (z_n) converge vers $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. La figure 2.3 représente dans le plan complexe les 100 premiers termes de la suite (z_n), ainsi que le cercle de rayon $\varepsilon = 0.05$ centré en $l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

2.9 Vrai ou faux

Vrai-Faux 2.1 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si x est un réel, la suite des décimales de x est périodique.
2. ☐ Si x est rationnel, la suite des décimales de x est périodique.
3. ☒ Si x est décimal, la suite des décimales de x est constante à partir d'un certain rang.
4. ☒ Toute suite récurrente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, est périodique à partir d'un certain rang.

5. ☐ Si F est une application croissante, la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ est croissante.
6. ☒ Si f est une application croissante, la suite $(f(n))$ est croissante.
7. ☒ Si P est une application polynôme, la suite $(P(n))$ est monotone à partir d'un certain rang.
8. ☐ La suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$ est périodique de période 4.
9. ☒ La suite $((-1)^k)$ est une suite extraite de la suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$.
10. ☒ On peut extraire de la suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$ une sous-suite constante.

Vrai-Faux 2.2 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Toute suite croissante et minorée tend vers $+\infty$.
2. ☒ Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
3. ☒ Toute suite croissante et bornée converge.
4. ☐ Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. ☒ Si la suite des décimales de x converge, alors x est un nombre rationnel.
6. ☐ Si $r \leq 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.
7. ☒ Si $r < 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.

Vrai-Faux 2.3 Soit (u_n) une suite de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors pour tout n, $u_n < 1$.
2. ☒ Si (u_n) tend vers 0, alors $u_n < 1$ pour n assez grand.
3. ☒ Si (u_n) tend vers 2, alors $u_n > 1$ pour n assez grand.
4. ☒ Si (u_n) tend vers 0 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 0.
5. ☐ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 1.
6. ☒ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ est bornée.
7. ☐ Si la suite $(|u_n|)$ converge vers l, alors la suite (u_n) converge vers l ou vers $-l$.
8. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
9. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n^2}) converge vers l.
10. ☒ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^2) converge vers 1.
11. ☐ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^n) converge vers 1.

Vrai-Faux 2.4 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si pour tout n, $(u_n) \geq \sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si pour tout n, $(u_n) \geq -\sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

3. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) tendent vers 1, alors (v_n) tend vers 1.
4. ☐ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.
5. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) est bornée.
6. ☒ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
7. ☐ Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
8. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n/v_n) est bornée.
9. ☐ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
10. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$.

Vrai-Faux 2.5 Soit (u_n) une suite de réels croissante et non majorée. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1. ☒ La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
2. ☐ La suite (u_n^2) est croissante.
3. ☒ La suite $(\sqrt{|u_n|})$ tend vers $+\infty$.
4. ☒ La suite $(\exp(-u_n))$ tend vers 0.
5. ☐ La suite $(1/u_n)$ est décroissante.

Vrai-Faux 2.6 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $n2^n = O(2^n)$.
2. ☒ $2^{n+1} = O(2^n)$.
3. ☐ $2^{n^2+n} = O(2^{n^2})$.
4. ☒ $n2^n = o(3^n)$.
5. ☐ $n2^n/\sqrt{n+1} = O(2^n)$.
6. ☒ $n2^n/\sqrt{n^2+1} \sim 2^n$.
7. ☐ $3^n/n = O(2^n)$.
8. ☒ $2^n/n = o(2^n)$.
9. ☐ $n2^{-n} = O(2^{-n})$.
10. ☒ $n3^{-n} = o(2^{-n})$.
11. ☐ $n2^{-n}/\sqrt{n+1} = O(2^{-n})$.
12. ☒ $n2^{-n}/\sqrt{n^2+1} \sim 2^{-n}$.
13. ☒ $3^{-n}/n = O(2^{-n})$.
14. ☒ $2^{-n}/n = o(2^{-n})$.

2.10 Exercices

Exercice 2.1 On considère les suites (u_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1} \ , \ u_n = \frac{2n+3}{2n+1} \ , \ u_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1} \ ,$$

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1} \ , \ u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1} \ , \ u_n = \frac{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+n+1} \ ,$$

Pour chacune de ces suites :

1. Montrer qu'elle converge vers 1.
2. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Exercice 2.2 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \ .$$
2. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2} \ .$$
3. $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2} \ .$$
4. $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ , \quad u_n = s_{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n} \ .$$
5. $$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ , \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \ .$$
6. $$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{1/u_n + 1/v_n} \ , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 2.3 Soit (u_n) une suite de réels.

1. Montrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

3. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent, alors (u_n) converge.
4. Montrer par un exemple que les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) et (u_{n^2}) peuvent converger sans que (u_n) converge.

Exercice 2.4 Démontrer les relations suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln n}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ , \ \frac{n^2 \ln n}{2^n} = o(\frac{1}{n^4}) \ , \ \frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n}) \ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$10^n = o(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n}) \ , \ n^4\, 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3}) \ , \ (\ln n)^4 \sqrt{n} = o(n^2 \ln(\ln n)) \ .$$

Exercice 2.5 Démontrer les résultats suivants.

1.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e} \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^{1/2}}\right)^n = +\infty \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \ ,$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^6+2^{3n}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+(-1)^n}{n^{-3}+(-1)^{3n}} = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1/2}+(-1/2)^n}{n^{-3}+(-1/2)^{3n}} = +\infty \ ,$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = 1 \ ,$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2} = +\infty \ , \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = 1 \ ,$$

5.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = -1 \ .$$

Exercice 2.6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$, si pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de A.
2. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$, et x un réel quelconque. Montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A. Indication : considérer les intervalles $]x - 1/n, x + 1/n[$, pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de A. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) .$$

la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée "suite des moyennes de Cesaro" de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (c_n) converge aussi vers l.
3. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
4. Soit (u_n) une suite de réels telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l. Montrer que la suite (u_n/n) converge également vers l.
5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $l > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge également vers l.

Exercice 2.8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1$, $u_0 = 1$, $u_0 = 3$.
2. Déterminer les points fixes de F.
3. Montrer que $F([0,2]) \subset [0,2]$ et que $F([-2,0]) \subset [-2,0]$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante, pour tout $u_0 \in]-\infty,-2[\cup]0,2[$, croissante pour tout $u_0 \in]-2,0[\cup]2,+\infty[$.
5. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geq -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \sqrt{2+x} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$. Montrer que 2 est le seul point fixe de F.
2. Pour $u_0 \in [-2,2[$, montrer que (u_n) est croissante, et tend vers 2.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.10 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul point fixe de F.
2. On suppose $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers 0.
3. On suppose $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

Exercice 2.11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2) .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 2$, $u_0 = -1/2$. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0,1]) \subset [0,1]$ et que $F([-1,0]) \subset [-1,0]$.
2. On suppose $u_0 \in [0,1[$. Montrer que (u_n) est décroissante et donner sa limite.
3. On suppose $u_0 > 1$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
4. On suppose $u_0 \in [-1,0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 2^{-n}$. En déduire que (u_n) tend vers 0.
5. On suppose $u_0 < -1$. Montrer qu'on peut se ramener aux trois cas précédents. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.12 Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1} .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n+1} .$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$$

Exercice 2.13 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 2.14 Soit a un réel et r un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} = r\, u_n + a\ .$$

1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de raison r.
2. On pose $\lambda = a/(1-r)$. Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à λ est solution de l'équation de récurrence (E).
3. Montrer que la suite $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression suivante de u_n :

$$u_n = \frac{a}{1-r} + \left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) r^n\ .$$

Exercice 2.15 On considère l'équation de récurrence qui engendre la suite de Fibonacci :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\ .$$

1. Soit r un réel. Montrer qu'une suite géométrique de raison r vérifie (E) si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 = r + 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n = a\phi^n + b(-1/\phi)^n$, où a et b sont deux réels, et ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

   Montrer que la suite (u_n) vérifie l'équation de récurrence (E).
3. Calculer les valeurs de a et b telles que

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ a\phi - b/\phi & = & 1 \end{cases}$$

4. En déduire l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right)\ .$$

5. A partir de cette expression, retrouver le résultat du cours (proposition 2.6.1) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi\ .$$

Exercice 2.16 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & (a_n - b_n)/2 \\ b_{n+1} & = & (a_n + b_n)/2 \end{array}\right.$$

On pose $z_n = a_n + i\, b_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2}\, z_n \; .$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$z_n = \frac{1}{2^{n/2}}\, \mathrm{e}^{ni\pi/4} \; .$$
3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

2.11 Compléments

Limite sup et limite inf

Quand on définit une notion mathématique, le fait qu'elle refuse de s'appliquer à certains objets la rend aussitôt suspecte. La suite $((-1)^n)$ ne converge pas. Serait-ce que la notion de limite est insuffisante ?

Au contraire de la limite d'une suite, la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble existent toujours (elles peuvent être infinies).

Soit (u_n) une suite de réels. Considérons la suite d'ensembles (U_n) où U_n est défini par :

$$U_n = \{u_m \, , \; m \geq n\} \; .$$

Posons alors :

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n \; ,$$

Comme les ensembles U_n sont emboîtés ($U_{n+1} \subset U_n$), la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante, donc elle admet une limite (éventuellement infinie), par le théorème 2.4.1. Sa limite est la *limite inférieure* de la suite (u_n). La *limite supérieure* est la limite de la suite (décroissante) $\overline{u}_n$.

Définition 2.11.1

1. *On appelle limite inférieure de la suite* (u_n)*, et on note* $\liminf u_n$ *ou* $\underline{\lim}\, u_n$*, la quantité*
$$\liminf u_n = \sup\{\underline{u}_n \, , \; n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{où} \quad \underline{u}_n = \inf\{u_m \, , \; m \geq n\} \; .$$

2. *On appelle limite supérieure de la suite* (u_n), *et on note* $\limsup u_n$ *ou* $\overline{\lim}\, u_n$, *la quantité*

$$\limsup u_n = \inf\{\overline{u}_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \quad où \quad \overline{u}_n = \sup\{u_m\ ,\ m \geq n\}\ .$$

On retient de façon abrégée que

$$\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} u_m \quad \text{et} \quad \limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} u_m\ .$$

La $\liminf$ et la $\limsup$ existent pour toute suite réelle. Voici trois exemples.

u_n	$\liminf u_n$	$\limsup u_n$
$\sin(n)$	-1	1
$n\sin(n)$	$-\infty$	$+\infty$
$\sin(n)/n$	0	0

On peut voir la $\liminf$ comme la plus petite limite d'une suite extraite de la suite (u_n), et la $\limsup$ comme la plus grande. Elles peuvent éventuellement être infinies. On peut toujours extraire de (u_n) deux sous-suites qui convergent vers ces deux limites. Elles fournissent une caractérisation de la convergence : une suite converge si et seulement si sa $\liminf$ est égale à sa $\limsup$.

Proposition 2.11.2 *Une suite de réels* (u_n) *converge vers* l *si et seulement si*

$$\liminf u_n = \limsup u_n = l\ .$$

Démonstration : Ce résultat reste vrai si la suite tend vers $\pm\infty$. Nous le démontrons pour une limite finie. Rappelons la construction de $\liminf$ et $\limsup$, comme limite des suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$, où

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n\ ,$$

avec

$$U_n = \{u_m\ ,\ m \geq n\}\ .$$

Démontrons d'abord la condition suffisante. Par construction, la suite (u_n) est encadrée par les suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.

$$\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n\ .$$

Si les deux suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ ont la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite, par le théorème des gendarmes (corollaire 2.5.3).

Réciproquement, si la suite (u_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les ensembles U_n sont inclus dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui implique :

$$l - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Donc,

$$l - \varepsilon \leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il entraîne :

$$l = \liminf u_n = \limsup u_n \ .$$

$\square$

Nous avons maintenant les bons outils pour démontrer le théorème 2.7.3 :

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Commençons par montrer que (u_n) est bornée. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon \ .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \varepsilon \leq u_{n_0+k} \leq u_{n_0} + \varepsilon \ .$$

La suite (u_n) est bornée à partir du rang n_0, donc bornée tout court. Donc pour tout n, l'ensemble $U_n = \{u_m \ , \ m \geq n\}$ est borné et les quantités $\underline{u}_n = \inf U_n$ et $\overline{u}_n = \sup U_n$ sont finies. Nous avons déjà observé que $(\underline{u}_n)$ est une suite croissante et $(\overline{u}_n)$ une suite décroissante, car les ensembles U_n sont emboîtés. Nous allons démontrer que les suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ sont adjacentes, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}_n - \underline{u}_n = 0 \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n_0+k} \leq u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, $u_{n_0} - \varepsilon$ est un minorant de l'ensemble U_n et $u_{n_0} + \varepsilon$ en est un majorant. Par définition des bornes inférieure et supérieure :

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc $\overline{u}_n - \underline{u}_n < \varepsilon$, ce que nous voulions démontrer. $\square$

Dichotomies

Comme application de la proposition 2.4.3 (deux suites adjacentes convergent vers la même limite), nous présentons sur deux exemples une technique d'encadrement très efficace, la *dichotomie* (action de partager en deux).

Le premier exemple est un résultat proche de la proposition 1.8.1.

Proposition 2.11.3 *Soit f une application continue de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même. Alors f admet un point fixe :*

$$\exists a \in [0,1]\ , \quad f(a) = a\ .$$

Démonstration : La démonstration de la proposition 1.8.1 assurait l'existence, mais ne fournissait aucun moyen de localiser le point fixe ou de le calculer. Celle que nous proposons ici en revanche, est *constructive* : on peut la transformer en un algorithme pour calculer une valeur approchée du point fixe.

Posons $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Si $f(u_0) = u_0$, ou si $f(v_0) = v_0$, inutile d'aller plus loin, on a trouvé un point fixe. Sinon, on a forcément $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Examinons le point $1/2$: si $f(1/2) = 1/2$, le point fixe est trouvé. Si $f(1/2) > 1/2$, on pose $u_1 = 1/2$ et $v_1 = v_0$. Si $f(1/2) < 1/2$, on pose $u_1 = u_0$ et $v_1 = 1/2$. On itère ensuite la construction. Supposons que u_n et v_n ont été construits de sorte que $f(u_n) > u_n$ et $f(v_n) < v_n$. On examine le point $x = (u_n + v_n)/2$. si $f(x) = x$, le point fixe est trouvé. Si $f(x) > x$, on pose $u_{n+1} = x$ et $v_{n+1} = v_n$. Si $f(x) < x$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = x$.

Plaçons nous dans le cas où la procédure se prolonge jusqu'à l'infini (on ne trouve jamais de point fixe). Vu la manière dont elles ont été construites, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n = 2^{-n}$. Donc elles convergent vers la même limite a. Comme f est continue les suites $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergent vers $f(a)$. Par construction, $f(u_n) > u_n$, donc $f(a) \geq a$. De même, $f(v_n) < v_n$, donc $f(a) \leq a$. Donc $f(a) = a$: a est bien un point fixe. $\square$

Voici un résultat beaucoup plus important, démontré également par dichotomie : le *théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Théorème 2.11.4 *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : Soit m un minorant et M un majorant de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad m \leq u_n \leq M\ .$$

Posons $a_0 = m$ et $b_0 = M$, et $\varphi(0) = 0$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés : l'une au moins contient une infinité de termes de la suite (u_n). Supposons que $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ contienne une infinité de termes de la suite. On note $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, et $\phi(1) > 0$ un entier tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$. Si la première moitié ne contient qu'un nombre fini de termes, on la remplace par l'autre moitié $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(M-m)/2^k$, et des valeurs extraites $u_{\phi(k)} \in [a_k, b_k]$. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Par le théorème des gendarmes (corollaire 2.5.3) la suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers la même limite que (a_n) et (b_n). $\square$

Fractions continues

Voici une autre situation où l'on rencontre des suites adjacentes comme approximations numériques d'un réel. Nous allons construire par récurrence une suite de rationnels (u_n) qui encadrent un réel x de manière optimale, en un sens qui sera précisé plus loin.

On construit d'abord une suite d'entiers (a_n) de la façon suivante. Soit (a_0) la partie entière de x. On calcule l'inverse de la partie décimale, $1/D(x)$ qui est un réel supérieur à 1. On note a_1 sa partie entière. On itère ensuite le procédé, en prenant pour chaque entier la partie entière de l'inverse de la partie décimale. Voici ce que cela donne pour $x = \pi$.

$$\begin{array}{lll} a_0 = \lfloor \pi \rfloor & = 3 & d_0 = \pi - a_0 \\ a_1 = \lfloor 1/d_0 \rfloor & = 7 & d_1 = 1/d_0 - a_1 \\ a_2 = \lfloor 1/d_1 \rfloor & = 15 & d_2 = 1/d_1 - a_2 \\ a_3 = \lfloor 1/d_2 \rfloor & = 1 & d_3 = 1/d_1 - a_3 \\ a_4 = \lfloor 1/d_3 \rfloor & = 292 & d_4 = 1/d_3 - a_4 \\ a_5 = \lfloor 1/d_4 \rfloor & = 1 & d_5 = 1/d_4 - a_5 \end{array}$$

Vous pourrez vérifier que la suite (a_n) associée à $\sqrt{2}$ est $(1, 2, 2, 2, \ldots)$. La suite associée au nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ est $(1, 1, 1, 1, \ldots)$.

La suite des entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant donnée, on fabrique une suite de rationnels u_n en reprenant le processus à l'envers.

$$u_0 = a_0 \,,\ u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \,,\ u_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Le terme général u_n est

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Le terme "fraction continue" est assez clair. Il n'y a pourtant pas de rapport direct avec les fonctions continues. Il vaudrait mieux dire, comme en anglais, "fraction continuée".

Voici les premiers termes de la suite (u_n) pour $x = \pi$, et la valeur numérique de $\pi - u_n$. Le premier terme $u_1 = 22/7$ était déjà connu d'Archimède comme approximation de π. Le second, $355/113$ a été proposé par Adrien Métius en 1624. Les Chinois, tel Zu Zhong Chi au 5ième siècle, connaissaient ces deux approximations. L'exemple tel que nous le présentons, figure dans un texte écrit par Leonhard Euler (1707-1783) en 1748.

n	u_n	$\pi - u_n$
0	3	0.1415926535
1	$\frac{22}{7}$	-0.0012644893
2	$\frac{333}{106}$	0.0000832196
3	$\frac{355}{113}$	-0.0000002668
4	$\frac{103993}{33102}$	0.0000000006
5	$\frac{104348}{33215}$	-0.0000000003

Les u_n s'approchent rapidement de π, et de plus ils encadrent la valeur exacte : les deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes. On démontre le résultat suivant.

Théorème 2.11.5 *Soit x un réel et (u_n) la suite des fractions continues associée à x. Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes et convergent vers x.*

Pour tout n, notons h_n et b_n les deux entiers premiers entre eux tels que $u_n = h_n/b_n$. Alors :

$$\frac{1}{b_n(b_{n+1}+b_n)} < \left| x - \frac{h_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n b_{n+1}} .$$

Cet encadrement montre que l'erreur commise en approchant x par u_n est de l'ordre du carré du dénominateur. La taille du dénominateur est en quelque sorte le prix que l'on accepte de payer pour une approximation rationnelle de x. On démontre que parmi les rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à b_n, c'est u_n qui est le plus proche de x. L'approximation par fractions continues est donc la meilleure possible.

Applications contractantes

Le principal problème des suites récurrentes est que selon la valeur initiale u_0 et la fonction F que l'on itère, tous les comportements sont possibles, même les plus sauvages. Pour vous en convaincre, essayez de suivre le plus longtemps possible la toile d'araignée de la figure 2.4.

Il existe pourtant une situation particulièrement agréable, celle où l'application F est *contractante.*

Définition 2.11.6 *Soit ρ un réel tel que $0 < \rho < 1$. Soit F une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On dit que F est* contractante *de rapport ρ si pour tous x et y distincts dans I,*

$$|F(x) - F(y)| \leq \rho |x - y| .$$

Théorème 2.11.7 *Soit F une application contractante. Alors F possède un point fixe unique et pour tout $u_0 \in I$ la suite des itérés $(F^{\circ n}(u_0))$ converge vers ce point fixe.*

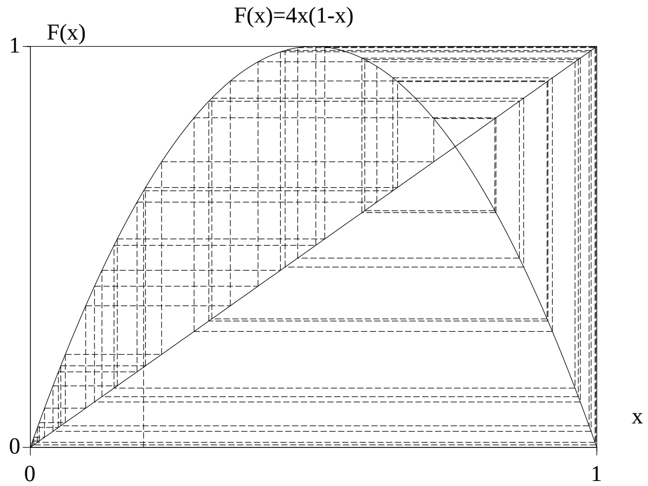

FIG. 2.4 – Comportement chaotique d'une suite récurrente.

La démonstration sera l'occasion d'utiliser la notion de suite de Cauchy.

Démonstration :

Notons $u_n = F^{\circ n}(u_0)$. Nous allons montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \rho |u_n - u_{n-1}| \ ,$$

et donc par récurrence,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \rho^n |u_1 - u_0| \ .$$

Utilisons l'inégalité triangulaire pour écrire :

$$\begin{aligned}
|u_{n+k} - u_n| &\leq |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+2} - u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \\
&\leq |u_1 - u_0|(\rho^n + \rho^{n+1} + \cdots + \rho^{n+k-1}) \\
&= |u_1 - u_0|\rho^n(1 + \rho + \cdots + \rho^{k-1}) \\
&= |u_1 - u_0|\rho^n \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho} \\
&< \frac{|u_1 - u_0|}{1 - \rho} \rho^n \ .
\end{aligned}$$

Comme $\rho < 1$, la suite géométrique (ρ^n) tend vers 0, donc la distance $|u_{n+k} - u_n|$ peut être rendue arbitrairement petite, pour n assez grand. Donc (u_n) est une suite de Cauchy.

Par le théorème 2.7.3, la suite (u_n) converge. Soit l sa limite. La suite $(F(u_n))$ est telle que :

$$|F(u_n) - F(l)| < |u_n - l| \ .$$

Donc $(F(u_n))$ converge vers $F(l)$ (F est continue) et $F(l) = l$.

S'il y avait deux points fixes différents l et l', ils seraient tels que

$$|l - l'| = |F(l) - F(l')| < |l - l'| \ ,$$

ce qui est impossible. □

Méthode de Newton

Supposons que l'on souhaite résoudre numériquement l'équation

$$f(z) = 0 \ .$$

La méthode consiste à écrire une solution z comme point fixe d'une fonction F, choisie de manière à être contractante, avec le meilleur rapport de contraction possible sur un intervalle contenant le point fixe. Supposons que f soit une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que l'on connaisse une valeur x_0 pas trop éloignée de la solution. L'équation de la tangente en x_0 au graphe de f est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \ .$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, cette droite coupe l'axe des x au point :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ .$$

Il est raisonnable d'espérer que x_1 soit beaucoup plus proche de la solution cherchée que x_0. La suite itérative que l'on se propose de calculer est donc $(F^{\circ n}(x_0))$, avec :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

(Il faut bien sûr s'assurer que la suite est bien définie, c'est-à-dire que pour tout n, $f'(x_n) \neq 0$.)

Par exemple, si on souhaite calculer numériquement $\sqrt{2}$, on pourra l'écrire comme solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$, et contruire la suite définie par $x_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \ .$$

La figure 2.5 montre une illustration graphique.

La précision de la méthode est décrite par le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 2.11.8 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z un réel tel que $f(z) = 0$. On suppose que f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant z, et que $f'(z) \neq 0$. Notons :*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ , \quad \textit{et} \quad M = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \ .$$

Il existe h, $0 < h < 1/M$ tel que pour tout $x_0 \in [z-h, z+h]$, la suite itérative $(F^{\circ n}(x_0))$ est définie et vérifie :

$$|F^{\circ n}(x_0) - z| < \frac{1}{M}(M|x_0 - z|)^{2^n} \ . \tag{2.11.2}$$

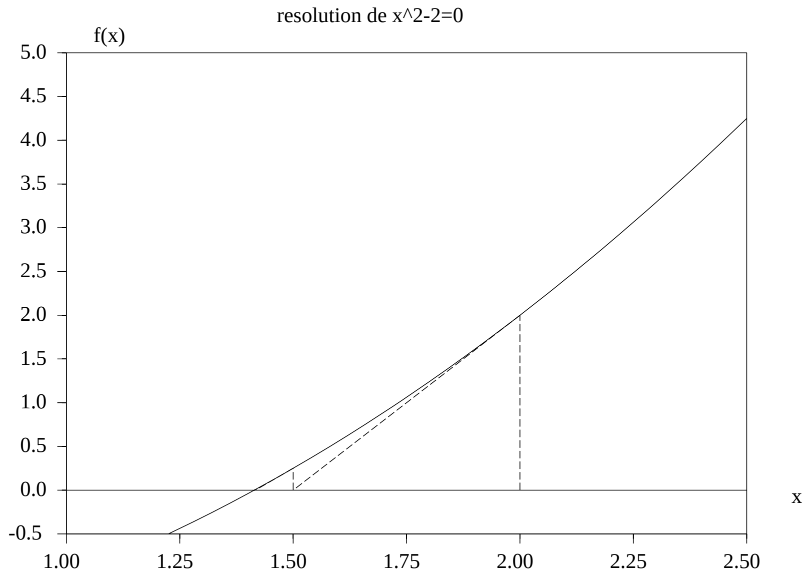

FIG. 2.5 – Méthode de Newton.

La majoration (2.11.2) traduit une convergence extrêmement rapide. Supposons pour fixer les idées que $M = 1$ et $|x_0 - z| = 10^{-1}$, alors la précision sera de 10^{-2} à la première itération, 10^{-4} à la seconde, 10^{-8} à la troisième, et on peut s'attendre à 32 décimales exactes à la cinquième itération. Chaque itération double le nombre de décimales exactes. En ce qui concerne la constante M, il est intuitivement normal que la méthode soit d'autant plus performante que la dérivée seconde est plus faible (la courbe est plus proche de sa tangente), et la dérivée plus grande.

Exemple : Reprenons l'équation $z^2 - 2 = 0$, en partant de $x_0 = 2$. Voici les 5 premières valeurs de la suite $(F^{\circ n}(2))$, à comparer avec $\sqrt{2} \simeq 1.4142135623730950488$.

n	$F^{\circ n}(2)$
1	1.5000000000000000000
2	1.4166666666666666666
3	1.4142156862745098039
4	1.4142135623746899106
5	1.4142135623730950488

La méthode de Newton est extrêmement précise. En revanche, elle nécessite une initialisation relativement proche de la solution que l'on cherche. Utiliser la méthode à partir d'un point quelconque peut conduire à des résultats numériquement instables, dans la mesure où deux suites récurrentes, même si elles partent de points très voisins, peuvent converger vers des valeurs très éloignées.

Exemple : Considérons l'équation $\sin(\pi z) = 0$, dont les solutions sont les entiers relatifs. Si $f(x) = \sin(\pi x)$, alors :

$$F(x) = x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi \cos(\pi x)} .$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $F^{\circ 5}(x_0)$ pour quelques valeurs de x_0 proches de 0.5, valeur en laquelle f' s'annule.

x_0	0.491	0.493	0.495	0.497	0.499	0.501	0.503	0.505	0.507	0.509
$F^{\circ 5}(x_0)$	$-11.$	$-14.$	$-20.$	$-33.$	$-101.$	$102.$	$34.$	$21.$	$15.$	$12.$

Chapitre 3

Limites et continuité

3.1 Vocabulaire

Une *fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$* est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, au plus un réel y vérifie $(x, y) \in \Gamma$. S'il existe, ce réel y est l'*image* de x et est noté $f(x)$. L'ensemble des x qui ont une image par f est le *domaine de définition* de f. Nous le noterons $\mathcal{D}_f$. La notation standard est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Si A est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, l'*image* de A, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A.

$$f(A) = \{\, f(x)\,,\ x \in A\,\}$$

Si B est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'*image réciproque* de B, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des *antécédents* des éléments de B.

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in \mathcal{D}_f\,,\ f(x) \in B\,\}$$

Attention à la notation f^{-1} : $f^{-1}(B)$ est défini même si f n'est pas bijective. Par exemple, si f est l'application valeur absolue, $x \mapsto |x|$,

$$f(]-2,1[) = [0,2[\quad \text{et} \quad f^{-1}([1,2]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathcal{D}_f$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :*

- constante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\ , \quad f(x) = f(y)$
- croissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\ , \quad (x \leq y) \Longrightarrow (f(x) \leq f(y))$
- décroissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\ , \quad (x \leq y) \Longrightarrow (f(x) \geq f(y))$
- strictement croissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\ , \quad (x < y) \Longrightarrow (f(x) < f(y))$
- strictement décroissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\ , \quad (x < y) \Longrightarrow (f(x) > f(y))$
- monotone *si elle est croissante ou décroissante*
- majorée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est majoré*

- minorée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est minoré*
- bornée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est borné*

Le plus souvent, ces définitions s'appliqueront à des *restrictions* de f à un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$.

$$\begin{array}{ccc} & f_{|I} & \\ I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 3.1.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$. Soit P une des propriétés de la définition 3.1.1. On dit que f possède la propriété P*
- au voisinage de x *s'il existe un intervalle ouvert I contenant x, tel que la restriction de f à I possède la propriété P.*
- au voisinage de $+\infty$ *s'il existe un réel A tel que la restriction de f à $]A, +\infty[$ possède la propriété P.*
- au voisinage de $-\infty$ *s'il existe un réel A tel que la restriction de f à $]-\infty, A[$ possède la propriété P.*

Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$, est :
- décroissante au voisinage de $-\infty$
- décroissante au voisinage de -1
- croissante au voisinage de 1
- croissante au voisinage de $+\infty$
- bornée au voisinage de 0

Les opérations sur les réels s'étendent aux fonctions de manière naturelle.
- *addition :*

$$\begin{array}{ccc} & f+g & \\ \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

- *multiplication :*

$$\begin{array}{ccc} & fg & \\ \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (fg)(x) = f(x)g(x) \end{array}$$

- *multiplication par un réel :*

$$\begin{array}{ccc} & \lambda f & \\ \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \end{array}$$

- *comparaison :*

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\,,\ f(x) \leq g(x)$$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux fonctions peut être nul sans que les deux fonctions le soient.

3.2 Convergence

Nous commençons par la convergence en un point, vers une limite finie. Afin d'éviter les cas pathologiques, nous supposerons toujours que les fonctions étudiées sont définies *au voisinage* du point considéré (cf. définition 3.1.2).

Définition 3.2.1 *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit l un réel. On dit que f* tend vers *l quand x tend vers a, ou que f* a pour limite *l en a si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad (0 < |x-a| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon) \tag{3.2.1}$$

On notera :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \textit{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\ .$$

Tout intervalle centré en l contient toutes les valeurs $f(x)$, pour x suffisamment proche de a. Observez que f peut très bien ne pas être définie en a, et admettre quand même une limite en a. Voici un premier exemple (figure 3.1).

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\sin(1/x) \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$. Donc si $|x| \leq \varepsilon$ et $x \neq 0$, alors $|x\sin(1/x)| \leq \varepsilon$:

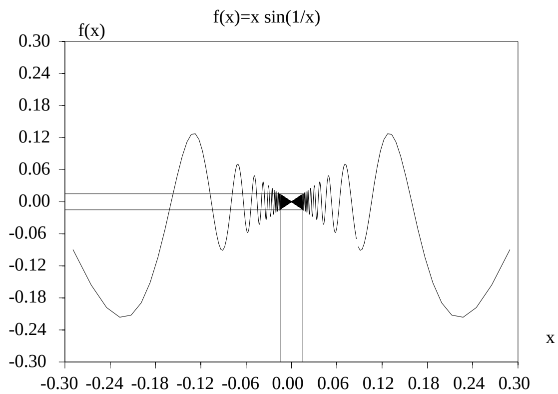

FIG. 3.1 – Graphe de la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$.

$f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

La convergence peut se caractériser en termes de suites.

Théorème 3.2.2 *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit l un réel. La fonction f tend vers l quand x tend vers a, si et seulement si, pour toute suite (x_n), à valeurs dans $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ et convergeant vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers l.*

Démonstration : Montrons d'abord la condition nécessaire : si f tend vers l au sens de la définition 3.2.1, alors pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, et η tel que si $0 < |x-a| \leq \eta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$. Soit (x_n) une suite de $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ convergeant vers a. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 < |x_n - a| \leq \eta$. Mais $0 < |x_n - a| \leq \eta$ entraîne $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$, par hypothèse. Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers l.

Voici maintenant la condition suffisante, dont nous allons démontrer la contraposée : si f ne tend pas vers l, alors il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. Ecrivons donc que f ne tend pas vers l.

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \forall \eta > 0\,, \quad \exists x \in \mathcal{D}_f\,, \quad (0 < |x-a| \leq \eta) \wedge (|f(x) - l| > \varepsilon)$$

Posons $\eta = 1/n$:

$$\exists x \in \mathcal{D}_f\,, \quad (0 < |x-a| \leq 1/n) \wedge (|f(x) - l| > \varepsilon)$$

Notons x_n un des réels dont l'existence est affirmée ci-dessus. La suite (x_n) converge vers a car $|x_n - a| < 1/n$, pourtant la suite $f(x_n)$ ne tend pas vers l, car $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$.
□

Voici deux conséquences faciles de la définition.

Proposition 3.2.3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel.*

1. *Si $f(x)$ converge quand x tend vers a, alors la limite est unique.*
2. *Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si $f(x)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration :

1. Supposons que f vérifie la définition 3.2.1 pour deux réels l et l' distincts. Posons $\varepsilon = |l - l'|/3$. Alors les intervalles $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ et $[l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$ sont disjoints. Pour x suffisamment proche de a, le réel $f(x)$ devrait appartenir aux deux intervalles à la fois : c'est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$, et η tel que $f(x)$ reste dans l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ pour tout $0 < |x-a| \leq \eta$. Alors :

   $$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap \mathcal{D}_f\,, \quad f(x) \leq l + \varepsilon$$

   et

   $$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap \mathcal{D}_f\,, \quad f(x) \geq l - \varepsilon$$

   Donc f est majorée et minorée au voisinage de a.

□

3.3 Opérations sur les limites

La notion de limite se combine avec les opérations sur les fonctions comme on l'attend. Nous énoncerons les résultats dans le théorème 3.3.2. Ils peuvent se déduire des résultats analogues sur les suites numériques, via le théorème 3.2.2. Nous conseillons au lecteur de le vérifier, puis de comparer cette approche avec les démonstrations directes qui suivent. Elles sont basées sur le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Soit a un réel. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies au voisinage de a, sauf peut-être en a.*

1. *Si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
alors
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = 0$$

2. *Si f est bornée au voisinage de a et*
$$\lim_{x\to a} g(x) = 0\ ,$$
alors
$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$$

Démonstration :

1. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit η_1 tel que pour $0 < |x-a| \leq \eta_1$, $|f(x)| \leq \varepsilon/2$. De même, soit η_2 tel que pour $0 < |x-a| \leq \eta_2$, $|g(x)| < \varepsilon/2$. Alors, pour $0 < |x-a| \leq \min\{\eta_1, \eta_2\}$,
$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$
d'où le résultat.

2. Soit η_1 et M deux réels tels que
$$\forall x \in [a-\eta_1, a+\eta_1]\ , \quad |f(x| \leq M\ .$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Soit η_2 tel que pour $0 < |x-a| \leq \eta_2$, $|g(x)| \leq \varepsilon/M$. Alors, pour $0 < |x-a| \leq \min\{\eta_1, \eta_2\}$,
$$|(fg)(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\ ,$$
d'où le résultat.

$\square$

Théorème 3.3.2 *Soit a un réel. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle ouvert autour de a.*

1. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = l'$$

alors

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$$

2. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = l'$$

alors

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$$

Démonstration : Pour nous ramener au lemme 3.3.1, observons d'abord que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, si et seulement si $f(x) - l$ tend vers 0.

1. Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l', donc $f(x) - l$ et $g(x) - l'$ tendent vers 0. Donc

$$f(x) - l + g(x) - l' = (f+g)(x) - (l+l')$$

   tend vers 0 d'après le point *1.* du lemme 3.3.1. D'où le résultat.

2. Nous voulons montrer que $f(x)g(x) - ll'$ tend vers 0. Ecrivons :

$$f(x)g(x) - ll' = f(x)(g(x) - l') + (f(x) - l)l' \; .$$

   Il suffit de montrer séparément que les deux fonctions $f(g - l')$ et $(f - l)l'$ tendent vers 0, d'après le premier point du lemme 3.3.1. Mais chacune de ces deux fonctions est le produit d'une fonction convergeant vers 0 par une fonction bornée au voisinage de 0 (f est bornée au voisinage de 0 car elle converge). D'où le résultat, par le point *2.* du lemme 3.3.1.

□

Si une application est constante, sa limite en tout point est égale à cette constante. Comme cas particulier du théorème 3.3.2, si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, et λ est un réel quelconque, alors la limite en a de $\lambda f(x)$ est λl.

Les résultats attendus sur la composition des limites se vérifient facilement.

Théorème 3.3.3 *Soient a et b deux réels. Soit f et g deux fonctions définies respectivement au voisinage de a et au voisinage de b. On suppose :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = l$$

Démonstration : Soit ε un réel strictement positif. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$0 < |y - b| \leq \eta_1 \implies |g(y) - l| \leq \varepsilon$$

Il existe η_2 tel que

$$0 < |x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - b| \leq \eta_1$$

Donc :

$$0 < |x - a| \leq \eta_2 \implies |g(f(x)) - l| \leq \varepsilon$$

□

On utilise le théorème 3.3.3 pour effectuer des changements de variables, et se ramener à des limites connues. Par exemple, nous avons vu que

$$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$$

Sachant que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

on en déduit :

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(1/x^2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} (x - 1) \sin(1/(x - 1)) = 0$$

3.4 Limites unilatérales

Une fonction f peut converger vers une limite finie, comme nous l'avons vu précédemment, ou bien $+\infty$ ou $-\infty$. De plus les valeurs de la variable, qui approchaient a des deux côtés dans les définitions précédentes, peuvent ne l'approcher que d'un seul côté : ce sont les notions de limite à gauche, et de limite à droite. On peut aussi chercher une limite quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Au total, ce ne sont pas moins de 15 définitions différentes que nous devons donner. Vous reconnaîtrez dans ces définitions un principe général : $f(x)$ tend vers l (fini ou infini) quand x tend vers a (fini ou infini), si pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \setminus \{a\}) \subset V_l$. La définition précise de la notion de voisinage relève de la topologie, et dépasse le cadre de ce cours. Un voisinage de $+\infty$ sera compris comme un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. De même, un voisinage de $-\infty$ sera un intervalle de la forme $]-\infty, A]$. Un "voisinage à gauche" d'un réel a sera un intervalle du type $[a - \varepsilon, a[$, tandis qu'un "voisinage à droite" sera de la forme $]a, a + \varepsilon]$. Nous donnons les différentes définitions sous forme de tableaux. Plutôt que d'apprendre les 5 tableaux par cœur, il est conseillé d'en comprendre le principe pour être capable de retrouver ces définitions en cas de besoin.

Limites bilatérales		
Notation	Définition	Exemple
$\lim_{x \to a} f(x) = l$	$\forall \varepsilon\, \exists \eta\,,\ 0 < \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$	$\lim_{x \to 0} x = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\forall A\, \exists \eta\,,\ 0 < \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \geq A$	$\lim_{x \to 0} 1/\|x\| = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\forall A\, \exists \eta\,,\ 0 < \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \leq A$	$\lim_{x \to 0} -1/\|x\| = -\infty$

Limites à gauche		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists\eta\,,\ a-\eta \le x < a \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to 0^-} x/\lvert x\rvert = -1$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a-\eta \le x < a \Longrightarrow f(x) \ge A$	$\lim\limits_{x\to 0^-} -1/x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a-\eta \le x < a \Longrightarrow f(x) \le A$	$\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$

Limites à droite		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists\eta\,,\ a < x \le a+\eta \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x/\lvert x\rvert = +1$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a < x \le a+\eta \Longrightarrow f(x) \ge A$	$\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a < x \le a+\eta \Longrightarrow f(x) \le A$	$\lim\limits_{x\to 0^+} -1/x = -\infty$

La limite bilatérale des sections précédentes peut se caractériser en termes de limites à gauche et à droite.

Proposition 3.4.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. La fonction f admet l pour limite en a, si et seulement si elle admet l pour limite à gauche et à droite en a.*

Démonstration : Nous le démontrons pour une limite finie. Ce qui suit est facile à adapter à une limite infinie. La condition nécessaire est évidente au vu des définitions. Pour la condition suffisante, supposons

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe η_1 et η_2 tels que

$$a-\eta_1 \le x < a \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon \quad \text{et} \quad a < x \le a+\eta_2 \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$$

Prenons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, alors

$$0 < \lvert x-a\rvert \le \eta \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon\ .$$

$\square$

Voici maintenant les définitions des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Limites en $-\infty$		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists B\,,\ x \le B \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to -\infty} 1/x = 0$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists B\,,\ x \le B \Longrightarrow f(x) \ge A$	$\lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists B\,,\ x \le B \Longrightarrow f(x) \le A$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

Limites en $+\infty$		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists B\,,\ x \geq B \Longrightarrow \lvert f(x) - l\rvert \leq \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists B\,,\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists B\,,\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \leq A$	$\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

Pour chacune de ces définitions, il existe une caractérisation en termes de suites, analogue au théorème 3.2.2. Par exemple, la limite à gauche de f en a vaut $-\infty$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a et telle que pour tout n, $x_n < a$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $-\infty$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, à titre d'exercice, chacune de ces caractérisations, sur le modèle du théorème 3.2.2.

En ce qui concerne les opérations, le théorème 3.3.2 s'étend aux limites à gauche, à droite, en $-\infty$ et en $+\infty$, sans aucune difficulté. Les seuls problèmes viennent des limites éventuellement infinies. Dans le cas où les limites de f et g peuvent être infinies, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. Nous les résumons dans les tableaux 3.1 et 3.2. Dans ces deux tableaux, lim désigne indifféremment une limite bilatérale, à gauche, à droite, en $-\infty$ ou en $+\infty$ (du même type pour f et g). Les points d'interrogations sont des formes indéterminées : tous les cas sont possibles. Par exemple :

- $f(x) = 1/|x|$, $g(x) = -1/|x|$: $f + g$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
- $f(x) = 1/|x|$, $v_n = -1/x^2$: $f + g$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.
- $f(x) = 1/|x|$, $g(x) = \sin(1/x) - 1/|x|$: $f + g$ n'a pas de limite en 0.

$\lim f(x) \setminus \lim g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TAB. 3.1 – Limites possibles de $f + g$ en fonction des limites de f et g.

$\lim f(x) \setminus \lim g(x)$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TAB. 3.2 – Limites possibles de fg en fonction des limites de f et g.

Mises à part les formes indéterminées, chacune des cases des tableaux 3.1 et 3.2 résume 5 théorèmes : un pour chacun des différents types de limites. Il est conseillé au lecteur de les démontrer, soit directement sur le modèle du théorème 3.3.2, soit en utilisant la caractérisation par les suites évoquée plus haut.

3.5 Convergence des fonctions monotones

Comme pour les suites, "la monotonie entraîne l'existence de limites".

Théorème 3.5.1 *Soit* $]a,b[$ *un intervalle ouvert, et* f *une fonction croissante sur* $]a,b[$. *Les limites de* f *à droite en* a *et à gauche en* b *existent et :*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf(f(]a,b[)) \quad ; \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(f(]a,b[))$$

Démonstration : Supposons d'abord que f est minorée : $f(]a,b[)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure finie, notons-la l. Soit ε un réel positif fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $c \in]a,b[$ tel que $l \leq f(c) \leq l+\varepsilon$. Mais alors, puisque f est croissante,

$$a < x \leq c \Longrightarrow l \leq f(x) \leq l+\varepsilon$$

Donc f admet l pour limite à droite en a. Si f n'est pas minorée, pour tout A, il existe $c \in]a,b[$, tel que $f(c) \leq A$. Puisque f est croissante :

$$a < x \leq c \Longrightarrow f(x) \leq f(c) \leq A$$

Donc la limite à droite de f en a est $-\infty$.

Pour la limite à gauche en b, on procède de manière analogue, en distinguant le cas où f est majorée, du cas où elle ne l'est pas. □

L'énoncé du théorème 3.5.1, reste vrai si $a=-\infty$, ou $b=+\infty$. Evidemment, le même résultat vaut pour une fonction décroissante, en inversant le rôle de sup et inf. On retiendra que

toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de cet intervalle.

La limite à gauche peut très bien ne pas être égale à la limite à droite. Par exemple, la fonction "partie entière" est croissante sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

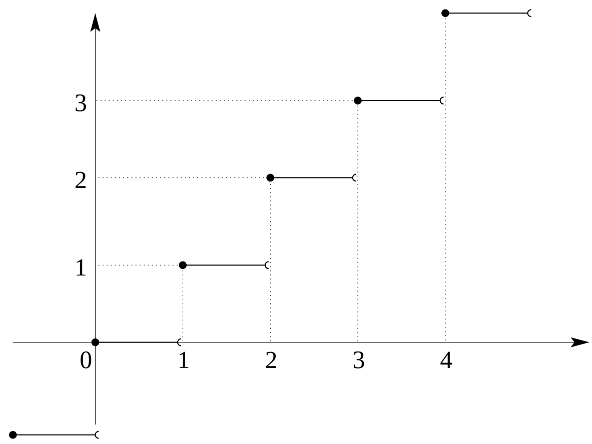

FIG. 3.2 – Graphe de la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

3.6 Comparaison de fonctions

Dans cette section, a est un réel quelconque, et nous considérons la limite (bilatérale) d'une fonction f en a, au sens de la définition 3.2.1. Toutes les fonctions sont supposées être définies au voisinage de a, sauf peut-être en a.

Tous les résultats de la section valent aussi pour des limites à gauche, à droite, en $-\infty$ et en $+\infty$. L'adaptation des démonstrations aux autres types de limite est un exercice conseillé.

Le résultat de base pour comparer deux limites est le suivant.

Théorème 3.6.1 *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

Démonstration : Supposons $\lim f(x) > \lim g(x)$. Alors la limite en a de la fonction $f - g$ est strictement positive. Notons l cette limite. Pour n assez grand, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |x - a| \leq \eta$ entraîne $f(x) - g(x) \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $f(x) - g(x) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Le fait de supposer $f(x) < g(x)$ ne renforce pas la conclusion : bien que $|x| < 2|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to 0} |x| = \lim_{x \to 0} 2|x| = 0 \ .$$

Le théorème 3.6.1 ne permet pas de démontrer que l'une des deux fonctions f ou g converge en a. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 3.6.2 *Soient f et g deux fonctions telles que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. S'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors $f(x)$ tend vers 0 en a.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que pour $0 < |x - a| \leq \varepsilon$:

$$|f(x)| \leq |g(x)| \leq \varepsilon \ ,$$

d'où le résultat. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.6.3 *Soient f, g et h trois fonctions telles que quand x tend vers a, $f(x)$ et $h(x)$ convergent vers la même limite l. Supposons de plus qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a, tel que pour tout $x \in I$,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ .$$

alors $g(x)$ converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 3.6.2 aux deux fonctions $h - g$ et $h - f$. □

Soit par exemple

$$\begin{array}{rcl} & g & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x\sin(1/x) \end{array}$$

Posons $f(x) = -|x|$, $h(x) = |x|$. Les deux fonctions f et h tendent vers 0 en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, comme f et h (cf. figure 3.1).

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 3.6.4 *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. Supposons que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.*

1.
$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \ .$$

2.
$$\text{Si } \lim_{x\to a} g(x) = -\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \ .$$

Démonstration : Pour tout A, il existe η tel que pour $0 < |x - a| < \eta$:

$$g(x) \geq f(x) \geq A \ ,$$

donc g tend vers $+\infty$ si f tend vers $+\infty$. L'autre affirmation est analogue. □

Le vocabulaire de la comparaison des fonctions est analogue à celui des suites, avec la difficulté supplémentaire qu'il faut toujours savoir de quelle limite il s'agit (bilatérale, à gauche, à droite, en $-\infty$ ou en $+\infty$). Nous écrivons la définition ci-dessous pour des limtes bilatérales en a, elle s'adapte sans problème aux 4 autres types de limites.

Définition 3.6.5 *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a.*

1. *On dit que la fonction f est* dominée *par la fonction g au voisinage de a si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in I\,, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) = O(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un grand O de $g(x)$" (au voisinage de a).

2. *On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\,, \quad 0 < |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) = o(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$" (au voisinage de a).

3. *On dit que la fonction f est* équivalente *à la fonction g si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\,, \quad 0 < |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon|g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) \sim g(x)$, qui se lit "$f(x)$ est équivalent à $g(x)$" (au voisinage de a).

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une fonction g non nulle au voisinage de a, sauf peut-être en a ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport $f(x)/g(x)$.

Proposition 3.6.6 *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.*

1. *f est* dominée *par g au voisinage de a si et seulement si le quotient f/g est borné :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in I \setminus \{a\}\,, \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M\ .$$

2. *f est* négligeable *devant g si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\,, \quad 0 < |x-a| \leq \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon\ .$$

3. *f est* équivalente *à g si et seulement si le quotient f/g tend vers 1 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\,, \quad 0 < |x-a| \leq \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leq \varepsilon\ .$$

Par exemple, au voisinage de 0 :

$$\sqrt{4x^2+9x} = O(\sqrt{x})\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} = o(x^{1/4})\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} \sim 3\sqrt{x}\ .$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{4x^2+9x} = O(x)\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} = o(x^2)\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} \sim 2x\ .$$

Insistons sur la nécessité de bien préciser le type de limite que l'on considère. Le plus souvent, il s'agira de limites en $+\infty$ ou de limites à droite en 0. On passe des unes aux autres en remplaçant la variable x par $y = 1/x$. Pour étudier une limite en a, on se ramène à une limite en 0 en posant $x - a = y$. Le changement de variable $y = -x$ permet de passer des limites à gauche aux limites à droite, des limites en $-\infty$ aux limites en $+\infty$.

Observons que $f(x) = o(g(x))$ entraîne $f(x) + g(x) \sim g(x)$, ce qui est particulièrement utile pour les polynômes. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $f_1(x) \sim g_1(x)$, et $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$. Par contre il ne faut pas les utiliser pour des sommes. Par exemple, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x + \sin(x) \sim x \quad \text{et} \quad g(x) = -x + \sin(x) \sim -x$$

Pourtant, $f(x) + g(x)$ n'est pas équivalent à 0.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2}} .$$

Commençons par les limites à droite en 0. Le numérateur tend vers 1 en 0. Pour le dénominateur $8x^3 = o(x^2)$, donc $f(x) \sim x^{-2/3}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{-2/3}} = 1$$

Considérons maintenant les limites en $+\infty$. Puisque $x + 1 = o(x^2)$, $x^2 + x + 1 \sim x^2$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} \sim x$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8x^3 + x^2} \sim 2x$, donc $f(x)$ tend vers 1/2.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Nous admettrons pour l'instant les équivalents suivants au voisinage de 0, qui seront justifiés plus loin. Vous devez les connaître par cœur.

Théorème 3.6.7 *Au voisinage de* 0, $\sin(x)$, $e^x - 1$ *et* $\ln(1 + x)$ *sont équivalents à* x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Nous rassemblons dans la section suivante d'autres limites classiques concernant l'exponentielle et le logarithme, qu'il est également bon de connaître.

3.7 Limites à connaître

Les limites étudiées dans cette section permettent de comparer exponentielles, logarithmes et puissances de x. Vous connaissez certainement déjà le comportement de ces fonctions au voisinage de 0 et de $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = \lim_{x \to +\infty} x = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Vous connaissez sans doute aussi le résultat suivant.

Proposition 3.7.1 *Soit b un réel strictement positif.*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-bx} = 0 \;.$$

Démonstration : Posons $f(x) = \mathrm{e}^{-bx}$. La fonction f est décroissante, donc elle admet une limite en $+\infty$. Pour identifier cette limite, il suffit de trouver la limite de la suite (e^{-bx_n}), où (x_n) est une suite particulière tendant vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = n\ln(2)/b$. Comme $\ln(2) \simeq 0.69$ et b sont positifs, (x_n) tend vers $+\infty$. On a $\mathrm{e}^{-bx_n} = 2^{-n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. □

Proposition 3.7.2 *Soient a et b deux réels strictement positifs.*

$$\lim_{x\to+\infty} x^a\mathrm{e}^{-bx} = 0 \;.$$

Démonstration : Posons $f(x) = x^a\mathrm{e}^{-bx}$. L'étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$, montre qu'elle est croissante sur $[0, a/b]$, décroissante sur $[a/b, +\infty[$. Comme elle est minorée par 0, elle admet une limite en $+\infty$. Comme $f(x) \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, la limite de f en $+\infty$ est positive ou nulle. Il nous reste à montrer qu'elle est nulle. Pour cela observons que ce que nous avons dit de f reste vrai si on remplace b par $b/2$: la fonction qui à x associe $x^a\mathrm{e}^{-(b/2)x}$ admet un maximum en $x = 2a/b$. On a donc :

$$f(x) = x^a\mathrm{e}^{-bx} = x^a\mathrm{e}^{-(b/2)x}\mathrm{e}^{-(b/2)x} \leq (2a/b)^a\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-(b/2)x}$$

Or $\mathrm{e}^{-(b/2)x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (proposition 3.7.1). D'où le résultat. □

Ce résultat peut paraître paradoxal : si $a = 100$, x^{100} croît très vite ($2^{100} \simeq 10^{30}$), et si $b = 0.01$, e^{-bx} décroît lentement ($\mathrm{e}^{-0.02} \simeq 0.98$). Pourtant, c'est l'exponentielle qui finit par l'emporter et la limite en $+\infty$ est nulle.

On retiendra que :

l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x,
les puissances de x l'emportent sur le logarithme.

C'est un moyen mnémotechnique de lever des indéterminations du type $0 \times \infty$ dans les calculs de limite : si l'un des facteurs "l'emporte" sur l'autre, c'est lui qui dicte la limite. Par exemple, dans la proposition 3.7.2, la limite de $x^a\mathrm{e}^{-bx}$ est la même que celle de e^{-bx}, bien que x^a tende vers $+\infty$. Nous rassemblons dans la proposition ci-après quelques exemples de limites du même type que celle de la proposition 3.7.2. Toutes s'en déduisent par des changements de variables : c'est un exercice facile que nous vous conseillons.

Proposition 3.7.3 *Soient a et b deux réels strictement positifs.*

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to+\infty} x^a\mathrm{e}^{-bx} = 0 & \lim_{x\to+\infty} x^{-a}\mathrm{e}^{bx} = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} |x|^a\mathrm{e}^{bx} = 0 & \lim_{x\to-\infty} |x|^{-a}\mathrm{e}^{-bx} = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^a x^{-b} = 0 & \lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{-a} x^{b} = +\infty \\
\lim_{x\to0^+} |\ln(x)|^a x^{b} = 0 & \lim_{x\to0^+} |\ln(x)|^{-a} x^{-b} = +\infty \;.
\end{array}$$

3.8 Continuité en un point

Une fonction f est *continue* en a quand elle admet $f(a)$ comme limite en a.

Définition 3.8.1 *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est :*

1. continue *en a si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
soit :
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\quad |x-a| \le \eta \implies |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$
2. continue à gauche *en a si*
$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$$
soit :
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\quad 0 \le a - x \le \eta \implies |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$
3. continue à droite *en a si*
$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$$
soit :
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\quad 0 \le x - a \le \eta \implies |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$

Par exemple la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a si a n'est pas un entier. Elle est continue à droite (mais pas à gauche) en a si a est entier : voir figure 3.2.

On déduit du théorème 3.2.2 une caractérisation de la continuité en termes de suites.

Théorème 3.8.2 *La fonction f est continue en a, si et seulement si pour toute suite de réels (x_n) telle que $\forall n\,,\ x_n \in \mathcal{D}_f$ et convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Observons que si une fonction est continue en un point, elle est nécessairement définie en ce point. Nous avons vu qu'une fonction f pouvait admettre une limite en a, sans être définie en a. Si c'est le cas, on appelle *prolongement par continuité* de f en a, la fonction $\overline{f}$, définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$, et telle que
$$\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ \overline{f}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \overline{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Par exemple,
$$\begin{array}{rcl} & f & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\sin(1/x) \end{array}$$

Cette fonction peut être prolongée par continuité en 0 :
$$\begin{array}{rcl} & \overline{f} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \overline{f}(x) = x\sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & \overline{f}(0) = 0 \end{array}$$

Des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3, on déduit que la somme, le produit, la composée de deux fonctions continues sont continues.

Théorème 3.8.3 *Soient f et g deux fonctions. Soit a un réel.*

1. *Si f et g sont continues en a, alors $f+g$ et fg sont continues en a.*
2. *Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Ce théorème permet de démontrer la continuité de toutes les fonctions que vous aurez à examiner, à condition d'admettre la continuité des "briques de base" que sont les fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles sont continues en tout point où elles sont définies
Ceci concerne les fonctions puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, mais exclut bien sûr la partie entière et la partie décimale.

A titre d'exemple, nous allons le démontrer pour la fonction $x \mapsto 1/x$.

Proposition 3.8.4 *La fonction f qui à x associe $1/x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

Démonstration : Soit a un réel non nul. Soit $\varepsilon > 0$. Notons

$$\eta = \min\{\varepsilon a^2/2, |a|/2\}$$

Si $|x-a| \leq \eta$, alors $|x| \geq |a|/2$. Donc :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a|\,|x|} \leq \frac{|x-a|}{a^2/2}$$

Donc, $|x-a| \leq \eta$ entraîne $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. □

Les fonctions constantes, ainsi que la fonction identité $x \mapsto x$ sont évidemment continues en tout point de $\mathbb{R}$. Du théorème 3.8.3, on déduit qu'il en est de même pour les fonctions polynômes. En utilisant la proposition 3.8.4, on obtient que toute *fraction rationnelle* (quotient de deux fonctions polynômes) est continue en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.

3.9 Continuité sur un intervalle

Définition 3.9.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On dit que f est* continue sur *I si f est continue en tout point de I.*

Cette définition comporte une petite ambiguïté pour les intervalles qui ne sont pas ouverts. Nous conviendrons qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est continue en tout point de $]a,b[$ et que de plus, elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Le résultat important de cette section est le *théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème 3.9.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Soit*

$$m = \inf\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\} \quad et \quad M = \sup\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\}$$

Si $m < M$, alors, pour tout réel y tel que $m < y < M$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = y$.

La figure 3.3 illustre le théorème des valeurs intermédiaires. Le résultat est tout à fait intuitif : si une fonction continue prend deux valeurs distinctes sur un intervalle, elle prend nécessairement toutes les valeurs entre ces deux-là : le graphe d'une fonction continue n'a pas de saut vertical.

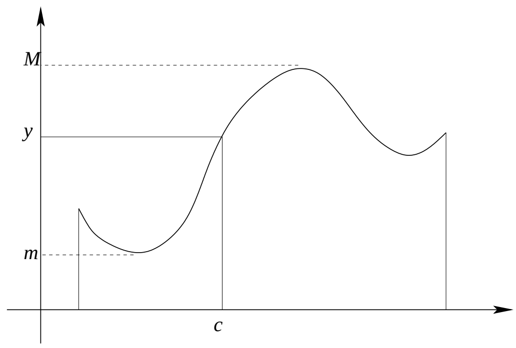

FIG. 3.3 – Théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration : Par définition de la borne inférieure, et de la borne supérieure, il existe $x_0, x_1 \in I$ tels que

$$m \leq f(x_0) < y < f(x_1) \leq M$$

Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x_0 < x_1$. Soit A l'ensemble des $x \in [x_0, x_1]$ tels que $f(x) \leq y$. L'ensemble A est non vide (il contient x_0), et majoré par x_1. Donc il admet une borne supérieure finie. Soit c cette borne supérieure.

$$c = \sup\{\, x \in [x_0, x_1]\,,\, f(x) \leq y\,\}$$

Nous allons démontrer que $f(c) = y$, en utilisant la continuité de f. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en c, il existe η tel que $|x - c| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. Or par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $|x - c| \leq \eta$. Fixons un tel x. Puisque $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$ et $f(x) \leq y$, alors nécessairement $f(c) \leq y + \varepsilon$.

Par définition de la borne supérieure, c est le plus petit des majorants de A. Fixons maintenant x tel que $c < x < c + \eta$. Alors $x \notin A$, donc $f(x) > y$, et $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. On en déduit que $f(c) \geq y - \varepsilon$.

Nous avons donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$y - \varepsilon \leq f(c) \leq y + \varepsilon\ ,$$

ce qui entraîne $f(c) = y$. $\square$

Les deux résultats suivants sont des formulations équivalentes du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 3.9.3

- *Si une fonction continue sur un intervalle prend des valeurs positives et des valeurs négatives, alors elle s'annule sur cet intervalle.*
- *L'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.*

Il est naturel de se demander si l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle du même type (infini, ouvert...). Le seul résultat général concerne les intervalles fermés bornés.

Théorème 3.9.4 *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit*

$$m = \inf\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\} \quad et \quad M = \sup\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\}$$

Alors m et M sont finies et il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$:

$$f([a, b]) = [m, M]\ .$$

Démonstration : elle utilise le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, qui affirme que de toute suite (x_n), à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite convergente. Nous traitons la borne supérieure M, la démonstration est analogue pour m. Supposons $M = +\infty$. Pour tout n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Donc la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite convergente. Soit c la limite de cette sous-suite. Par la continuité de f, les images des termes de la sous-suite convergent vers $f(c)$, ce qui contredit le fait que $f(x_n)$ tend vers $+\infty$. Donc M est finie.

Puisque la borne supérieure est finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers M. De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite, convergeant vers $c \in [a, b]$. En utilisant à nouveau la continuité, on en déduit que $f(c) = M$. $\square$

En général les bornes m et M sont différentes des valeurs de f en a et b. Le cas des fonctions monotones est particulier. Vous avez sans doute déjà rencontré le résultat qui suit sous le nom de *théorème de la bijection*.

Théorème 3.9.5 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I.*

1. *$f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I*
2. *f est une bijection de I vers $f(I)$*

3. la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone, de même sens que f.

Démonstration : Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que f est strictement croissante. Ceci entraîne que f est injective. Supposons que I soit l'intervalle ouvert $]a, b[$, a et b étant éventuellement infinis. La démonstration s'adapte sans problème au cas où l'intervalle est fermé d'un côté ou des deux.

Observons que pour tout $x_0 \in]a, b[$

$$\lim_{x \to a+} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \to b-} f(x)$$

Posons

$$c = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{et} \quad d = \lim_{x \to b-} f(x)$$

Soit $y \in]c, d[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$. Donc $f(]a, b[) =]c, d[$, et comme f est injective, c'est une bijection de $]a, b[$ vers $]c, d[$. Pour tout $x_1, x_2 \in]a, b[$,

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

Donc la bijection réciproque f^{-1} est elle-aussi strictement croissante. Il reste à démontrer qu'elle est continue. Soit $y_0 \in]c, d[$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Soit $\varepsilon >$ tel que

$$a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$$

Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Alors $y_1 < y_0 < y_2$. Soit $\eta = \min\{y - y_1, y_2 - y\}$. Pour tout y tel que $|y - y_0| \leq \eta$, on a $y_1 \leq y \leq y_2$, donc $x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon$. D'où le résultat. □

Si f est bijective, à tout couple $(x, f(x))$ du graphe de f, correspond le couple $(f(x), x)$ du graphe de f^{-1} : les deux graphes se déduisent l'un de l'autre par la transformation $(x, y) \mapsto (y, x)$, qui est la symétrie par rapport à la première bissectrice (figure 3.4).

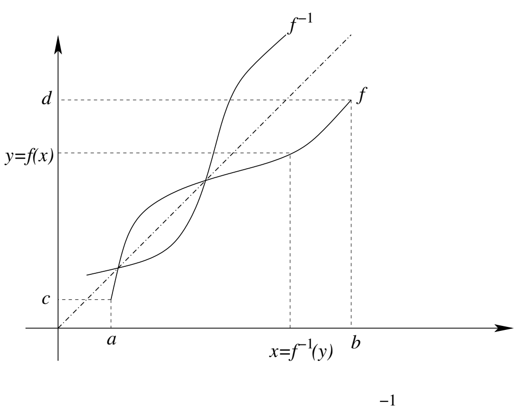

FIG. 3.4 – Graphe d'une bijection monotone et de sa réciproque.

3.10 Vrai ou faux

Vrai-Faux 3.1 Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. ☐ Si f admet une limite finie en a alors f est monotone au voisinage de a.
3. ☒ Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à droite en a.
4. ☐ Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a alors f admet une limite en a.
5. ☒ f admet l pour limite à gauche et pour limite à droite en a si et seulement si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Vrai-Faux 3.2 Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si f n'est pas bornée, alors f tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors f est monotone au voisinage de $+\infty$.
3. ☒ Si pour toute suite (x_n) convergeant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))$ converge vers 1, alors f a pour limite 1 en $+\infty$.
4. ☒ Si la suite $(f(n))$ converge vers 0 et la suite $(f(n+1/2))$ converge vers $1/2$, alors $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
5. ☐ Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.

Vrai-Faux 3.3 Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \leq \eta\,,\quad |f(x)| \leq \varepsilon$
2. ☒ $\forall \varepsilon \in]0,1[\,,\ \exists \eta \in]0,1[\,,\ 0 < |x| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \varepsilon$
3. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, \eta]\,,\quad |f(x)| \leq \varepsilon$
4. ☒ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]\,,\quad |f(x)| < \varepsilon$
5. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]\,,\quad |f(x)| < (1/n)$
6. ☐ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad |x| \leq (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leq (1/n)$
7. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad 0 < |x| \leq (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leq (1/n^2)$

Vrai-Faux 3.4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(1) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☒ f est bornée au voisinage de 0.
2. ☐ f est monotone au voisinage de 0.
3. ☐ f est minorée par 1 au voisinage de 0.
4. ☒ f est minorée par 0 au voisinage de 0.
5. ☒ f est majorée par 2 au voisinage de 0.
6. ☐ la fonction $x \mapsto f(1/x)$ est bornée au voisinage de 0.
7. ☐ la fonction $x \mapsto f(\ln(x))$ est bornée au voisinage de 0.
8. ☒ la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

Vrai-Faux 3.5 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x) = 0$
2. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(x) = 1$
3. ☒ $\lim\limits_{x\to 1} 1 - 1/f(1-x) = 0$
4. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(\cos(x)) = 0$
6. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(\mathrm{e}^{-x}) = 1$
8. ☒ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(f(\mathrm{e}^{-x})) = 0$

Vrai-Faux 3.6 Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x)$
3. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$
4. ☐ $\dfrac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$

5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(1/|x|)$
6. ☒ $\ln(|x|) = o(1/|x|)$

Vrai-Faux 3.7 Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* $+\infty$. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^3)$
3. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = o(x^2)$
4. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = o(1/x^2)$
5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(\sin(1/x^3))$
6. ☒ $\ln(x) = o(x)$
7. ☐ $\mathrm{e}^{2x} = O(\mathrm{e}^x)$

Vrai-Faux 3.8 Soit f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Toutes les affirmations suivantes concernent les propriétés de f *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors f est croissante au voisinage de 0.
2. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f^2(x)$ est équivalent à x^2.
3. ☒ Si $f(x)$ est un grand O de x, alors $f^2(x)$ est un petit o de x.
4. ☐ Si $f(x)$ est dominé par x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.
5. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.

Vrai-Faux 3.9 Soit f une application continue sur $[0,1]$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ f est bornée sur $[0,1]$.
2. ☒ $f([0,1])$ est un intervalle fermé borné.
3. ☐ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement positif, alors f est de signe constant sur $[0,1]$.
4. ☒ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement négatif, alors f s'annule sur $[0,1]$.
5. ☐ si le produit $f(0)f(1)f(1/2)$ est strictement négatif, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.
6. ☒ les produits $f(0)f(1/2)$ et $f(1/2)f(1)$ sont strictement négatifs, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.
7. ☐ pour tout $y \in f([0,1])$, l'équation $f(x)=y$ a au plus une solution dans $[0,1]$.

Vrai-Faux 3.10 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Il existe une application continue et surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$.
2. ☒ Il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
3. ☒ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\varepsilon,+\varepsilon[$.
4. ☐ Il existe une application continue et bijective de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$.
5. ☒ Il existe une application continue et bijective de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$.
6. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $]-1,1[$ vers $[-1,1]$.
7. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.
8. ☒ Il existe une application continue et strictement décroissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.

3.11 Exercices

Exercice 3.1 Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants.

1. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}^*\,,\quad 0 < x \leq (1/m) \implies f(x) \geq n$$
2. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de réels strictement positifs, convergeant vers 0, la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$.
3. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to a^+} f(x-a) = +\infty$$
4. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si :
$$\lim_{x\to+\infty} 1/f(1/x) = 0$$
5. Si la limite à droite de f et de g en 0 est $+\infty$, alors il en est de même pour $f+g$ et $f*g$.

Exercice 3.2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels. Pour chacune des propriétés suivantes, que peut-on dire de f lorsqu'elle est vérifiée ?

1. $\forall\varepsilon > 0\,,\quad |x-a| \leq 1 \implies |f(x)-l| \leq \varepsilon$
2. $\exists\eta > 0\,,\quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq 1$
3. $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\quad x-a \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \varepsilon$
4. $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\quad |x-a| \leq \eta \implies f(x)-l \leq \varepsilon$

5. $\exists \eta > 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \varepsilon$

Exercice 3.3 Démontrer que les applications suivantes n'ont pas de limite à droite en 0 (ni finie, ni infinie). On rappelle que si x est une réel, $\lfloor x \rfloor$ désigne sa partie entière et $D(x)$ sa partie décimale.

1. $f\ : x \mapsto \sin(1/x)$
2. $f\ : x \mapsto D(1/x)$
3. $f\ : x \mapsto \tan(1/x)$
4. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(1/x)$
5. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
7. $f\ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 1/x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3.4 Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en $+\infty$ (ni finie, ni infinie).

1. $f\ : x \mapsto \sin(x)$
2. $f\ : x \mapsto \tan(x)$
3. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(x)$
4. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$
5. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3.5 Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{2x+x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}} = -1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{|x|}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}-\sqrt{|x|}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$$

Exercice 3.6 Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)(e^x+2)} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)(e^x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1} = 0$$

Exercice 3.7 Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)(1-\cos(x))}{\sin^3(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \quad ; \quad \lim_{x\to 0} (1-x^2)^{1/x} = 1$$

Exercice 3.8 Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^4 \ln^2(x) e^{-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\ln(x)+\cos(x))}{x^2+\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{x}}}{x^3\ln^3(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\ln(\ln(x))}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x \quad ; \quad \lim_{x\to 0+} (\ln(x))^x$$

Exercice 3.9 Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = 4 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}-1)\ln(\ln(x)) = 0$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to\pi/2} (1-\sin(x))\tan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4} = \sqrt{2}$$

Exercice 3.10 Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0 Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* 0.

1. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f = o(x)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(x)$ alors $f(x) = o(\sqrt{x})$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 3.11 Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* $+\infty$.

1. Si $f(x) = O(x)$ alors $f(x) = o(x^2)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(\sqrt{x})$ alors $f(x) = o(x)$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(\sqrt{x})$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 3.12 Justifier les équivalents suivants, au voisinage de 0

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x} \sim 2x \quad ; \quad \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - x} \sim \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 2x^3 \sin(1/x) \sim x^2 \quad ; \quad \frac{x + x^2 \sin(1/x)}{x^2 - x^3 \cos(1/x)} \sim \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \sim 2\sqrt{x} \quad ; \quad \frac{\ln^2(1+x)}{\ln(1-x)} \sim -x$$

Exercice 3.13 Justifier les équivalents suivants, au voisinage de $+\infty$

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x} \sim x \quad ; \quad \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - x^4} \sim -\frac{1}{x}$$

$$\lfloor x \rfloor \sim x \quad ; \quad \frac{x^2 + \cos(x)}{x + \sin(x)} \sim x$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2}{\mathrm{e}^x - 1} \sim \mathrm{e}^x \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1} \sim 2\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 3.14 Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $D(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie décimale. Pour chacune des fonctions f suivantes : dire en quels points de $\mathbb{R}$ elle est continue, continue à gauche ou continue à droite, et le démontrer.

1. $f \ : x \mapsto D(x)$
2. $f \ : x \mapsto D(1-x)$
3. $f \ : x \mapsto D(1/x)$
4. $f \ : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$
5. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + 2D(x)$
6. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{D(x)}$
7. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + D(x)^2$
8. $f \ : x \mapsto \sqrt{\lfloor x \rfloor} + D(x)$
9. $f \ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}(D(x) - 1/2)$
10. $f \ : x \mapsto \lfloor \cos(1/x) \rfloor$
11. $f \ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
12. $f \ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3.15 Pour chacune des fonctions f suivantes : déterminer son domaine de définition, représenter son graphe, et montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. $f \ : x \mapsto (x^2 + x)/\sqrt{|x|}$
2. $f \ : x \mapsto x\cos(1/x)$
3. $f \ : x \mapsto (1/x^2)\mathrm{e}^{-1/x}$
4. $f \ : x \mapsto (1/(x^2-1))\mathrm{e}^{-1/(x^2-1)}$
5. $f \ : x \mapsto (x^2 - 4)\ln(|x^2 - 4|)$
6. $f \ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
7. $f \ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 1/x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3.16

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(2x) = f(x)$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad f(x) = f(2^{-n}x)$$

En déduire que f est constante.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue en 1, et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x^2) = f(x)$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad f(x) = f(x^{1/2n})$$

En déduire que f est constante.

Exercice 3.17

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. On définit g par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, croissante. On suppose que :

$$\forall y \in [f(0), f(1)]\,,\, \exists x \in [0,1]\,, \quad f(x) = y$$

Démontrer que f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 3.18 Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans I. Donner un intervalle d'approximation d'amplitude 10^{-2} pour chaque solution.

1. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^3 + 1$
2. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^5 + 1$
3. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^5 - 5x + 1$
4. $I =]-2, 0[$, $f\ : x \longmapsto 2x\sqrt{x+2} + 1$
5. $I =]-1, 0[$, $f\ : x \longmapsto x^2 - 2 + 1/\sqrt{x+1}$
6. $I =]0, 1[$, $f\ : x \longmapsto x - \cos(x)$
7. $I =]0, \pi/2[$, $f\ : x \longmapsto \tan(x) - x + 2$

8. $I = [0, +\infty[$, $f : x \longmapsto 2x\ln(x) - x + 1$

Exercice 3.19 Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer $f(I)$. Démontrer que f est une bijection de I vers $f(I)$.

1. $I = [0, +\infty[$, $f : x \longmapsto x^2$
2. $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x^3$
3. $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
4. $I = [0, \pi/2[$, $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos(x)}$
5. $I = [0, \pi/2[$, $f : x \longmapsto \tan(x) - x$

3.12 Compléments

Cauchy et les limites

Le texte suivant est extrait du cours d'*Analyse algébrique* écrit en 1821 pour les élèves de l'Ecole Polytechnique par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Saurez-vous y reconnaître les notions de ce chapitre ?

"On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment, de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative ; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

[...]

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α.

En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière une *solution de continuité*."

Continuité uniforme

Le texte de Cauchy définit la continuité d'une fonction sur un intervalle ("entre deux limites"). Il confond en fait deux notions, qui ne seront distinguées que beaucoup plus tard, en particulier par Eduard Heine (1821-1881) en 1872. Soit f une fonction, définie sur un intervalle I. Ecrivons d'abord que f est continue sur I, au sens de la définition 3.9.1.

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall y \in I\,,\quad |y-x| \leq \eta \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon \tag{3.12.2}$$

Définition 3.12.1 *On dit que f est* uniformément continue *sur I si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in I\,,\ \forall y \in I\,,\quad |y-x| \leq \eta \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon \tag{3.12.3}$$

Evidemment, (3.12.3) implique (3.12.2), mais la réciproque est fausse en général. La différence entre (3.12.2) et (3.12.3) est subtile. Dans (3.12.2) la valeur de η peut dépendre non seulement de ε mais aussi de x, dans (3.12.3), elle ne peut dépendre que de ε : pour un ε donné, on peut choisir le même η pour tous les points de l'intervalle.

Examinons la fonction inverse sur $I =]0,1]$ (cf. proposition 3.8.4).

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 1/x \end{array}$$

Soit x un point de $]0,1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. L'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]) = \left[\frac{1}{f(x)+\varepsilon}, \frac{1}{f(x)-\varepsilon}\right]$$

Cet intervalle contient x, et

$$x - \frac{1}{f(x)+\varepsilon} < \frac{1}{f(x)-\varepsilon} - x$$

Posons

$$\eta_x = x - \frac{1}{f(x)+\varepsilon} = x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\varepsilon} = \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}$$

Alors, pour tout y dans l'intervalle $[x-\eta_x, x+\eta_x]$, $f(y)$ reste dans l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$. De plus, η_x est le plus grand réel possédant cette propriété. Observons que pour $\varepsilon > 0$ fixé, η_x tend vers 0 quand x tend vers 0.

Bien sûr, pour n'importe quel $\eta' < \eta_x$, l'implication

$$|y-x| \leq \eta' \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

reste vraie. Mais il n'est pas possible de choisir un même η' tel qu'elle reste vraie pour tous les x de $]0,1]$: la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Examinons maintenant la fonction racine carrée sur le même intervalle $I =]0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Soit x un point de $]0,1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. Pour $\varepsilon < f(x)$, l'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]) = \left[x-(2\varepsilon\sqrt{x}-\varepsilon^2), x+(2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)\right]$$

Pour $\varepsilon \geq f(x)$, c'est l'intervalle

$$\left[0, (\sqrt{x}+\varepsilon)^2\right] = \left[0, x+(2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)\right]$$

L'amplitude de ces intervalles dépend bien de x a priori. Posons $\eta = \varepsilon^2$. Nous allons démontrer que pour tout $x, y \in]0,1]$, si $|y-x| < \eta$, alors $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui entraîne que f est uniformément continue sur I. Supposons d'abord $\varepsilon < f(x)$. Alors $2\varepsilon\sqrt{x}-\varepsilon^2 > \varepsilon^2 = \eta$. Donc l'intervalle $f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon])$ contient l'intervalle $[x-\eta, x+\eta]$: si y vérifie $|y-x| < \eta$, alors $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$. Supposons maintenant $\varepsilon \geq f(x)$. Si $y \leq x$, alors $|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon$. Si $x < y \leq x+\eta$, alors $0 \leq y \leq x+(2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)$, donc $|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \varepsilon$.

Le résultat suivant, que l'on appelle traditionnellement *théorème de Heine*, a semble-t-il été démontré pour la première fois par Dirichlet en 1862. Comme pour beaucoup de théorèmes importants, son histoire est compliquée, au point qu'il a été proposé de l'appeler "théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue", par ordre d'entrée en scène des mathématiciens qui l'ont raffiné ou généralisé.

Théorème 3.12.2 *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, tout comme la fonction $x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $[10^{-3}, 1]$.

Démonstration : Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit ε un réel strictement positif. D'après (3.12.2), pour tout $x \in [a,b]$, il existe un réel strictement positif, que nous noterons η_x, tel que pour tout $y \in [a,b]$,

$$|y - x| \leq \eta_x \implies |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout x, considérons l'intervalle ouvert $]x - \eta_x, x + \eta_x[$, noté I_x. Le point crucial de la démonstration est qu'il est possible d'extraire de cette famille d'intervalles une famille finie, qui recouvre l'intervalle $[a,b]$:

$$\exists m \in \mathbb{N}\,,\ \exists x_1, \ldots, x_m \in [a,b]\ , \quad [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i} \tag{3.12.4}$$

Ceci est un cas particulier d'un résultat de topologie plus général, le lemme de Borel-Lebesgue. Pour le démontrer, la première étape consiste à montrer que pour un certain entier n, tout intervalle de la forme $]y - 1/n, y + 1/n[$ est inclus dans l'un des I_x au moins.

$$\exists n \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in [a,b]\,,\ \exists x \in [a,b]\ , \quad]y - 1/n, y + 1/n[\subset I_x \tag{3.12.5}$$

Ecrivons la négation :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists y \in [a,b]\,,\ \forall x \in [a,b]\ , \quad]y - 1/n, y + 1/n[\not\subset I_x$$

Pour tout n, soit y_n l'un des y dont l'existence est affirmée ci-dessus. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite $(y_{\phi(k)})$, qui converge vers $c \in [a,b]$. En particulier, aucun des intervalles $]y_{\phi(k)} - 1/\phi(k), y_{\phi(k)} + 1/\phi(k)[$ n'est inclus dans I_c, ce qui est impossible si c est la limite de $(y_{\phi(k)})$.

En utilisant (3.12.5), nous allons démontrer (3.12.4) par l'absurde. Soit y_1 un point de $[a,b]$. Il existe x_1 tel que $]y_1 - 1/n, y_1 + 1/n[\subset I_{x_1}$. Comme I_{x_1} ne recouvre pas $[a,b]$, il existe un point y_2 de $[a,b]$ qui n'appartient pas à I_{x_1}. Ce point est à distance au moins $1/n$ de y_1. Il existe un point x_2 tel que $]y_2 - 1/n, y_2 + 1/n[\subset I_{x_2}$. La réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$ ne recouvre pas $[a,b]$. Donc il existe y_3 en dehors de cette réunion : y_3 est à distance au moins $1/n$ de y_1 et de y_2. Par récurrence, on construit ainsi une suite (y_k) de points de $[a,b]$ telle que deux quelconques de ses éléments sont à distance au moins $1/n$. En appliquant une fois de plus le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite de (y_k) devrait converger, d'où la contradiction.

Puisque les intervalles ouverts $I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}$ recouvrent $[a,b]$, il existe η tel que si $|x - y| \leq \eta$, alors x et y appartiennent à un même intervalle I_{x_i}. Si c'est le cas,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

par définition de I_{x_i}. $\square$

Arguments de continuité

Définition 3.12.3 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est* dense *dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.*

Une partie dense peut aussi être vue comme un ensemble de réels tel que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de cet ensemble.

Proposition 3.12.4 *Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.*

La démonstration est facile et laissée au lecteur.

Le théorème suivant semble trop simple pour être utile, et pourtant...

Théorème 3.12.5 *Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Si deux fonctions continues sont égales sur A alors elles sont égales partout.*

$$\Big(\forall a \in A\,,\ f(a) = g(a)\Big) \implies \Big(\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = g(x)\Big)$$

Démonstration : Soit x un réel et (a_n) une suite d'éléments de A, convergeant vers x. Comme f et g sont continues, les suites $(f(a_n))$ et $(g(a_n))$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$. Mais comme les deux suites sont égales, leurs limites sont égales. $\square$

Appliquer le théorème 3.12.5 se dit "utiliser un argument de continuité". Le plus souvent, la partie dense est l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. On peut aussi rencontrer l'ensemble des nombres décimaux (multiples entiers d'une puissance négative de 10), et l'ensemble des nombres dyadiques (multiples entiers d'une puissance négative de 2).

Les quatre exemples de la proposition 3.12.6 proviennent du cours d'Analyse de Cauchy, chapitre V, paragraphe 1 : "Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que deux semblables fonctions de quantités variables, étant ajoutées ou multipliées entre elles, donnent pour somme ou pour produit une fonction semblable de la somme ou du produit de ces variables" (comment ça pas très clair ? Un peu de respect pour Cauchy tout de même !)

Proposition 3.12.6

1. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   Alors, en notant $a = f(1)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = ax$$

2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

   Alors, en notant $a = f(1)$, $a \geq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = a^x$$

3. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) = 1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ , \quad f(x) = \ln(x)/\ln(a)$$

4. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}\ , \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Alors, soit f est constamment nulle, soit $f(1) > 0$, et en notant $a = \ln(f(1))$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ , \quad f(x) = x^a$$

Démonstration : Nous détaillons la démonstration du premier point. Celle des autres points se fait sur le même modèle et sera laissée au lecteur.

Supposons que f vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit x un réel quelconque. Commençons par montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = nf(x)$$

La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour n. Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

La propriété est vraie pour $n + 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient p et q sont deux entiers. Appliquée à $x = 1/q$, la propriété ci-dessus donne $f(p/q) = pf(1/q)$, et aussi $f(1) = qf(1/q)$. Donc

$$f(p/q) = f(1)(p/q)$$

En posant $a = f(1)$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto ax$ sur tous les rationnels positifs. La relation $f(x + 0) = f(x) + f(0)$ montre que $f(0) = 0$. En écrivant $f(0) = f(x) + f(-x)$, on obtient que $f(-x) = -f(x)$. La fonction f coïncide donc avec $x \mapsto ax$ sur tous les rationnels, donc sur tous les réels, par un argument de continuité. □

Discontinuités des fonctions monotones

Le théorème 3.5.1 montre que si une fonction est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle, elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point. Soit f une fonction croissante sur l'intervalle I. Pour tout $a \in I$, on a :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

La fonction f est continue en a si et seulement si les trois valeurs coïncident. Une fonction croissante peut très bien ne pas être continue partout. Par exemple, la fonction partie entière est croissante, et discontinue en tout point entier (figure 3.2). Cependant, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.

Théorème 3.12.7 *Si une fonction est monotone sur un intervalle, l'ensemble des points où elle n'est pas continue est fini ou dénombrable.*

Démonstration : Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que f est croissante. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Supposons que f ne soit continue ni en a, ni en b. Alors :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x) < \lim_{x \to b^+} f(x)$$

Les intervalles ouverts

$$\left] \lim_{x \to a^-} f(x) \,,\, \lim_{x \to a^+} f(x) \right[\quad \text{et} \quad \left] \lim_{x \to a^-} f(x) \,,\, \lim_{x \to a^+} f(x) \right[$$

sont disjoints et non vides. Chacun d'eux contient au moins un rationnel. On peut donc construire une application injective, associant à tout point de discontinuité de f, un rationnel. Comme l'ensemble des rationnels est dénombrable, le résultat s'ensuit. $\square$

Pourquoi définir la continuité ?

Les notions de limites, de continuité, de droite réelle même, n'ont eu de définition rigoureuse que longtemps après avoir été introduites et appliquées. Dans la deuxième moitié du 19ème siècle, les mathématiciens ont commencé à refuser de se satisfaire de ce qui, jusqu'alors, apparaissait comme des évidences de nature géométrique. Voici ce qu'en dit Julius Dedekind (1831-1877) dans la préface de son ouvrage *Continuité et nombres rationnels* en 1872.

"Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. A propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une limite fixe, et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale."

Chapitre 4

Fonctions dérivables

4.1 Taux d'accroissement et dérivée

On considère une fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I.

Définition 4.1.1 *On appelle* taux d'accroissement *de f en a, la fonction τ_a suivante.*

$$\begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \stackrel{\tau_a}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

Si $x \in I \setminus \{a\}$, la valeur de $\tau_a(x)$ est le rapport de l'accroissement de la fonction, $f(x) - f(a)$, à l'accroissement de la variable $x - a$. Sur le graphe de la fonction, c'est la *pente* de la droite passant par les points du graphe $(a, f(a)$ et $(x, f(x))$. Cette droite s'appelle une *sécante*. Si I est un intervalle de temps et $f(x)$ désigne la position d'un point mobile au temps x, $\tau_a(x)$ est la *vitesse moyenne* du mobile sur l'intervalle $[a, x]$ (distance parcourue divisée par le temps de parcours).

Définition 4.1.2 *On dit que f est* dérivable *en a si le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ converge, quand x tend vers a. Si c'est le cas, sa limite est la* dérivée de f en a *et se note $f'(a)$.*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La dérivée *de f est la fonction f', qui à un point associe la dérivée de f en ce point, si elle existe.*

Géométriquement, la valeur de la dérivée en a est la *pente de la tangente* en a à la courbe d'équation $y = f(x)$ (figure 4.1). Si $f(x)$ est la position d'un mobile à l'instant x, $f'(a)$ est sa *vitesse instantanée* à l'instant a. Voici deux cas particuliers.

- Si f est constante, ses taux d'accroissements sont nuls, et donc ses dérivées en tous points sont nulles.

$$\forall x \in I \,,\; f(x) = \lambda \implies \forall x \in I \,,\; f'(x) = 0$$

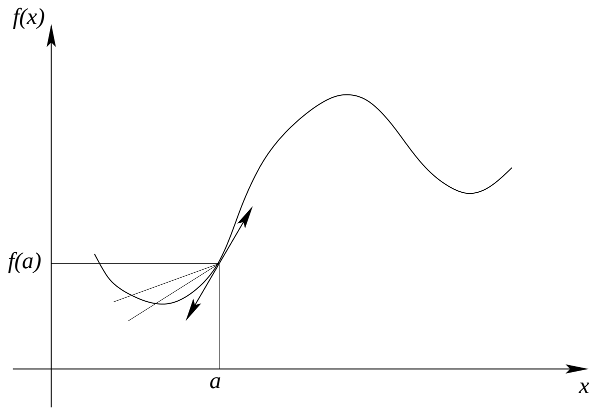

FIG. 4.1 – Sécantes et tangente en a à la courbe d'équation $y = f(x)$.

- Si f est linéaire, ses taux d'accroissements sont constants, et donc ses dérivées en tout point sont constantes.

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) = \lambda x \implies \forall x \in I\ ,\ f'(x) = \lambda$$

Il est souvent commode de se ramener à des limites en 0, en écrivant :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Voici une écriture équivalente.

Proposition 4.1.3 *La fonction f admet $f'(a)$ comme dérivée en a si et seulement si, au voisinage de 0 pour h :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Démonstration : Le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet $f'(a)$ pour limite en a si et seulement si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

Par définition, ceci équivaut à dire que $f(a+h) - f(a) - hf'(a)$ est négligeable devant h, au voisinage de 0 :

$$f(a+h) - f(a) - hf'(a) = o(h)$$

□

Définition 4.1.4 *On dit que la fonction f admet un* développement limité d'ordre 1 *en a si :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Dire que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, c'est donner une approximation : on affirme par là que, si h est petit, $f(a+h)$ peut être approché par la valeur de f en a, $f(a)$, plus un terme linéaire $hf'(a)$. La différence entre $f(a+h)$ et cette approximation est négligeable devant h.

Si f est dérivable en a, elle est nécessairement continue en ce point.

Proposition 4.1.5 *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration : Ecrivons le développement limité d'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

On en déduit

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)\ ,$$

ce qui équivaut à :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

□

Voici un premier exemple.

Proposition 4.1.6 *Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier fixé. La fonction $f\ : x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point a où elle est définie, et :*

$$f'(a) = na^{n-1}$$

Démonstration : Si $n = 0$ la fonction est constante et sa dérivée est nulle. Supposons $n > 0$. Ecrivons le taux d'accroissement de f en a. Pour $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i\, a^{n-1-i}$$

La somme contient n termes, dont chacun tend vers a^{n-1} quand x tend vers a.

Considérons maintenant la fonction $g\ : x \mapsto x^{-n}$, définie pour $x \neq 0$. Son taux d'accroissement s'écrit :

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{(\frac{1}{x})^n - (\frac{1}{a})^n}{x-a} = \frac{(\frac{1}{x})^n - (\frac{1}{a})^n}{ax(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})} = -\frac{1}{ax}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^i\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1-i}$$

La somme contient n termes, dont chacun tend vers $(1/a)^{n-1}$ quand x tend vers a. Le taux d'accroissement a donc pour limite

$$g'(a) = -n\, a^{-n+1-2} = -n\, a^{-n-1}\ .$$

□

Prenons par exemple $n = 3$ et $a = 1$. On obtient :

$$(1+h)^3 = 1 + 3h + o(h)$$

L'expression exacte est

$$(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$$

Si h est petit (pensez $h = 10^{-3}$), la valeur approchée $1 + 3h$ est effectivement très proche de la valeur exacte $(1+h)^3$.

Il peut se faire que le taux d'accroissement admette seulement une limite unilatérale en a, auquel cas on parle de *dérivée à gauche* ou de *dérivée à droite.*

Définition 4.1.7 *On dit que f est* dérivable à gauche *(respectivement : dérivable à droite) en a si le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet une limite à gauche (respectivement : à droite) en a. Si c'est le cas, sa limite est la* dérivée à gauche de f en a *(respectivement : dérivée à droite de f en a).*

Considérons par exemple la fonction valeur absolue $f\ : x \mapsto |x|$. Son taux d'accroissement en 0 est :

$$\tau_0(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ \ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, mais elle admet une dérivée à gauche égale à -1, et une dérivée à droite égale à 1.

Il se peut aussi que la fonction ne soit définie que sur un intervalle dont a est une borne, auquel cas, on ne peut espérer qu'une dérivée unilatérale. Considérons la fonction suivante.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} \end{array}$$

Son taux d'accroissement en 0 est défini, pour $x \in]0,1]$, par

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x} = \sqrt{1-x}\ ,$$

et donc

$$\lim_{x \to 0^+} \tau_0(x) = 1\ .$$

La fonction f admet une dérivée à droite en 0, égale à 1. Considérons maintenant le taux d'accroissement en 1. Pour $x \in [0,1[$, il vaut :

$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x-1} = \frac{x}{-\sqrt{1-x}}$$

et donc :

$$\lim_{x \to 1^-} \tau_1(x) = -\infty$$

La fonction f n'admet pas de dérivée à gauche en 1. Le fait que la limite du taux d'accroissement soit $-\infty$ se traduit par une tangente verticale à la courbe représentative (figure 4.2).

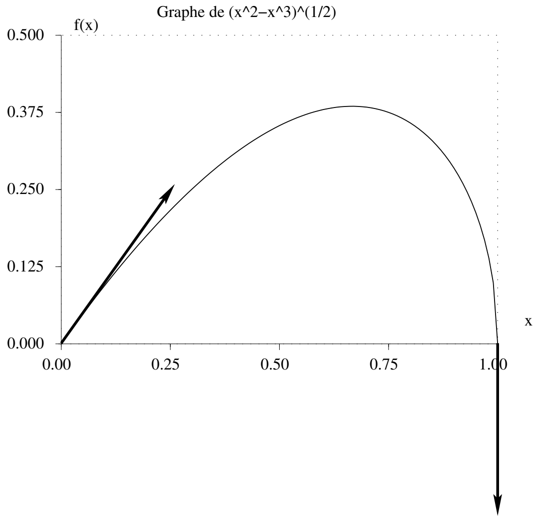

FIG. 4.2 – Courbe représentative de $x \mapsto x\sqrt{x^2 - x^3}$ sur $[0,1]$; tangentes en 0 et en 1.

4.2 Opérations sur les dérivées

Les résultats de cette section sont à connaître par cœur : ils vous permettent de calculer les dérivées de toutes les fonctions que vous rencontrerez, à partir d'un petit nombre de dérivées usuelles.

Théorème 4.2.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant a. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :*

1. *$f + g$ est dérivable en a, de dérivée $f'(a) + g'(a)$*
2. *fg est dérivable en a, de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Comme cas particulier du point 2, si λ est une constante, la dérivée de λf est $\lambda f'$.

Démonstration : Par hypothèse,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

1. Ecrivons le taux d'accroissement de la somme.
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
Comme la limite de la somme est la somme des limites, le résultat s'ensuit.
2. Ecrivons le taux d'accroissement du produit.
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
Comme g est dérivable, elle est continue en a, donc $g(x)$ tend vers $g(a)$ quand x tend vers a. La limite d'un produit est le produit des limites, idem pour la somme. D'où le résultat.

$\square$

Le théorème 4.2.1, combiné avec la proposition 4.1.6, entraîne en particulier que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, dérivable en a. Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $f(a)$, dérivable en $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a, de dérivée :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a)) \,.$$

Démonstration : Ecrivons le taux d'accroissement de $g \circ f$ en a.

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Le second quotient converge vers $f'(a)$. Montrons que le premier converge vers $g'(f(a))$. Ce premier quotient est la composée par f de la fonction qui à y associe :

$$\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$$

Ce taux d'accroissement converge vers $g'(f(a))$. Or quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est dérivable en a, donc continue. D'où le résultat par application du théorème de composition des limites. $\square$

D'après la proposition 4.1.6, appliquée à la fonction inverse $g\ : y \mapsto 1/y$, celle-ci est dérivable en tout point a où elle est définie, et $g'(y) = -1/y^2$. On déduit du théorème 4.2.2 que si f est dérivable et ne s'annule pas en a, alors son inverse $x \mapsto 1/f(x)$ est dérivable, de dérivée

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

En combinant ceci avec la formule donnant la dérivée d'un produit, on obtient la dérivée d'un quotient.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{v(a)u'(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$$

Attention à ne pas confondre l'inverse $1/f$ avec la fonction réciproque f^{-1} dans le cas où f est bijective.

Proposition 4.2.3 *Soit f une bijection d'un intervalle I ouvert I vers un intervalle ouvert J. Soit a un point de I et $b = f(a) \in J$. Si f est dérivable en a, de dérivée non nulle, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en b, et :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration : Pour tout point y de J, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Ecrivons le taux d'accroissement de f^{-1} en b : pour tout $y \in J$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

Puisque f est continue en a, f^{-1} est continue en b, et donc

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Les théorèmes de cette section permettent de démontrer la dérivabilité de toutes les fonctions que vous aurez à examiner, à condition d'admettre la dérivabilité des "briques de base" que sont les fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables en tout point d'un intervalle ouvert où elles sont définies.

Ceci concerne les fonctions polynômes, fractions rationnelles, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, mais exclut bien sûr la valeur absolue.

Voici un tableau récapitulatif des formules de dérivation à connaître par cœur.

fonction	**dérivée**
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
u/v	$(vu' - uv')/v^2$
$u \circ v$	$v'(u' \circ v)$
$1/u$	$-u'/u^2$
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1} u'$
u^{-1}	$1/(u' \circ u^{-1})$

Les dérivées suivantes doivent être connues.

fonction	**dérivée**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

La connaissance des dérivées usuelles, permet, en appliquant la définition 4.1.2, de calculer des limites de taux d'accroissement. A titre d'exemple, nous donnons ci-dessous trois limites à connaître.

Théorème 4.2.4 *Au voisinage de* 0, $\sin(x)$, $\mathrm{e}^x - 1$ *et* $\ln(1+x)$ *sont équivalents à* x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration : Les trois limites sont démontrées dans l'ordre.

1. La dérivée de la fonction sinus en 0 est $\cos(0) = 1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}$$
D'où le résultat.
2. La dérivée de la fonction exponentielle en 0 est $\mathrm{e}^0 = 1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$
D'où le résultat.
3. La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ en 0 est $1/(1-0) = 1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
D'où le résultat.

□

4.3 Dérivées successives

Etant donné un intervalle ouvert I, on dit que f est *dérivable sur* I, si elle est dérivable en tout point de I. Soit f une fonction dérivable sur I. Sa dérivée f' peut être elle-même dérivable. On appelle alors *dérivée seconde* la dérivée de f', et on la note f''. Cette fonction peut être elle-même dérivable, etc. Si f est k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ sa dérivée d'*ordre* k, ou dérivée k-ième. Par définition, la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même.

Par exemple, si n est un entier fixé, et f est la fonction $x \mapsto x^n$,

$$\forall k = 1, \ldots, n\,,\; f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall k > n\,,\; f^{(k)}(x) = 0$$

Définition 4.3.1 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On dit que* f *est* de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* I, *ou encore* f *est* k fois continûment dérivable, *si elle admet une dérivée* k*-ième* continue *sur* I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si elle admet des dérivées successives de tout ordre (elles sont nécessairement continues puisque dérivables). Vous pouvez retenir que

Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$
sur les intervalles ouverts où elles sont définies.

Ceci concerne les fonctions polynômes, fractions rationnelles, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus.

Une formule, très proche de la formule du binôme de Newton, exprime la dérivée n-ième d'un produit à d'aide des dérivées successives des composantes.

Proposition 4.3.2 *Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur un intervalle I, alors le produit fg est n fois dérivable sur I et :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}\, g^{(n-k)} \tag{4.3.1}$$

Démonstration : par récurrence sur n. Puisque par définition $f^{(0)} = f$, la formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour n. Si f et g sont dérivables $n+1$ fois sur I, alors pour tout $k = 0, \ldots, n$, le produit $f^{(k)}\, g^{(n-k)}$ est dérivable et sa dérivée est

$$(f^{(k)}\, g^{(n-k)})' = f^{(k+1)}\, g^{(n-k)} + f^{(k)}\, g^{(n-k+1)}$$

D'après (4.3.1), $(fg)^n$ est dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n+1-h)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= f^{(n+1)} + \left(\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n+1-h)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) + g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) + g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\ .
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal. Le résultat est démontré. □

A titre d'exemple, calculons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1+x)^2$. Posons $f\ : x \mapsto x^n$ et $g\ : x \mapsto (1+x)^2$. Alors :

$$f^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}\, x^2\ ,\ f^{(n-1)}(x) = n!\, x\ ,\ f^{(n)}(x) = n!$$

et

$$g'(x) = 2(1+x)\ ,\ g''(x) = 2\ , \quad \text{et} \quad \forall k \geq 3\ ,\ g^{(k)}(x) = 0$$

Par application de (4.3.1),

$$(fg)^{(n)} = n!\,(1+x)^2 + 2n\, n!\, x(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}\, n!\, x^2$$

4.4 Théorème des accroissements finis

En un point où la dérivée d'une fonction s'annule, les accroissements de la fonction sont négligeables devant les accroissements de la variable. Souvent, c'est un point où les variations de la fonction changent de sens, donc un maximum ou un minimum.

Définition 4.4.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. On dit que a est un*

- maximum local *de f si*

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq f(a)$$

- minimum local *de f si*

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq f(a)$$

Insistons sur l'adjectif *local.* Il suffit que la valeur de f en a soit la plus grande des valeurs prises par f sur un petit intervalle autour de a pour que f soit un maximum local. Cette valeur n'est pas nécessairement la plus grande prise par f sur tout son domaine de définition (voir le graphe de la figure 4.3).

Théorème 4.4.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Si f présente un extremum (maximum ou minimum) local en un point a de I, et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration : Si a est un minimum local de f, alors c'est un maximum local de $-f$: quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que a est un maximum local.

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq f(a)$$

Donc pour tout x dans l'intervalle $[a-\eta, a[$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \geq 0$$

Pour tout x dans l'intervalle $]a, a+\eta[$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \leq 0$$

D'où le résultat. □

Une fonction peut présenter un extremum en a, sans être dérivable en ce point (par exemple la fonction valeur absolue en 0). Il se peut aussi que la dérivée en un point soit nulle sans que la fonction admette un extremum en ce point : par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ en 0. Voici un autre exemple (figure 4.3). Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x^2 \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

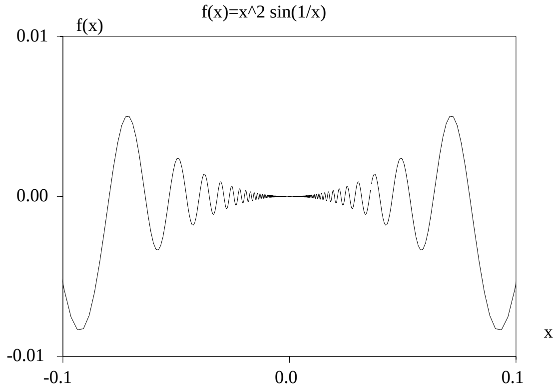

FIG. 4.3 – Graphe de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$.

Le taux d'accroissement de f en 0 est $x \sin(1/x)$, qui tend vers 0. La dérivée de f en 0 est donc nulle. Pourtant, tout intervalle contenant 0, contient aussi des valeurs positives, et des valeurs négatives (et aussi une infinité d'extrema locaux).

Nous allons appliquer le théorème 4.4.2, pour démontrer le *théorème de Rolle.*

Théorème 4.4.3 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors la dérivée de f s'annule sur $]a, b[$.*

$$\exists c \in]a, b[\ , \quad f'(c) = 0$$

Démonstration : Une application continue sur intervalle fermé borné, atteint sa borne inférieure m et sa borne supérieure M : il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$,

$$m = f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) = M$$

Si $m = M$, l'application f est constante sur $[a, b]$, et sa dérivée est identiquement nulle. Si $m < M$, alors l'une au moins de ces deux valeurs est différente de $f(a)$ (et donc de $f(b)$). Si $m < f(a)$, alors $c_1 \in]a, b[$ est un minimum pour f, et donc $f'(c_1) = 0$, d'après le théorème précédent. Si $M > f(a)$, alors c_2 est un maximum pour f, et donc $f'(c_2) = 0$. □

On en déduit le résultat le plus important de cette section, le *théorème des accroissements finis.*

Théorème 4.4.4 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

$$\exists c \in]a, b[\ , \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

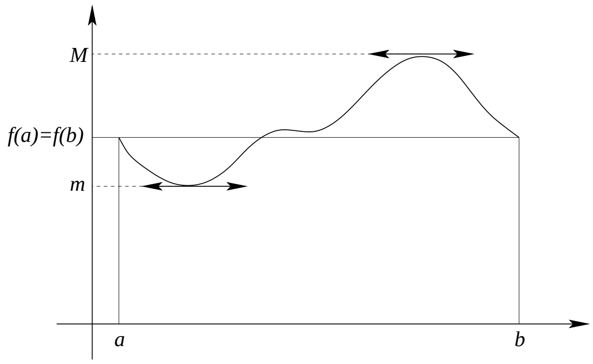

FIG. 4.4 – Théorème de Rolle.

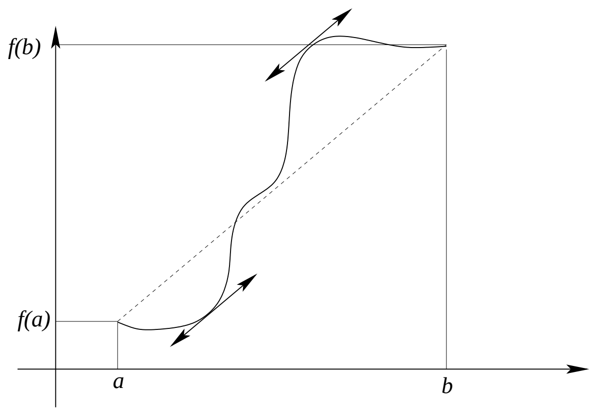

FIG. 4.5 – Théorème des accroissements finis.

Démonstration : Considérons la fonction g, qui à $x \in [a, b]$ associe

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus, elle prend la même valeur en a et b :

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

D'après le théorème de Rolle, la dérivée de g s'annule en un point c de $]a, b[$.

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

D'où le résultat. □

Graphiquement, le théorème des accroissements finis dit que la courbe représentative de f sur $[a, b]$ possède au moins une tangente parallèle à la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (figure 4.5). Si $f(x)$ représente la position d'un mobile à l'instant x, le théorème des accroissements finis dit que en au moins un point, la vitesse instantanée doit être égale à la vitesse moyenne sur l'intervalle.

Le plus souvent en pratique, on ne sait rien de la valeur de c qui est telle que la tangente en c est parallèle à la sécante. Mais de son existence découlent des inégalités permettant d'obtenir des renseignements précis sur les accroissements de la fonction. Le théorème des accroissements finis permet aussi d'établir le lien entre le sens de variation de f et le signe de sa dérivée.

Proposition 4.4.5 *Soit I un intervalle ouvert non vide, et f une fonction dérivable sur I.*
- *f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I,*
- *f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur I,*

Démonstration : La fonction f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante. Il suffit donc de démontrer le premier point. Si f est croissante, alors ses taux d'accroissement sont tous positifs ou nuls :

$$\forall x, y \in I \;, \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Comme la dérivée en chaque point est limite de taux d'accroissement, elle est aussi positive ou nulle.

Réciproquement, soient x et y deux points de I tels que $x < y$. Appliquons le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, y]$: il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$$

Donc $f(x) \leq f(y)$. □

Ce résultat n'est valable que sur un *intervalle* : la fonction $x \mapsto 1/x$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$, pourtant elle n'est pas décroissante. D'autre part, si la dérivée est strictement positive, alors la fonction est strictement croissante. La réciproque est fausse. La fonction peut être strictement croissante même si la dérivée s'annule en certains points (par exemple $x \mapsto x^3$).

Comme autre application du théorème des accroissements finis, il est possible d'obtenir la dérivée en un point comme prolongement par continuité de la dérivée calculée sur un intervalle.

Proposition 4.4.6 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet une limite finie en a, alors f est dérivable à droite en a et :*

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Démonstration : Soit $x \in]a, b]$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a, x]$. Il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

Soit l la limite à droite de f' en a Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$a < x \leq a + \eta \implies |f'(x) - l| \leq \varepsilon$$

Donc pour $a < x \leq a + \varepsilon$,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| \leq \varepsilon$$

D'où le résultat. □

Ce résultat n'est qu'une condition suffisante. Il peut se faire que la dérivée existe sans qu'elle soit continue. Par exemple la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ a une dérivée nulle en 0 (figure 4.3). Pourtant sa dérivée en x, $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, n'a pas de limite en 0.

4.5 Fonctions convexes

Définition 4.5.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est* convexe *sur I si et seulement si :*

$$\forall x, y \in I\,,\ \forall \lambda \in [0,1]\,, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda f(y) \tag{4.5.2}$$

Si $x < y$, et $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y$ est un point de l'intervalle $[x, y]$. La condition (4.5.2) dit que le point de la courbe représentative d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ doit être situé au-dessous du segment de sécante joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (figure 4.6). En d'autres termes, tout *arc* de la courbe représentative doit être situé au-dessous de sa corde. De manière équivalente, la partie du plan située au-dessus de la courbe représentative est une région *convexe*, au sens où tout segment joignant deux de ses points est entièrement contenu dans la région.

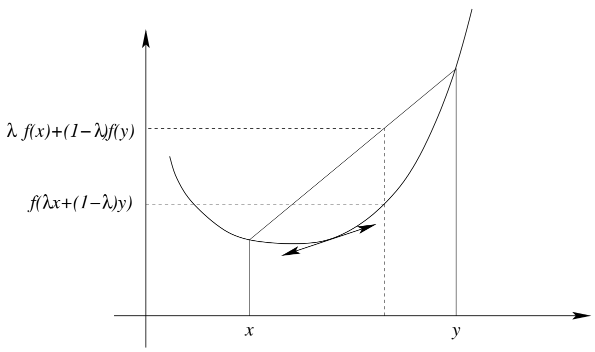

FIG. 4.6 – Courbe représentative d'une fonction convexe.

Une fonction est dite *concave* si son opposée est convexe. Les propriétés sont inversées : tout arc est au-dessus de sa corde. La région du plan située *au-dessous* de la courbe représentative est convexe.

La fonction exponentielle est convexe, la fonction logarithme est concave. La fonction $x \mapsto x^a$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ pour $a \geq 1$, elle est concave pour $0 \leq a \leq 1$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, concave sur $\mathbb{R}^-$, de même que la fonction $x \mapsto x^3$.

Voici une autre caractérisation de la convexité.

Proposition 4.5.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$ le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ est une fonction croissante de x sur $I \setminus \{a\}$.*

$$\forall x, y \in I \setminus \{a\}\,,\ x \leq y \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

Démonstration : Commmençons par la condition nécessaire. Soit $a \in I$ et $x, y \in I \setminus a$ tels que $x \leq y$. Trois cas sont possibles : $x \leq y < a$, $x < a < y$, $a < x \leq y$. Nous traitons le premier, les deux autres sont analogues. Soit $\lambda = (a-y)/(a-x)$. Alors $y = \lambda x + (1-\lambda)a$. Comme f est convexe,

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(a) = \frac{a-y}{a-x}f(x) + \left(1 - \frac{a-y}{a-x}\right)f(a)$$

On en déduit :

$$\frac{f(y)-f(a)}{a-y} \leq \frac{f(x)-f(a)}{a-x}\,,$$

soit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}\,.$$

Montrons maintenant la condition suffisante. Soient x et y deux points de I tels que $x < y$ et λ un réel dans $[0,1]$. Posons $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, et donc :

$$\lambda = \frac{y-a}{y-x} \quad \text{et} \quad (1-\lambda) = \frac{a-x}{y-x}$$

Si $\lambda = 0$ ou 1, l'inégalité est vérifiée. Nous pouvons donc supposer que a est différent de x et y. Ecrivons que le taux d'accroissement en a est croissant.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}\,.$$

En multipliant les deux membres par le produit $(a-x)(y-a)$, qui est positif, on obtient :

$$f(a)(y-x) \leq f(x)(y-a) + f(y)(a-x)$$

En divisant par $(y-x)$ ceci donne :

$$f(a) \leq \frac{y-a}{y-x}\,f(x) + \frac{a-x}{y-x}\,f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\,.$$

□

Corollaire 4.5.3 *Si une fonction f est convexe sur un intervalle* ouvert *I, alors elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I, et donc continue sur I.*

Démonstration : Si $a \in I$, le taux d'accroissement en a, $\tau_a(x)$, est une fonction croissante de x. Il admet donc en a une limite à gauche et une limite à droite finies. $\square$

Ce résultat n'est pas valable si l'intervalle n'est pas ouvert. Par exemple la fonction qui vaut 0 sur $[0, 1[$, et 1 au point 1 est convexe sur $[0, 1]$, mais elle n'est pas continue en 1. Le fait qu'une dérivée à gauche et à droite existe, n'implique pas que la fonction soit dérivable. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0. Lorsque la fonction est dérivable, sa dérivée est croissante.

Proposition 4.5.4 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si sa dérivée f' est* croissante *sur I.*

Démonstration : Commençons par la condition nécessaire. Soient x et y deux points de I, tels que $x < y$. Pour tout $z \in [x, y]$,

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

En faisant tendre z vers x, on en déduit :

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

De même, en faisant tendre z vers y,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y)$$

Donc $f'(x) \leq f'(y)$.

Montrons maintenant la condition suffisante. Soient x, y deux points de I tels que $x < y$, $\lambda \in]0, 1[$, et $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur les deux intervalles $[x, a]$ et $[a, y]$. Il existe $c_1 \in]x, a[$ et $c_2 \in]a, y[$ tels que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(c_2)$$

La fonction f' étant croissante, on a donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la démonstration de la proposition 4.5.2, ceci entraîne

$$f(a) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

$\square$

Graphiquement, la pente de la tangente d'une fonction convexe est croissante. Dans la démonstration précédente, nous avons établi les inégalités :

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y)$$

On en déduit que pour $x < y$,

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x) \quad \text{et} \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

Donc la courbe représentative de f reste *au-dessus* de ses tangentes (figure 4.6).

Corollaire 4.5.5 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est* positive ou nulle *sur I.*

Une fonction deux fois dérivable est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde est *négative ou nulle*. Les points où la dérivée seconde s'annule et change de signe correspondent graphiquement à des points où la courbe représentative passe de concave à convexe ou inversement. On les appelle des *points d'inflexion*.

4.6 Vrai ou faux

Vrai-Faux 4.1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est dérivable en a, alors le taux d'accroissement de f en a est prolongeable par continuité en a.
2. ☐ Si f est dérivable en $a \in I$ alors f est continue sur un intervalle ouvert contenant a.
3. ☒ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.
4. ☒ Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a.
5. ☐ Si f est dérivable à gauche et à droite en a, alors f est dérivable en a.
6. ☐ Si la dérivée de f en a est nulle, alors la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale.
7. ☒ Si la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale, alors f n'est pas dérivable en a.

Vrai-Faux 4.2 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La dérivée de $f + g$ est la somme des dérivées de f et de g.
2. ☐ La dérivée de fg est le produit des dérivées de f et de g.
3. ☒ Le quotient f/g est dérivable en tout point où g ne s'annule pas.
4. ☒ La fonction $x \mapsto \exp(f(x)g(x))$ est dérivable sur I.
5. ☐ La fonction $x \mapsto f(\exp(x))$ est toujours dérivable sur I.

Vrai-Faux 4.3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors f' est continue sur I.
2. ☐ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
3. ☒ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
4. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors ses dérivées successives sont toutes continues sur I.
5. ☐ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
6. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.
7. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Vrai-Faux 4.4 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si la dérivée de f s'annule en un point de I, alors ce point est un extremum local pour f.
2. ☒ Si f prend la même valeur en deux points distincts, alors la dérivée de f s'annule entre ces deux points.
3. ☐ Si f admet un maximum local, alors f admet un maximum global.
4. ☒ Si f admet un maximum local alors la dérivée de f s'annule en ce point.
5. ☒ Si la dérivée de f est positive ou nulle sur I alors f est croissante sur I
6. ☒ Si la dérivée de f est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I.
7. ☐ Si f est strictement croissante sur I alors sa dérivée est strictement positive sur I.
8. ☒ Si x et y sont deux points distincts tels que $f(y)-f(x)=y-x$, alors il existe $c \in]x,y[$ tel que $f'(c)=1$.

Vrai-Faux 4.5 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.
2. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite en tout point de I.
3. ☐ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable en tout point de I.
4. ☒ Si f est convexe et dérivable sur I, alors la dérivée de f est croissante sur I.
5. ☐ Si f et convexe et dérivable sur I, alors f est deux fois dérivable sur I.
6. ☒ Si f est deux fois dérivable sur I, et si sa dérivée seconde est positive, alors f est convexe sur I.
7. ☐ Si f est convexe, et deux fois dérivable sur I, alors sa dérivée seconde ne s'annule pas sur I.

4.7 Exercices

Exercice 4.1 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Donner une expression explicite du taux d'accroissement de f en un point a quelconque du domaine de définition.
2. Calculer la limite en a de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de f en a.

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad f(x) = x\sqrt{x}$$
$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad f(x) = x\mathrm{e}^x \quad ; \quad f(x) = \ln(x)$$
$$f(x) = \sin(x) \quad ; \quad f(x) = \cos(x) \quad ; \quad f(x) = x\sin(x)$$

Exercice 4.2 Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. Verifiez que f est prolongeable par continuité en 0.
2. L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?

$$f(x) = x|x| \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$
$$f(x) = \cos(\sqrt{x}) \quad ; \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad f(x) = \frac{x\cos(1/x)}{\ln(|x|)}$$
$$f(x) = \sqrt{x}\ln|x| \quad ; \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\ln|x|}$$

Exercice 4.3 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Soit I un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$. Démontrer que f est dérivable sur I.
3. Calculer l'expression de la dérivée de f.

$$f(x) = (x(x-2))^{1/3} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3} \quad ; \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{1/3}} \quad ; \quad f(x) = \frac{(1+\sqrt{x}^2)}{1+(x+1)^{1/3}}$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} \quad ; \quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad ; \quad f(x) = \frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$$
$$f(x) = \sqrt{1+x^2\sin^2(x)} \quad ; \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x}+1}{\mathrm{e}^{1/x}-1} \quad ; \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$$
$$f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \quad ; \quad f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)} \quad ; \quad f(x) = \ln\sin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Exercice 4.4 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, sur un intervalle $[a,b]$:

1. Démontrer que f est dérivable sur $]a,b[$.

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en a ?
3. La fonction f est-elle dérivable à gauche en b ?

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} \text{ sur } [0,1] \qquad f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-x)} \text{ sur } [-1,1]$$
$$f(x) = x^{2/3}(1-x)^{3/2} \text{ sur } [0,1] \qquad f(x) = (1-x^2)^{2/3}(1-x)^{1/3} \text{ sur } [-1,1]$$
$$f(x) = \sqrt{x\sin(x)(1-\sin(x)} \text{ sur } [0,\pi/2]$$
$$f(x) = \sqrt{(1-\cos(x))(1-\sin(x))} \text{ sur } [0,\pi/2]$$

Exercice 4.5 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée d'ordre k des fonctions suivantes.

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad ; \quad x \mapsto \ln(1-x^2)$$
$$x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x \quad ; \quad x \mapsto x^2\ln(1+x) \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n$$
$$x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{e}^x\sin(x) \quad ; \quad x \mapsto \cos^3(x)$$

Exercice 4.6

1. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
2. Déterminer les réels α, β et γ tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
3. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
$$f(x) = \begin{cases} x^2\mathrm{e}^{1-x} - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ \alpha x \mathrm{e}^{\beta x^2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 4.7 On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. On dit qu'elle est est *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 4.8 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$h(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{si} \quad x < a \\ 0 & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ f(x-b) & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$
Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement h pour $a = 1$ et $b = 2$.

Exercice 4.9 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, dérivable à gauche et à droite en tout point de $]a,b[$. On suppose que f est continue à gauche en a, à droite en b et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que le produit de la dérivée à gauche en c par la dérivée à droite en c soit négatif ou nul.

Exercice 4.10 Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$$
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.11 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1. Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction
$$x \longmapsto (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$
2. En déduire qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 4.12 Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On suppose que f' est croissante sur $]0,+\infty[$. Démontrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x)/x$ est croissante.

Exercice 4.13

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.
2. Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus trois solutions réelles.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution réelle positive.
4. Soit a un réel positif et n un entier naturel pair. Montrer que l'équation $(x+a)^n = x^n + a^n$ admet $x = 0$ pour seule solution réelle.

Exercice 4.14

1. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer le point $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

2. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma \mathrm{e}^x$$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer le point $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exercice 4.15 Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants. Comparer ce majorant avec une approximation numérique à 10^{-6} près.

$$\sqrt{100001} - 100 \quad ; \quad \frac{1}{0.998} - 1 \quad ; \quad 0.001 - \frac{1}{1003}$$
$$\sin(3.14) \quad ; \quad 1 - \cos(0.002) \quad ; \quad 1 - \sin(1.57)$$
$$\ln(1.001) \quad ; \quad \ln(2.72) - 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{0.002} - 1$$

Exercice 4.16

1. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que
$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
   Démontrer que pour tout n,
$$S_{n+1} - 1 < 2\sqrt{n+1} < S_n$$

2. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que
$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Démontrer que pour tout n,
$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n$$

Exercice 4.17

1. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction exponentielle pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1 - x)/x$ pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
2. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction logarithme pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\ln(1+x) - x)/x$ pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
3. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction cosinus pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$
(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (1 - \cos(x))/x$ pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
(c) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x$ pour démontrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$$

(d) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x^2$ pour démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Exercice 4.18 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 4.19 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ et $f''(x) \geq 0$. Montrer que, soit f est constante, soit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Exercice 4.20 Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, dérivable en un point $c \in I$, et telle que $f'(c) = 0$. Montrer que c est un minimum global pour f sur I :

$$\forall x \in I \ , \quad f(c) \leq f(x)$$

Exercice 4.21 Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est constante.

Exercice 4.22

1. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1^2}$$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 4.23 Soient p et q deux réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i^p = 1$$

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1$$

3. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

4. Soit $p > 1$. Démontrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$$

(On posera $q = p/(p-1)$ et $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$).

4.8 Compléments

Newton et Leibniz

Les problèmes de quadrature (intégration) et de tangente (dérivation) ont passionné de nombreux mathématiciens depuis Archimède. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac Newton (1643-1727) et Gottfried Wilhem von Leibniz (1646-1716). Ils sont maintenant considérés comme co-inventeurs du calcul différentiel.

Pourtant la controverse a longtemps fait rage, du vivant de Newton et Leibniz, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Les autres prouvaient sans conteste l'antériorité des publications de Leibniz et la supériorité de son système de notation. Il semble bien que Newton avait effectivement développé ses idées avant Leibniz, mais que, même si ce dernier a eu accès à des manuscrits de Newton, il a travaillé de façon indépendante. La controverse, qui paraît de nos jours plutôt futile, eut pour conséquence de couper pendant longtemps les mathématiciens anglais du reste de l'Europe : ce n'est qu'au début du 19ème siècle que les notations de Leibniz furent acceptées en Angleterre.

Voici comment, dans *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton exprime sa vision des dérivées.

> Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.

La vision de Newton est très proche de notre définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. C'est d'autant plus remarquable que la notion de limite ne sera définie rigoureusement, que presque deux siècles après les premières découvertes de Newton. L'intuition de Newton est puissante, mais lui-même sent bien qu'il n'a pas défini ses quantités infinitésimales de manière suffisamment rigoureuse. D'ailleurs elles resteront longtemps pour beaucoup un “fantôme de quantités disparues”. Peut-être est-ce une des raisons pour lesquelles Newton, dont les premiers travaux sur le sujet datent de 1664, n'achèvera son ouvrage “la méthode des fluxions et des suites infinies” qu'en 1671, et ne le publiera pas de son vivant... contrairement à Leibniz.

Par un clin d'œil de l'histoire, les noms de Newton et Leibniz sont restés attachés à deux formules extrêmement proches.

formule de Newton	formule de Leibniz
$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k\, g^{n-k}$	$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$

Cette plaie lamentable

Dans une lettre a Thomas Stieltjes datant de 1893, Charles Hermite écrivait “Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée”.

Jusqu'au 19ème siècle, tout le monde pensait que toute courbe continue devait admettre des tangentes, sauf peut-être en quelques points isolés, comme la fonction valeur absolue. Dans un mémoire de 1806, Ampère avait même tenté de le démontrer. Aussi beaucoup furent-ils choqués quand Weierstrass donna un exemple de fonction continue, mais dérivable en aucun point. La fonction de Weierstrass s'exprime sous forme de série trigonométrique.

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Pour $|a| < 1$, la série est absolument convergente, et les théorèmes généraux sur les séries de fonctions entraînent que W est continue. Si b est assez grand, on démontre que

W n'est dérivable en aucun point. On admet facilement que la courbe de la figure 4.7 n'a pas de tangente. Un an après Weierstrass, Darboux proposa une fonction analogue :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x)$$

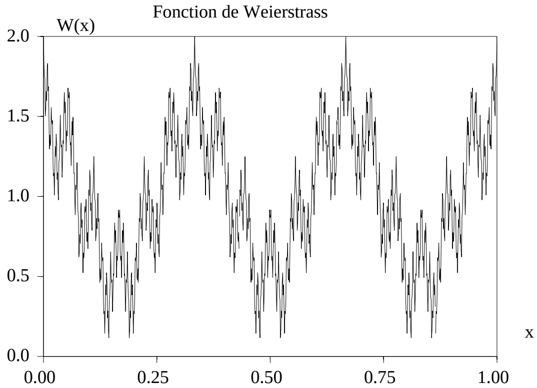

FIG. 4.7 – Fonction de Weierstrass, pour $a = 0.5$ et $b = 6$.

Une autre manière de construire des fonctions continues nulle part dérivables, consiste à ajouter à une fonction affine, des dents de scie de plus en plus fines. Le premier exemple est dû à Bolzano en 1830, mais comme beaucoup des travaux de Bolzano, il ne fut pas publié, et resta longtemps ignoré. L'exemple de la figure 4.8 fait partie de cette famille de fonctions. On l'obtient en itérant une transformation consistant à remplacer chaque segment de droite par trois autres segments.

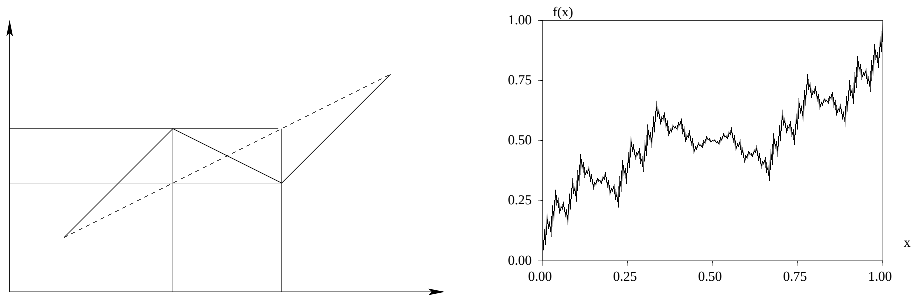

FIG. 4.8 – Fonction continue nulle part dérivable .

Sans doute Poincaré pensait-il à ces exemples quand il disait, en 1899 : "Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela." Sur la dernière partie de sa phrase, il se trompait lourdement...

L'agitation désordonnée de particules dans un fluide avait été observée par le biologiste anglais Brown au début du 19ème siècle, mais il fallut assez longtemps pour que les physiciens établissent le rapport entre le mouvement des particules et la diffusion de la chaleur. Dans un de ses articles de 1905, Abert Einstein proposa une modélisation cinétique de ce mouvement, dont découlait l'équation de la chaleur, établie par Fourier en 1808. Le travail, poursuivi par Perrin en 1909, conduisit à une étude théorique du mouvement brownien, comme objet mathématique, par Wiener en 1923. Dès ses premiers mots sur le mouvement brownien, Wiener cite un article de Perrin, qui évoque les courbes sans tangente des mathématiciens. Et de fait, Wiener bâtit un modèle dans lequel les trajectoires sont continues, avec une vitesse infinie en tout point.

Quel est ce modèle ? Pour s'en faire une idée, le plus simple est de partir du jeu de pile ou face. Si la pièce est équilibrée, le joueur a une chance sur deux de gagner un euro, et une chance sur deux de perdre un euro. Le gain ou la perte au fil des parties est la somme cumulée des gains ou pertes de chaque partie. Partant d'une fortune nulle, la fortune X_n du joueur à la n-ième partie est aléatoire. La figure 4.9 représente 3 trajectoires de X_n en fonction de n, sur 1000 parties jouées. Ces courbes donnent une bonne idée de ce que sont les trajectoires du mouvement brownien. Pour le définir, on accélère l'échelle de temps d'un facteur N, et on raccourcit l'échelle des fortunes d'un facteur $\sqrt{N}$. On peut définir le mouvement brownien à l'instant t comme la limite suivante.

$$B(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} X_{\lfloor Nt \rfloor}$$

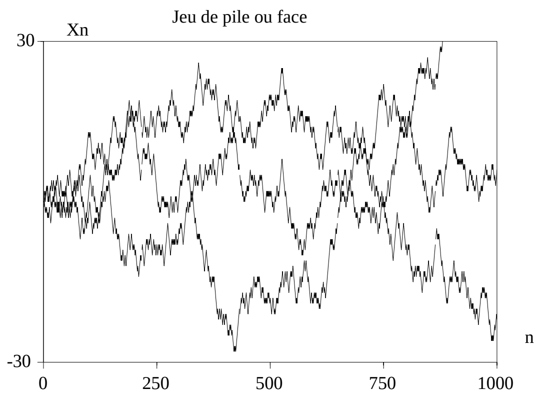

FIG. 4.9 – Jeu de pile ou face équitable : évolutions sur 1000 parties.

En 1900, dans sa thèse (dirigée par Poincaré), Louis Bachelier utilise l'analogie des jeux de hasard et de l'agitation moléculaire pour poser les bases d'une théorie des spéculations financières. Son travail, longtemps ignoré, fait aujourd'hui figure de précurseur. Le calcul sur le mouvement brownien, dit calcul stochastique, est désormais l'outil principal des mathématiques financières. Les formules qu'on en déduit permettent de fixer le prix des options, et elles sont implémentées dans les logiciels utilisés quotidiennement sur toutes les places financières.

Une construction de l'exponentielle et du logarithme

Le logarithme népérien vous a sans doute été présenté comme la primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1, et l'exponentielle comme sa fonction réciproque. On en déduit alors les propriétés de ces deux fonctions. Nous allons voir une autre définition.

Le but de ce qui suit est de construire les fonctions exponentielle et logarithme, et d'en démontrer les principales propriétés, à partir de la propriété fondamentale de l'exponentielle, qui est de transformer les sommes en produit.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)\,. \tag{4.8.3}$$

Cette construction illustrera l'utilisation des outils de base de l'analyse : limites, continuité, dérivabilité, convexité.

Dans un premier temps, nous raisonnerons par condition nécessaire, en supposant l'existence d'une fonction f vérifiant (4.8.3), pour en déduire ses propriétés.

Proposition 4.8.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant* (4.8.3). *Alors :*

1. *Si f s'annule en un point, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si f ne s'annule pas, alors $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$f(nx) = (f(x))^n\,.$$

Démonstration : Si $f(x) = 0$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y-x)f(x) = 0\,.$$

Donc, soit f est identiquement nulle, soit elle ne s'annule jamais. Comme $f(x+0) = f(x)f(0)$, si $f(x) \neq 0$, alors $f(0) = 1$. Ensuite, $f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$, d'où le point *2*. Le point *3* se vérifie aussi facilement, par récurrence sur n. □

Proposition 4.8.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non nulle,* continue en 0, *et vérifiant* (4.8.3). *Alors f est :*

1. *strictement positive,*
2. *continue sur $\mathbb{R}$,*
3. *convexe sur $\mathbb{R}$,*
4. *dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f'(x) = f(x)f'(0)\,.$$

Démonstration : D'après la proposition 4.8.1, si f est non nulle, alors $f(0) = 1$. Comme f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, $f(x) > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque ; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y/n \in]-\eta, \eta[$. D'après le point *3* de la proposition 4.8.1, $f(y) = (f(y/n))^n > 0$.

Montrons maintenant la continuité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} f(x)f(h) = f(x) \lim_{h \to 0} f(h) = f(x) ,$$

car f est continue en 0 et $f(0) = 1$.

La démonstration de la convexité est plus difficile. Nous souhaitons montrer que pour tout $x < y$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) . \tag{4.8.4}$$

Nous allons d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n , \quad f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} . \tag{4.8.5}$$

D'après (4.8.3) et le point *3* de la proposition 4.8.1,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n , \quad f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^{1/n}$$

On pourrait en déduire (4.8.5), en utilisant... la concavité du logarithme, que nous sommes précisément en train de construire. Ce ne serait pas de jeu !

Nous allons démontrer (4.8.5) par récurrence sur n. Observons d'abord que (4.8.5) est trivialement vraie pour $n = 1$. Vérifions qu'elle est vraie pour $n = 2$. D'après (4.8.3) et puisque f est strictement positive, on a :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)} .$$

Il est facile de vérifier que si a et b sont deux réels positifs, alors $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, d'où (4.8.5) pour $n = 2$. Nous en déduisons ensuite que si (4.8.5) est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour $2n$. En effet :

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \\
&\qquad = f\left(\frac{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2}\right) \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)\right) \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} + \frac{f(x_{n+1}) + \cdots + f(x_{2n})}{n}\right) \\
&\qquad = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}) + \cdots + f(x_{2n})}{2n} .
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si (4.8.5) est vraie pour un entier $m \geq 2$, alors elle est vraie pour $m-1$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right) &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}}{m}\right) \\ &\leq \frac{1}{m}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_{m-1})+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\right) . \end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes :

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}\Big(f(x_1)+\cdots+f(x_{m-1})\Big) ,$$

d'où le résultat pour $m-1$. Maintenant, si (4.8.5) est vraie pour un entier n, elle est vraie pour $2n$, et d'après ce qui précède, aussi pour $2n-1$, $2n-2$, ..., $n+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

Soient p et q deux entiers positifs tels que $p < q$, et x, y deux réels tels que $x < y$. Appliquons (4.8.5) pour $n = q$, $x_1 = \cdots = x_p = x$, et $x_{p+1} = \cdots = x_q = y$. On obtient :

$$f\left(\frac{p}{q}x + (1-\frac{p}{q})y\right) \leq \frac{p}{q}f(x) + (1-\frac{p}{q})f(y) ,$$

soit (4.8.4) pour $\lambda = \frac{p}{q}$. Donc (4.8.4) est vraie pour tout λ *rationnel.* Mais tout réel étant limite d'une suite de rationnels, et la fonction f étant continue, (4.8.4) est aussi vraie pour tout λ *réel*, donc f est convexe.

La dérivabilité se déduit de la convexité, en utilisant la propriété (4.8.3). Commençons par montrer que f est dérivable en 0. Considérons la fonction φ, qui à $h \in \mathbb{R}^*$ associe l'accroissement :

$$\varphi(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{f(h)-1}{h} .$$

La fonction f étant convexe, ses accroissements sont croissants, donc la fonction φ admet une limite à gauche et une limite à droite en 0. La fonction f est donc dérivable à gauche et à droite en 0. Nous devons montrer que les deux dérivées sont égales. Pour cela, calculons $\varphi(-h)$, en utilisant le point *2* de la proposition 4.8.1.

$$\varphi(-h) = \frac{f(-h)-1}{-h} = \frac{\frac{1}{f(h)}-1}{-h} = \frac{1}{f(h)}\varphi(h) .$$

Or quand h tend vers 0, $\frac{1}{f(h)}$ tend vers 1, par continuité de f en 0. Donc la limite à gauche de φ en 0 est égale à sa limite à droite, ce qui entraîne que f est dérivable en 0. Pour en déduire la dérivabilité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer une fois de plus la propriété (4.8.3) :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h} = f(x)f'(0) .$$

Puisque f est strictement positive, $f'(x) = f(x)f'(0)$ est de signe constant. La fonction f est :

– strictement croissante si $f'(0) > 0$,
– constante (et égale à 1) si $f'(0) = 0$,
– strictement décroissante si $f'(0) < 0$.

□

Jusqu'ici nous n'avons raisonné que par condition nécessaire : rien ne prouve encore qu'il existe des fonctions f vérifiant les hypothèses des deux propositions précédentes.

Proposition 4.8.3 *Pour tout $a > 0$, il existe une unique fonction f, continue en 0, vérifiant* (4.8.3)*, et telle que $f(1) = a$.*

Démonstration : La fonction qui répond à la question est évidemment celle qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f_a(x) = a^x$. Encore faut-il préciser sa définition, et montrer qu'elle est la seule.

Si n est un entier positif, a^n est le produit de n facteurs égaux à a, et $a^{-n} = 1/a^n$. La fonction qui à a associe a^n est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Donc sa réciproque est aussi strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Si a est un réel positif, le réel b tel que $b^n = a$ est donc défini de façon unique, et on convient de le noter $a^{\frac{1}{n}}$, de sorte que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel, nous savons donc définir $a^x = (a^{\frac{1}{q}})^p$. Cette définition, et les propriétés des puissances entières, entraînent que la propriété (4.8.3) est vérifiée pour tout couple (x, y) de *rationnels* : $a^{x+y} = a^x a^y$.

Nous souhaitons étendre la définition de a^x à tous les réels, par continuité. Observons d'abord que nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que $a > 1$ et $x > 0$, grâce à la propriété $a^{-x} = (a^x)^{-1} = (1/a)^x$. Si x et x' sont deux rationnels tels que $0 < x < x'$, alors $a^x < a^{x'}$. Une des propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$ est que tout réel est la borne supérieure de l'ensemble des rationnels qui lui sont inférieurs. Si x est un réel *quelconque* et $a > 1$, nous pouvons donc définir a^x comme :

$$a^x = \sup\{a^y \,,\ y \in \mathbb{Q} \text{ et } y < x\} \ .$$

Il reste à vérifier que la fonction ainsi définie est bien continue, et qu'on a donc aussi :

$$a^x = \inf\{a^y \,,\ y \in \mathbb{Q} \text{ et } y > x\} \ .$$

Pour cela, commençons par montrer que si (x_n) est une suite de *rationnels positifs*, tendant vers 0, alors (a^{x_n}) converge vers 1. Fixons ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. Considérons les deux suites $((1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ et $((1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$. Si la suite (x_n) tend vers 0, la suite $(\frac{1}{x_n})$ tend vers $+\infty$. Si ρ est un réel positif, alors quand $m \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, ρ^m tend vers 0 si $\rho < 1$, vers $+\infty$ si $\rho > 1$. On en déduit que $((1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ converge vers 0, alors que $((1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ converge vers $+\infty$. Donc il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$a \in [(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}}) \,,\ (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}}],$$

soit $a^{x_n} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Si les x_n sont des rationnels *négatifs*, la conclusion est la même car $a^{x_n} = (a^{-x_n})^{-1}$. Donc la conclusion reste vraie pour une suite de rationnels x_n de signe quelconque. On en déduit donc que la fonction que nous avons définie est bien continue en 0.

Pour $a > 0$, la fonction qui à x associe a^x est donc continue en 0, elle est non nulle, et elle vérifie (4.8.3) pour tout x, y rationnels, donc pour tout x, y réels, en passant à la limite. D'après le point *2* de la proposition 4.8.2, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour l'unicité, il suffit d'observer que si une fonction f vérifie (4.8.3) et est telle que $f(1) = a > 0$, alors par la proposition 4.8.1, elle est telle que $f(x) = a^x$, pour tout x rationnel. Deux fonctions continues qui coïncident sur les rationnels, sont nécessairement égales (tout réel est limite d'une suite de rationnels). Donc $f(x) = a^x$, pour tout x *réel.* □

Pour $a > 0$, notons f_a l'unique fonction continue en 0, vérifiant (4.8.3), et telle que $f_a(1) = a$, à savoir la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe a^x.

$$\begin{array}{cccc} f_a & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \longmapsto & a^x \ . \end{array}$$

Puisque $f(1) = a > 0$, la fonction f est non nulle et on peut lui appliquer la proposition 4.8.2 : f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.8.4 *On appelle* logarithme*, et on note* ln *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$*, qui à* $a > 0$ *associe* $\ln(a) = f_a'(0)$*.*

Proposition 4.8.5

1. *Pour tout* $a, b > 0$*, on a :*
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \ .$$
2. *Pour tout* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*
$$\ln(a^x) = x \ln(a) \ .$$
3. *La fonction* ln *est strictement croissante, et :*
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \ .$$

Démonstration : Pour le premier point, soient a et b deux réels strictement positifs, et considérons la fonction f_{ab}. On a :

$$f_{ab}(x) = (ab)^x = a^x b^x = f_a(x) f_b(x) \ .$$

On calcule donc la dérivée de f_{ab} en 0, en dérivant le produit $f_a f_b$:

$$\ln(ab) = f_{ab}'(0) = f_a'(0) f_b(0) + f_a(0) f_b'(0) = \ln(a) + \ln(b) \ .$$

Pour le point *2*, soit $a > 0$ et x, y deux réels.

$$f_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = f_{a^x}(y) \ .$$

Fixons x, dérivons par rapport à y et prenons la dérivée en 0. On obtient :

$$x f'_a(0) = f'_{a^x}(0) \,,$$

d'où le résultat.

Passons au point *3*. Fixons $a > 1$. La fonction f_a est alors strictement croissante, elle admet donc une limite en $+\infty$. Or la suite (a^n) tend vers $+\infty$, donc la limite de f_a en $+\infty$ est $+\infty$. La relation $a^{-x} = 1/a^x$ montre que la limite de f_a en $-\infty$ est 0. La fonction f_a est donc bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. La relation $\ln(a^x) = x\ln(a)$ montre que la fonction réciproque de a^x est la fonction qui à $y \in \mathbb{R}^{+*}$ associe $\ln(y)/\ln(a)$. Cette fonction est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. □

Il nous reste à définir la fonction exponentielle, qui est la réciproque du logarithme. D'après le point *3* de la proposition 4.8.5, il existe un réel unique, strictement positif, dont le logarithme vaut 1. On le note e.

Définition 4.8.6 *On appelle* exponentielle*, et on note* exp*, la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe* e^x*, où* e *est l'unique réel tel que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Proposition 4.8.7 *L'exponentielle est la réciproque du logarithme. Les deux fonctions sont strictement croissantes et dérivables.*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{+*}\,,\ \ln'(y) = \frac{1}{y}\,.$$

Puisque $\ln(1) = 1$, on a $\ln(\exp(x)) = x$, par le point *2* de la proposition 4.8.5. La dérivée de l'exponentielle est donnée par le point *4* de la proposition 4.8.2. On dérive le logarithme comme une fonction réciproque :

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}\,.$$

Chapitre 5

Fonctions usuelles

Vous connaissez depuis longtemps les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme. Notre premier objectif sera de démontrer rigoureusement leurs propriétés. Nous introduirons aussi les fonctions hyperboliques ainsi que les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Pour comprendre les démonstrations, vous aurez besoin des notions de base de l'analyse : limites, continuité, dérivabilité et convexité.

5.1 Fonctions puissance

Si n est un entier naturel, vous savez ce qu'est la puissance n-ième d'un nombre : le produit de ce nombre par lui-même n fois.

$$a^n = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{n \text{ facteurs}} .$$

Rappelons que pour tout a, $a^0 = 1$. Vous connaissez aussi la notation a^{-1} pour l'inverse de a, et vous savez donc calculer des puissance entières négatives.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} .$$

A cause de la règle des signes, une puissance paire est toujours positive ou nulle. C'est la raison pour laquelle on ne définit de puissances fractionnaires que pour des réels positifs ou nuls. Le cas $a = 0$ n'est pas passionnant : pour tout x, $0^x = 0$. Dans ce qui suit, a désigne un réel *strictement positif.*

Proposition 5.1.1 *Etant donné un réel strictement positif a, et deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel strictement positif y tel que $y^q = a^p$. Ce réel est noté $a^{p/q}$.*

Ainsi :

$$a^{1/2} = \sqrt{a} , \quad a^{3/2} = (\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3} , \quad a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2} .$$

Démonstration : c'est une application du théorème de la bijection. L'application qui à y associe y^q est continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ dans lui-même. C'est donc une bijection. $\square$

Nous rassemblons dans la proposition suivante les propriétés des puissances fractionnaires.

Proposition 5.1.2 *Soit a un réel strictement positif.*

1. *Soient $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, deux couples d'entiers tels que $p/q = p'/q'$. Alors :*
$$a^{p/q} = a^{p'/q'} \; .$$
2. *Soient $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, deux couples d'entiers. Alors :*
$$a^{p/q+p'/q'} = a^{p/q}a^{p'/q'} \; .$$
3. *Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ un couple d'entiers. Alors :*
$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p/q} \; .$$
4. *Soient $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, deux couples d'entiers tels que $p/q < p'/q'$. Alors :*
si $a>1$, alors $a^{p/q} < a^{p'/q'}$,
si $a<1$, alors $a^{p/q} > a^{p'/q'}$.

Démonstration : elle consiste à se ramener aux propriétés connues des puissances entières.

1. $$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q \; .$$
   Donc :
   $$a^{pq'} = a^{p'q} \implies a^{pq'/qq'} = a^{p'q/qq'} \implies a^{p/q} = a^{p'/q'} \; .$$
2. $$a^{p/q+p'/q'} = a^{(pq'+p'q)/qq'} = \left(a^{pq'+qp'}\right)^{1/qq'}$$
   Or pq' et $p'q$ sont deux entiers. Donc :
   $$\left(a^{pq'+qp'}\right)^{1/qq'} = \left(a^{pq'}a^{p'q}\right)^{1/qq'} = a^{pq'/qq'}a^{p'q/qq'} = a^{p/q}a^{p'/q'} \; .$$
3. En utilisant la relation précédente :
   $$a^{p/q-p/q} = a^0 = 1 \implies a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p/q} \; .$$

4. Pour $a > 1$:
$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \implies pq' < qp' \implies a^{pq'} < a^{p'q} \implies a^{p/q} < a^{p'/q'} \ .$$
On passe de $a > 1$ à $a < 1$ par la propriété *3*.

□

Étant donné un rationnel r, il existe une infinité de manières de l'écrire comme rapport de deux entiers. Le point *1* de la proposition 5.1.2 montre que la puissance fractionnaire ne dépend que du rapport p/q. Nous avons donc défini a^r pour tout r *rationnel*. Nous allons étendre la définition à tous les x *réels*.

Définition 5.1.3 *Soit a un réel strictement positif. On appelle* fonction puissance *de base a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*
$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad a^x = \sup\{ \, a^r \ , \ r \in \mathbb{Q} \cap] - \infty, x[\, \} \ .$$

La figure 5.1 montre le graphe des fonctions puissance pour plusieurs valeurs de a.

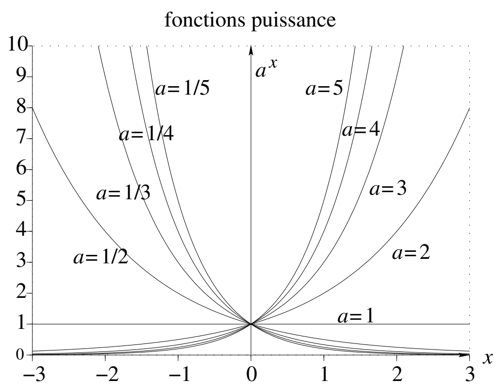

FIG. 5.1 – Fonctions puissance $x \mapsto a^x$ pour plusieurs valeurs de a.

Voici la liste des propriétés des fonctions puissances.

Théorème 5.1.4 *Soit a un réel strictement positif.*

1. La fonction puissance de base a est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ *vers le groupe multiplicatif* $(\mathbb{R}^*, \times)$.
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \quad a^{x+y} = a^x a^y \ . \tag{5.1.1}$$

2. (a) Si $a = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $a^x = 1$,

(b) si $a > 1$, alors $x \mapsto a^x$ est strictement croissante, et :
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ ,$$

(c) si $a < 1$, alors $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante, et :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\ .$$

3. *La fonction $x \mapsto a^x$ est convexe.*
4. *La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto L_a a^x$, où L_a est une constante.*
5. *La fonction $x \mapsto a^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : elle consiste essentiellement à vérifier les propriétés souhaitées sur les rationnels, puis à les étendre aux réels par passage à la limite.

1. Soient x et y deux réels. Soient (u_n) et (v_n) les suites des approximations décimales par défaut de x et y. Ce sont deux suites croissantes de rationnels, qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(u_n + v_n)$ est elle-aussi une suite croissante de rationnels, et elle converge vers $x + y$. Or nous connaissons déjà la propriété pour les rationnels :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad a^{u_n+v_n} = a^{u_n}\, a^{v_n}\ .$$
Par définition de la borne supérieure, et comme la fonction puissance est croissante pour les rationnels, les suites (a^{u_n}), (a^{v_n}) et $(a^{u_n+v_n})$ convergent respectivement vers a^x, a^y et a^{x+y}. D'où le résultat.
2. Soit x un réel, et (u_n) la suite de ses approximations décimales : 1^x est la limite de la suite (1^{u_n}). Or pour tout n, $1^{u_n} = 1$. D'où le résultat.

   Passons au cas $a > 1$. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Il existe un rationnel r tel que $x < r < y$. Soient (u_n) et (v_n) les suites des approximations décimales par défaut de x et y. Il existe un certain rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < r < v_n$. Pour $a > 1$, les suites (a^{u_n}) et (a^{v_n}) sont croissantes. et $a^{u_n} < a^r < a^{v_n}$. Par passage à la limite, $a^x \leq a^r < a^y$. Donc $x \mapsto a^x$ est strictement croissante pour $a > 1$. Toute fonction croissante admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour identifier ces limites, il suffit de considérer une suite tendant vers $-\infty$ et une suite tendant vers $+\infty$, par exemple les suites d'entiers $(-n)$ et (n). Or :
$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty\ .$$
D'où le résultat.

   Pour $a < 1$, inutile de refaire les démonstrations : il suffit d'utiliser la formule $a^{-x} = 1/a^x$, conséquence de (5.1.1).
3. Nous souhaitons montrer que pour tout $x < y$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,
$$a^{\lambda x+(1-\lambda)y} \leqslant \lambda a^x + (1-\lambda)a^y\ . \tag{5.1.2}$$
Il existe plusieurs démonstrations, mais l'auteur est tellement fan de celle qui suit, qu'il ne résiste pas au plaisir de vous la servir.

Nous allons d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;, \quad a^{(x_1+\cdots+x_n)/n} \leqslant \frac{1}{n}\big(\, a^{x_1} + \cdots + a^{x_n} \,\big) \;. \tag{5.1.3}$$

La démonstration de (5.1.3) est une récurrence curieuse. Observons d'abord que (5.1.3) est trivialement vraie pour $n = 1$. Montrons qu'elle est vraie pour $n = 2$. Par application de (5.1.1) et puisque $a^x > 0$, on a :

$$a^{(x_1+x_2)/2} = \sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} \;.$$

Il est facile de vérifier que si α et β sont deux réels positifs, alors $\sqrt{\alpha\beta} \leqslant (\alpha+\beta)/2$, d'où (5.1.3) pour $n = 2$. Nous en déduisons ensuite que si (5.1.3) est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour $2n$. Pour faciliter la lecture, nous notons f_a l'application $x \mapsto a^x$.

$$\begin{aligned}
&f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \\
&\qquad = f_a\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right) \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) + f_a\left(\frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)\right) \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{f_a(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} + \frac{f_a(x_{n+1}) + \cdots + f(x_{2n})}{n}\right) \\
&\qquad = \frac{f_a(x_1) + \cdots + f_a(x_n) + f_a(x_{n+1}) + \cdots + f_a(x_{2n})}{2n} \;.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si (5.1.3) est vraie pour un entier $m \geqslant 2$, alors elle est vraie pour $m-1$.

$$\begin{aligned}
f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right) &= f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{m-1} + \frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}}{m}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{m}\left(f_a(x_1) + \cdots + f_a(x_{m-1}) + f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right)\right) \;.
\end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes :

$$f_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}\Big(f_a(x_1) + \cdots + f_a(x_{m-1})\Big) \;,$$

d'où le résultat pour $m-1$. Maintenant, si (5.1.3) est vraie pour un entier n, elle est vraie pour $2n$, et d'après ce qui précède, aussi pour $2n-1$, $2n-2$, $\ldots$, $n+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

Soient p et q deux entiers positifs tels que $p < q$, et x, y deux réels tels que $x < y$. Appliquons (5.1.3) pour $n = q$, $x_1 = \cdots = x_p = x$, et $x_{p+1} = \cdots = x_q = y$. On obtient :

$$f_a\left(\frac{p}{q}x + \left(1 - \frac{p}{q}\right)y\right) \leqslant \frac{p}{q}f_a(x) + \left(1 - \frac{p}{q}\right)f_a(y) \;,$$

soit (5.1.2) pour $\lambda = \frac{p}{q}$. Donc (5.1.2) est vraie pour tout λ *rationnel.* On en déduit le résultat pour tout λ réel, en utilisant les approximations rationnelles comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois.

4. La dérivabilité se déduit de la convexité, en utilisant la propriété (5.1.1). Commençons par montrer que f_a est dérivable en 0. Considérons la fonction τ_0, qui à $h \in \mathbb{R}^*$ associe le taux d'accroissement :

$$\tau_0(h) = \frac{a^h - a^0}{h - 0} = \frac{a^h - 1}{h} \; .$$

La fonction f_a étant convexe, elle est continue et ses accroissements sont croissants. Donc la fonction τ_0 admet une limite à gauche et une limite à droite en 0. La fonction f_a est donc dérivable à gauche et à droite en 0. Nous devons montrer que les deux dérivées sont égales. Pour cela, calculons $\tau_0(-h)$, en utilisant (5.1.1).

$$\tau_0(-h) = \frac{a^{-h} - 1}{-h} = \frac{\frac{1}{a^h} - 1}{-h} = \frac{1}{a^h} \frac{1 - a^h}{-h} = \frac{1}{a^h} \tau_0(h) \; .$$

Or quand h tend vers 0, $1/a^h$ tend vers 1, par continuité en 0. Donc la limite à gauche de τ_0 en 0 est égale à sa limite à droite, ce qui entraîne que f_a est dérivable en 0. Notons L_a la dérivée en 0.

Pour en déduire la dérivabilité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer une fois de plus la propriété (5.1.1) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = L_a \, a^x \; .$$

5. La dérivée étant proportionnelle à la fonction, elle est elle même dérivable. Donc f_a est indéfiniment dérivable et sa dérivée n-ième est $L_a^n \, f_a$.

□

5.2 Logarithme et exponentielle

Il se trouve que le facteur par lequel on multiplie la fonction puissance de base a pour obtenir sa dérivée, cette constante que nous avons sournoisement notée L_a dans le théorème 5.1.4, est le *logarithme naturel*, ou *logarithme népérien* de a.

Définition 5.2.1 *Soit a un réel strictement positif. On appelle* logarithme naturel *de a, et on note $\ln(a)$ la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto a^x$.*

Théorème 5.2.2

1. *Pour tout $a, b > 0$, on a :*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \; .$$

2. Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln(a^x) = x \ln(a) \ .$$

3. La fonction ln *est strictement croissante, et :*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \ .$$

Démonstration : Nous reprenons la notation de la section précédente pour les fonctions puissances : f_a désigne la fonction $x \mapsto a^x$.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Considérons la fonction f_{ab}. On a :

$$f_{ab}(x) = (ab)^x = a^x b^x = f_a(x) f_b(x) \ .$$

On calcule la dérivée de f_{ab} en 0, en dérivant le produit $f_a f_b$:

$$\ln(ab) = f'_{ab}(0) = f'_a(0) f_b(0) + f_a(0) f'_b(0) = \ln(a) + \ln(b) \ .$$

2. Soit a un réel strictement positif et soient x, y deux réels quelconques.

$$f_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = f_{a^x}(y) \ .$$

Fixons x, dérivons par rapport à y et prenons la dérivée en 0. On obtient :

$$x f'_a(0) = f'_{a^x}(0) \ ,$$

soit $x \ln(a) = \ln(a^x)$.

3. Fixons $a > 1$. D'après le point *2(b)* du théorème 5.1.4, la fonction f_a est strictement croissante. On en déduit d'une part que $\ln(a)$ est strictement positif, d'autre part que f_a est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. La relation $\ln(a^x) = x \ln(a)$ montre que la fonction réciproque de a^x est la fonction qui à $y \in \mathbb{R}^{+*}$ associe $\ln(y)/\ln(a)$. Cette fonction est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Les limites en 0^+ et $+\infty$ se déduisent aussi du point *2(b)* du théorème 5.1.4.

□

Il nous reste à définir la fonction exponentielle, qui est la réciproque du logarithme. D'après le point *3* du théorème 5.2.2, il existe un réel unique, strictement supérieur à 1, dont le logarithme vaut 1. On le note e.

Définition 5.2.3 *On appelle* exponentielle*, et on note* exp*, la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe e^x, où* e *est l'unique réel tel que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Ainsi, on pourra noter l'exponentielle de x indifféremment e^x ou $\exp(x)$ (la seconde notation est préférable pour les grosses formules).

Théorème 5.2.4 *L'exponentielle est la réciproque du logarithme. Les deux fonctions sont strictement croissantes et dérivables.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \ \exp'(x) = \exp(x) \quad \textit{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{+*} \, , \ \ln'(y) = \frac{1}{y} \ .$$

Démonstration : Puisque $\ln(\mathrm{e}) = 1$, on a $\ln(\exp(x)) = x$, par le point *2* du théorème 5.2.2. La dérivée de l'exponentielle est donnée par le point *4* du théorème 5.1.4. On dérive le logarithme comme une fonction réciproque :

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y} .$$

□

La figure 5.2 montre les graphes des fonctions exp et ln. Comme elles sont réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

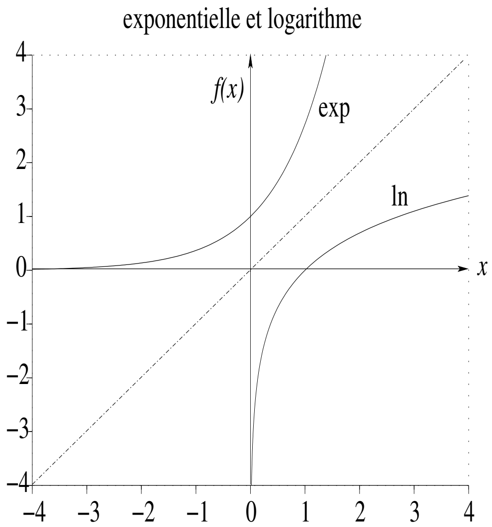

FIG. 5.2 – Fonctions exp et ln.

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 5.2.2, le couple de fonctions réciproques $(\exp, \ln)$ n'est qu'un cas particulier. Pour tout $a > 0$, la fonction puissance de base a admet pour réciproque la fonction $x \mapsto \ln(x)/\ln(a)$, que l'on appelle le *logarithme en base a.*

Définition 5.2.5 *Soit a un réel strictement positif. On appelle* logarithme en base a *la fonction réciproque de la fonction puissance de base a. C'est la fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe :*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} .$$

À part le logarithme en base e, qui est le logarithme naturel, les deux bases les plus utilisées sont $a = 10$ (logarithme décimal) et $a = 2$ (logarithme binaire). Par définition, le logarithme en base a de x est le nombre y tel que $a^y = x$. Ainsi :

$$\log_{10}(0.001) = -3 , \quad \log_{10}(100) = 2 , \quad \log_2 1/16 = -4 , \quad \log_2(1024) = 10 .$$

Il est facile de passer du logarithme en base a au logarithme naturel, de même qu'il est facile de passer de l'exponentielle à une autre fonction puissance, par la formule :

$$a^x = \exp(x \ln(a)) \ .$$

Nous terminons cette section par deux résultats d'approximation de l'exponentielle. Le premier se redémontre facilement, le second est absolument fondamental et doit être connu par cœur.

Théorème 5.2.6 *Pour tout réel x,*

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

Démonstration : Pour la première limite, écrivons :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\ln(1+x/n)) = \exp\left(x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\right) \ .$$

Or $\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=1$. Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \implies \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{x/n} = 1 \ .$$

Comme la fonction exp est continue, ceci entraîne bien :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\right) = \exp(x) \ .$$

Nous démontrons la seconde formule à partir de la première, en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1+\frac{x}{1!}x+\frac{1(1-\frac{1}{n})x^2}{2!}+\cdots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})x^k}{k!}+\cdots+\frac{x^n}{n^n} \ .$$

Supposons d'abord $x \geqslant 0$. Fixons $k\in\mathbb{N}^*$: pour tout $n\geqslant k$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{1(1-\frac{1}{n})x^2}{2!}+\cdots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})x^k}{k!} \ .$$

Or pour k fixé :

$$\lim_{n\to\infty} 1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n}) = 1 \ .$$

En passant à la limite en n, on en déduit que pour tout k :

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!} \ .$$

Dans cette inégalité, le membre de droite est le terme général d'une suite croissante et majorée (par e^x), donc il converge, et :

$$\mathrm{e}^x \geqslant \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \ .$$

D'autre part, observons que pour tout $k = 0, \dots, n$,

$$1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n}) \leqslant 1 \ .$$

Donc :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \leqslant 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

Puisque nous savons que le membre de droite converge, on en déduit par passage à la limite :

$$\mathrm{e}^x \leqslant \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

D'où le résultat, pour x positif ou nul.

Pour x négatif, l'astuce consiste à faire disparaître les termes impairs en prenant la demi-somme de e^x et e^{-x} (nous verrons plus loin que cette demi-somme est le *cosinus hyperbolique* de x).

$$\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n + \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \binom{n}{k} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \ .$$

Le même raisonnement que précédemment montre que :

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} \ .$$

Par linéarité de la limite, on en déduit alors que :

$$\mathrm{e}^{-x} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \ .$$

□

Les résultats d'approximation permettent de calculer les exponentielles avec une précision arbitraire. Voici le nombre e arrondi à la cinquantième décimale.

$$\mathrm{e} = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369996$$

5.3 Fonctions circulaires

Le *cercle trigonométrique* (figure 5.3) est le cercle centré à l'origine et de rayon 1, dans le plan muni d'un repère orthonormé. Les angles sont mesurés en radians, à partir

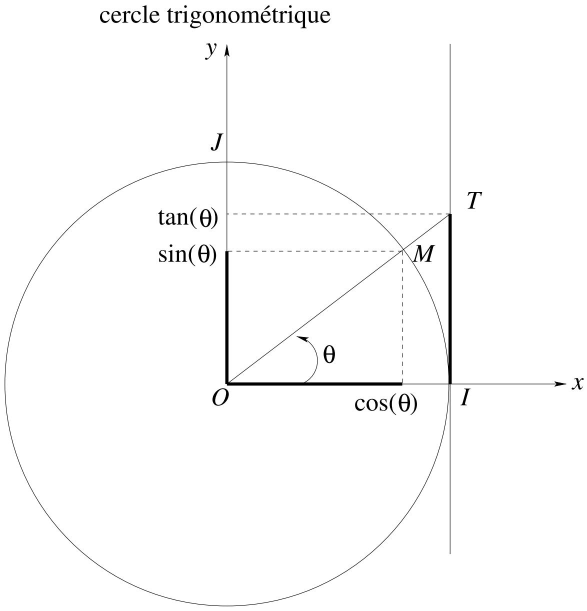

FIG. 5.3 – Cercle trigonométrique, sinus, cosinus et tangente d'un angle.

de l'axe des abscisses orienté vers la droite, et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique). La demi-droite partant de l'origine O et d'angle θ coupe le cercle en un point M. Observons que la longueur de l'arc de cercle allant de I à M est égale à θ.

Par définition :

- le *cosinus* de l'angle θ est l'abscisse du point M.
- le *sinus* de l'angle θ est l'ordonnée du point M.
- la *tangente* de l'angle θ est le rapport du sinus sur le cosinus.

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{OI} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{OJ} \; .$$

Sur la figure 5.3, la tangente est l'ordonnée du point T. Le théorème de Pythagore se traduit par :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \; .$$

Montrons tout de suite deux inégalités qui nous serviront plus tard à étudier la dérivée de ces fonctions.

Lemme 5.3.1 *Soit θ un angle tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Alors :*

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta) \; .$$

Démonstration : voir la figure 5.3 pour les notations. L'aire du triangle OIM vaut $\sin(\theta)/2$. L'aire du *secteur angulaire* OIM vaut $\theta/2$ (elle est proportionnelle à θ, et l'aire du cercle est π). L'aire du triangle OIT vaut $\tan(\theta)/2$. D'où le résultat. □

Deux angles qui diffèrent d'un multiple de 2π correspondent au même point sur le cercle, et donc aux mêmes valeurs des fonctions trigonométriques. Le cosinus et le sinus sont donc périodiques de période 2π (figure 5.4). La fonction tangente est définie pour tout angle dont le cosinus est non nul, à savoir tout angle différent de $\pi/2$ modulo π. Elle est périodique de période π. Il est bon de connaître les relations suivantes, ou de savoir les retrouver rapidement en dessinant le cercle.

$\sin(-x)$	$=$	$-\sin(x)$	$\cos(-x)$	$=$	$\cos(x)$	$\tan(-x)$	$=$	$-\tan(x)$
$\sin(\pi-x)$	$=$	$\sin(x)$	$\cos(\pi-x)$	$=$	$-\cos(x)$	$\tan(\pi-x)$	$=$	$-\tan(x)$
$\sin(\pi+x)$	$=$	$-\sin(x)$	$\cos(\pi+x)$	$=$	$-\cos(x)$	$\tan(\pi+x)$	$=$	$\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2}-x)$	$=$	$\cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$	$=$	$\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2}-x)$	$=$	$1/\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2}+x)$	$=$	$\cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$	$=$	$-\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2}+x)$	$=$	$-1/\tan(x)$

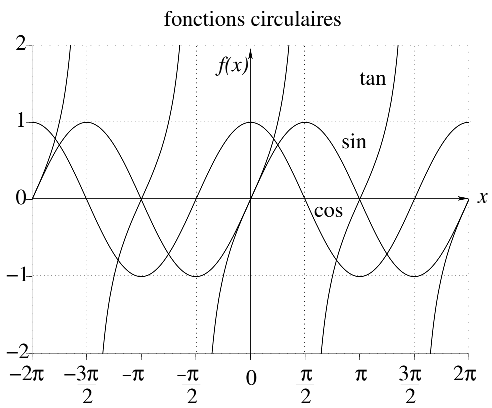

FIG. 5.4 – Fonctions sinus, cosinus et tangente.

Nous ne vous conseillons pas d'apprendre par cœur des nuées de formules trigonométriques ; vous devez bien sûr retenir $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, et vous devez également connaître les formules d'addition qui suivent.

Proposition 5.3.2 *Soient a et b deux réels.*
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

Démonstration : reportez-vous à la figure 5.5 pour les notations. Notons K le point d'intersection avec le cercle de la demi-droite d'angle a, L le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a+\pi/2$, M le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a+b$. Par définition :

$$\overrightarrow{OM}=\cos(b)\,\overrightarrow{OK}+\sin(b)\,\overrightarrow{OL}\ .$$

Or :

$$\overrightarrow{OK}=\cos(a)\,\overrightarrow{OI}+\sin(a)\,\overrightarrow{OJ}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{OL}=-\sin(a)\,\overrightarrow{OI}+\cos(a)\,\overrightarrow{OJ}\ .$$

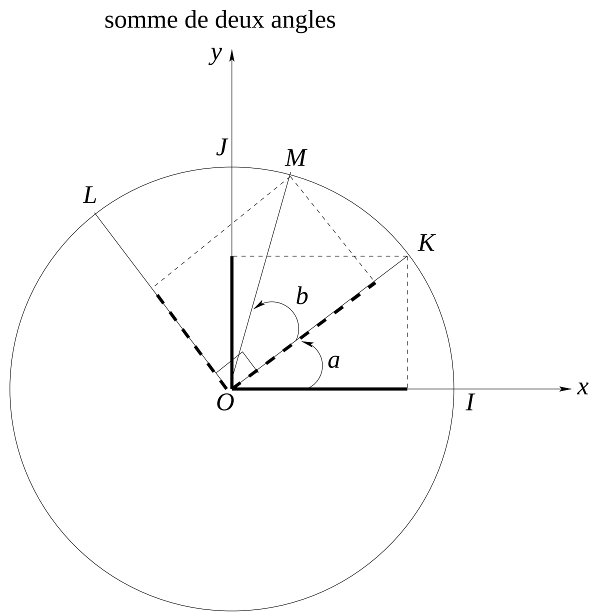

FIG. 5.5 – Somme de deux angles.

En reportant ces expressions :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\Big(\cos(a)\,\overrightarrow{OI}+\sin(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big)+\sin(b)\Big(-\sin(a)\,\overrightarrow{OI}+\cos(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big)\\ &= \Big(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\Big)\,\overrightarrow{OI}+\Big(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\Big)\,\overrightarrow{OJ}\ .\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la dérivabilité.

Proposition 5.3.3 *Les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$.

$$\sin'(x)=\cos(x)\quad \textit{et}\quad \cos'(x)=-\sin(x)\ .$$

La fonction tangente est indéfiniment dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)\ .$$

Démonstration : Nous commençons par la dérivabilité en 0 du sinus, en utilisant les inégalités du lemme 5.3.1. La fonction sinus étant impaire, nous pouvons nous contenter de limites à droite en 0. De $0\leqslant\sin(h)\leqslant h$, on déduit que sin est continue en 0, et puisque $\cos^2(h)+\sin^2(h)=1$, il en est de même de cos :

$$\lim_{h\to 0}\sin(h)=0\quad\text{et}\quad\lim_{h\to 0}\cos(h)=1\ .$$

D'autre part, pour tout $h > 0$:

$$\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h) \implies \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\cos(h)} \frac{\sin(h)}{h} \implies \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \; .$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \; .$$

La fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Passons maintenant au cosinus, toujours en 0. Écrivons :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(h)+1} \frac{\cos^2(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1} \frac{\sin(h)}{h} \; .$$

Les résultats précédents permettent d'en déduire que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$$

La fonction cosinus est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.

Il ne reste plus qu'à utiliser les formules de sommation pour calculer les dérivées en un point quelconque. Écrivons le taux d'accroissement de la fonction sinus en a, évalué en $a+h$:

$$\begin{aligned} \tau_a(a+h) &= \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\big(\; \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) \;\big) \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \; . \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \; .$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \cos(a) \; .$$

Écrivons maintenant le taux d'accroissement de la fonction cosinus en a, évalué en $a+h$:

$$\begin{aligned} \tau_a(a+h) &= \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\big(\; \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a) \;\big) \\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \; . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = -\sin(a) \ .$$

Les dérivées de sinus et cosinus sont elles mêmes dérivables, donc par récurrence ces deux fonctions sont indéfiniment dérivables.

On calcule la dérivée de la fonction tangente comme un quotient :

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x) \ .$$

□

5.4 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions circulaires ne sont certes pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (figure 5.4). Il est cependant commode, principalement pour les calculs de primitives, de définir des réciproques partielles, en se restreignant à des intervalles sur lesquelles sin, cos et tan sont bijectives. Le choix de ces intervalles est arbitraire, et fixé par l'usage (figure 5.6).

Définition 5.4.1 *On appelle :*

- arc sinus *la bijection de* $[-1,1]$ *dans* $[-\pi/2,\pi/2]$*, qui à* x *associe l'angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus est égal à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{arcsin} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ x & \longmapsto & \text{arcsin}(x) \end{array}$$

- arc cosinus *la bijection de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$*, qui à* x *associe l'angle compris entre* 0 *et* π *dont le cosinus est égal à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{arccos} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \text{arccos}(x) \end{array}$$

- arc tangente *la bijection de* $]-\infty,+\infty[$ *dans* $]-\pi/2,\pi/2[$*, qui à* x *associe l'angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont la tangente est égale à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{arctan} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2,\pi/2[\\ x & \longmapsto & \text{arctan}(x) \end{array}$$

Le principal intérêt des fonctions circulaires réciproques réside dans leurs dérivées.

Proposition 5.4.2 *Les fonctions* arcsin*,* arccos *et* arctan *sont dérivables sur leur domaine de définition.*

- $\forall x \in]-1,1[\ , \quad \text{arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$

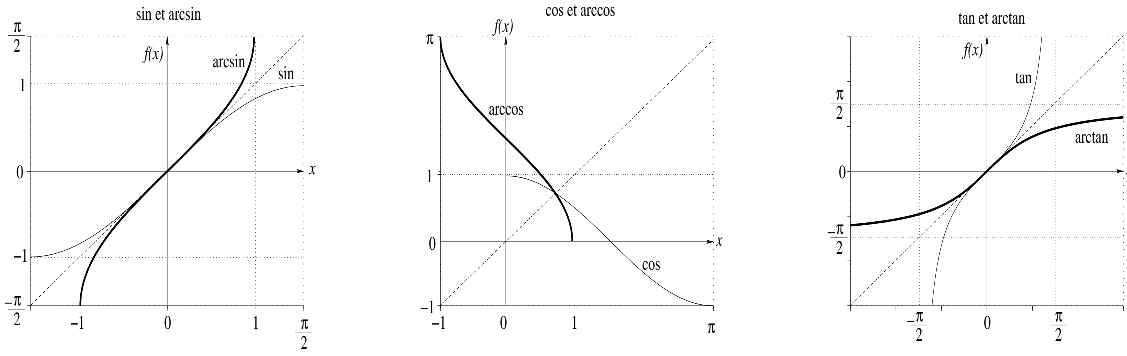

FIG. 5.6 – Fonctions circulaires et leurs réciproques.

- $\forall x \in]-1,1[\,, \quad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
- $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,.$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

La dérivée de l'arc cosinus s'obtient de la même façon, ou bien en remarquant que :

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pour l'arc tangente :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

□

5.5 Fonctions hyperboliques

Définition 5.5.1 *On appelle :*

- sinus hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

- cosinus hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1,+\infty[$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

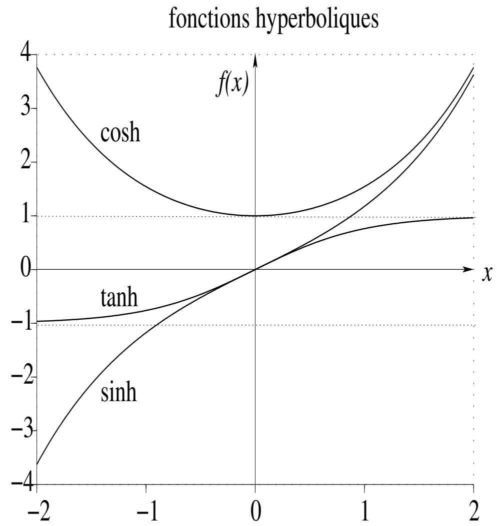

FIG. 5.7 – Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques.

- tangente hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1,1[$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \;.$$

Bien évidemment les fonctions hyperboliques sont indéfiniment dérivables. Les expressions de leurs dérivées rappellent celles des fonctions circulaires.

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \;, \quad \cosh'(x) = \sinh(x) \;, \quad \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \;.$$

Il est facile de vérifier la formule suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R} \;, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \;.$$

Si on pose $X = \cosh(x)$ et $Y = \sinh(x)$, l'équation $X^2 - Y^2 = 1$ définit dans le plan une *hyperbole équilatère* (figure 5.8). Le cosinus et le sinus hyperboliques sont un paramétrage de cette hyperbole, tout comme le cosinus et le sinus ordinaires sont un paramétrage du cercle unité (d'équation $X^2 + Y^2 = 1$) : d'où la dénomination de fonctions *hyperboliques* et fonctions *circulaires.*

L'analogie entre fonctions circulaires et fonctions hyperboliques ne s'arrête pas à leur interprétation géométrique. Toutes les formules de trigonométrie circulaire ont leur pendant en trigonométrie hyperbolique. La raison en est la relation entre les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques, et l'exponentielle complexe, via les *formules*

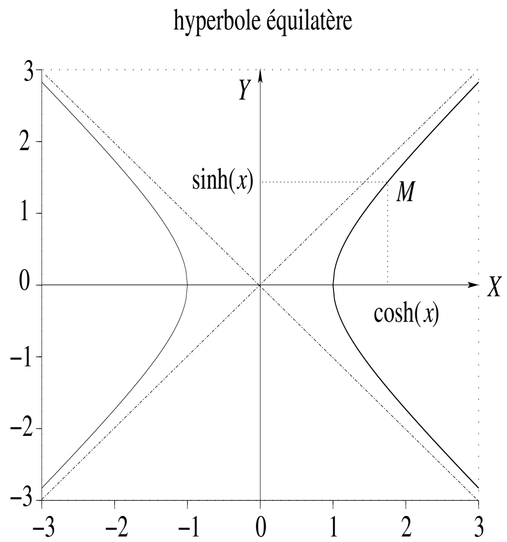

FIG. 5.8 – Le cosinus et le sinus hyperboliques comme paramétrage de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$.

d'Euler.

fonctions circulaires		fonctions hyperboliques	
$\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$	$\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$	$\sinh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

5.6 Fonctions hyperboliques réciproques

Comme les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques ont leurs réciproques, qui servent elles aussi aux calculs de primitives (figure 5.9).

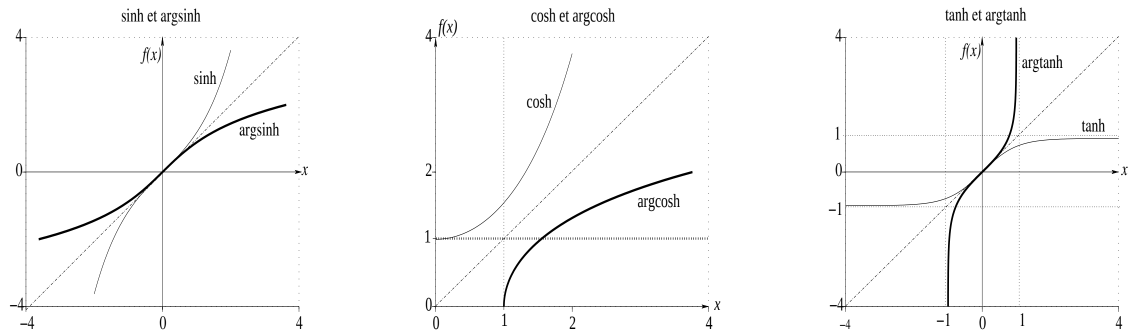

FIG. 5.9 – Fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

Définition 5.6.1 *On appelle :*

- argument sinus hyperbolique *la bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à* x *associe le réel dont le sinus hyperbolique est égal à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{argsinh} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{argsinh}(x) \end{array}$$

- argument cosinus hyperbolique *la bijection de* $[1, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$*, qui à* x *associe le réel positif dont le cosinus hyperbolique est égal à* x*.*

$$\begin{array}{rcl} & \text{argcosh} & \\ [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \text{argcosh}(x) \end{array}$$

- argument tangente hyperbolique *la bijection de* $]-1, +1[$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à* x *associe le réel dont la tangente hyperbolique est égale à* x*.*

$$\begin{array}{rcl} & \text{argtanh} & \\ ]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{argtanh}(x) \end{array}$$

Elles sont moins importantes que leurs analogues circulaires, car elles s'expriment de façon relativement simple à l'aide du logarithme.

Proposition 5.6.2

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \text{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
- $\forall x \in]1, +\infty[$, $\quad \text{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
- $\forall x \in]-1, 1[$, $\quad \text{argtanh}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

Démonstration : Résolvons l'équation $\sinh(x) = y$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \ .$$

L'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ a deux racines réelles, dont seule $y + \sqrt{y^2 + 1}$ est positive. Donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Résolvons l'équation $\cosh(x) = y$.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \ .$$

Pour $y \geqslant 1$, l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ a deux racines réelles, dont seule $y + \sqrt{y^2 - 1}$ est supérieure à 1. Donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Résolvons l'équation $\tanh(x) = y$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \implies \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \implies e^{2x} = \frac{1 - y}{1 + y} \implies x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right) \ ,$$

puisque $(1+y)/(1-y)$ est strictement positif pour $y \in]-1,1[$. $\square$

Ici encore, le principal intérêt réside dans les dérivées.

Proposition 5.6.3 *Les fonctions* argsinh*,* argcosh *et* argtanh *sont dérivables sur leur domaine de définition.*

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \text{argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
- $\forall x \in]1,+\infty[$, $\quad \text{argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
- $\forall x \in]-1,1[$, $\quad \text{argtanh}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Démonstration : On peut dériver directement l'expression en logarithme ou bien appliquer la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque.

$$\text{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\text{argsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{argsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{argcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\text{argcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\text{argcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{argtanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\text{argtanh}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\text{argtanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$\square$

Définir une primitive de $1/(1-x^2)$ uniquement sur $]-1,1[$ est un tantinet réducteur, puisque la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| ,$$

a pour dérivée $x \mapsto 1/(1-x^2)$ en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

De même, définir une primitive de $1/\sqrt{x^2-1}$ seulement sur $]1,+\infty[$ ne suffit pas, puisque la fonction

$$x \longmapsto \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| ,$$

a pour dérivée $1/\sqrt{x^2-1}$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.

C'est une raison suffisante pour vous conseiller de ne pas trop surcharger votre mémoire vive avec les fonctions hyperboliques réciproques.

5.7 Vrai ou faux

Vrai-Faux 5.1 Soit a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $a^{x-y} = a^x/a^y$.
2. ☐ $a^{(x^y)} = a^{xy}$.

3. ☐ $a^{2xy} = a^{x^2}\, a^{y^2}$.
4. ☒ $a^{(x+y)/2} = \sqrt{a^y\, a^y}$.
5. ☒ $a^{-x+y/2} = \sqrt{a^y}/a^x$.
6. ☐ $a^{2x-y} = (a^x/a^y)^2$.

Vrai-Faux 5.2 Soient a et b deux réels strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\ln(\sqrt{a/b}) = (1/2)(\ln(a) - \ln(b))$.
2. ☐ $\ln((ab)/2) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
3. ☐ $\ln(a^b) = (\ln(a))^{\ln(b)}$.
4. ☒ $\ln((a^2)^b) = 2b\ln(a)$.
5. ☐ $\ln(a^2/b^2) = -2\ln(ab)$.
6. ☒ $\ln(a^2/b) = \ln(a) - \ln(b/a)$.

Vrai-Faux 5.3 Soit a un réel strictement positif. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(\mathrm{e}^{\sqrt{a}}) = a/2$.
2. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}\ln(a)$.
3. ☐ $\mathrm{e}^{\ln^2(a)} = a^2$.
4. ☐ $\mathrm{e}^{\ln(a/2)} = a - 2$.
5. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}+a}) = (\mathrm{e}+a)\ln(a)$.
6. ☒ $\mathrm{e}^{2\ln(a)-\ln(a)/2} = a^{3/2}$.

Vrai-Faux 5.4 Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sin(x - 3\pi) = -\sin(x)$.
2. ☐ $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$.
3. ☒ $\cos(3\pi - x) = -\cos(x)$.
4. ☒ $\cos(-x - 3\pi) = -\cos(x)$.
5. ☐ $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$.
6. ☒ $\sin(x + 3\pi/2) = -\cos(x)$.
7. ☐ $\cos(x - 3\pi/2) = \sin(x)$.
8. ☐ $\cos(x + 3\pi/2) = -\sin(x)$.

Vrai-Faux 5.5 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sin(-7\pi/2) = 1$.
2. ☐ $\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

3. ☐ $\sin(8\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.
4. ☒ $\cos(9\pi/2) = 0$.
5. ☐ $\cos(-7\pi/3) = 1/2$.
6. ☒ $\cos(-7\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
7. ☒ $\tan(-7\pi/3) = -\sqrt{3}$.
8. ☒ $\tan(-7\pi/4) = 1$.
9. ☐ $\tan(-7\pi/6) = -\sqrt{3}/3$.

Vrai-Faux 5.6 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\lim\limits_{x \to -\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.
2. ☐ $\lim\limits_{x \to -\pi^+} \tan(x) = +\infty$.
3. ☒ $\lim\limits_{x \to 5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
4. ☒ $\lim\limits_{x \to -5\pi/2^+} \tan(x) = +\infty$.
5. ☐ $\lim\limits_{x \to 7\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.

Vrai-Faux 5.7 Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
2. ☐ $\cos(2x) - \sin(2x) = (\cos(x) + \sin(x)^2 + 2\sin^2(x)$.
3. ☒ $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.
4. ☐ $\cos(x) + \cos(3x) = 2\sin(x)\sin(2x)$.
5. ☐ $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.
6. ☒ $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.

Vrai-Faux 5.8 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\arccos(-1/2) = -\pi/3$.
2. ☒ $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$.
3. ☒ $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$.
4. ☐ $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.
5. ☒ $\arctan(-1) = -\pi/4$.
6. ☐ $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/6$.

Vrai-Faux 5.9 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
2. ☐ $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. ☒ $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. ☒ $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
5. ☐ $\forall x \in [-\pi/2, pi/2]$, $\arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x$.
6. ☒ $\forall x \in [0, pi/2]$, $\arccos(\sin(x)) = \pi/2 - x$.
7. ☐ $\forall x \in [-\pi/2, pi/2]$, $\arctan(\sin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. ☐ $\forall x \in [-1,1]$, $\tan(\arccos(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. ☒ $\forall x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Vrai-Faux 5.10 Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sinh(x) < \cosh(x)$.
2. ☒ $-1 < \tanh(x) < 1$.
3. ☐ $\cosh(2x) = 2\cosh(x) - 1$.
4. ☒ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.
5. ☐ $\sinh(x) + \cosh(-x) = \mathrm{e}^{-x}$.
6. ☒ $\sinh(2x) + \cosh(2x) = \mathrm{e}^{2x}$.
7. ☒ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$.
8. ☐ $\cosh(x) + \cosh(3x) = 2\sinh(x)\sinh(2x)$
9. ☒ $\sinh(x) + \sinh(3x) = 2\sinh(2x)\cosh(2x)$
10. ☐ $\sinh(3x) - \sinh(x) = 2\cos(hx)\sinh(2x)$

Vrai-Faux 5.11 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argcosh}(\cosh(x)) = x$.
2. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsinh}(\sinh(x)) = x$.
3. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argtanh}(\tanh(x)) = x$.
4. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\cosh(\mathrm{argcosh}(x)) = x$.
5. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argcosh}(\sinh(x) = 1 - x$.
6. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argtanh}(\sinh(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\tanh(\mathrm{argcosh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
8. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(\mathrm{argsinh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.8 Exercices

Exercice 5.1 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}<2\sqrt[n]{n}\,.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 7$:

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}\ .$$

Exercice 5.2 Déterminer $x \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\quad 5(3^x) = 3(5^x)$.
2. (E) $\quad x^x = \sqrt{2}/2$.
3. (E) $\quad x^x = 3\sqrt{6}/4$.
4. (E) $\quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 5.3 Déterminer le couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, vérifiant le système d'équations (S).

1. (S) $\quad \left\{\begin{array}{lcl} 8^x & = & 10^y \\ 2^x & = & 5^y\ . \end{array}\right.$
2. (S) $\quad \left\{\begin{array}{lcl} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3}\ . \end{array}\right.$
3. (S) $\quad \left\{\begin{array}{lcl} xy & = & 2^2 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \frac{5}{2}\ln^2(2)\ . \end{array}\right.$
4. (S) $\quad \left\{\begin{array}{lcl} x^{x+y} & = & y^4 \\ y^{x+y} & = & x\ . \end{array}\right.$

Exercice 5.4

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{1}{2}\Big(\ln(a)+\ln(b)\Big) \iff a^2+b^2 = 14\,ab\ .$$

2. Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}\ .$$

3. Déterminer l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que :

$$\log_{c+b}(a) + \log_{c-b}(a) = 2\log_{c+b}(a)\log_{c-b}(a)\ .$$

Exercice 5.5 Démonter les formules de trigonométrie suivantes.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)\ ;$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}\ ; \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\ ;$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)\ ; \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\ ;$$

$$\text{en notant : } t = \tan(x/2)\ , \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ , \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ , \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}\ ;$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\ ; \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\ ;$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)\ ;$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\ .$$

Exercice 5.6 On pose :

$$F = \{\ \arcsin\,,\ \arccos\,,\ \arctan\ \} \quad \text{et} \quad G = \{\ \sin\,,\ \cos\,,\ \tan\ \}\ .$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 5.7 Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\quad \arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arcsin(1/4)$.
2. (E) $\quad \arcsin(x) = \arcsin(2/5) + \arcsin(3/5)$.
3. (E) $\quad \arcsin(\tan(x)) = x$.
4. (E) $\quad \arcsin(2x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
5. (E) $\quad \arccos(x) = 2\arccos(3/4)$.
6. (E) $\quad 2\arccos(x) = \arccos(|2x^2 - 1|)$.
7. (E) $\quad \arccos(x) = \arcsin(1-x)$.
8. (E) $\quad \arctan(x) = 2\arctan(1/2)$.
9. (E) $\quad \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \pi/2$.

10. (E) $\quad \arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=\pi/2.$
11. (E) $\quad \arctan(x)+\arctan(2x)=\pi/4.$

Exercice 5.8 Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}.$
2. $\arctan(x)+\arctan(1/x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{|x|}.$
3. $\sin(2\arctan(x))=\dfrac{2x}{1+x^2}.$
4. $\tan(3\arctan(x))=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}.$

Exercice 5.9 Démonter les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

$$\cosh(a+b)=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)\ ;$$

$$\sinh(a+b)=\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b)\ ;$$

$$\cosh(2a)=\cosh^2(a)+\sin^2(a)=2\cosh^2(a)-1=1+2\sinh^2(a)\ ;$$

$$\cosh^2(a)=\frac{\cosh(2a)+1}{2}\ ;\quad \sinh^2(a)=\frac{\cosh(2a)-1}{2}\ ;$$

$$\sinh(2a)=2\sinh(a)\cosh(a)\ ;\quad \tanh(2a)=\frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}\ ;$$

$$\text{en notant : } t=\tanh(x/2)\ ,\ \sinh(x)=\frac{2t}{1-t^2}\ ,\ \cosh(x)=\frac{1+t^2}{1-t^2}\ ,\ \tanh(x)=\frac{2t}{1+t^2}\ ;$$

$$\tanh(a+b)=\frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}\ ;\quad \tanh(a-b)=\frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}\ ;$$

$$\sinh(a)\sinh(b)=\frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)-\cos(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)\cosh(b)=\frac{1}{2}\Big(\sinh(a+b)+\sinh(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)+\sinh(b)=2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;$$

$$\cosh(a)+\cosh(b)=2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ .$$

Exercice 5.10 Soit n un entier. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cosh(kx)=\frac{\sinh(\frac{n+1}{2}x)+\sinh(x/2)}{2\sinh(x/2)}\ .$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sinh(kx) = \frac{\cosh(\frac{n+1}{2}x) + \cosh(x/2)}{2\sinh(x/2)}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x) + \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{-\cos(\frac{n+1}{2}x) + \cos(x/2)}{2\sin(x/2)}$.

5. $\displaystyle\frac{\sin(x) + \sin(nx) + \sin((2n-1)x)}{\cos(x) + \cos(nx) + \cos((2n-1)x)} = \tan(nx)$.

6. $\displaystyle\frac{\sinh(x) + \sinh(nx) + \sinh((2n-1)x)}{\cosh(x) + \cosh(nx) + \cosh((2n-1)x)} = \tanh(nx)$.

Exercice 5.11 On pose :

$$F = \{ \text{ argsinh} , \text{ argcosh} , \text{ argtanh } \} \quad \text{et} \quad G = \{ \text{ sinh} , \text{ cosh} , \text{ tanh } \} .$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 5.12 Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\operatorname{argtanh}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \ln(x)$.
2. $\operatorname{argsinh}(3x + 4x^3) = 3\operatorname{argsinh}(x)$.
3. $\cosh(2\operatorname{argtanh}(x)) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.
4. $\sinh\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{argcosh}(x)\right) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.
5. $\operatorname{argcosh}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cosh(x)}{2}}\right) = \dfrac{x}{2}$.
6. $2\operatorname{argtanh}(\tan(x)) = \operatorname{argtanh}(\sin(2x))$.

Exercice 5.13 Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. $(E) \qquad \operatorname{argsinh}(x) = \operatorname{argsinh}(2-x)$.
2. $(E) \qquad \operatorname{argcosh}(4x^3 - 3x) - \operatorname{argcosh}(2x^2 - 1) = 1$.

Chapitre 6

Calcul des primitives

6.1 Propriétés des intégrales

L'objectif de ce chapitre est purement technique : la théorie de l'intégration est supposée connue ou admise. Le seul but est d'exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales. Toutes les fonctions considérées sont supposées continues, ou continues par morceaux, sur leur intervalle d'intégration, et sont donc intégrables. Nous commençons par résumer les principales propriétés des intégrales.

Théorème 6.1.1

1. *Relation de Chasles :*
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\ .$$
2. *Linéarité :*
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx\ .$$
3. *Monotonie :*
$$\textit{Si } \forall x \in [a,b]\,,\ f(x) \leq g(x) \ \textit{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

La relation de Chasles permet d'étendre la définition de l'intégrale au cas où la fonction f n'est continue que par morceaux sur l'intervalle d'intégration. On intègre séparément chacun des morceaux et on ajoute ensuite les intégrales obtenues. Considérons par exemple la fonction f qui vaut x si $x \in [0,1]$ et $\frac{1}{2}$ si $x \in]1,2]$.

Son intégrale sur l'intervalle $[0,2]$ vaut :
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ .$$

A propos de cet exemple, il est conseillé de ne pas perdre de vue l'interprétation géométrique d'une intégrale : l'intégrale d'une fonction constante est la surface d'un rectangle,

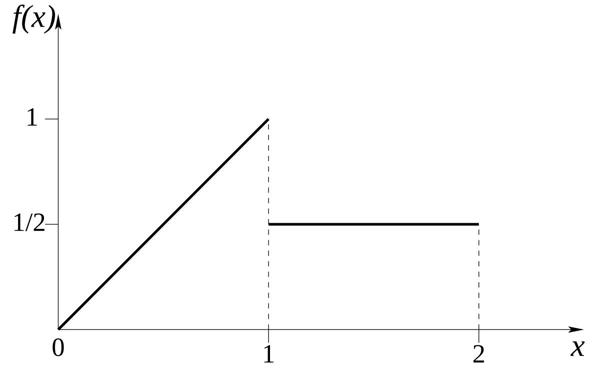

FIG. 6.1 – Exemple de fonction discontinue.

l'intégrale d'une fonction affine (du type $x \mapsto \alpha x + \beta$) est la surface d'un triangle si la fonction s'annule sur l'une des deux bornes, la surface d'un trapèze dans le cas général.

La relation de Chasles reste vraie même si les bornes des intervalles d'intégration ne sont pas dans le bon ordre, ce qui peut arriver après un changement de variable. On convient de changer le signe de l'intégrale quand on échange les bornes. Cette convention est cohérente avec le fait que l'intégrale sur un intervalle de longueur nulle vaut nécessairement 0.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0\;.$$

La propriété *2* du théorème (linéarité), dit que l'intégrale est une application linéaire, de l'espace vectoriel des fonctions intégrables, dans $\mathbb{R}$. On l'utilisera souvent, soit pour mettre en facteur une constante devant l'intégrale, soit pour séparer le calcul en deux intégrales plus simples. Par exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\;.$$

On peut utiliser la monotonie pour vérifier certains calculs. Par exemple si une fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, son intégrale doit être positive. L'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle est même strictement positive : on utilise souvent ce résultat sous la forme suivante.

Proposition 6.1.2 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si l'intégrale de $|f|$ sur $[a, b]$ est nulle, alors f est constamment nulle.*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0\,,\ \forall x \in [a, b]\;.$$

L'intégrale peut être encadrée à l'aide du minimum et du maximum de f sur l'intervalle $[a, b]$:

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x)\;.$$

Si on divise ces inégalités par la longueur de l'intervalle, on obtient :

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) .$$

Il faut comprendre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ comme la *valeur moyenne* de la fonction sur l'intervalle. Le *théorème de la moyenne* dit que cette valeur moyenne est atteinte sur l'intervalle.

Théorème 6.1.3 *Si f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) .$$

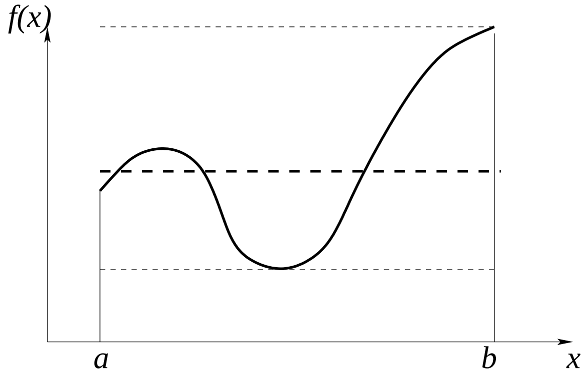

FIG. 6.2 – Illustration du théorème de la moyenne.

6.2 Primitives et intégrales

Rappelons tout d'abord la définition.

Définition 6.2.1 *On appelle* primitive *d'une fonction f, définie sur un intervalle $]a,b[$, toute fonction dérivable sur $]a,b[$, dont la dérivée coïncide avec f sur $]a,b[$.*

Etant données deux primitives de f, leur différence doit avoir une dérivée nulle, et donc être constante. Deux primitives de la même fonction diffèrent donc par une constante. Pour spécifier une primitive particulière, il suffit de fixer sa valeur en un point. En général, on considère la primitive qui s'annule en un certain point. Elle s'écrit comme une intégrale, grâce au théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 6.2.2 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et c un point de l'intervalle $[a,b]$. On considère la fonction $F_c(x)$, qui à $x \in [a,b]$ associe :*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt .$$

Alors F_c est l'unique primitive de f qui s'annule au point c.

Observons l'écriture $\int_c^x f(t)\,dt$, dans laquelle les deux lettres t et x jouent des rôles totalement différents. La lettre x désigne une borne de l'intervalle d'intégration. Si on la remplace par un réel, par exemple $\sqrt{2}$, on obtiendra un résultat réel : la valeur de la fonction F_c au point $\sqrt{2}$. La variable d'intégration t est muette. On ne peut pas la remplacer par un réel. Par contre, n'importe quelle autre lettre (sauf c et x) pourrait jouer le même rôle. Dans l'écriture des primitives, on évitera toujours de noter avec la même lettre la variable d'intégration et une des bornes de l'intervalle. Observons que n'importe quelle primitive peut être utilisée pour calculer une intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) = F_c(b) - F_c(a)\ ,$$

par la relation de Chasles. L'intégrale de f est donc un accroissement de primitive, qui ne dépend pas de la primitive choisie. On note :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_c(b) - F_c(a) = \Big[F_c(x)\Big]_a^b\ ,$$

Il est commode, en particulier pour les changements de variable, de conserver des bornes d'intégration, même quand on ne calcule que des primitives. C'est pourquoi nous continuerons de noter $\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en c, même s'il est superflu de fixer c. De notre point de vue, il n'y a donc aucune différence entre les calculs de primitives et les calculs d'intégrales. Il est courant d'exprimer les primitives des fonctions usuelles "à une constante près". Par exemple, les primitives de $\cos(x)$ sont toutes les fonctions de la forme $\sin(x) + C$, où C est une constante réelle. Nous écrirons :

$$\int_c^x \cos(t)\,dt = \Big[\ \sin(t)\ \Big]_c^x = \sin(x) - \sin(c) = \sin(x) + C\ .$$

Or quand c parcourt $\mathbb{R}$, $\sin(c)$ ne prend que les valeurs comprises entre -1 et 1, tandis que C désigne une constante réelle quelconque. En pratique, il suffit de trouver une primitive particulière : la variable c ne sera qu'un artifice d'écriture. Nous supposerons toujours que c et x sont telles que la fonction soit définie et continue sur l'intervalle $[c, x]$. Par exemple :

$$\int_c^x \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_c^x = \ln|x| + C\ ,$$

ce qui suppose que l'intervalle $[c, x]$ ne contient pas 0. Dans cette écriture, C désigne en fait une fonction, qui est constante sur chaque intervalle où la fonction à intégrer est définie et continue. L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto 1/x$ est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \ln(x) + C_1 & \text{si} & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si} & x < 0\ , \end{array} \right.$$

où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.

En pratique, pour calculer une primitive d'une fonction donnée, on la ramène à un catalogue de primitives usuelles. Ces primitives, que l'on doit connaître, sont rassemblées dans le tableau ci-dessous. Attention : les intervalles de définition ne sont pas précisés.

Fonction	**Une primitive**
$x^a \ (a \in \mathbb{R}\,,\ a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$
$\mathrm{e}^{\lambda x} \ (\lambda \neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$
$\cos(\omega x) \ (\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega . x)$
$\sin(\omega x) \ (\omega \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\cosh(\omega x) \ (\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega}\sinh(\omega x)$
$\sinh(\omega x) \ (\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega}\cosh(\omega x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Nous rappelons dans la section suivante les techniques de base pour le calcul des primitives, lorsqu'elles peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions classiques.

6.3 Techniques de calcul des primitives

La première technique de calcul consiste à utiliser la linéarité pour séparer l'intégrale d'une somme en une somme d'intégrales. L'exemple le plus simple est celui des polynômes.

$$\int_c^x (t^3 + 2t^2 + 4t + 2)\, dt = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + C\ .$$

On peut aussi intégrer des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$, ou bien $\sinh x$ et $\cosh x$. On utilise pour cela les formules d'Euler, et les propriétés de l'exponentielle (réelle ou complexe).

$\sin x = \dfrac{\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)}{2\mathrm{i}}$	$\cos x = \dfrac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2}$
$\sinh x = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$	$\cosh x = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$

Le principe est le suivant : tout polynôme en $\sin x$ et $\cos x$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $\sin^n x \cos^m x$, qu'il s'agit de *linéariser*, en les exprimant eux-mêmes comme combinaisons linéaires de termes en $\sin(kx)$ et $\cos(kx)$, dont on connaît une primitive. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\sin^4 x.\cos^6 x &= \frac{1}{2^{10}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^6 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{10\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} \\
&\qquad +2\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x} - 8\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 12 - 8\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x} \\
&\qquad +\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-10\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{512}(6 + 2\cos 2x - 8\cos 4x - 3\cos 6x + 2\cos 8x + \cos 10x)
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4 x.\cos^6 x$:

$$\frac{3x}{256} + \frac{\sin 2x}{512} - \frac{\sin 4x}{256} - \frac{\sin 6x}{1024} + \frac{\sin 8x}{2048} + \frac{\sin 10x}{5120}\ .$$

Observons que les questions de parité permettent de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos kx$. En effet, $\sin x$ est une fonction impaire et $\cos x$ une fonction paire. Donc si on remplace x par $-x$, $\sin^n x \cos^m x$ sera inchangé si n est pair, changé en son opposé si n est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus. La même technique s'utilise aussi pour les cosinus et sinus hyperboliques.

Comme autre application de l'exponentielle complexe, signalons la possibilité d'intégrer des expressions du type $\mathrm{e}^{\lambda x}\cos(\omega x)$ ou $\mathrm{e}^{\lambda x}\sin(\omega x)$, en les exprimant comme parties réelles ou imaginaires d'exponentielles complexes, que l'on peut intégrer formellement comme des exponentielles réelles. Voici un exemple.

$$\mathrm{e}^{3x}\cos(2x) = \mathrm{Re}(\exp((3+2\mathrm{i})x)).$$

Or une primitive (formelle) de $\exp((3+2\mathrm{i})x)$ est :

$$\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\exp((3+2\mathrm{i})x) = \frac{3-2\mathrm{i}}{13}\mathrm{e}^{3x}(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x))\ .$$

La partie réelle de cette expression est :

$$\frac{1}{13}\mathrm{e}^{3x}(3\cos(2x) + 2\sin(2x))\ ,$$

qui est donc une primitive de $\mathrm{e}^{3x}\cos(2x)$.

$$\int_c^x \mathrm{e}^{3t}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{13}\mathrm{e}^{3x}(3\cos(2x)+2\sin(2x))+C\ .$$

La seconde technique de calcul à connaître est l'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx\ .$$

Il faut penser à une intégration par parties quand l'un des facteurs de la fonction à intégrer a une dérivée plus simple, essentiellement un polynôme (dériver diminue le degré), $\ln x$ (dérivée $\frac{1}{x}$), $\arcsin x$ (dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) ou $\arctan x$ (dérivée $\frac{1}{1+x^2}$). Encore faut-il connaître une primitive de l'autre facteur. Par exemple :

$$\int_c^x t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,dt = \Big[t\cdot\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}\Big]_c^x - \int_c^x \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}x\mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{\lambda x}+C\ .$$

$u(t)=t$	$u'(t)=1$
$v'(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$	$v(t)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$

La technique de calcul d'intégrales (ou de primitives) la plus importante est le changement de variable.

Théorème 6.3.1 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et ϕ une fonction dérivable, de dérivée continue sur $]a,b[$ et monotone (la dérivée ϕ' ne s'annule pas). Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(u))\,(\phi^{-1})'(u)\,du\ .$$

Il est fortement déconseillé de retenir la formule par cœur. Un changement de variable doit se penser de la manière suivante.

1. Je souhaite remplacer t par $u=\phi(t)$.
2. J'exprime t en fonction de u : $t=\phi^{-1}(u)$ (je m'assure que ϕ est bien une bijection).
3. J'exprime dt en fonction de u et du en dérivant l'expression de t fonction de u : $dt=(\phi^{-1})'(u)\,du$.
4. J'ajuste les bornes de l'intervalle d'intégration : si t varie de a à b, alors $u=\phi(t)$ varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$. (Cet ajustement des bornes est la raison pour laquelle il est conseillé de calculer une primitive comme une intégrale de c à x).
5. Je remplace t et dt par leurs valeurs en fonction de u et du.

Comme exemple, nous allons traiter trois primitives d'un type fréquent, comportant la racine carrée d'un trinôme. Voici la première.

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt\ .$$

Notons que la fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. La première étape consiste à mettre le trinôme sous forme canonique, de manière à faire apparaître l'une des trois expressions $\sqrt{u^2+1}$, $\sqrt{u^2-1}$ ou $\sqrt{1-u^2}$. Nous sommes ici dans le premier cas.

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{\sqrt{(t+1)^2+4}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{t+1}{2})^2+1}}\,dt\ .$$

Nous devons donc poser :

$$u = \frac{t+1}{2} \quad \text{soit} \quad t = 2u-1 \quad \text{et} \quad dt = 2du\ .$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{t+1}{2})^2+1}}\,dt &= \int_{\frac{c+1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,2du \\
&= \int_{\frac{c+1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du \\
&= \Big[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\Big]_{\frac{c+1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \\
&= \ln\big(\tfrac{x+1}{2}+\sqrt{(\tfrac{x+1}{2})^2+1}\big) + C \\
&= \ln\big(\tfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\big) + C \\
&= \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C'\ .
\end{aligned}$$

Voici une situation proche, mais qui du fait des signes rencontrés dans le trinôme, conduit à des résultats différents.

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{t^2-2t-3}}\,dt\ .$$

La fonction à intégrer est définie sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. Nous devons donc supposer que l'intervalle $[c,x]$ est soit inclus dans $]-\infty,-1[$, soit dans $]3,+\infty[$. La mise du trinôme sous forme canonique donne :

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{t^2-2t-3}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2-4}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{t-1}{2})^2-1}}\,dt\ .$$

Nous devons donc poser :

$$u = \frac{t-1}{2} \quad \text{soit} \quad t = 2u+1 \quad \text{et} \quad dt = 2du\ .$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{t-1}{2})^2-1}}\,dt &= \int_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,2du \\
&= \int_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du \\
&= \Big[\ln|u+\sqrt{u^2-1}|\Big]_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \\
&= \ln|\tfrac{x-1}{2}+\sqrt{(\tfrac{x-1}{2})^2-1}| + C \\
&= \ln|\tfrac{x-1+\sqrt{x^2-2x-3}}{2}| + C \\
&= \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}| + C' \; .
\end{aligned}$$

Comme prévu, les primitives ne sont définies que pour $x < -1$ ou $x > 3$. Remarquez que le signe de $x-1+\sqrt{x^2-2x-3}$ dépend de l'intervalle sur lequel on se trouve : il est négatif sur $]-\infty,-1[$, positif sur $]3,+\infty[$.

Voici le dernier cas que l'on peut rencontrer selon le signe du trinôme.

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}}\,dt \; .$$

La fonction à intégrer n'est définie que sur l'intervalle $]-1,3[$. Nous devons donc supposer que l'intervalle $[c,x]$ est inclus dans $]-1,3[$. La mise du trinôme sous forme canonique donne :

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{\sqrt{-(t-1)^2+4}}\,dt = \int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t-1}{2})^2}}\,dt \; .$$

Nous devons donc poser :

$$u = \frac{t-1}{2} \quad \text{soit} \quad t = 2u+1 \quad \text{et} \quad dt = 2du \; .$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_c^x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t-1}{2})^2}}\,dt &= \int_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2du \\
&= \int_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= \Big[\arcsin(u)\Big]_{\frac{c-1}{2}}^{\frac{x-1}{2}} \\
&= \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + C\ .
\end{aligned}$$

Comme prévu, les primitives ne seront définies que pour $x \in]-1,3[$.

Nous verrons plus loin d'autres applications classiques des changements de variable. Il n'est pas toujours facile de deviner le bon changement de variable. Pour cela, il faut se laisser guider par l'expression de f : si elle contient une fonction $\psi(t)$ et sa dérivée $\psi'(t)$, il pourra être judicieux de poser $u = \psi(t)$. Dans le cas le plus favorable, la fonction se met sous la forme $f(t) = g'(\psi(t))\psi'(t)$, qui est la dérivée de $g(\psi(t))$. Il suffira donc de connaître une primitive de g. Ceci ne relève pas directement du théorème 6.3.1, et s'applique d'ailleurs même si ψ n'est pas monotone. Voici un exemple, avec $\psi(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, et $\psi'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}$.

$$\int_c^x \frac{2t}{1+\mathrm{e}^{-t^2}}\,dt = \int_c^x \frac{2t\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^{t^2}+1}\,dt = \Big[\ln(1+\mathrm{e}^{t^2})\Big]_c^x = \ln(1+\mathrm{e}^{x^2}) + C\ .$$

6.4 Primitives des fractions rationnelles

On appelle *fraction rationnelle* le quotient de deux polynômes. La plupart des primitives que l'on sait calculer formellement se ramènent à des calculs de primitives de fractions rationnelles, par des changements de variable simples. Nous commençons par recenser les fractions rationnelles particulières dont on sait calculer une primitive. On les appelle les *éléments simples*. On note n un entier strictement positif, et a, b, c, α, β des réels quelconques.

1. x^n : primitive $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.
2. $\dfrac{1}{(x+a)^n}$: primitive $\ln|x+a|$ pour $n=1$ ou $\dfrac{1}{-n+1}\dfrac{1}{(x+a)^{n-1}}$ pour $n>1$.
3. $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$, avec $\Delta = b^2-4ac < 0$.

Le dernier type est le plus difficile à intégrer. La technique conseillée est la suivante. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée $2ax + b$ du trinôme.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} &= \frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax + b) + \beta - \frac{\alpha}{2a}b}{(ax^2 + bx + c)^n} \\ &= \frac{\alpha}{2a}\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} + (\beta - \frac{\alpha}{2a}b)\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} \ . \end{aligned}$$

Cette dernière expression est combinaison linéaire de deux termes. Le premier est de la forme $\frac{f'(x)}{f(x)^n}$. Une primitive est donc :

$$\int_\gamma^x \frac{2at + b}{(at^2 + bt + c)^n}\, dt = \Big[\frac{1}{-n + 1}\frac{1}{(at^2 + bt + c)^{n-1}}\Big]_\gamma^x = \frac{1}{-n + 1}\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C \ ,$$

si $n > 1$, ou bien :

$$\int_\gamma^x \frac{2at + b}{at^2 + bt + c}\, dt = \Big[\ln|at^2 + bt + c|\Big]_\gamma^x = \ln|ax^2 + bx + c| + C \ ,$$

si $n = 1$.

Reste à intégrer le second terme,

$$\int_\gamma^x \frac{1}{(at^2 + bt + c)^n}\, dt \ .$$

Il faut commencer par mettre le trinôme sous forme canonique :

$$at^2 + bt + c = a\left((t + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \ .$$

On effectue alors un changement de variable affine :

$$t + \frac{b}{2a} = v\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \ ,$$

qui ramène le calcul à celui d'une primitive du type :

$$I_n(u) = \int_{\gamma'}^u \frac{1}{(v^2 + 1)^n}\, dv \ .$$

Si $n = 1$, on obtient $\arctan u + C$. Pour $n > 1$, une astuce permet d'effectuer un calcul itératif en faisant baisser le degré du dénominateur.

$$\begin{aligned} I_n(u) &= \int_{\gamma'}^u \left(\frac{v^2 + 1}{(v^2 + 1)^n} - \frac{v^2}{(v^2 + 1)^n}\right) dv \\ &= \int_{\gamma'}^u \frac{1}{(v^2 + 1)^{n-1}}\, dv - \int_{\gamma'}^u \frac{2v.\frac{1}{2}v}{(v^2 + 1)^n}\, dv \ . \end{aligned}$$

Le premier terme est $I_{n-1}(u)$. Le second terme s'intègre par parties, en dérivant $\frac{1}{2}v$.

$$I_n(u) = I_{n-1}(u) - \Big[\frac{1}{-n+1}\frac{1}{(v^2+1)^{n-1}}.\frac{1}{2}v\Big]_{\gamma'}^{u} + \int_{\gamma'}^{u} \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(v^2+1)^{n-1}}.\frac{1}{2}\,dv\ .$$

On ramène donc ainsi le calcul de $I_n(u)$ à celui de $I_{n-1}(u)$. En itérant, on arrive à $I_1(u) = \arctan(u) + C$.

On peut se demander pourquoi le type 3 a été restreint aux dénominateurs tels que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. La raison est que dans le cas $\Delta \geq 0$, le type 3 se ramène au type 2. En effet, si $\Delta = 0$, le trinôme s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2\ .$$

Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles. Il s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)\ ,$$

où ρ_1 et ρ_2 désignent les deux racines. Or :

$$\frac{1}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)} = \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{x-\rho_1} + \frac{\frac{1}{\rho_2-\rho_1}}{x-\rho_2}$$

Une primitive de $\frac{1}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)}$ est donc :

$$\int_{\gamma}^{x} \frac{1}{(t-\rho_1)(t-\rho_2)}\,dt = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}(\log(|x-\rho_1| - \log(|x-\rho_2|) + C\ .$$

Nous commençons par généraliser ceci à des fractions rationnelles dont le dénominateur a deux racines réelles distinctes.

Proposition 6.4.1 *Soient n et m deux entiers, ρ_1 et ρ_2 deux réels distincts. Il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tels que :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-\rho_1)^n(x-\rho_2)^m} &= \frac{\alpha_1}{(x-\rho_1)} + \frac{\alpha_2}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(x-\rho_1)^n}\\ &+ \frac{\beta_1}{(x-\rho_2)} + \frac{\beta_2}{(x-\rho_2)^2} + \cdots + \frac{\beta_m}{(x-\rho_2)^m}\ .\end{aligned}$$

Démonstration : La démonstration s'effectue par récurrence sur $n+m$, en utilisant le cas $n = m = 1$ que nous avons déjà examiné. Notons $\mathcal{H}_{n,m}$ la propriété énoncée dans le théorème. Nous avons déjà montré que $\mathcal{H}_{1,1}$ est vraie. Pour tout n, m, $\mathcal{H}_{n,0}$ et $\mathcal{H}_{0,m}$ sont évidemment vraies. Pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-\rho_1)^n(x-\rho_2)^m} &= \left(\frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{x-\rho_1} + \frac{\frac{1}{\rho_2-\rho_1}}{x-\rho_2}\right)\frac{1}{(x-\rho_1)^{n-1}(x-\rho_2)^{m-1}}\\ &= \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{1}{(x-\rho_1)^n(x-\rho_2)^{m-1}} - \frac{1}{(x-\rho_1)^{n-1}(x-\rho_2)^m}\right)\ .\end{aligned}$$

Si $\mathcal{H}_{n,m-1}$ et $\mathcal{H}_{n-1,m}$ sont vraies, on en déduit que $\mathcal{H}_{n,m}$ est vraie. Donc $\mathcal{H}_{n,m}$ est vraie pour tout $n, m \geq 1$. $\square$

La décomposition que nous venons d'effectuer, d'une fraction rationnelle particulière en une combinaison linéaire d'éléments simples, se généralise à des fractions rationnelles quelconques. Nous ne donnerons pas la démonstration du théorème suivant, semblable à celle de la proposition précédente, mais beaucoup plus fastidieuse.

Théorème 6.4.2 *Considérons une fraction rationnelle du type $P(x)/Q(x)$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, supposés premiers entre eux (fraction irréductible). Considérons une factorisation du dénominateur $Q(x)$ sous la forme :*

$$Q(x) = (x-\rho_1)^{n_1} \cdots (x-\rho_k)^{n_k} (a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1} \cdots (a_hx^2+b_hx+c_h)^{m_h} ,$$

où $\rho_1, \ldots, \rho_k$ sont les racines réelles de Q, de multiplicités $n_1, \ldots, n_k$, et les trinômes $a_jx^2+b_jx+c_j$ sont ses facteurs de degré 2, de discriminant strictement négatif, correspondant aux racines complexes de Q.

La fraction rationnelle Q s'écrit comme combinaison linéaire des éléments simples suivants.

1. x^l, *où* $l = 0, \ldots, deg(P) - deg(Q)$.
2. $\dfrac{1}{(x-\rho_i)^l}$, *où* $i = 1, \ldots, k$ *et* $l = 1, \ldots, n_i$.
3. $\dfrac{\alpha x + \beta}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^l}$, *où* $j = 1, \ldots, h$ *et* $l = 1, \ldots, m_j$.

Pour comprendre cette décomposition, le mieux est d'examiner sa forme sur un cas particulier, rassemblant les différentes situations.

$$\begin{aligned}
\frac{x^{13}}{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x^2+1)^2(x^2+x+1)} &= A + Bx \\
&+ \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} \\
&+ \frac{F}{(x-2)} + \frac{G}{(x-2)^2} + \frac{H}{(x-3)} \\
&+ \frac{Ix+J}{(x^2+1)} + \frac{Kx+L}{(x^2+1)^2} \\
&+ \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)} ,
\end{aligned}$$

où les lettres $A, B, \ldots, M$ désignent des réels à déterminer. La théorie assure que ces réels existent et sont uniques. Il suffirait donc de réduire tous les éléments simples au même dénominateur, et d'identifier les numérateurs pour obtenir autant d'équations que d'inconnues (14 dans notre cas). Ce n'est pas ainsi qu'on procède en pratique. On utilise plusieurs techniques de manière à déterminer le plus de coefficients possibles par des équations simples. Voici ces techniques.

Pour la partie polynomiale.
Celle-ci est non nulle seulement dans le cas où le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur. Dans ce cas le polynôme cherché, que l'on appelle la partie entière, est le quotient $Ent(x)$ de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$:

$$P(x) = Ent(x)Q(x) + R(x) \ ,$$

où le reste $R(x)$ est de degré strictement inférieur au degré de $Q(x)$. Dans notre exemple, $Ent(x) = x + 9$. Il faut s'assurer auparavant que la fraction est bien irréductible, et la simplifier éventuellement si elle ne l'était pas.

Pour les termes en $(x - \rho_i)^{n_i}$.
Si on multiplie les deux membres de la décomposition par $(x-\rho_i)^{n_i}$, la racine ρ_i disparaît. On peut donc remplacer x par ρ_i, ce qui annule tous les termes de la décomposition sauf un. Il reste à gauche une certaine valeur, que l'on calcule en général facilement. Dans notre exemple, si on multiplie les deux membres par $(x - 1)^3$, et qu'on remplace x par 1, on trouve :

$$\frac{1^{13}}{(1-2)^2(1-3)(1^2+1)^2(1^2+1+1)} = E \ ,$$

soit $E = -\frac{1}{24}$.

Pour les termes en $(a_jx^2 + b_jx + c_j)^{m_j}$.
On procède de même, en remplaçant x par une des racines complexes du trinôme. Dans notre cas, on multiplie les deux membres par $(x^2+1)^2$, et on remplace x par $i = \sqrt{-1}$. On trouve :

$$\frac{i^{13}}{(i-1)^3(i-2)^2(i-3)(i^2+i+1)} = Ki + L \ .$$

On identifie alors la partie réelle et la partie imaginaire : $K = -\frac{1}{100}$ et $L = -\frac{1}{50}$.

Pour les autres termes.
Il faut chercher les équations les plus simples possibles, en prenant des valeurs particulières pour x, qui ne soient pas des racines du dénominateur ($x = 0$, $x = \pm 1$, etc...). On peut aussi penser à faire tendre x vers l'infini. On n'a recours à une réduction au même dénominateur avec identification des coefficients qu'en dernier ressort.

Grâce à la décomposition en éléments simples, nous sommes maintenant en mesure d'intégrer n'importe quelle fraction rationnelle, puisque nous savons intégrer chacun des éléments simples. Nous allons détailler l'exemple suivant.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^6+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \ .$$

Le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux, la fraction est bien irréductible. Sa décomposition en éléments simples a la forme suivante.

$$\frac{x^6+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = A + Bx + \frac{C}{(x-1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} \ .$$

La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$x^6+1 = (x-1)\Big((x-1)(x^2+x+1)^2\Big) + 2x^3 \ .$$

Donc $A=-1$, $B=1$, et :

$$\frac{x^6+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = -1 + x + \frac{2x^3}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \ .$$

On peut désormais ne travailler que sur la partie restante, à savoir :

$$\frac{2x^3}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{C}{(x-1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} \ .$$

On multiplie les deux membres par $(x-1)$, et on remplace x par 1. On trouve $C=\frac{2}{9}$.
On multiplie ensuite les deux membres par $(x^2+x+1)^2$, et on remplace x par $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $Fj+G = -1-i\frac{\sqrt{3}}{3}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve $-\frac{1}{2}F+G=-1$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}F = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. La solution de ce système de deux équations à deux inconnues est $F=-\frac{2}{3}$ et $G=-\frac{4}{3}$.
On peut ensuite remplacer x par i, et identifier partie réelle et partie imaginaire. On trouve $D=-\frac{2}{9}$ et $E=\frac{14}{9}$.
Il est bon de vérifier les calculs, par une ou plusieurs valeurs particulières.
Pour $x=0$: $0=-C+E+G$.
Pour $x=-1$: $-1 = A-B+\frac{C}{-2}+\frac{-D+E}{1}+\frac{-F+G}{1}$.
Après avoir enlevé la partie entière, si on multiplie les deux membres par x et qu'on fait tendre x vers $+\infty$: $0=C+D$.

Ayant la décomposition en éléments simples, nous sommes maintenant en mesure de calculer une primitive.

$$I(x) = \int_c^x \frac{t^6+1}{(t-1)(t^2+t+1)^2}\,dt = \int_c^x -1+t+\frac{\frac{2}{9}}{(t-1)}+\frac{-\frac{2}{9}t+\frac{14}{9}}{(t^2+t+1)}+\frac{-\frac{2}{3}t-\frac{4}{3}}{(t^2+t+1)^2}\,dt \ .$$

On calcule séparément 4 primitives.

$$I_1(x) = \int_c^x (-1+t)\,dt \quad , \quad I_2(x) = \int_c^x \frac{\frac{2}{9}}{t-1}\,dt$$

$$I_3(x) = \int_c^x \frac{-\frac{2}{9}t+\frac{14}{9}}{(t^2+t+1)}\,dt \quad , \quad I_4(x) = \int_c^x \frac{-\frac{2}{3}t-\frac{4}{3}}{(t^2+t+1)^2}\,dt \ .$$

Les deux premières sont faciles.

$$I_1(x) = \int_c^x (-1+t)\,dt = -x + \frac{x^2}{2} + C_1 \;.$$

$$I_2(x) = \int_c^x \frac{\frac{2}{9}}{t-1}\,dt = \left[\frac{2}{9}\ln|t-1|\right]_c^x = \frac{2}{9}\ln|x-1| + C_2 \;.$$

Les deux suivantes sont plus difficiles.

$$\begin{aligned} I_3(x) &= -\frac{1}{9}\int_c^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt + \frac{15}{9}\int_c^x \frac{1}{t^2+t+1}\,dt \\ &= -\frac{1}{9}\ln|x^2+x+1| + C_3 + \frac{5}{3}\int_c^x \frac{1}{t^2+t+1}\,dt \;. \end{aligned}$$

Calculons séparément la primitive suivante.

$$I_5(x) = \int_c^x \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int_c^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt \;.$$

Effectuons le changement de variable :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) = u \;, \text{soit } t = \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \text{ et } dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du \;.$$

$$I_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + C_5 \;.$$

En regroupant les calculs :

$$I_3(x) = -\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + C_3 \;.$$

Passons maintenant à $I_4(x)$:

$$\begin{aligned} I_4(x) &= -\frac{1}{3}\int_c^x \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,dt - \int_c^x \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+x+1} + C_4 - \int_c^x \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,dt \;. \end{aligned}$$

Calculons séparément la primitive suivante.

$$I_6(x) = \int_c^x \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,dt = \int_c^x \frac{1}{((t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}\,dt \;.$$

Effectuons le changement de variable :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) = u \;, \text{soit } t = \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \text{ et } dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du \;.$$

$$\begin{aligned}
I_6(x) &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{1}{(u^2+1)^2}\, du \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{1+u^2}{(u^2+1)^2}\, du - \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\, du \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + C_6 - \frac{8}{3\sqrt{3}} I_7(x)\ .
\end{aligned}$$

Calculons enfin $I_7(x)$ par parties :

$$\begin{aligned}
I_7(x) &= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{2u \cdot \frac{1}{2}u}{(u^2+1)^2}\, du \\
&= \Big[-\frac{1}{u^2+1} \cdot (\frac{1}{2}u)\Big]_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(c+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{\frac{1}{2}}{u^2+1}\, du \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + C_7\ .
\end{aligned}$$

En regroupant l'ensemble des résultats, on trouve :

$$\begin{aligned}
I(x) &= -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) \\
&+ \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) - \frac{2}{3}\frac{x}{x^2+x+1} + C\ .
\end{aligned}$$

6.5 Applications des fractions rationnelles

De nombreux calculs d'intégrales se ramènent, après un ou plusieurs changements de variable, à un calcul de primitive de fraction rationnelle. Nous allons distinguer 4 types principaux, et donner pour chacun un exemple. La fonction à intégrer est notée f. Nous supposons comme d'habitude que f est définie et continue sur l'intervalle d'intégration, et que les changements de variable proposés peuvent effectivement être appliqués.

• **Type 1 : f est une fraction rationnelle en e^t, $\cosh t$, $\sinh t$:**
Changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

Exemple :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sinh t}\, dt = \int_1^2 \frac{2}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}\, dt\ .$$

Posons :

$$u = \mathrm{e}^t \quad \text{soit} \quad t = \ln u \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{u}du\ .$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{2}{u-\frac{1}{u}}\frac{1}{u}du = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{2}{u^2-1}\,du \\ &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,du = \Big[\ln|u-1| - \ln|u+1|\Big]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \\ &= \ln\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} - \ln\frac{e-1}{e+1} = \ln\frac{(e+1)^2}{\mathrm{e}^2+1}\ . \end{aligned}$$

• **Type 2 : f est une fraction rationnelle en $\cos t$, $\sin t$, $\tan t$:**
Changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$.

En effet, si $u = \tan\frac{t}{2}$, alors :

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}\ , \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2}\ , \quad \tan t = \frac{2u}{1-u^2}\ , \quad dt = \frac{2}{1+u^2}du\ .$$

Exemple :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}du = \int_0^1 \frac{2}{3+u^2}\,du\ .$$

Pour intégrer cette fraction rationnelle, il faut effectuer un nouveau changement de variable :

$$v = \frac{u}{\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad u = \sqrt{3}v \quad \text{et} \quad du = \sqrt{3}dv\ .$$

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ présente l'inconvénient de conduire à des fractions parfois assez compliquées. On peut faire plus simple dans certains cas.

• Si f est un polynôme en $\cos t$ et $\sin t$: linéariser.
• Si $f(t)\,dt$ reste inchangé quand on remplace t par $-t$: poser $u = \cos t$.
• Si $f(t)\,dt$ reste inchangé quand on remplace t par $\pi - t$: poser $u = \sin t$.
• Si $f(t)\,dt$ reste inchangé quand on remplace t par $\pi + t$: poser $u = \tan t$.

A titre d'exemple, examinons l'effet de 4 changements de variable possibles pour calculer :

$$I(x) = \int_c^x \tan(t)\,dt = -\ln|\cos(x)| + C\ .$$

$$u = \tan\frac{t}{2} \quad \longrightarrow \quad I(x) = \int_{\tan\frac{c}{2}}^{\tan\frac{x}{2}} \frac{4u}{1-u^4}\,du$$

$$u = \cos t \quad \longrightarrow \quad I(x) = \int_{\cos c}^{\cos x} -\frac{1}{u}\,du$$

$$u = \sin t \quad \longrightarrow \quad I(x) = \int_{\sin c}^{\sin x} \frac{u}{1-u^2}\,du$$

$$u = \tan t \quad \longrightarrow \quad I(x) = \int_{\tan c}^{\tan x} \frac{u}{1+u^2}\,du$$

Evidemment, les 4 changements de variable conduisent au même résultat final, mais certains sont plus simples...

• **Type 3 : f est une fraction rationnelle en t et $(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{m}}$:**
Changement de variable $u = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{m}}$.

Exemple :

$$I = \int_c^x \frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}}\,dt\ .$$

Effectuons le changement de variable :

$$u = \sqrt[6]{1+t} \quad \text{soit} \quad t = u^6 - 1 \quad \text{et} \quad dt = 6u^5\,du\ .$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = \int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^3}{u+1}\,du \\
&= 6\int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}} u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\,du \\
&= 6\Big[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|\Big]_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}}\ .
\end{aligned}$$

• **Type 4 : f est une fraction rationnelle en t et $\sqrt{at^2+bt+c}$:**
Changement de variable $u = \sqrt{\frac{4a^2}{|b^2-4ac|}}(t+\frac{b}{2a})$.

Il est déconseillé de retenir par cœur ce changement de variable. L'idée est de mettre d'abord le trinôme sous forme canonique, puis d'effectuer le changement de variable adéquat pour se ramener à l'une des trois formes $\sqrt{u^2+1}$, $\sqrt{u^2-1}$ ou $\sqrt{1-u^2}$. Nous avons déjà vu un exemple pour chacun des 3 cas.

Une fois ce changement de variable affine effectué, il reste une fraction rationnelle en u et $\sqrt{u^2+1}$ ou bien $\sqrt{u^2-1}$ ou bien $\sqrt{1-u^2}$. Il faut effectuer alors un nouveau changement de variable pour se ramener à une intégrale du type **1** ou **2**.

1. fraction rationnelle en u et $\sqrt{u^2+1}$: changement de variable $u = \sinh v$.

2. fraction rationnelle en u et $\sqrt{u^2-1}$: changement de variable $u = \cosh v$.
3. fraction rationnelle en u et $\sqrt{1-u^2}$: changement de variable $u = \sin v$.

Exemple :

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{\left(\sqrt{t^2+3t+2}\right)^3}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2}{\left(\sqrt{(t+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}\right)^3}\,dt\ .$$

Effectuons le changement de variable :

$$u = 2t+3 \quad \text{soit} \quad t = \frac{1}{2}(u-3) \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{2}du\ .$$

$$I = \int_3^5 \frac{\frac{1}{4}(u-3)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\sqrt{u^2-1}\right)^3}\,\frac{1}{2}du = \int_3^5 \frac{(u-3)^2}{\left(\sqrt{u^2-1}\right)^3}\,du\ .$$

Nous devons alors remplacer u par $\cosh v$ (donc du par $\sinh v\,dv$).

$$I = \int_{\ln(3+\sqrt{8})}^{\ln(5+\sqrt{24})} \frac{(\cosh v-3)^2}{(\sinh v)^3}\,\sinh v\,dv = \int_{\ln(3+\sqrt{8})}^{\ln(5+\sqrt{24})} \frac{(\cosh v-3)^2}{(\sinh v)^2}\,dv$$

On exprime alors $\cosh v$ et $\sinh v$ en fonction de e^t :

$$I = \int_{\ln(3+\sqrt{8})}^{\ln(5+\sqrt{24})} \frac{(\frac{\mathrm{e}^v+\mathrm{e}^{-v}}{2}-3)^2}{(\frac{\mathrm{e}^v-\mathrm{e}^{-v}}{2})^2}\,dv = \int_{\ln(3+\sqrt{8})}^{\ln(5+\sqrt{24})} \frac{(\mathrm{e}^{2v}-6\mathrm{e}^v+1)^2}{(\mathrm{e}^{2v}-1)^2}\,dv$$

C'est une intégrale du type **1** : le changement de variable $w = \mathrm{e}^v$ nous ramène à une fraction rationnelle.

$$\begin{aligned} I &= \int_{3+\sqrt{8}}^{5+\sqrt{24}} \frac{(w^2-6w+1)^2}{(w^2-1)^2}\,\frac{1}{w}\,dw \\ &= \int_{3+\sqrt{8}}^{5+\sqrt{24}} \frac{1}{w} + \frac{4}{(w-1)^2} - \frac{16}{(w+1)^2}\,dw \\ &= \left[\ln|w| - \frac{4}{w-1} + \frac{16}{w+1}\right]_{3+\sqrt{8}}^{5+\sqrt{24}}\ . \end{aligned}$$

6.6 Vrai ou faux

Vrai-Faux 6.1 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.
2. ☒ Si une fonction est continue sur $[a,b]$, sauf en un point, alors f admet une primitive.
3. ☒ Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet une primitive qui s'annule en b.

4. ☐ Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ s'annule en un point de $[a, b]$.
5. ☒ Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$.
6. ☐ Toute primitive d'une fonction continue sur $]a, b[$ est dérivable à droite en a.

Vrai-Faux 6.2 Toutes les fonctions considérées sont supposées continues. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction négative ou nulle est négative ou nulle.
2. ☐ L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction minorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
3. ☐ L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
4. ☒ L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par 2 est inférieure ou égale à 4.
5. ☒ L'intégrale d'une fonction impaire sur $[-1, 1]$ est nulle.
6. ☒ Si une fonction f est telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) < x^3$, alors son intégrale sur $[-1, 1]$ est strictement négative.
7. ☒ Si l'intégrale d'une fonction f continue sur $[0, 1]$ vaut y, alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = y$.
8. ☐ Si l'intégrale d'une fonction f sur $[-1, 1]$ vaut y, alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 2y$.

Vrai-Faux 6.3 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Toute primitive d'une fonction négative ou nulle est décroissante.
2. ☐ Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.
3. ☐ Toute fonction continue est la primitive d'une fonction continue.
4. ☐ Si f est une fonction continue, alors $-\cos(f(x))$ est une primitive de $\sin(f(x))$.
5. ☐ Si f est une fonction continûment dérivable et ne s'annulant pas, $\ln(f(x))$ est une primitive de $\frac{f'(x)}{f(x)}$.
6. ☒ Si f est une fonction continûment dérivable, $\arctan(f(x))$ est une primitive de $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.

Vrai-Faux 6.4 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Il existe des primitives de $(1 - x^2)^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[0, 2]$.
2. ☒ Il existe des primitives de $(1 - x^2/2)^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. ☒ Il existe des primitives de $|1 - x^2|^{1/2}$ définies sur l'intervalle $[-2, 2]$.
4. ☐ Il existe des primitives de $|1 - x^2|^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[-2, 2]$.
5. ☐ Toute primitive de $\sin^8(x)$ est une fonction impaire.
6. ☒ Toute primitive de $\sin^9(x)$ est une fonction paire.
7. ☐ Une primitive de $\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ est $\mathrm{e}^{-t}\sin(t)$.

8. ☐ Une primitive de $\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ est $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\cos(t)+\sin(t))$.
9. ☒ Une primitive de $\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ est $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\sin(t)-\cos(t))$.
10. ☒ Une primitive de $\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t}\sin(t-\frac{\pi}{4})$.

Vrai-Faux 6.5 Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = -\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos(x)\,dx$.
2. ☐ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \int_0^\pi \cos(x)\,dx$.
3. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \pi - \int_0^\pi \cos(x)\,dx$.
4. ☐ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \pi - 2$.
5. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \pi$.
6. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = -2$.
7. ☐ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(2x)\,dx = \Big[\sin(2x)\Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos(2x)\,dx$.
8. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(2x)\,dx = 0$.
9. ☒ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi x\cos^2(x)\,dx$.
10. ☐ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx = \frac{\pi^2}{2}$.

Vrai-Faux 6.6 Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\,\frac{du}{2}$.
2. ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(u)\,\frac{du}{2}$.
3. ☒ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\,du$.
4. ☒ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u}{2\sqrt{1-u^2}}\,du$.
5. ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{u})}{u^2}\,du$.
6. ☒ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \frac{\sin(\ln(u))}{2u}\,du$.

6.7 Exercices

Exercice 6.1 Calculer les primitives suivantes, en utilisant les propriétés de l'exponentielle.

$$\int_c^x \cos^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sin^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cos^4(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sin^4(t)\,dt$$

$$\int_c^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cos(t)\sin^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cos^3(t)\sin(t)\,dt$$

$$\int_c^x \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt$$

$$\int_c^x \cosh^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sinh^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cosh^4(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sinh^4(t)\,dt$$

$$\int_c^x \cosh^2(t)\sinh^2(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cosh(t)\sinh^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cosh^3(t)\sinh(t)\,dt$$

$$\int_c^x \cosh^3(t)\sinh^2(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cosh^2(t)\sinh^3(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \cosh(t)\sinh^4(t)\,dt$$

$$\int_c^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^t\sin(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,dt$$

$$\int_c^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t-\frac{\pi}{4})\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{-2t}\cos(t+\frac{\pi}{4})\,dt$$

$$\int_c^x \mathrm{e}^{t}\cos(2t-\frac{\pi}{3})\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{-t}\cos(2t+\frac{\pi}{3})\,dt$$

Exercice 6.2 Calculer les primitives suivantes, en utilisant l'intégration par parties.

$$\int_c^x t\mathrm{e}^t\,dt \quad ; \quad \int_c^x t^2\mathrm{e}^t\,dt \quad : \quad \int_c^x t^3\mathrm{e}^t\,dt$$

$$\int_c^x t\ln(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x t^2\ln(t)\,dt \quad : \quad \int_c^x t^3\ln(t)\,dt$$

$$\int_c^x t\sin(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x t^2\sin(t)\,dt \quad : \quad \int_c^x t^3\sin(t)\,dt$$

$$\int_c^x t\cos(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x t^2\cos(t)\,dt \quad : \quad \int_c^x t^3\cos(t)\,dt$$

$$\int_c^x \arcsin(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x t\arcsin(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \arctan(t)\,dt \quad ;$$

$$\int_c^x (t^2+1)\arctan(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x (t^2+2t)\mathrm{e}^{3t}\,dt \quad ; \quad \int_c^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

Exercice 6.3 Calculer les primitives suivantes.

$$\int_c^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sin^3(t)\cos(t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \tan^4(t)+\tan^2(t)\,dt$$

$$\int_c^x \frac{2t+3}{(t^2+3t+5)^2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{t^2+2t+5}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt$$

$$\int_c^x \mathrm{t}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{\sin^2(t)}\sin(2t)\,dt \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{\sqrt{\sin(t)}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\,dt$$

Exercice 6.4 Calculer les primitives de fractions rationnelles suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{t(t-1)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^2-1}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2-1)}\,dt$$

$$\int_c^x \frac{t^3}{t^2+4}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{t^2+4)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^2}{t^2+3}\,dt$$

$$\int_c^x \frac{1}{t^2(t^2-1)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2-1)^2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}\,dt$$

$$\int_c^x \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2+1)^2}\,dt$$

$$\int_c^x \frac{2t+3}{(t-2)(t+5)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{(t-1)(t+1)(t+3)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^4-t^2-2}\,dt$$

$$\int_c^x \frac{1}{(t+2)(t^2+2t+5)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{16}{t^2(t^2+2)^3}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^4+1}{t(t-1)^3}\,dt$$

Exercice 6.5 Calculer les primitives suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\mathrm{e}^t}{1-\mathrm{e}^{2t}} \quad ; \quad \int_c^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1-\mathrm{e}^t}$$

$$\int_c^x \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+1}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\mathrm{e}^{3t}-2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+2}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}+1}$$

$$\int_c^x \frac{1}{1+\cosh(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)+\cosh(t)}\,dt$$

Exercice 6.6 Calculer les primitives suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{\sin(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\cos(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\,dt \quad ;$$

$$\int_c^x \frac{1}{1+\sin(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\cos(t)}{\tan(t)+\sin(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{2+3\sin(t)}{5-4\sin(t)}\cos(t)\,dt$$

$$\int_c^x \frac{\tan(t)+2}{\tan(t)-1}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{2+\cos(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{2+\sin(t)}\,dt$$
$$\int_c^x \frac{1}{\sin(t)(1+\cos^2(t))}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{1+2\cos^2(t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\cos t}{\sin^2 t+2\tan^2 t}\,dt$$
$$\int_c^x \frac{1}{\sin(t)+\sin(2t))}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\cos(t)\cos(2t)}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\cos t}{\sin(2t)\cos(3t)}\,dt$$

Exercice 6.7 Calculer les primitives suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{t+\sqrt{t-1}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{\sqrt{4t^2-1}}{\sqrt{2t+1}+2\sqrt{2t-1}}\,dt$$
$$\int_c^x \sqrt{\frac{t-1}{t}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt \qquad \int_c^x t\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}\,dt$$

Exercice 6.8 Calculer les primitives suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{\sqrt{t^2+2t}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2t}}\,dt$$
$$\int_c^x \frac{1}{t+\sqrt{t(4-t)}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\,dt$$
$$\int_c^x \frac{t}{1+\sqrt{t(t-1)}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{5t-3}{\sqrt{2t^2+8t+1}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x t\sqrt{-2t^2+t}\,dt$$
$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{-12t^2-12t-2}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2-2t}}\,dt$$

6.8 Compléments

Fonctions spéciales

Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle. La question du calcul d'une primitive recouvre en fait deux problèmes très différents. Le premier est celui du calcul *numérique* d'une ou plusieurs de ses valeurs, qui par nature sera une approximation (l'ordinateur ne peut donner que des résultats décimaux). L'autre problème est celui du calcul *formel*, qui consiste à trouver une expression d'une primitive à l'aide de fonctions connues. Considérons par exemple les fonctions suivantes. Ont-elles une primitive que l'on peut calculer ?

1. $x \to f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $x \to g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

La réponse est oui pour f, dont une primitive est $x \to \ln|x|$, dans la mesure où on considère que ln est une fonction connue. C'est non pour g sauf si on définit la fonction *logarithme intégral* que l'on note Li :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \,.$$

Cette fonction apparaît naturellement dans des problèmes pratiques, tout comme le logarithme ordinaire. De la même façon, on est amené à définir le *sinus intégral*, de cosinus intégral, l'exponentielle intégrale.

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad ; \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt \quad ; \quad \mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt$$

Encore étudiant, J.W.L. Glaisher (1848-1928) publia un article qur les fonctions sinus intégral, cosinus intégral et exponentielle intégrale, contenant des tables de valeurs inédites. Il deviendra un spécialiste reconnu du calcul de tables numériques.

Au cours du temps, de nombreuses fonctions sont ainsi apparues, et sont désormais intégrées aux logiciels de calcul. Une des plus connues est la fonction erf (pour "error function"), très utilisée en statistique, qui est définie comme suit.

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \,.$$

Toutes ces fonctions "spéciales", ont exactement le même statut mathématique que les fonctions usuelles : on peut les dériver, les intégrer, les associer à d'autres fonctions dans des formules, etc. Au moment de calculer numériquement une valeur particulière, un logiciel de calcul utilisera toujours un algorithme d'approximation ; mais c'est aussi le cas pour les fonctions usuelles... Alors pourquoi distinguer les fonctions spéciales des autres fonctions ? Peut-être parce que les fonctions usuelles vous posent déjà suffisamment de problèmes, sans en rajouter !

Intégrales elliptiques

Il y a plus de deux millénaires, Archimède savait déjà calculer l'aire délimitée par un arc de parabole. Pourtant, jusqu'au 17ème siècle, calculer la longueur d'un arc de courbe fut considéré comme impossible. L'idée qu'un arc de courbe puisse être mesuré au même titre qu'un segment de droite semblait même absurde à beaucoup de mathématiciens. Le progrès vint de l'idée que la longueur d'un arc de courbe puisse être approchée par celle d'une chaîne de segments ayant leurs extrémités sur la courbe. Pierre de Fermat (1601-1665) fut le premier à réaliser que le calcul d'un arc de courbe se ramenait au calcul de l'aire inscrite sous une autre courbe, soit en termes modernes, une intégrale.

Pourtant, même après que la méthode de calcul fut comprise, les tentatives pour calculer la longueur d'un arc d'ellipse échouèrent. Voici une des façons d'écrire le problème. Les équations paramétriques d'une ellipse parallèle aux axes sont :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

où a et b désignent les longueurs du demi-axe horizontal et du demi-axe vertical (figure 6.3).

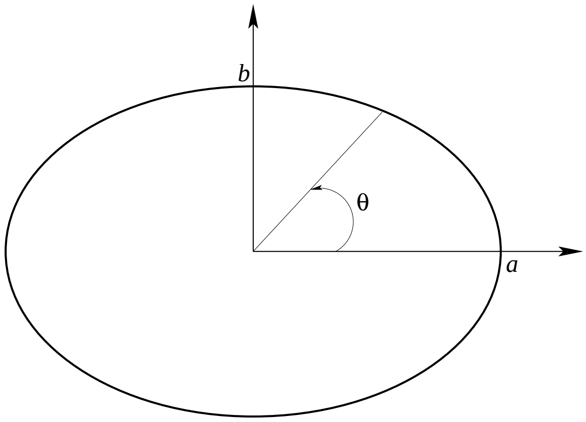

FIG. 6.3 – Ellipse d'équations paramétriques $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$.

La formule pour calculer la longueur d'un arc de courbe paramétrique entre deux valeurs t_0 et t_1 du paramètre est :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Ici la longueur de l'arc de courbe compris entre l'axe horizontal et le rayon d'angle θ est :

$$L(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\, dt$$

Dans le cas où l'ellipse est un cercle ($a = b$), il n'y a aucun problème car la fonction à intégrer est constante. Mais si $a \neq b$? Voici ce que donne le changement de variable $\sin(t) = u$, en posant $x = \sin(\theta)$:

$$L(\theta) = \int_0^x \frac{\sqrt{a^2u^2 + b^2(1-u^2)}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = b\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

avec $k^2 = 1 - a^2/b^2$ (quitte à effectuer une rotation de $\pi/2$, on peut supposer $a < b$). En multipliant en haut et en bas par le numérateur, il vient :

$$\frac{L(\theta)}{b} = \int_0^x \frac{1-k^2u^2}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{1-u^2}}\, du$$

soit

$$\frac{L(\theta)}{b} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{1-u^2}}\, du - k^2\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{1-u^2}}\, du$$

La seconde de ces deux primitives se calcule grâce à une intégration par parties. Mais la première ne se calcule pas : c'est ce qu'on appelle une *intégrale elliptique*.

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{1-u^2}}\, du$$

Le premier à s'être posé le problème est Wallis en 1655. Il avait exprimé le résultat sous forme d'une série entière, et montré que les longueurs d'autres arcs de courbes conduisaient à des problèmes du même type. Liouville devait démontrer plus tard que $I(x)$ ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles, mais dès la fin du 18ème siècle, on commence à étudier les propriétés de $I(x)$ comme une nouvelle fonction, à l'égal de l'exponentielle et des fonctions trigonométriques, sans plus chercher à la calculer explicitement.

Un progrès considérable fut réalisé indépendamment par Abel et Jacobi en 1826. Ils eurent l'idée, d'une part de prendre la réciproque de la fonction $x \mapsto I(x)$, d'autre part d'étendre cette réciproque en une fonction à valeurs complexes. Cette nouvelle fonction, et ses généralisations, allaient jouer un rôle important en analyse, en géométrie et en théorie des nombres. Les généralisations portent désormais le nom d'intégrales abéliennes, en hommage à Abel.

Né en 1802 dans une île proche de Stavanger en Norvège, Niels Henrik Abel, second fils d'une famille de 7 enfants, dut assumer à 18 ans, après le décès de son père, la responsabilité de sa famille. En plus des leçons particulières qu'il devait donner pour nourrir les siens, il continua à étudier, et à 20 ans, il écrivit un mémoire démontrant l'impossibilité de la résolution d'une équation du cinquième degré par radicaux. Avec son travail sur les intégrales elliptiques, il était déjà à 24 ans, l'auteur de plusieurs résultats majeurs. Il entreprit alors un tour d'Europe pour rencontrer les grands mathématiciens du moment. Malheureusement, auprès de Gauss comme de Cauchy, il se heurta à la négligence et l'incompréhension. Chargé de présenter les travaux d'Abel à l'Académie des Sciences, Cauchy égara le mémoire ; il ne le retrouva qu'en 1830, après la mort d'Abel, suite à une démarche diplomatique de la Norvège. Découragé et très démuni, Abel mourut d'une tuberculose pulmonaire avant d'avoir atteint ses 27 ans. Il n'a jamais su que son nom serait un jour donné à des fonctions, plusieurs théorèmes importants... et à un des prix les plus prestigieux en mathématiques.

Chapitre 7

Développements limités

Les développements limités sont l'outil principal d'approximation locale des fonctions. L'objectif de ce chapitre est de vous apprendre à les calculer. Vous aurez essentiellement besoin de savoir manipuler des polynômes, ainsi que d'avoir assimilé les limites, la comparaison des fonctions et la dérivation.

7.1 Polynômes de Taylor

Commençons par rappeler deux résultats fondamentaux que vous connaissez déjà par cœur (si ce n'est pas le cas, dépêchez-vous de les apprendre).

Théorème 7.1.1

- *Pour tout* $x \in]-1, 1[$ *:*

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \ . \tag{7.1.1}$$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ . \tag{7.1.2}$$

Le premier s'obtient à partir de l'identité :

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \ .$$

Le second se déduit de la formule du binôme de Newton et est démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

Il faut voir dans (7.1.1) et (7.1.2) des résultats d'*approximation* : ils permettent d'évaluer de manière relativement précise la valeur prise par une fonction, en calculant un polynôme (ce qui est non seulement facile à la main, mais surtout peu coûteux en temps de calcul). À ce propos, dans tout le chapitre nous commettons l'abus de langage consistant à désigner par "polynôme" ce qui est en fait une fonction polynomiale.

Considérons la formule (7.1.1). Notons :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \ .$$

La figure 7.1 montre une représentation graphique de la fonction f et des polynômes P_n pour n allant de 0 à 5. Plus n est grand, meilleure est l'approximation pour un x donné. Dans ce cas particulier, il est facile de calculer l'erreur commise si on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \; .$$

Cette erreur est donc de l'ordre de x^{n+1}. Pour être plus concret, pensez $x = 0.1$. Alors $x^n = 10^{-n}$ et $P_n(0.1) = 1.11\ldots1$. La différence $f(x) - P_n(x)$ vaut $10^{-n+1}/0.9$. Pour $n = 5$, on commet une erreur de l'ordre du millionième en remplaçant $1/0.9$ par 1.11111.

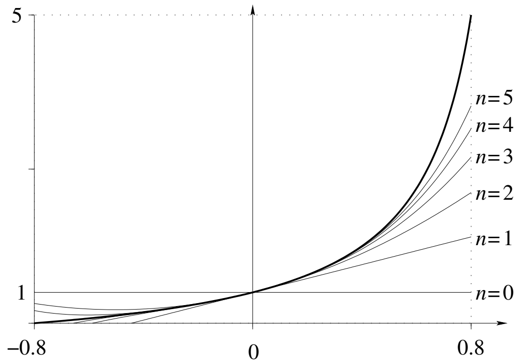

FIG. 7.1 – Fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

L'intérêt est plus flagrant pour l'exponentielle, pour laquelle il n'existe pas d'autre moyen de calcul que de l'approcher par des polynômes. Posons :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \; .$$

Le tableau ci-dessous donne la différence entre $f(0.1)$ et $P_n(0.1)$, pour n allant de 0 à 5 (voir la figure 7.2 pour la représentation graphique de f et $P_0, \ldots, P_5$).

n	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{e}^{0.1} - P_n(0.1)$	0.105	$5.2\ 10^{-3}$	$1.7\ 10^{-4}$	$4.3\ 10^{-6}$	$8.5\ 10^{-8}$	$1.4\ 10^{-9}$

Comment obtient-on les polynômes P_n à partir de f ? C'est très simple : on fait en sorte que leurs dérivées en 0 coïncident avec celles de la fonction jusqu'à l'ordre n :

$$\forall k = 0, \ldots, n \; , \quad f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0) \; .$$

Le polynôme P_n étant de degré n, il est entièrement déterminé par la donnée de ses $n+1$ coefficients :

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \; .$$

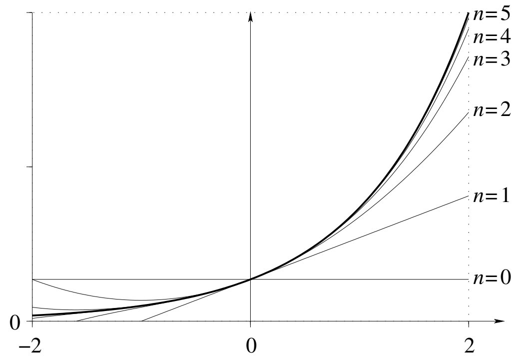

FIG. 7.2 – Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

Vérifiez sur les deux exemples ci-dessus : la dérivée n-ième en 0 de $x \mapsto 1/(1-x)$ est $n!$, celle de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est 1.

Ce que nous venons de voir au voisinage de 0, s'étend en n'importe quel point de la façon suivante.

Définition 7.1.2 *Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle* polynôme de Taylor *d'ordre n en a de f, le polynôme :*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

On appelle reste de Taylor *d'ordre n en a de f, la fonction R_n qui à $x \in I$ associe :*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) .$$

L'idée est de remplacer une fonction f que l'on ne sait pas calculer (ou difficilement) par un polynôme, qui est facilement calculable. Mais si $f(x)$ n'est pas calculable, alors bien sûr le reste $R_n(x)$ ne l'est pas non plus. On doit donc chercher des moyens d'estimer ou de majorer ce reste. Nous les étudierons à la section suivante. Le moins que l'on puisse demander quand on approche une fonction par un polynôme de degré n, est que le reste soit négligeable devant $(x-a)^n$. C'est le sens de la définition suivante.

Définition 7.1.3 *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) .$$

Nous verrons que toutes les fonctions usuelles admettent un développement limité pour lequel P_n est le polynôme de Taylor. Même si on ne les utilise jamais, il existe des fonctions qui ne vérifient pas les hypothèses de la définition 7.1.2 et qui pourtant admettent des développements limités. Par exemple la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,. \end{cases}$$

Elle vérifie évidemment $f(x) = o(x^3)$, elle admet donc des développements limités en 0 d'ordre 1, 2 et 3. Pourtant elle n'est continue sur aucun intervalle contenant 0.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition 7.1.4 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n) \,.$$

Désormais, nous simplifierons les écritures en n'écrivant plus que des développements limités en 0.

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition 7.1.5 *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré n tels que au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n) \,.$$

Alors $P_n = Q_n$.

Démonstration : Le polynôme $P_n - Q_n$ est de degré au plus n, et il est négligeable devant x^n au voisinage de 0. Ce n'est possible que s'il est nul. □

7.2 Formules de Taylor

Le résultat de base, le seul que vous ayez vraiment besoin de retenir, dit que sous les hypothèses de la définition 7.1.2, le reste de Taylor R_n est négligeable devant x^n au voisinage de 0, donc la fonction admet un développement limité, dont la partie polynomiale est son polynôme de Taylor d'ordre n. C'est le *théorème de Taylor-Young.*

Théorème 7.2.1 *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit R_n son* reste de Taylor *d'ordre n en 0 :*

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \right) \,.$$

Au voisinage de 0, R_n est négligeable devant x^n :

$$R_n(x) = o(x^n) \,.$$

Démonstration : c'est une récurrence assez simple.

Pour $n=1$, le résultat est une autre manière d'exprimer la dérivabilité de f en 0. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) ,$$

équivaut à :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x} = 0 .$$

Par définition, ceci signifie que $f(x)-f(0)-(x-0)f'(0)$ est négligeable devant x au voisinage de 0 :

$$f(x)-f(0)-xf'(0) = R_1(x) = o(x) .$$

Supposons maintenant que le résultat soit vrai à l'ordre $n-1$. Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n, alors f' les vérifie à l'ordre $n-1$. Or, le polynôme de Taylor d'ordre $n-1$ de f' est exactement $P_n'(x)$.

$$f'(0)+\frac{f''(0)x}{1!}+\cdots+\frac{f'^{(n-1)}(0)x^{n-1}}{(n-1)!} = \left(f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}\right)' .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que :

$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = o(x^{n-1}) .$$

En revenant aux définitions, ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x| \leqslant \eta \implies \left|\frac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leqslant \varepsilon .$$

Fixons x dans l'intervalle $]0,\eta]$ et appliquons le théorème des accroissement finis à $R_n(x)$, sur l'intervalle $[0,x]$:

$$\exists c \in]0,x[, \quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c) .$$

Alors :

$$\left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leqslant \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leqslant \varepsilon .$$

Le raisonnement est le même pour $x \in [-\eta, 0[$. Nous avons donc montré que $R_n(x)$ est négligeable devant x^n. D'où le résultat, par récurrence. □

La plupart des fonctions que vous aurez à manipuler sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition. Elles admettent donc des développements limités à tout ordre.

Corollaire 7.2.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0. Pour tout entier n, f admet un développement limité d'ordre n en 0. Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n. Au voisinage de 0,*

$$R_n(x) \sim \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\, x^{n+1} .$$

Démonstration : D'après le théorème 7.2.1, f admet un développement limité aux ordres n et $n+1$, pour tout n. Or :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\, x^{n+1} + R_{n+1}(x)\ .$$

Comme $R_{n+1}(x)$ est négligeable devant x^{n+1}, le rapport de $R_n(x)$ à $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$ tend vers 1. D'où le résultat. □

Moyennant une hypothèse à peine plus forte que celle du théorème 7.2.1, on peut donner un résultat plus précis sur le reste de Taylor R_n : la *formule de Taylor avec reste intégral.*

Théorème 7.2.3 *Soit n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I (c'est-à-dire $n+1$ fois dérivable, de dérivée $(n+1)$-ième continue). Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n en 0.*

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\ . \tag{7.2.3}$$

Démonstration : c'est encore une récurrence.

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Pour n quelconque, posons :

$$I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\ ,$$

et intégrons par parties.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + I_{n-1}\ . \end{aligned}$$

Si on suppose la formule vraie à l'ordre $n-1$, alors $I_{n-1} = R_{n-1}(x)$, or :

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_n(x)\ ,$$

donc $R_n(x) = I_n$: le résultat est vrai à l'ordre n. Il est donc vrai pour tout n, par récurrence. □

7.3 Opérations sur les développements limités

Nous allons traduire sur les développements limités les opérations habituelles sur les fonctions (somme, produit, composition, dérivation, intégration). Ces résultats permettent de calculer les développements limités de toutes les fonctions que vous rencontrerez, à condition de connaître un petit nombre de développements, ceux des fonctions les plus courantes.

Théorème 7.3.1 *Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soient f et g deux fonctions définies sur I, admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

1. somme : *$f + g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.*
2. produit : *fg admet un développement limité en a, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.*
3. composition : *si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un développement limité en a, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $P_n \circ Q_n$.*

Démonstration : Rappelons que si r et s sont deux fonctions négligeables devant x^n, alors leur somme, ainsi que leurs produits par des fonctions bornées sont encore négligeables devant x^n. En particulier :

$$f(x) + g(x) = \Big(P_n(x) + o(x^n)\Big) + \Big(Q_n(x) + o(x^n)\Big) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

Pour le produit, il suffit d'écrire :

$$f(x)g(x) = \Big(P_n(x) + o(x^n)\Big)\Big(Q_n(x) + o(x^n)\Big) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

Si on note A_n le polynôme formé des termes de degré au plus n dans P_nQ_n, alors $P_n(x)Q_n(x) - A_n(x) = o(x^n)$. On a bien :

$$f(x)g(x) = A_n(x) + o(x^n)\ .$$

Le raisonnement est analogue pour la composition. □

Par exemple, avec

$$f(x) = 1 - x - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + x^2 + o(x^2)\ ,$$

on obtient :

$$f(x)+g(x) = 1+x+o(x^2)\ , \quad f(x)g(x) = 2x-x^2+o(x^2)\ , \quad f\circ g(x) = 1-2x-3x^2+o(x^2).$$

En règle générale, il faut toujours commencer un calcul avec des développement limités qui soient tous au moins de l'ordre final souhaité, quitte à ne pas calculer en cours de route les termes négligeables. Il peut être nécessaire de partir d'un ordre supérieur à l'ordre souhaité, nous en verrons des exemples.

Théorème 7.3.2 *Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n, et R_n le reste.*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \ , \quad R_n(x) = o(x^n) \ .$$

1. dérivation : *la dérivée f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f.*

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}) \ .$$

2. intégration : *toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.*

Par exemple, si $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, et F est une primitive de f, alors :

$$f'(x) = -1 + 2x + o(x) \quad \text{et} \quad F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \ .$$

Démonstration : Pour la dérivation, c'est une observation que nous avons déjà utilisée dans la démonstration du théorème de Taylor-Young (théorème 7.2.1). L'intégration est la même observation, appliquée à la primitive. □

Dans la section suivante, nous mettrons en pratique ces résultats pour calculer les développements limités des fonctions usuelles.

7.4 Développement des fonctions usuelles

Tous les développement limités de cette section sont *au voisinage de* 0. Pour les obtenir, le premier moyen est de calculer les dérivées successives et d'en déduire le polynôme de Taylor. On obtient ainsi les développements suivants, que vous devrez connaître par cœur.

Théorème 7.4.1 *Soit n un entier, α un réel.*

1. $\boxed{\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .}$

2. $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \ .}$

3. $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ .}$

4. $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \ .}$

5. $\boxed{(1+x)^\alpha = \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \ .}$

Démonstration : Nous avons déjà vu le développement limité de l'exponentielle : les dérivées successives en 0 sont toutes égales à 1. Nous avions aussi traité le développement de $1/(1-x)$, dont la dérivée n-ième en 0 vaut $n!$. Pour le sinus et le cosinus,

$$\sin'(x) = \cos(x)\ ,\quad \sin''(x) = -\sin(x)\ ,\quad \sin^{(3)}(x) = -\cos(x)\ ,\quad \sin^{(4)}(x) = \sin(x)\ .$$

Les dérivées successives en 0 de sin et cos valent alternativement, 0 et ± 1. Précisément :

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \equiv 0 \quad [4] \\ 1 & \text{si} \quad n \equiv 1 \quad [4] \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 2 \quad [4] \\ -1 & \text{si} \quad n \equiv 3 \quad [4]\ , \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv 0 \quad [4] \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 1 \quad [4] \\ -1 & \text{si} \quad n \equiv 2 \quad [4] \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 3 \quad [4]\ . \end{cases}$$

La figure 7.3 représente les fonctions sinus et cosinus avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Le point *5* peut être vu comme une généralisation de la formule du binôme de Newton ; si α est un entier positif, $(1+x)^\alpha$ est un polynôme, et tous les termes du développement sont nuls à partir de $n = \alpha + 1$. Dans le cas général, la dérivée n-ième de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est :

$$x \longmapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\ .$$

La démontration par récurrence est facile. On en déduit immédiatement la formule annoncée. □

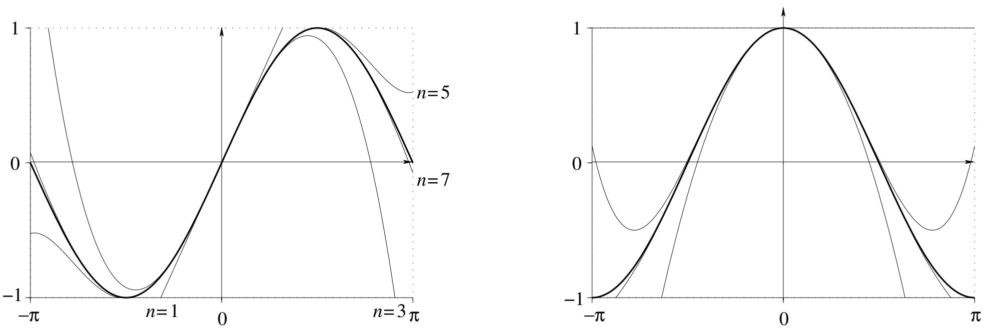

FIG. 7.3 – Fonctions sinus et cosinus avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Constatez que le développement du sinus ne contient que des termes impairs, celui du cosinus que des termes pairs. C'est une propriété générale qui se démontre facilement : si une fonction est paire, ses dérivées d'ordre impair en 0 sont nulles, donc son polynôme de Taylor ne contient que des termes pairs ; si la fonction est impaire, ce sont ses dérivées d'ordre pair qui s'annulent et le polynôme de Taylor ne contient que des termes impairs.

A partir des cinq développements du théorème 7.4.1, on peut en calculer beaucoup d'autres. Par exemple par linéarité à partir du développement de l'exponentielle :

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ .$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \; .$$

Il est à noter que les développements du sinus et cosinus ordinaires peuvent se retrouver de la même façon en utilisant les formules d'Euler. La figure 7.4 représente les fonctions sinh et cosh avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0. Observez que dans les deux cas, le quatrième polynôme ne se distingue pas de la fonction sur l'intervalle de représentation.

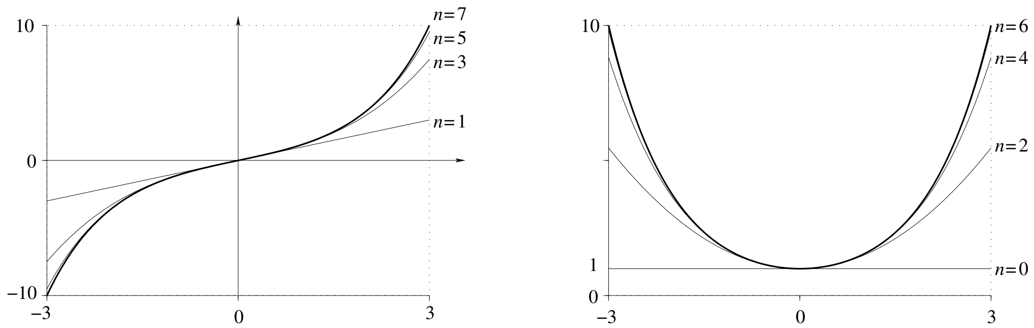

FIG. 7.4 – Fonctions sinus et cosinus hyperboliques avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Utilisons maintenant le développement de $1/(1-x)$. Par composition avec $x \mapsto -x$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \; .$$

La primitive nulle en 0 est $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \; .$$

La figure 7.5 représente la fonction ln et ses six premiers polynômes de Taylor.

Par composition avec $x \mapsto x^2$, on obtient aussi :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \; .$$

La primitive nulle en 0 est $\arctan(x)$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \; .$$

Utilisons enfin le développement de $(1+x)^\alpha$. Pour $\alpha = -1$, on retrouve le développement de $1/(1+x)$ que nous avons déjà écrit. Les cas les plus fréquents sont $\alpha = 1/2$,

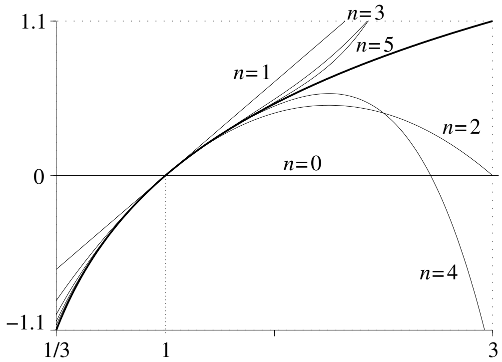

FIG. 7.5 – Fonction ln et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

$\alpha = -1/2$ et ceux où α est un entier négatif.

$$\sqrt{1+x} \quad = \quad 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n(n!)}\,x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad = \quad 1 - \frac{1}{2}\,z + \frac{3}{8}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n}1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(n!)}\,x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{(1+x)^k} \quad = \quad 1 - k\,x + \frac{k(k+1)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\,x^n + o(x^n)\ .$$

Du développement de $1/\sqrt{1+x}$, on déduit celui de $1/\sqrt{1-x^2}$, par composition avec $x \mapsto -x^2$. La primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$ nulle en 0 est $\arcsin(x)$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad = \quad 1 + \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{3}{8}\,z^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n} + o(x^{2n})\ .$$

$$\arcsin(x) \quad = \quad x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{40}\,x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\ .$$

Pour illustrer les différentes techniques, nous proposons de calculer le développement de la fonction tangente d'ordre 5 par sept méthodes différentes. Nous ne détaillons pas tous les calculs : il vous est vivement conseillé de les reprendre par vous-mêmes.

Méthode 1 : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Partez avec les développements limités de sin et cos à l'ordre 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\ .$$

Calculez ensuite le développement de $1/\cos(x)$. (il est inutile d'écrire les termes de degrés supérieurs à 5).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-\left(x^2-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)} \\
&= 1+\left(x^2-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)+\left(x^2-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2+o(x^5) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^5)\;.
\end{aligned}$$

Il reste à effectuer le produit par le développement de $\sin(x)$.

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^5)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\;.$$

Méthode 2 : $\tan(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

Attention, il y a un piège : si vous procédez comme pour la méthode précédente, voici ce que vous trouvez.

$$1-\cos(2x)=2x^2-\frac{2x^4}{3}+o(x^5)\quad\text{et}\quad\sin(2x)=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}+o(x^5)\;.$$

Donc :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^4)}{2-\frac{4x^2}{3}+\frac{4x^4}{15}+o(x^4)}\;.$$

Tout ce que vous pourrez en déduire, c'est un développement à l'ordre 4, et non 5. Pour éviter cela, il faut augmenter l'ordre au départ.

$$1-\cos(2x)=2x^2-\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^6}{45}+o(x^6)\quad\text{et}\quad\sin(2x)=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}+o(x^6)\;.$$

Donc :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{45}+o(x^5)}{1-\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+o(x^5)}\;.$$

Vous calculez séparément :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{2x^4}{15}+o(x^5)\right)} &= 1+\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{2x^4}{15}\right)+\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2+o(x^5) \\
&= 1+\frac{2x^2}{3}+\frac{14x^4}{45}+o(x^5)\;,
\end{aligned}$$

puis vous effectuez le produit :

$$\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{45}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{2x^2}{3}+\frac{14x^4}{45}+o(x^5)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\;.$$

Méthode 3 : $\tan^2(x) = -1 + \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
Même piège que précédemment : si vous partez de développements d'ordre 5, vous n'obtiendrez finalement que l'ordre 4. Les calculs successifs sont les suivants.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \ ,$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + o(x^6) \ , \\
\frac{1}{\cos^2(x)} &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ , \\
-1 + \frac{1}{\cos^2(x)} &= x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1 + \frac{1}{\cos^2(x)}} &= \sqrt{x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)} \\
&= x\sqrt{1 + \left(\frac{2x^2}{3} + \frac{17x^4}{45} + o(x^4)\right)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

Il peut vous paraître osé d'avoir remplacé $\sqrt{x^2}$ par x sans se préoccuper du signe : il se trouve que l'expression obtenue est aussi valable pour $x < 0$ (pensez que la fonction est impaire).

Méthode 4 : $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
Comme nous prendrons une primitive à la fin, il suffit d'un développement d'ordre 4 pour la dérivée (ce qui en l'occurrence ne change pas grand-chose).

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \ .$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \ .$$

Il reste à prendre la primitive, en utilisant le fait que le terme constant est nul.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .$$

Méthode 5 : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
Nous avons ici une équation dont l'inconnue est le développement cherché. Comme la

fonction tangente est impaire, nous savons que son développement d'ordre 5 est de la forme $a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \big(\,a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)\,\big)^2 = 1 + a\,x^2 + 2ab\,x^4 + o(x^4)\ .$$

La primitive nulle en 0 a pour développement :

$$x + \frac{a\,x^3}{3} + \frac{2ab\,x^5}{5} + o(x^5)\ .$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & a/3 \\ 2ab/5 & = & c\ . \end{array}\right.$$

On obtient donc : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

Méthode 6 : $\tan(x) = -\big(\ln(\cos)\big)'(x)$.
Comme nous dériverons à la fin, nous devons commencer avec des développements d'ordre 6.

$$\begin{array}{rcl} \ln(\cos(x)) & = & \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right) \\ & = & \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\ & = & -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)\ . \end{array}$$

L'opposé de la dérivée donne bien :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

Méthode 7 : $\tan(\arctan(x)) = x$.
Nous connaissons le développement de arctan d'ordre 5 :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\ .$$

Soit $\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$ le développement cherché. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \tan(\arctan(x)) & = & a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + b\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + c\big(\,x\,\big)^5 + o(x^5) \\ & = & a\,x + (-a/3 + b)\,x^3 + (a/5 - b + c)\,x^5 + o(x^5)\ . \end{array}$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ -a/3 + b & = & 0 \\ a/5 - b + c & = & 0\ . \end{array}\right.$$

On obtient encore : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

7.5 Développements asymptotiques

On trouve dans les développements limités une idée simple, qui est l'idée de base de toute approximation : pour approcher une fonction au voisinage d'un point, il faut choisir une échelle "d'infiniment petits" (les x^n dans le cas des développements ordinaires). On écrit alors l'approximation souhaitée comme une combinaison linéaire des infiniment petits de l'échelle. Bien d'autres échelles que les x^n sont possibles. On peut aussi transposer la même idée pour des développements au voisinage de $+\infty$, ou encore pour des échelles d'infiniment grands. Nous ne ferons pas de théorie générale des développement asymptotiques dans cette section. Nous nous contenterons d'une liste d'exemples, qui se déduisent tous par composition des développement limités ordinaires. Cette liste est loin d'être exhaustive, mais vous donnera une idée du type de généralisations que l'on peut donner aux polynômes de Taylor. Reprendre vous-mêmes les calculs est un exercice conseillé...

Échelle des x^α au voisinage de 0^+

$$\begin{aligned}\sqrt{x+x^2} &= \sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\\ &= x^{1/2}+\frac{x^{3/2}}{2}-\frac{x^{5/2}}{8}+o(x^{5/2})\,.\end{aligned}$$

$$\sin(x^{2/3}) = x^{2/3}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^{10/3}}{120}+o(x^{10/3})\,.$$

Échelle des $x^n\ln^m(x)$ au voisinage de 0^+

$$\ln(x)\sin(x) = x\ln(x)-\frac{x^3\ln(x)}{6}+\frac{x^5\ln(x)}{120}+o(x^5\ln(x))$$

$$\begin{aligned}x^{x^2+x} &= \exp\big((x^2+x)\ln(x)\big)\\ &= 1+x\ln(x)+x^2\ln(x)+\frac{1}{2}x^2\ln^2(x)+2x^3\ln^2(x)+\frac{1}{3}x^3\ln^3(x)+o(x^3)\,.\end{aligned}$$

Échelle des x^{-n} au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{1}{x}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\\ &= \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\,.\end{aligned}$$

Échelle des $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$

$$\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + o(\mathrm{e}^{-3x}) \ .$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+\mathrm{e}^{x/3}}{1+\mathrm{e}^{x/2}} &= \mathrm{e}^{-x/6}\frac{1+\mathrm{e}^{-x/3}}{1+\mathrm{e}^{-x/2}} \\
&= \mathrm{e}^{-x/6}\big(1+\mathrm{e}^{-x/3}\big)\big(1-\mathrm{e}^{-x/2}+\mathrm{e}^{-x}+o(\mathrm{e}^{-x})\big) \\
&= \mathrm{e}^{-x/6}+\mathrm{e}^{-x/2}-\mathrm{e}^{-2x/3}-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-7x/6}+o(\mathrm{e}^{-7x/6}) \ .
\end{aligned}$$

Échelle des x^{-n} au voisinage de 0^+

$$\begin{aligned}
\tan(\pi/2-x) &= \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x+x^3/3+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x^2/3+o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x) \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} &= \\
&= \frac{x-x^3/6+x^5/120+o(x^5)}{(x^2/2-x^4/24+x^6/720+o(x^6))^2} \\
&= \frac{x-x^3/6+x^5/120+o(x^5)}{x^4(1/2-x^2/24+x^6/720+o(x^2))^2} \\
&= \frac{4}{x^3}\,\frac{1-x^2/6+x^4/120+o(x^4)}{1-x^2/6+x^4/80+o(x^4)} \\
&= \frac{1}{4x^3}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{11x^4}{720}+o(x^4)\right) \\
&= \frac{4}{x^3}-\frac{x}{60}+o(x) \ .
\end{aligned}$$

Échelle des $x^{-\alpha}$ au voisinage de 0^+

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\ln(1+x)}} &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^{-1/2} \\
&= x^{-1/2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1/2} \\
&= x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{4}-\frac{7x^2}{96}+o(x^2)\right) \\
&= x^{-1/2}+\frac{x^{1/2}}{4}-\frac{7x^{3/2}}{96}+o(x^{3/2}) \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{\sqrt{\sin^3(x)}} &= \frac{\left(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)\right)^{1/3}}{\left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)^{3/2}} \\
&= x^{-7/6}\frac{\left(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^3)\right)^{1/3}}{\left(1 - x^2/6 + o(x^2)\right)^{3/2}} \\
&= x^{-7/6}\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\
&= x^{-7/6}\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&= x^{-7/6} - \frac{x^{-1/6}}{6} + \frac{x^{5/6}}{3} + o(x^{5/6})\;.
\end{aligned}$$

7.6 Vrai ou faux

Vrai-Faux 7.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = x + x^2 + o(x^4)$. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☐ La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0.
2. ☒ La fonction f est continue en 0.
3. ☒ La dérivée de f en 0 est égale à 1.
4. ☐ Si f est 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(2)}(0) = 1$.
5. ☒ Si f est 3 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(3)}(0) = 0$.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre 3 en 0.
7. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ admet un développement limité d'ordre 5 en 0.
8. ☐ $f^2(x) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
9. ☒ $f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
10. ☐ $f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$.
11. ☐ $f(x^4) = o(x^4)$.
12. ☒ $f(2x^2) \sim 2x^2$.

Vrai-Faux 7.2 Soient f et g deux fonctions, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ La fonction $f + g$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
2. ☒ La fonction fg admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
3. ☐ La fonction f/g admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
4. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
5. ☐ La fonction $x \mapsto x^2 f(x) + g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f^2(x)g^2(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.

Vrai-Faux 7.3 Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^3 + o(x^3) .$$

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ $f(x) + g(x) = o(x^2)$.
2. ☐ $f(x) - g(x) = o(x)$.
3. ☐ $f(x) + 2g(x) = o(f(x))$.
4. ☒ $2f(x) + g(x) \sim f(x)$.
5. ☐ $f(x)g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$.
6. ☒ $f^2(x) - g^2(x) \sim 4x^4$.
7. ☐ $f^2(x)g(x) \sim x^3$.
8. ☒ $f(x)g^2(x) \sim x^3$.

Vrai-Faux 7.4 Soit n un entier quelconque. On note f la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, prolongée par continuité en 0. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Pour tout n, f admet un développement limité d'ordre n en 0.
2. ☐ Pour tout n, le développement limité d'ordre n de f ne contient que des termes impairs.
3. ☐ Pour tout n, $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre n en 0.
4. ☒ $f(x^2) - 1 = O(x^4)$.
5. ☒ $(f(x) - 1)^2 = O(x^4)$.
6. ☐ $f(x) - \cos(x) = O(x^4)$.
7. ☒ $f(x) - \cos(x/\sqrt{3}) = O(x^4)$.

Vrai-Faux 7.5 Soient n un entier et f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Les propositions portent sur des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que f est *paire*. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☐ Le développement de $1/f$ ne contient que des termes impairs.
2. ☐ Le développement de $x \mapsto f(x^3)$ ne contient que des termes impairs.
3. ☒ Le développement de $x \mapsto f(\sin(x))$ ne contient que des termes pairs.
4. ☒ Le développement de $x \mapsto \sin(x)f(x)$ ne contient que des termes impairs.
5. ☐ Le développement de $x \mapsto xf(x)/|x|$ ne contient que des termes impairs.
6. ☒ Le développement de f'' ne contient que des termes pairs.
7. ☐ Si F est une primitive quelconque de f, le développement de F ne contient que des termes impairs.

Vrai-Faux 7.6 Sit n un entier. Les propositions suivantes portent sur des développements limités d'ordre n en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + \cdots + 2^n x^n + o(x^n)$.
2. ☐ $\dfrac{1}{2-x} = 1 + (1-x) + \cdots + (1-x)^n + o(x^n)$.
3. ☒ $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \cdots + \dfrac{x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.
4. ☒ $\dfrac{1}{2+3x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.
5. ☐ $\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
6. ☐ $\dfrac{1-x}{1+x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
7. ☒ $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$.
8. ☐ $\dfrac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + 3nx^n + o(x^n)$.

Vrai-Faux 7.7 Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\mathrm{e}^{x-1} = x + o(x)$.
2. ☒ $\mathrm{e}^{x-1} = 1/\mathrm{e} + o(1)$.
3. ☒ $\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$.
4. ☐ $\mathrm{e}^{x^2-1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$.
5. ☒ $\mathrm{e}^{(x-1)^2} = \mathrm{e} - 2\mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$.
6. ☐ $(\mathrm{e}^x - 1)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.
7. ☐ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 = o(x)$.
8. ☒ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 - 2x = 2x^2 + o(x^2)$.

Vrai-Faux 7.8 Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sin(2x) = 2x - x^3/3 + o(x^3)$.
2. ☒ $\sin(\pi/2 - x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
3. ☒ $\sin(\tan(x)) = x + o(x^2)$.
4. ☐ $\sin(\sin(x)) = x - x^3/6 + o(x^3)$.
5. ☒ $\cos(\sin(x)) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
6. ☐ $\sin(\cos(x)) = o(x)$.
7. ☐ $\tan(\sin(x)) = x + x^3/3 + o(x^3)$.
8. ☒ $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = o(x^6)$.

Vrai-Faux 7.9 Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sqrt{2+x} = 1 + (1+x)/2 + o(1+x)$.
2. ☐ $\sqrt{4+x} = 2 + x/2 + o(x)$.
3. ☒ $1/\sqrt{4+x} = 1/2 - x/16 + o(x)$.
4. ☐ $\sqrt[3]{3+x} = 1 + x/3 + o(x)$.
5. ☒ $1/\sqrt[3]{1-3x} = 1 + x + o(x)$.
6. ☒ $\sqrt[3]{1+3x^3} = 1 + x^3 + o(x^5)$.
7. ☒ $(8+3x)^{2/3} = 4 + x + o(x)$.
8. ☐ $(8+3x)^{-2/3} = 1/4 + x + o(x)$.

Vrai-Faux 7.10 Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(1-x) = -x + x^2/2 + o(x^2)$.
2. ☒ $\ln(1-x^2) = -x^2 - x^4/2 - x^6/3 + o(x^6)$.
3. ☐ $\ln(1+\mathrm{e}^x) = 1 + x + o(x)$.
4. ☒ $\ln(\cos(x)) = -x^2/2 + o(x^3)$.
5. ☒ $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2) - x^2/4 + o(x^3)$.
6. ☐ $\ln(1+\sin(x)) = x + o(x^2)$.
7. ☒ $\ln(1+\sin(x)) - \ln(1+\tan(x)) = o(x^2)$.
8. ☐ $\ln(1+x^2) - \ln((1+x)^2) = o(x)$.

Vrai-Faux 7.11 Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
2. ☐ $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. ☐ $\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
4. ☒ $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
5. ☒ $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln(x) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. ☐ $x^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
7. ☒ $\mathrm{e}^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{314}}\right)$.

Vrai-Faux 7.12 Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de 0^+. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x} + x/2 + o(x)$.
2. ☒ $\sqrt{x+\sqrt{x}} = x^{1/4} + x^{3/4}/2 + o(x^{3/4})$.
3. ☐ $\cos(x^{2/5}) = 1 + o(x)$.
4. ☐ $\sin(\sqrt[3]{x^3+x^5}) = x + o(x^2)$.
5. ☒ $\dfrac{\ln(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\ln(x)}{x} + o(x\ln(x))$.
6. ☒ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x)} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
7. ☐ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
8. ☒ $\dfrac{\ln(\sqrt{1+x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x})$.

7.7 Exercices

Exercice 7.1 Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f\ : x \mapsto \sin(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \cos(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \ln(1+x)\ , \quad f\ : x \mapsto \arctan(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \arcsin(x)\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \sinh(x^2)\ , \quad f\ : x \mapsto \cosh(x^2)\ , \quad f\ : x \mapsto \ln(1+x^2)\ .$$

1. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre $n = 5$. Écrire le polynôme de Taylor P_5.
2. Pour $x = 0.1$ puis $x = 0.01$, donner une valeur numérique approchée de $f(x) - P_5(x)$.

Exercice 7.2 Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f\ : x \mapsto \sin(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \cos(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \ln(1+x)\ , \quad f\ : x \mapsto \arctan(x)\ , \quad f\ : x \mapsto \arcsin(x)\ ,$$

1. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(2x)$.
2. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x/3)$.
3. Ecrire le développement limité d'ordre 10 en 0 de $x \mapsto f(x^2)$.
4. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x+x^2)$.

Exercice 7.3 Démontrer les résultats suivants.

1. $\cos(x)\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

3. $\dfrac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4).$

4. $\dfrac{1}{1-\arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4).$

5. $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^4).$

6. $\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4).$

7. $\ln(1 + x^2 \sin(x)) = x^3 - \dfrac{x^5}{6} - \dfrac{x^6}{2} + o(x^6).$

8. $\cos(\sin(x)) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4).$

9. $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + 7x^4 + o(x^4).$

10. $\cosh(1 - \cos(x)) = 1 + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4).$

11. $\cos(1 - \cosh(x)) = 1 - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4).$

12. $\sin(x - \arctan(x)) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^8).$

13. $\sin(x - \arctan(x)) - x + \arctan(x) = o(x^8).$

14. $\cosh(1 - \cos(x)) + \cos(\cosh(x) - 1) = 2 - \dfrac{x^6}{24} + o(x^6).$

15. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x)) = \dfrac{x^5}{3} + o(x^8).$

16. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))^2 = \dfrac{x^8}{9} + o(x^1 1).$

17. $\arcsin(\ln(1 + x^2)) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4).$

18. $\dfrac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = -1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7x^4}{24} + o(x^4).$

19. $\dfrac{\arctan(x) - x}{\tan(x) - x} = -1 + x^2 - \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4).$

20. $\dfrac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{36} + o(x^3).$

21. $(1+x)^{1/(1+x)} = 1 + x - x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4).$

22. $\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5x^2}{24} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3).$

23. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{\mathrm{e}x^3}{48} + o(x^3).$

24. $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{x^2}{60\sqrt{\mathrm{e}}} + o(x^3)$.

25. $\ln(2 + x + \sqrt{1+x}) = \ln(3) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

26. $\ln(2\cos(x) + \sin(x)) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{24} + o(x^3)$.

27. $\arctan(\mathrm{e}^x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^4)$.

Exercice 7.4 Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$.

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}) \,.$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto x^2$.
2. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer la demi-somme.
3. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer le produit.

Exercice 7.5 Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n) \,.$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -2$, puis composer avec $x \mapsto -x$.
2. Écrire le développement d'ordre $n+1$ de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis dériver.
3. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis élever au carré.
4. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto 2x - x^2$.

Exercice 7.6 Soit n un entier. Démontrer les résultats suivants (utiliser une décomposition en éléments simples si nécessaire).

1. $\dfrac{1}{2+x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{8} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^n)$.
2. $\dfrac{1}{(x-4)^2} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{x}{32} + \dfrac{3x^2}{4^4} + \cdots + \dfrac{(n+1)x^n}{4^{n+2}} + o(x^n)$.
3. $\dfrac{x^2}{x-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{16} - \cdots - \dfrac{x^n}{4^{n-1}} - \cdots + o(x^n)$.
4. $\dfrac{x^2}{x^2-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} - \cdots - \dfrac{x^{2n}}{4^n} - \cdots + o(x^n)$.

5. $\dfrac{x^2}{x^2+4} = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{4^n} + \cdots + o(x^2n)$.

6. $\dfrac{x}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + 6x + 28x^2 + \cdots + 2^n(2^{n+1}-1)x^n + o(x^n)$.

7. $\dfrac{x}{2x^2-3x+1} = x + 3\,x^2 + \cdots + (-1+2^n)\,x^n + \cdots + o(x^n)$.

8. $\dfrac{x^3}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{2}x^3 + \cdots + \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{(-2)^{2-n}}{3}\right) x^n + o(x^n)$.

9. $\dfrac{x^3+1}{x^2+x-2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{8} + \cdots + \left(-\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3}(-2)^{-n-1}\right) x^n + \cdots + o(x^n)$.

10. $\dfrac{x-6x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-6x)} = x + 12x^2 + \cdots + \dfrac{(2^n-1)(3^n-1)x^n}{2} + o(x^n)$.

Exercice 7.7

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sin^2(x)\ , \quad x \mapsto \cos^2(x)\ , \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\ , \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}\ , \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}\ .$$

Exercice 7.8

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sinh^2(x)\ , \quad x \mapsto \cosh^2(x)\ , \quad x \mapsto \sinh(x)\cosh(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}\ , \quad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}\ ,$$
$$\sinh(x)\cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2}\ .$$

Exercice 7.9 Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction arc sinus.
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\ .$$
On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. Écrire le développement limité d'ordre 4 de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$. En déduire les valeurs de a, b, c.
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sin puis de $\sin \circ \arcsin$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cos, puis de $\cos \circ \arcsin$, puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. En utilisant la formule $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de arcsin nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 7.10 Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction argument sinus hyperbolique.

$$\operatorname{argsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) .$$

On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\operatorname{argsinh}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. On rappelle la formule $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$. Calculer les valeurs de a, b, c.
2. On rappelle que la dérivée de argsinh est la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$. Calculer le développement limité d'ordre 4 de cette fonction. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sinh puis de $\sinh \circ \operatorname{argsinh}$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cosh, puis de $\cosh \circ \operatorname{argsinh}$. En utilisant la formule $\cosh(\operatorname{argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
5. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de argsinh nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \operatorname{argsinh}(x) - \sqrt{1+x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 7.11 Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par deux méthodes différentes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction argument tangente hyperbolique.

$$\operatorname{argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) .$$

1. On rappelle que $\operatorname{argtanh}(x)$ est la primitive, nulle en 0, de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$. Écrire le développement limité d'ordre n de $\operatorname{argtanh}'$, et en déduire celui de argtanh.
2. On rappelle la formule :

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) .$$

Ecrire les développements limités d'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$, en déduire celui de argtanh.

Exercice 7.12

1. Écrire les développements limités d'ordre 5 en 0, des fonctions sin, arcsin, sinh, argsinh, tan, arctan tanh, argtanh.
2. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned}\tanh(x) \leqslant \arctan(x) \leqslant \sin(x) \leqslant \operatorname{argsinh}(x) \leqslant x \\ \leqslant \sinh(x) \leqslant \arcsin(x) \leqslant \tan(x) \leqslant \operatorname{argtanh}(x) .\end{aligned}$$

Exercice 7.13 Démontrer les résultats suivants.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x + 1) - 2(\mathrm{e}^x - 1)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} = \dfrac{1}{2}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \dfrac{1}{3}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x - 1)\sin(x)} = \dfrac{3}{2}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1} = \dfrac{2}{3}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1$.
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = 2$.
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan(x) - \sinh(2x)}{(1 - \cos(3x))\arctan(x)} = -\dfrac{4}{27}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x) - x}{1 - \cos(x)} = -2$.
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1 + x + 2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = -\dfrac{12}{13}$.

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\sinh(\tanh(x)) - \tanh(\sinh(x))} = -1$.

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))} = 1$.

Exercice 7.14 Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f\ : x \mapsto \sin(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \cos(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \ln(1+x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arctan(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arcsin(x)\ ,$$
$$f\ : x \mapsto 1/(1-x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \sqrt{1+x}\ ,\quad f\ : x \mapsto 1/\sqrt{1+x}\ .$$

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de f en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(\sqrt{x})$.
3. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(x^x - 1)$.
4. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(1/x)$.
5. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 7.15 Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de 0^+.

1. $\dfrac{1}{\ln^2(1+x)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12} + o\,(x)$.
2. $\dfrac{1}{\sin^3(x^2)} = \dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{2x^2} + o\,(x)$.
3. $\sqrt{x + 2x^3} = x^{1/2} + x^{5/2} - \dfrac{x^{7/2}}{2} o\left(x^{7/2}\right)$.
4. $\dfrac{\sqrt{x + x^3}}{\sqrt[3]{x + x^2}} = x^{1/6} - \dfrac{x^{7/6}}{3} + \dfrac{13x^{13/6}}{18} + o\left(x^{13/6}\right)$.
5. $x^x = 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln(x))$.
6. $\left(\dfrac{1+\ln(x)}{\ln(x)}\right)^x = 1 + \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{x}{2\ln^2(x)} + o\left(\dfrac{x}{\ln^2(x)}\right)$.

Exercice 7.16 Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$.

1. $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
2. $\dfrac{1+x^2}{(1+x)(2-x)} = -1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
3. $\dfrac{1}{x\sin(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{7}{360x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

4. $\dfrac{1}{x\arctan(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{4}{45x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

5. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = x^{5/6} - \dfrac{1}{3x^{7/6}} + \dfrac{1}{2x^{13/6}} + o\left(\dfrac{1}{x^{13/6}}\right)$.

6. $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}} = \mathrm{e}^{-x/6} - \dfrac{\mathrm{e}^{-7x/6}}{3} + \dfrac{13\mathrm{e}^{-13x/6}}{18} + o\left(\mathrm{e}^{-13x/6}\right)$.

Exercice 7.17 Démontrer les résultats suivants.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\sqrt{x^2+x}) - \sinh(\sqrt{x^2-x}) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\cosh(x)) - \cosh(\sinh(x)) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\cosh(\sqrt{x+1}) - \cosh(\sqrt{x})\big)^{1/x} = \mathrm{e}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x+x)^{\mathrm{e}^x-x^2} - (\mathrm{e}^x+x^2)^{\mathrm{e}^x-x} = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\left((x+1)^{1/(x+1)}\right)} - x^{\left(x^{1/x}\right)} = 1$.

Exercice 7.18 Pour chacune des applications f suivantes, déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position de la courbe représentative par rapport à ces asymptotes.

1. $f \;:\; x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.
2. $f \;:\; x \longmapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.
3. $f \;:\; x \longmapsto (x+1)\arctan(x)$.
4. $f \;:\; x \longmapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)}$.
5. $f \;:\; x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$.
6. $f \;:\; x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\mathrm{e}^{x/(x+1)}$.
7. $f \;:\; x \longmapsto x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
8. $f \;:\; x \longmapsto x^3\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
9. $f \;:\; x \longmapsto x\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
10. $f \;:\; x \longmapsto \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}$.