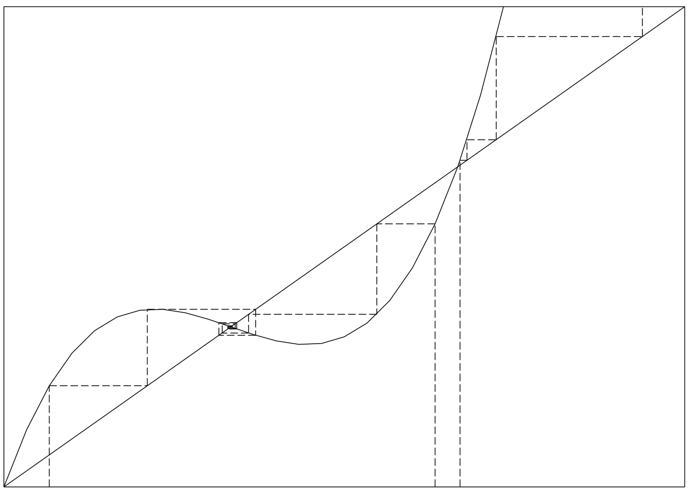
Unité d'Enseignement MAT122

Suites et Algèbre Linéaire

B. Ycart

Université Joseph Fourier, Grenoble



http://www-lmc.imag.fr/lmc-sms/Bernard.Ycart/MAT122/

Table des matières

N.B. : Ces notes ont été relues et corrigées par Emmanuel Maître et Bertrand Michaux. Pour les écrire, j'ai utilisé celles de Christine Graffigne, Bernard Lacolle, Laurent Serlet, ainsi que les livres suivants :

M. Allano-Chevallier, X. Oudot : Analyse et Géométrie différentielle, $1^{\text{ère}}$ année MPSI
Collection H-prépa, Hachette (2003)

X. Oudot, M. Delye-Chevallier : Algèbre et Géométrie, $1^{\text{ère}}$ année MPSI
Collection H-prépa, Hachette (1998)

Merci à tous !

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Opérations

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est supposé connu ; le but de cette section n'est donc pas d'en proposer une construction axiomatique. Il s'agira seulement de rappeler quelques notations, les propriétés des opérations (addition, multiplication) et de la relation d'ordre.

Nous utilisons les notations classiques suivantes pour les ensembles emboîtés de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notation	Ensemble	Exemples
$\mathbb{N}$	Entiers naturels	$0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Entiers relatifs	$-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Rationnels	$1.2, 1/2, 1.2\,10^{-3}, \frac{355}{113}, \ldots$
$\mathbb{R}$	Réels	$\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$
$\mathbb{C}$	Complexes	$1 + 2i, 1 + i\sqrt{3}, 2e^{i\pi/3}, \ldots$

L'exposant * signifie "privé de 0". Ainsi, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Pour les calculs usuels (à la main, sur les calculettes ou par ordinateur), ce sont forcément des nombres décimaux, donc rationnels, que l'on manipule. Pourtant l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un cadre de calcul mathématiquement suffisant, pour plusieurs raisons, qui seront énoncées dans la suite de ce chapitre. La première, reconnue dès l'antiquité grecque, est que certaines quantités, qui pourtant apparaissent couramment en géométrie élémentaire, ne s'expriment pas comme rapports d'entiers. La plus simple est la diagonale d'un carré de côté 1, à savoir $\sqrt{2}$: nous verrons plus loin que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; $\sqrt[3]{5}$, π, ou e n'en sont pas non plus.

Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre sont rappelées ci-dessous. Dans ces formules nous utilisons le "quantificateur universel" $\forall$ qui se lit "quel(s) que soi(en)t" ou "pour tou(t)(s)". Par exemple "$\forall x, y \in \mathbb{R}$" se lit "quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$" ou bien "pour tous réels x, y". En toute rigueur, nous devrions écrire $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ("pour tout *couple de* réels (x, y)") ou bien $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ ("pour tout réel x *et* pour tout réel y"). Ce petit abus de notation est communément admis et ne prête pas à confusion en général. Nous rencontrerons bientôt le "quantificateur existentiel" $\exists$ qui se lit "il existe".

Addition

- *Associativité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
- *Elément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x + 0 = 0 + x = x$
- *Opposé :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x + (-x) = x - x = 0$
- *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad x + y = y + x$

L'ensemble des réels muni de l'addition est un *groupe commutatif.*

Multiplication L'ensemble $\mathbb{R}^*$ (ensemble des réels privé de 0), muni de la multiplication, est un autre groupe commutatif.

- *Associativité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad x(yz) = (xy)z$
- *Elément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x\,1 = 1\,x = x$
- *Inverse :* $\forall x \in \mathbb{R}^*\ , \quad x\,(1/x) = (1/x)\,x = 1$
- *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad xy = yx$
- *Elément absorbant :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x\,0 = 0\,x = 0$
- *Distributivité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad x(y + z) = (xy) + (xz)$

L'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication est un *corps commutatif.*

Dans tout ce qui suit, nous notons $\Longrightarrow$ l'implication : si A et B sont deux propriétés, $A \Longrightarrow B$ se lit "A implique B" ou encore "si A alors B" (B doit être vrai chaque fois que A est vrai). L'équivalence "A équivaut à B" sera notée $A \Longleftrightarrow B$ (A est vrai si et seulement si B est vrai).

Relation d'ordre

- *Réflexivité :* $\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq x$
- *Transitivité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
- *Antisymétrie :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$
- *Ordre total :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x$

Les trois premières propriétés définissent une relation d'ordre. Ici l'ordre est total car deux réels quelconques peuvent toujours être comparés.

Pour des raisons de commodité, on utilise couramment les notations $\geq, <, >$:

Notation	Définition
$x \geq y$	$y \leq x$
$x < y$	$x \leq y$ et $x \neq y$
$x > y$	$x \geq y$ et $x \neq y$

On utilise aussi les ensembles de réels notés $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Ensemble	Définition	Notation
Réels positifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x \geq 0\}$	$\mathbb{R}^+$
Réels strictement positifs	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x > 0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$
Réels négatifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq 0\}$	$\mathbb{R}^-$
Réels strictement négatifs	$\{x \in \mathbb{R}\ , \quad x < 0\}$	$\mathbb{R}^{-*}$

La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication par un réel positif.

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ , \quad x < y \Longrightarrow x + z < y + z$

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^+ ,\quad x \leq y \Longrightarrow x\,z \leq y\,z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^{+*} ,\quad x < y \Longrightarrow x\,z < y\,z$

Comme conséquence de ces relations de compatibilité, on obtient les règles suivantes qui permettent de combiner des inégalités.

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R} ,\quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Longrightarrow x + z \leq y + t$$

On peut donc ajouter deux inégalités de même sens (*attention : on ne peut pas ajouter deux inégalités de sens opposés ni soustraire deux inégalités de même sens*).

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z, t \in \mathbb{R}^+ ,\quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Longrightarrow x\,z \leq y\,t$$

On peut multiplier deux inégalités de même sens, si elles concernent des réels positifs ou nuls. Pour se ramener à des inégalités de même sens, ou à des réels positifs, il peut être utile de changer de signe ou de passer à l'inverse.

- $\forall x, y \in \mathbb{R} ,\quad x \leq y \Longrightarrow -x \geq -y$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^* ,\quad x \leq y \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

1.2 Bornes

Le fait que l'ordre sur $\mathbb{R}$ soit total entraîne que tout ensemble *fini* de réels admet un plus petit élément et un plus grand élément. Si $\{a_1, \ldots , a_n\}$ est un ensemble fini de réels, nous noterons $\min\{a_1, \ldots , a_n\}$ le plus petit et $\max\{a_1, \ldots , a_n\}$ le plus grand élément. Nous réserverons les notations min et max aux ensembles finis. Un ensemble *infini* de réels n'admet pas nécessairement de plus petit ou de plus grand élément. Voici quelques exemples.

Ensemble	Plus petit élément	Plus grand élément
$\mathbb{N}$	0	Non
$\mathbb{Z}$	Non	Non
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	1
$\{(-1)^n(1 - 1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	Non
$\{(-1)^n(1 + 1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n + 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	$3/2$
$\{(-1)^n - 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	Non

Non seulement $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément mais de plus aucun réel n'est plus grand que tous les éléments de $\mathbb{N}$. Par contre, les 5 derniers ensembles du tableau ci-dessus sont *bornés* au sens suivant.

Définition 1.2.1 *Soit A une* partie *de $\mathbb{R}$ (un ensemble de réels). On dit que A est :*

- majorée *si* $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in A ,\quad a \leq x$
- minorée *si* $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in A ,\quad a \geq x$
- bornée *si A est à la fois majorée et minorée.*

Si x est un majorant de A, alors $x + 1$, $x + 2$ et plus généralement tout réel plus grand que x sont aussi des majorants. Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1.2.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément.*
2. *Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément.*

Définition 1.2.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, on appelle* borne supérieure *de A et on note* $\sup A$ *le plus petit des majorants de A.*
2. *Si A est minorée, on appelle* borne inférieure *de A et on note* $\inf A$ *le plus grand des minorants de A.*

Du fait que l'ordre des réels est total, la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, sont nécessairement uniques. Lorsque A admet un plus grand élément, la borne supérieure de A est ce plus grand élément. Lorsque A admet un plus petit élément, la borne inférieure de A est ce plus petit élément. On étend la définition de sup et inf aux ensembles non majorés et non minorés par la convention suivante.

1. *Si A n'est pas majorée,* $\sup A = +\infty$
2. *Si A n'est pas minorée,* $\inf A = -\infty$

Reprenons comme exemples les 6 ensembles du tableau précédent.

Ensemble	Borne inférieure	Borne supérieure
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	0	1
$\{(-1)^n(1-1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	1
$\{(-1)^n(1+1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n+1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	$3/2$
$\{(-1)^n-1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	1

Dans le cas où A est majorée et n'admet pas de plus grand élément, alors $\sup A$ n'appartient pas à A, mais on trouve néanmoins des éléments de A arbitrairement proches de la borne supérieure.

Proposition 1.2.4 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \sup A - \varepsilon \leq a \leq \sup A$$

2. *Si A est minorée, alors*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \inf A \leq a \leq \inf A + \varepsilon$$

Démonstration : Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, $\sup A - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant. Il existe donc un élément de A supérieur à $\sup A - \varepsilon$. Comme $\sup A$ est un majorant, cet élément est inférieur à $\sup A$. □

Nous allons souvent rencontrer dans ce cours des ε strictement positifs arbitrairement petits. On peut s'en faire une idée concrète en pensant "$\varepsilon = 0.001$", ou bien $\varepsilon = 10^{-6}$. Par exemple,

$$\inf\{1/n^2\,,\ n \in \mathbb{N}^*\} = 0\ .$$

La proposition 1.2.4 permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de l'ensemble inférieur à ε.

$$1/n^2 \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{1/\varepsilon}\ .$$

Pour $\varepsilon = 0.001$, $1/40^2 < \varepsilon$.

La proposition 1.2.4 admet la réciproque suivante.

Proposition 1.2.5 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si x est un majorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,, \quad x - \varepsilon \leq a\ ,$$

alors $x = \sup A$.

2. *Si x est un minorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,, \quad a \leq x + \varepsilon\ ,$$

alors $x = \inf A$.

Démonstration : Si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,, \quad x - \varepsilon \leq a\ ,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc si x est un majorant, c'est bien le plus petit.

Le raisonnement pour $\inf A$ est symétrique. $\square$

La borne supérieure peut donc être caractérisée de deux manières différentes.

- $\sup A$ est le plus petit des majorants de A
- $\sup A$ est le seul majorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre $x - \varepsilon$ et x.

De manière symétrique,

- $\inf A$ est le plus grand des minorants de A
- $\inf A$ est le seul minorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre x et $x + \varepsilon$.

En liaison avec la proposition précédente, voici pour terminer cette section une simple application des notions de borne supérieure et inférieure, que l'on retrouve dans beaucoup de démonstrations.

Proposition 1.2.6 *Soient a et b deux réels.*

1. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \geq b - \varepsilon$ alors $a \geq b$.*
2. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$ alors $a \leq b$.*

Démonstration : Considérons la première affirmation. l'ensemble $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ a pour borne supérieure b. L'hypothèse affirme que a est un majorant de cet ensemble. Il est donc au moins égal à la borne supérieure, par définition de celle-ci. La seconde affirmation est symétrique. □

L'ensemble $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ de la démonstration précédente est un *intervalle* de $\mathbb{R}$. Nous les décrivons dans la section suivante.

1.3 Intervalles

Définition 1.3.1 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires :*

$$\forall c, d \in I\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\quad c \leq x \leq d \implies x \in I\ .$$

Par exemple, $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, car tout réel compris entre deux réels positifs est positif. Mais $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un, car il contient 1 et -1 sans contenir 0. L'ensemble vide et les singletons sont des cas très particuliers de la définition 1.3.1. Nous allons utiliser sup et inf pour caractériser tous les intervalles contenant au moins deux éléments. Ils se répartissent en 9 types décrits dans le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Description	Définition	Notation
fermé borné	$\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
borné, semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$	$[a, b[$
borné, semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	$]-\infty, b[$
droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

Voici la discussion pour les intervalles bornés. Si un intervalle I est borné et contient deux éléments, il admet une borne inférieure et une borne supérieure distinctes. Notons

$$a = \inf I \quad \text{et} \quad b = \sup I\ .$$

Par définition de sup et inf, tout élément x de I est entre a et b :

$$\forall x \in I \,, \quad a \leq x \leq b \,.$$

Nous allons montrer que tout réel x tel que $a < x < b$ appartient à I. En effet, si $a < x < b$, x n'est ni un majorant, ni un minorant de I. Il existe donc deux éléments y et z de I tels que $y < x < z$. Par la définition 1.3.1, x appartient à I. Selon que a et b appartiennent ou non à I, on obtient les 4 premiers types du tableau.

Considérons maintenant un intervalle minoré mais non majoré. Soit a la borne inférieure. Tout élément de I est au moins égal à a. Montrons que I contient tous les réels x strictement supérieurs à a. Comme x n'est pas un minorant, I contient un élément $y < x$, et comme I n'est pas majoré, il contient un élément $z > x$. Donc x appartient à I. Selon que a appartient ou non à I, on obtient 2 types d'intervalles non majorés. Les deux types d'intervalles non minorés sont symétriques.

Enfin, si un intervalle I n'est ni majoré, ni minoré, pour tout réel x, on peut trouver un y et un z dans I tels que $y < x < z$, ce qui entraîne $x \in I$. Donc $I = \mathbb{R}$.

1.4 Rationnels et irrationnels

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers. La somme de deux rationnels, ainsi que leur produit, sont des rationnels. Muni de l'addition et de la multiplication, $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné, comme $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure. L'ensemble des rationnels dont le carré est inférieur ou égal à 2 est non vide, majoré, mais il n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est une application du résultat suivant.

Proposition 1.4.1 *Soient m et n deux entiers strictement positifs. Le nombre $\sqrt[n]{m}$ est soit entier, soit irrationnel.*

Démonstration : Nous allons démontrer que si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, alors il est entier. Soient p et q deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$. Alors, $q^n m = p^n$. Mais alors q divise p^n, or q et p sont premiers entre eux. Ce n'est possible que si $q = 1$ et $m = p^n$. □

Observons que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle ; il en est de même pour leur produit. Par contre la somme ou le produit de deux irrationnels peuvent être rationnels (par exemple $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$).

Les rationnels et les irrationels sont intimement mêlés, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.4.2 *Si un intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins deux points distincts, il contient au moins un rationnel et un irrationnel.*

On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit I un intervalle contenant au moins deux points, a et b, tels que $a < b$. Soit q un entier strictement supérieur à $1/(b - a)$ et p le plus petit entier strictement supérieur à aq. On a donc :

$$p - 1 \leq aq < p \, ,$$

et comme q est strictement positif,

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q} \, .$$

D'où :

$$a < \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b \, .$$

Donc l'intervalle $]a, b[$, inclus dans I, contient le rationnel $\frac{p}{q}$.

De même, l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$ contient un rationnel r ; donc $]a, b[$ contient $r\sqrt{2}$, qui est irrationnel. $\square$

En fait, tout intervalle contenant au moins deux points contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Les rationnels que l'on manipule le plus souvent sont les nombres décimaux, somme d'un entier et d'un multiple entier de 10^{-n}, où n est le nombre de chiffres après la virgule :

$$3.141592 = 3 + \frac{141592}{1000000} = 3 + 141592 \, 10^{-6} \, .$$

Les nombres décimaux sont le moyen le plus courant d'approcher les réels.

1.5 Approximation des réels

Nous définissons d'abord les outils de base de l'approximation que sont la valeur absolue, la distance et la partie entière.

La *valeur absolue* d'un réel x, notée $|x|$, est $\max\{x, -x\}$. Elle est égale à x si x est positif, $-x$ sinon.

Si x et y sont deux réels quelconques, la valeur absolue du produit xy est le produit des valeurs absolues ; $|xy| = |x||y|$. Par contre on peut seulement majorer la valeur absolue de la somme.

Proposition 1.5.1 *La valeur absolue de la somme de deux réels est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces deux réels.*

Démonstration : Il suffit d'examiner les 4 cas possibles selon le signe de x et y. Sans perte de généralité, nous supposons que $|x| \geq |y|$.

1. $x > 0$ et $y > 0$: $|x + y| = x + y = |x| + |y|$
2. $x > 0$ et $y < 0$: $|x + y| = x + y < |x| + |y|$
3. $x < 0$ et $y > 0$: $|x + y| = -x - y < |x| + |y|$
4. $x < 0$ et $y < 0$: $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$

$\square$

La même discussion montre que la valeur absolue de la somme est minorée par la différence des valeurs absolues. Par contre on ne peut rien dire de plus de la valeur absolue d'une différence.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad |\,|x| - |y|\,| \leq |x+y| \leq |x| + |y|\,. \tag{1.5.1}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad |\,|x| - |y|\,| \leq |x-y| \leq |x| + |y|\,.$$

On appelle *distance* entre deux réels x et y la valeur absolue de leur différence. La proposition 1.5.1 entraîne :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad |x-z| \leq |x-y| + |y-z|\,.$$

Pour aller d'un point à un autre, on ne peut qu'allonger le parcours si on s'impose de passer par un troisième : c'est l'*inégalité triangulaire.*

Etant donné un réel x, nous dirons que a est une *approximation* (ou une *valeur approchée*) de x "à ε près" si la distance de a à x est inférieure à ε, ce qui équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

$$|x-a| < \varepsilon \iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\iff a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\,.$$

Les approximations décimales se construisent à l'aide de la partie entière. La *partie entière* d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\,.$$

On en déduit :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x\,.$$

La partie entière de π est 3. Attention : la partie entière de $-\pi$ est -4, et non -3. On appelle "partie décimale" de x et on note $D(x)$, la différence de x avec sa partie entière.

$$D(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[\,.$$

Soit x un réel, et p un entier. Considérons la partie entière de $x\,10^p$:

$$\lfloor x\,10^p \rfloor \leq x\,10^p < \lfloor x\,10^p \rfloor + 1\,,$$

donc,

$$\lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p} \leq x < \lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p} + 10^{-p}\,,$$

Le nombre décimal $\lfloor x\,10^p \rfloor 10^{-p}$ est une approximation de x par défaut à 10^{-p} près. En théorie, on peut donc approcher x par un nombre décimal à n'importe quelle précision. En pratique, la précision habituelle sur des calculs d'ordinateurs est de l'ordre de 10^{-15}.

1.6 Exercices

Exercice 1.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $|A| = \{|x|\,,\ x \in A\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ A possède une borne supérieure.
2. ☒ Si A est minorée alors A possède une borne inférieure finie.
3. ☐ Si A est majorée alors $|A|$ possède une borne supérieure finie.
4. ☒ 0 est un minorant de $|A|$.
5. ☒ $|A|$ possède une borne inférieure finie.
6. ☐ $|A|$ possède une borne supérieure finie.
7. ☐ Si $x \leq \sup A$ alors $x \in A$.
8. ☒ Si A est un intervalle alors $|A|$ est un intervalle.
9. ☐ Si $|A|$ est un intervalle alors A est un intervalle.
10. ☐ Si A est un intervalle ouvert alors $|A|$ est un intervalle ouvert.
11. ☒ Si A est un intervalle fermé alors $|A|$ est un intervalle fermé.
12. ☐ Si A contient au moins 2 réels distincts, alors A contient un rationnel.
13. ☐ Si A est infinie, alors A contient une infinité d'irrationnels.
14. ☒ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant lui-même deux points distincts, alors A contient une infinité d'irrationnels.
15. ☒ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, alors A contient une infinité de rationnels.

Exercice 1.2 Soient a un réel. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a < \varepsilon)$, alors $a < 0$.
2. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $a \geq 1$.
3. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - 2\varepsilon)$.
4. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $(\forall \varepsilon \geq 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$.
5. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1/\sqrt{n})$, alors $a > 1$.
6. ☐ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a < 1/\sqrt{n})$, alors $a < 0$.
7. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1 - 1/\sqrt{n})$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$.

Exercice 1.3 Soient a et b deux réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $a + b$ est rationnel alors, soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. ☒ Si $a + b$ est irrationnel alors, soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. ☒ Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. ☐ Si a est irrationnel alors la partie décimale de $a + b$ est irrationnelle.
5. ☒ Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

Exercice 1.4 Soient a et b deux réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $|ab| = |a|\,|b|$
2. $\boxtimes$ $|a| - |b| \leq |a - b|$.
3. $\square$ $|a - b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.
4. $\boxtimes$ $|a - b| = |a - (a + b)/2| + |(a + b)/2 - b|$.
5. $\square$ $|a - b| = |a - (a + b)| + |(a + b) - b|$.
6. $\square$ Si $|a - b| < |a|$ alors $|ab| = ab$.
7. $\square$ $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
8. $\boxtimes$ $\lfloor a + b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
9. $\boxtimes$ $\lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
10. $\square$ $D(a + b) = D(a) + D(b)$.

Exercice 1.5 Pour chacun des ensembles de réels suivants :

$$\{(-1)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{(-1)^n/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}\ ,\ \{(-1)^n n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,$$

$$\left\{\frac{m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{2m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{m-n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 1.6 On considère les ensembles de réels suivants :

$$\{x \in \mathbb{R},\ |x| > 1\}\ \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1\}\ \{x \in \mathbb{R},\ x^3 < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^*\ ,\ 1/x \leq 1\}\ \{x \in \mathbb{R}^*\ ,\ 1/x > 1\}\ \{x \in \mathbb{R}^*\ ,\ 1/x^2 < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^+,\ \sin x \leq 0\}\ \left\{x \in \mathbb{R}^{+*},\ \sin\frac{1}{x} \leq 0\right\}\ \left\{x \in \mathbb{R}^{+*},\ |\sin\frac{1}{x}| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

1. Ecrire l'ensemble comme un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
2. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
3. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 1.7 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \subset B$ implique $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$

2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{et} \quad \inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, alors

$$\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\} \quad \text{et} \quad \inf A \cap B \geq \max\{\inf A, \inf B\}$$

4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B\ .$$

5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que, si A et B sont inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B) \quad \text{et} \quad \inf AB = (\inf A)(\inf B)\ .$$

Exercice 1.8 Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$$1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2} + \sqrt{3}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2\,,$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,,\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2\ .$$

1.7 Compléments

Point fixe d'une application croissante

Pour illustrer l'utilisation de la notion de borne supérieure, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.7.1 *Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même :*

$$\forall x, y \in [0,1]\,, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)\ .$$

Alors f admet un point fixe :

$$\exists a \in [0,1]\,, \quad f(a) = a\ .$$

Démonstration : Soit A l'ensemble des réels x dans $[0,1]$ tels que l'image de x dépasse x :

$$A = \{x \in [0,1]\,,\ f(x) \geq x\}\ .$$

Par hypothèse l'ensemble A est non vide puisqu'il contient 0, et il est majoré par 1. Notons a sa borne supérieure. Nous allons montrer d'abord $f(a) \geq a$, puis $f(a) \leq a$.

Par la proposition 1.2.4, pour tout ε, il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon \leq x \leq a$. Comme x est dans A, $f(x) \geq x$, et puisque f est croissante, $f(x) \leq f(a)$. Donc :

$$f(a) \geq f(x) \geq x \geq a - \epsilon\ .$$

Pour tout ε, $f(a) \geq a - \varepsilon$, donc $f(a) \geq a$ par la proposition 1.2.6.

De $f(a) \geq a$, on déduit $f(f(a)) \geq f(a)$ car f est croissante. Donc $f(a) \in A$, par définition de A. Donc $f(a) \leq a$, car a est la borne supérieure de A. □

Vous pouvez refaire cette démonstration en remplaçant A par

$$B = \{x \in [0,1]\,,\ f(x) \leq x\}\ ,$$

et en étudiant la borne inférieure de B.

Papier normalisé

Les dimensions des feuilles de papier que vous avez sous les yeux sont irrationnelles ! Les normes européennes ont fixé les dimensions du papier de sorte que quand on divise en deux une feuille, la plus grande et la plus petite dimension des deux moitiés restent dans le même rapport que celles de la feuille entière. Par exemple soient L et l la plus grande et la plus petite dimension d'une feuille A0. Quand on la divise en deux, on obtient deux feuilles A1 dont la plus grande dimension est l et la plus petite $L/2$. On doit avoir :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}\ ,$$

soit $L^2/2 = l^2$. Le rapport L/l vaut donc $\sqrt{2}$. Les dimensions de la feuille A0 sont choisies de sorte que sa surface soit 1 mètre carré. Exprimée en mètres, L doit donc vérifier $L^2/\sqrt{2} = 1$, soit $L = 2^{1/4}$. Voici les dimensions (théoriques) des feuilles de papier de A0 à A4.

Papier	L	l
A0	$2^{1/4}$	$2^{-1/4}$
A1	$2^{-1/4}$	$2^{-3/4}$
A2	$2^{-3/4}$	$2^{-5/4}$
A3	$2^{-5/4}$	$2^{-7/4}$
A4	$2^{-7/4}$	$2^{-9/4}$

Les approximations décimales à 10^{-3} près de $2^{-9/4}$ et $2^{-7/4}$ sont 0.210 et 0.297 ; ce sont bien les dimensions de vos feuilles de papier, exprimées en mètres.

La constante de Ramanujan

Le mathématicien indien S. Ramanujan (1887-1920) a donné dans sa courte vie beaucoup d'énoncés justes et très peu d'explications sur sa démarche. Contrairement à la légende, il n'a jamais affirmé :

$$e^{\pi\sqrt{163}} \in \mathbb{N} .$$

Les trois nombres e, π et $\sqrt{163}$ sont irrationnels. Il n'est bien sûr pas exclu qu'en combinant des irrationnels on tombe sur des rationnels ou même des entiers. L'exemple le plus célèbre est celui de la formule d'Euler : $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$.

Voici les 30 premiers chiffres significatifs de $e^{\pi\sqrt{163}}$:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.999999999999\ldots$$

La partie entière a 18 chiffres, et les 12 premières décimales valent 9. Mais la 13-ième décimale vaut 2 et le nombre n'est pas entier. Ce fait était connu bien avant Ramanujan, par Hermite en 1859. Pourquoi alors le nombre $e^{\pi\sqrt{163}}$ porte-t-il le nom de "constante de Ramanujan" ? A cause d'un poisson d'avril monté par M. Gardner en 1975 : on ne prête qu'aux riches !

Nombres incommensurables

Pour les grecs, les nombres représentaient des longueurs ou des rapports de longueurs. Or ils avaient compris qu'il existait des longueurs, comme le côté et la diagonale d'un carré, qui ne pouvaient pas être mesurées en nombres entiers dans la même unité. C'est la raison pour laquelle on dit que deux réels dont le rapport n'est pas rationnel sont incommensurables. C'est le cas de 1 et $\sqrt{2}$, mais aussi de $\sqrt{2}$ et π, de π et e, etc...

Supposons que l'on utilise un nombre y comme unité pour mesurer les multiples d'un autre : $\{nx\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout n, on trouve un nombre entier d'unités, $\lfloor nx/y \rfloor$, puis un reste qui est inférieur à y. Si x/y est rationnel, il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles. Par contre si $x/y \notin \mathbb{Q}$, non seulement il y a une infinité de restes possibles, mais ces restes sont *denses* dans l'intervalle $[0, y]$. Nous commençons par le cas particulier $y = 1$.

Proposition 1.7.2 *Soit x un irrationnel. L'ensemble des parties décimales des multiples de x est dense dans* $[0, 1]$.

En d'autres termes, pour tout intervalle inclus dans $[0, 1]$, il existe un entier n tel que $D(nx) = nx - \lfloor nx \rfloor$ appartient à cet intervalle.

Démonstration : Soit $A = \{D(nx)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous allons montrer que la borne inférieure de A est 0.

Le fait que x soit irrationnel entraîne que A ne contient ni 0 ni 1, et aussi que les éléments de A sont tous différents. Commençons par la règle d'addition suivante, valable pour deux réels y et z quelconques :

$$D(y+z) = \begin{cases} D(y) + D(z) & \text{si } D(y) + D(z) < 1 \\ D(y) + D(z) - 1 & \text{si } D(y) + D(z) \geq 1 \end{cases}$$

Pour un n donné, notons δ la partie décimale de nx et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Comme x est irrationnel, $1/\delta$ l'est aussi et on a $k\delta < 1 < (k+1)\delta$, donc $0 < (k+1)\delta - 1 < \delta$. La partie décimale de $(k+1)nx$ est $(k+1)\delta - 1 < \delta$. Ceci entraîne que l'ensemble A ne peut pas avoir de plus petit élément. Notons a sa borne inférieure. C'est aussi la borne inférieure de $A_n = \{D(mx)\,,\ m > n\}$, puisque A n'a pas de plus petit élément.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $a < D(nx) < a+\varepsilon$. Mais aussi, il existe $m > n$ tel que $a < D(mx) < a+D(nx)$, donc $0 < D(nx)-D(mx) < \varepsilon$. Posons $\delta = D(nx)-D(mx)$ et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Toujours parce que x est irrationnel, $1/\delta$ ne peut pas être entier. Ecrivons :

$$k(m-n)x = k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) - 1 + (1 - k\delta)\ .$$

Cette écriture montre que $D(k(m-n)x) = 1 - k\delta < \delta < \varepsilon$. Comme ε est quelconque, nous avons montré que la borne inférieure de A est 0.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et $\varepsilon < b - a$. Soit n un entier tel que $D(nx) = \delta < \varepsilon$. Soit k le plus petit entier tel que $a < k\delta < b$. On a $a < D(knx) < b$, ce qui montre que l'ensemble A est dense dans $[0,1]$. □

Considérons maintenant deux réels x et y incommensurables. Si z est un réel, on notera $z \mod y$ ("z modulo y"), le réel $yD(z/y)$, qui appartient à l'intervalle $[0,y[$. Si x et y sont incommensurables, alors l'ensemble $\{nx \mod y\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,y]$. Ceci découle de la proposition 1.7.2 appliquée à x/y.

Par exemple, puisque π est irrationnel, 2π et $1/(2\pi)$ le sont aussi. Donc 1 et 2π sont incommensurables. D'après ce qui précède, $\{n \mod 2\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,2\pi]$. On déduit de la continuité des fonctions sin et cos que $\{\sin(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1,1]$.

Nombres infinis

Combien y a-t-il d'entiers naturels, de rationnels, de réels ? Une infinité bien sûr. Mais l'infinité des réels est plus grande que l'infinité des rationnels. Pour donner un sens à cette affirmation, il faut d'abord définir ce qu'est un ensemble dénombrable.

Définition 1.7.3 *Un ensemble infini est dit dénombrable s'il existe une application injective de cet ensemble vers* $\mathbb{N}$.

Il peut paraître paradoxal que $\mathbb{Q}$ soit dénombrable. C'est pourtant le cas, car il existe une application injective de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (à un rationnel p/q on associe le couple (p,q)), et une application bijective de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: on compte les éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, en commençant par $(0,0)$, puis $(1,0),(1,1),(-1,0),(-1,1)$, puis $(2,0),(2,1),(2,2)$, $(-2,0),(-2,1),(-2,2),\ldots$ Plus généralement, on démontre que le produit et la réunion de deux ensembles dénombrables sont eux-mêmes dénombrables.

Théorème 1.7.4 *L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.*

Démonstration : Nous allons démontrer par l'absurde que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Supposons que l'on puisse compter les éléments de $[0,1]$, donc les mettre en bijection avec $\mathbb{N}$. Nous aurions $[0,1] = \{x_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. A l'élément x_n, nous associons son développement décimal illimité :

$$x_n = 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\dots ,$$

où les $a_{n,k}$ sont des entiers compris entre 0 et 9. Pour tout n, fixons $b_n \in \{0,\dots,9\}$, tel que $b_n \neq a_{n,n}$. Considérons le réel x dont le développement décimal illimité est

$$x = 0.b_1b_2b_3\dots$$

Ce réel est différent de x_n pour tout n, par construction. Il n'a donc pas pu être compté.
(Ce principe de démonstration s'appelle le *procédé diagonal de Cantor*). $\square$

Il y a plus de réels que de rationnels, et donc plus d'irrationnels que rationnels. Parmi les irrationnels, on distingue ceux qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers, comme $\sqrt{2}$: on les appelle les nombres algébriques. Ils semblent former une grosse masse. Pourtant il n'y a pas plus de polynômes à coefficients entiers que d'entiers : l'ensemble des nombres algébriques est lui aussi dénombrable. Les nombres qui ne sont pas algébriques (on les appelle "transcendants") forment l'essentiel des réels. Pourtant il est extrêmement difficile de démontrer qu'un réel particulier est transcendant. C'est une des victoires du XIX^e siècle que de l'avoir fait pour π et e.

Existe-t-il des ensembles "intermédiaires" entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, qui seraient non dénombrables, sans pourtant être en bijection avec $\mathbb{R}$? On a longtemps essayé d'en construire, ou de démontrer qu'il n'en existe pas, avant de s'apercevoir finalement que c'est une proposition indécidable : on peut la supposer vraie, ou bien fausse, sans jamais aboutir à une contradiction. Elle s'appelle "l'hypothèse du continu".

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Vocabulaire

Voici la définition générale.

Définition 2.1.1 *Soit E un ensemble. On appelle suite à valeurs dans E une application de $\mathbb{N}$ dans E. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.*

Dans ce chapitre, nous nous préoccuperons surtout des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous dirons aussi suites de réels) et très peu des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ (suites de complexes). Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera typiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les entiers n sont les *indices* de la suite et leurs images u_n sont les *termes* de la suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet différent de l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. En particulier une suite aura toujours une infinité de termes, même si ces termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la suite est $(u_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, et l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble $\{-1, 1\}$.

Il existe deux manières de définir une suite de réels à partir d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

- *définition explicite :*
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = f(n)\,,$$
où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple :
  1. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = n$
  2. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = 1/(n+1)$
  3. $\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = 2^{-n}$.
- *définition par récurrence :*
$$u_0 \in \mathbb{R}\,, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = F(u_n)\,,$$
où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les mêmes exemples peuvent être définis par :
  1. $u_0 = 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = u_n + 1$

2. $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n/(u_n+1)$
3. $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n/2$.

Voici deux exemples génériques.

Définition 2.1.2

1. *Soit a un réel. On appelle suite arithmétique de raison a une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = u_n + a\,.$$
2. *Soit r un réel. On appelle suite géométrique de raison r une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = r\,u_n\,.$$

On vérifie facilement par récurrence qu'une suite arithmétique de raison a a pour terme général $u_n = u_0 + na$. De même, une suite géométrique de raison r a pour terme général $u_n = u_0\,r^n$.

Définition 2.1.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est*

- *constante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n$
- *croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$
- *décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \leq u_n$
- *strictement croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} > u_n$
- *strictement décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} < u_n$
- *monotone si elle est croissante ou décroissante*
- *majorée si* $\{u_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré*
- *minorée si* $\{u_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ *est minoré*
- *bornée si* $\{u_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ *est borné*
- *périodique si* $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+p} = u_n$

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 : $(u_n)_{n\geq n_0}$. L'expression "à partir d'un certain rang" reviendra souvent dans ce qui suit. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété P *à partir d'un certain rang* signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi "P est vraie pour n assez grand". Voici quelques exemples.

Définition 2.1.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est*

- *constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+1} = u_n$
- *croissante à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$
- *périodique à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $\quad u_{n+p} = u_n$

Par exemple, la suite $(\lfloor 4/(n+1) \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $n_0 = 4$. La suite des décimales de $1/90$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$. La suite $(|n-5|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 = 5$. La suite des décimales de $53/2475$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$. Quel que soit le nombre rationnel x, la suite des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est "majorée à partir d'un certain rang", alors elle est majorée tout court. En effet si $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, M\} .$$

De même une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

Les opérations sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.

- *Addition de deux suites :* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- *Multiplication de deux suites :* $(u_n)(v_n) = (u_n v_n)$
- *Multiplication par un réel :* $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- *Comparaison de deux suites :* $(u_n) \leq (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Ce n'est pas le cas de la multiplication : le produit de deux suites peut être nul sans que les deux suites le soient.

Etant donnée une suite (u_n), on appelle *suite extraite* ou *sous-suite*, une suite formée de certains termes de (u_n), c'est-à-dire une suite de la forme $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple si (u_n) est la suite géométrique $((-2)^n)$, et $\varphi(k) = 2k$, alors $(v_k) = (4^k)$: on a extrait de la suite (u_n) la suite des termes d'indice pair.

2.2 Convergence

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel l (sa limite) si u_n est aussi proche que l'on veut de l, pour n assez grand.

Définition 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et l un réel. On dit que (u_n)* converge vers *l,* tend vers *l, ou* a pour limite *l si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\,, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

On notera :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \quad \text{ou bien} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\,.$$

Autrement dit, tout intervalle centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Observons que le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, dépend de ε. La figure 2.1 représente les 50 premiers termes de la suite $(u_n) = (1 + \sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La limite est $l = 1$. On a :

$$|u_n - l| = \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ (sur la figure $\varepsilon = 0.05$). Posons $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ ($n_0 = 21$ pour $\varepsilon = 0.05$). Pour tout $n \geq n_0$, $1/n < \varepsilon$, donc $|u_n - l| < \varepsilon$. Sur la figure 2.1, on constate en fait que $u_n \in [0.95, 1.05]$ pour $n \geq 18$.

On étend la notion de convergence aux limites infinies de la façon suivante.

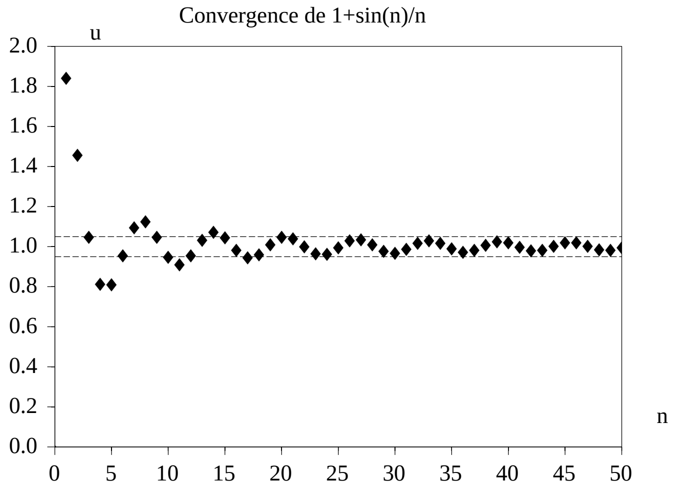


FIG. 2.1 – Convergence de la suite $1 + \sin(n)/n$.

Définition 2.2.2 *Soit (u_n) une suite de réels.*

1. *On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\ , \quad u_n \geq A\ .$$

2. *On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\ , \quad u_n \leq A\ .$$

Il est commode de pouvoir dire qu'une suite "tend vers l'infini", mais cela induit une certaine ambiguïté sur la notion de convergence. A partir de maintenant, quand une suite converge, il est sous-entendu que sa limite est finie.

De même qu'il faut voir ε comme un "petit" réel (proche de 0), dans la définition 2.2.2 il faut comprendre A comme grand (proche de l'infini). Une suite tend vers $+\infty$ si ses termes restent au-dessus de n'importe quelle quantité, à partir d'un certain rang.

Voici quelques exemples classiques.

- *Suites arithmétiques :* $(u_n) = (u_0 + an)$
  1. Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  2. Si $a = 0$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  3. Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- *Suites géométriques :* $(u_n) = (u_0\, r^n)$
  1. Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante (tend vers 0).
  2. Si $r \leq -1$, et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
  3. Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
  4. Si $r = 1$, (u_n) est constante (tend vers u_0).

5. Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.

- *Suites de Riemann :* $(u_n) = (n^\alpha)$
  1. Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  2. Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
  3. Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

Pour bien comprendre la notion de convergence, nous allons en étudier quelques conséquences faciles, rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.3 *Soit (u_n) une suite de réels.*

1. *Si (u_n) converge, alors sa limite est unique.*
2. *Si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est bornée.*
3. *Si pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$ et si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang.*
4. *Si (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l.*
5. *Si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Démonstration : Les démonstrations des 5 points se ressemblent et illustrent la définition 2.2.1.

1. Supposons que (u_n) vérifie la définition 2.2.1 pour deux réels l et l' distincts. Posons $\varepsilon = |l - l'|/3$. Alors les intervalles $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ et $[l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$ sont disjoints. A partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir aux deux à la fois : c'est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$, et n_0 tel que u_n reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $n \geq n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, l+\varepsilon\}\ ,$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \min\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, l-\varepsilon\}\ .$$
3. Soit l la limite. Si l n'était pas un entier, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier, donc aucun des u_n. Donc l doit être un entier. Posons $\varepsilon = 1/2$. L'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ ne contient qu'un seul entier, l. Comme à partir d'un certain rang tous les u_n sont dans cet intervalle, et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à l.
4. Soit $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) \geq n_0$ pour tout $k \geq k_0$. Si tous les (u_n) sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.
5. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Soit k'_0 tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Alors pour tout $n \geq \max\{2k_0, 2k'_0+1\}$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

□

2.3 Opérations sur les limites

La combinaison de la notion de limite avec les opérations habituelles sur les suites ne recèle aucune mauvaise surprise : les résultats que l'on attend sont vrais. Nous les énoncerons dans le théorème 2.3.2. Les démonstrations sont basées sur le lemme suivant.

Lemme 2.3.1

1. *La somme de deux suites convergeant vers* 0 *converge vers* 0.
2. *Le produit d'une suite convergeant vers* 0 *par une suite bornée, converge vers* 0.

Démonstration :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \varepsilon/2$. De même, soit n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|v_n| < \varepsilon/2$. Alors pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,
$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ,$$
d'où le résultat.
2. Si la suite (u_n) est bornée, alors il existe M tel que pour tout entier n, $|u_n| \leq M$. Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n| \leq \varepsilon/M$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc :
$$|u_n\, v_n| = |u_n|\,|v_n| \leq M|v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \ .$$
D'où le résultat.

□

Théorème 2.3.2

1. *La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.*
2. *Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.*

Démonstration : Pour nous ramener au lemme 2.3.1, observons d'abord qu'une suite (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - l)$ tend vers 0.

1. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', alors $(u_n - l)$ et $(v_n - l')$ convergent vers 0. Donc $(u_n - l + v_n - l')$ converge vers 0 d'après le point *1.* du lemme 2.3.1, d'où le résultat.
2. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', nous voulons montrer que $(u_n v_n - ll')$ converge vers 0. Ecrivons :
$$u_n v_n - ll' = u_n(v_n - l') + (u_n - l)l' \ .$$
Il suffit donc de montrer séparément que les deux suites $(u_n(v_n - l'))$ et $((u_n - l)l')$ tendent vers 0, d'après le premier point du lemme 2.3.1. Mais chacune de ces deux suites est le produit d'un suite convergeant vers 0 par une suite bornée ((u_n) est bornée car elle est convergente). D'où le résultat, par le point *2.* du lemme 2.3.1.

$\square$

Le théorème 2.3.2 est l'outil de base pour étudier des convergences de suites à partir des exemples classiques de la section précédente. On utilise aussi la composition par une fonction continue. On peut donner deux définitions équivalentes de la continuité, dont l'une est parfaitement adaptée aux suites convergentes.

Définition 2.3.3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est continue au point x si et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.*

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce cours sont continues en tout point où elles sont définies, et nous l'admettrons. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donc si une suite (u_n) converge vers $l \neq 0$, la suite des inverses $(1/u_n)$ converge vers $1/l$. En utilisant le théorème 2.3.2, on en déduit que le quotient de deux suites convergentes converge vers le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit non nulle.

Voici un exemple de calcul de limite, résumant l'ensemble des techniques que nous avons vues jusqu'ici. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{2n + \cos(n)}{n\sin(1/n) + \sqrt{(n+1)(n+2)}} .$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{2 + \frac{\cos(n)}{n}}{\sin(1/n) + \sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}} .$$

Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{2}{n})$, $(\sin(1/n))$ et $(\frac{\cos(n)}{n})$ tendent vers 0 (pourquoi ?). On en déduit que (u_n) tend vers 2.

Dans le cas où les limites de (u_n) et (v_n) peuvent être infinies, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. Nous les résumons dans les tableaux 2.1 et 2.2. Dans ces deux tableaux les points d'interrogations sont des indéterminations : tous les cas sont possibles. Par exemple :

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers 0.
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.
- $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$: la suite $(u_n + v_n)$ ne converge pas.

$\lim u_n \setminus \lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TAB. 2.1 – Limites possibles de $(u_n + v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

$\lim u_n \setminus \lim v_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TAB. 2.2 – Limites possibles de $(u_n v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

2.4 Convergence des suites monotones

La notion de limite est très liée aux notions de borne supérieure et borne inférieure du chapitre précédent. Etant donnée une suite (u_n), nous appellerons borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités

$$\sup\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \inf\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Théorème 2.4.1

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.*
2. *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
3. *Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.*
4. *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Si l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, alors il admet une borne supérieure finie, par le théorème 1.2.2 : notons-la l. Par la proposition 1.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$. Mais si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l\ ,$$

donc (u_n) converge vers l.

Si la suite n'est pas majorée, pour tout A, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$A \leq u_{n_0} \leq u_n\ ,$$

donc la suite (u_n) tend vers l'infini.

Si la suite (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)$. $\square$

Définition 2.4.2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Elles sont dites* adjacentes *si*

1. *(u_n) est croissante,*
2. *(v_n) est décroissante,*
3. *$(v_n - u_n)$ tend vers 0.*

Proposition 2.4.3 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration : Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors $(v_n - u_n)$ est décroissante, et si elle tend vers 0, alors pour tout n, $v_n - u_n \geq 0$. Donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \ .$$

La suite (u_n) est croissante, et majorée par v_0, donc elle converge. La suite (v_n) est décroissante, et minorée par u_0, donc elle converge. Comme la différence tend vers 0, les deux limites sont égales (théorème 2.3.2). □

Voici un exemple très classique. Posons

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!} \ .$$

La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$. La suite (v_n) est décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \ .$$

La différence tend vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite. Cette limite est le nombre $e \simeq 2.718$. Les deux suites fournissent un encadrement extrêmement précis de e, pour un nombre de termes calculés relativement faible. Pour $n = 10$, la différence $v_n - u_n$ vaut $2.76\,10^{-8}$, et pour $n = 100$, elle vaut $1.07\,10^{-160}$.

Ce même encadrement est aussi un moyen de montrer que e est irrationnel. Supposons en effet que e s'écrive $e = p/q$, avec p et q entiers. On aurait $u_q < p/q < v_q$, soit

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!} \ .$$

Multiplions ces inégalités par $q\,q!$. Le nombre entier $p\,q!$ devrait être encadré strictement par deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.

2.5 Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 2.5.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n \ .$$

Démonstration : Supposons le contraire : $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons l cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $u_n - v_n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Observons que la conclusion reste vraie si au lieu d'être comparables pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n le sont "à partir d'un certain rang". Ceci vaut d'ailleurs pour tous les résultats de cette section. Par contre le fait de supposer $u_n < v_n$ implique seulement $\lim u_n \leq \lim v_n$: bien que $1/n < 2/n$, les deux suites ont la même limite.

Le théorème 2.5.1 ne permet pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 2.5.2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$, alors u_n tend vers 0.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$:

$$|u_n| \leq |v_n| \leq \varepsilon ,$$

d'où le résultat. □

On en déduit le résultat d'encadrement suivant que l'on trouve dans certains livres sous le nom de "théorème des gendarmes".

Corollaire 2.5.3 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq v_n \leq w_n .$$

alors (v_n) converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2.5.2 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. □

Voici un exemple d'application. Soit

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n + 2} .$$

Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant.

$$\frac{n-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+2} .$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc $\lim u_n = 1$.

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 2.5.4 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.*
2. *Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Pour tout A, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$:

$$v_n \geq u_n \geq A ,$$

donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. L'autre affirmation est symétrique. □

On dispose d'un vocabulaire adapté à la comparaison des suites.

Définition 2.5.5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que les v_n sont non nuls.*

1. *On dit que la suite (u_n) est* dominée *par la suite (v_n) si la suite des quotients (u_n/v_n) est bornée :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M\,.$$

On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit "u_n est un grand O de v_n".

2. *On dit que la suite (u_n) est* négligeable *devant la suite (v_n) si la suite des quotients (u_n/v_n) tend vers 0 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon\,.$$

On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit "u_n est un petit o de v_n".

3. *On dit que la suite (u_n) est* équivalente *à la suite (v_n) si la suite des quotients (u_n/v_n) tend vers 1 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon\,.$$

On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit "u_n est équivalent à v_n".

Par exemple :

$$\sqrt{4n^2+1} = O(n)\ ,\ \sqrt{4n^2+1} = o(n^2)\ ,\ \sqrt{4n^2+1} \sim 2n\ .$$

L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :

$$n!\ \sim\ \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ .$$

Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple.

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}\ .$$

Comme $1+n = o(n^2)$, $n^2+n+1 \sim n^2$, donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$, donc $\lim u_n = 1/2$.

Il est bon d'avoir en tête une échelle des "infiniment petits" et des "infiniment grands", c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. *Infiniment petits*

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1$$

2. *Infiniment grands*

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

2.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et l'équation de récurrence

$$u_{n+1} = F(u_n) \ .$$

La suite est celle des itérés successifs de l'application F à partir de u_0 :

$$u_1 = F(u_0), u_2 = F(F(u_0)) = F \circ F(u_0), u_3 = F \circ F \circ F(u_0), \ldots$$

On notera $F^{\circ n}$ la composée de F avec elle-même n fois :

$$u_n = F^{\circ n}(u_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(u_0) \ .$$

Il existe un moyen simple de visualiser les premiers termes de la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ à partir du graphe de la fonction F, représenté dans le plan. Portons u_0 en abscisse et traçons le segment vertical allant de $(u_0, 0)$ à $(u_0, F(u_0))$. Traçons ensuite le segment horizontal rejoignant la première bissectrice, de $(u_0, F(u_0))$ à $(F(u_0), F(u_0))$. L'abscisse du nouveau point est u_1. On itère alors le procédé en traçant alternativement des segments verticaux et horizontaux. On obtient ainsi une sorte de "toile d'araignée" (figure 2.2).

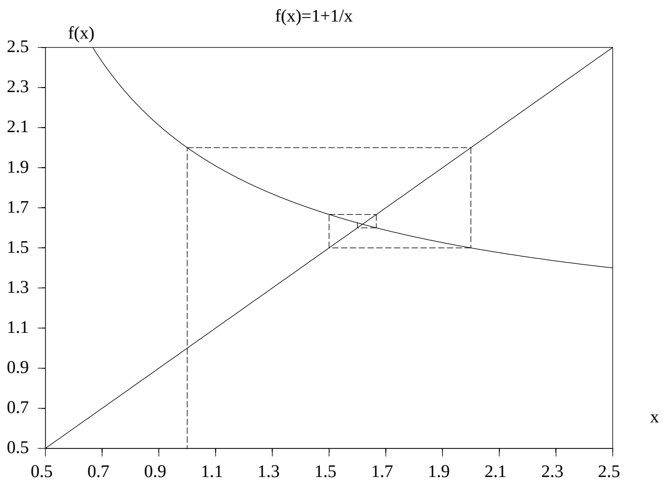


FIG. 2.2 – Représentation d'itérés successifs par une "toile d'araignée".

Cette représentation graphique suffit pour se faire une idée du comportement qualitatif d'une suite récurrente réelle. Elle permet de détecter les convergences ou divergences ainsi que les comportements oscillants.

Pour étudier la suite (u_n), le premier travail consiste à identifier les limites possibles. Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n+1}), qui est une suite extraite, converge vers la même limite l. Donc, si F est continue en l, on doit avoir

$$l = F(l) \ ,$$

On dit que l est un *point fixe* de F : si $u_0 = l$, alors la suite est constante. Il peut se faire que F ait plusieurs points fixes. Le comportement de la suite u_n (monotonie, convergence ou non vers un point fixe), dépend de u_0.

Plutôt qu'une discussion générale, nous allons traiter l'exemple historique sans doute le plus célèbre : les rapports des nombres de Fibonacci. Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et pour $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

Voici les 20 premiers.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

La suite (a_n) est une suite croissante d'entiers, elle ne s'annule pas. Pour $n \geq 1$, posons $u_n = a_{n+1}/a_n$. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \ .$$

C'est une récurrence du type $u_{n+1} = F(u_n)$, avec

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} \ .$$

La figure 2.2 représente les premieres valeurs de u_n en toile d'araignée. Pour étudier (u_n), commençons par chercher les points fixes de l'application F, en résolvant l'équation

$$1 + \frac{1}{x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0 \ .$$

L'équation a deux solutions,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

La première solution, $\phi \simeq 1.618$, est le célèbre nombre d'or ; on le retrouve (paraît-il) un peu partout, des pyramides d'Egypte aux coquilles de nautiles en passant par la Joconde. Comme u_n reste positif, la seule limite possible pour (u_n) est ϕ. Nous allons démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 2.6.1

1. *La suite des termes pairs* (u_{2k}) *est croissante*
2. *La suite des termes impairs* (u_{2k+1}) *est décroissante*
3. *Chacune de ces deux suites converge vers* ϕ *(elles sont adjacentes).*

En d'autres termes, les termes u_n approchent ϕ, alternativement à gauche et à droite. On dit que (u_n) est une suite alternée.

Démonstration : En soustrayant les deux équations

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad \phi = 1 + \frac{1}{\phi} ,$$

on obtient

$$u_{n+1} - \phi = \frac{\phi - u_n}{u_n \phi} .$$

Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ sont de signe opposé. Puisque $u_0 < \phi$, on obtient par récurrence que pour tout $k \geq 1$:

$$u_{2k} < \phi < u_{2k+1} .$$

On peut aussi exprimer $u_{n+2} - \phi$ en fonction de $u_n - \phi$:

$$u_{n+2} - \phi = \frac{u_n - \phi}{\phi^2(u_n + 1)} .$$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$. On en déduit par récurrence que pour les termes pairs :

$$0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0) ,$$

et pour les termes impairs

$$0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\phi^2}(u_{2k+1} - \phi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi) .$$

Donc la suite des termes pairs est croissante et la suite des termes impairs décroissante. Mais de plus :

$$\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k}) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} - \phi = O(\phi^{-2k})$$

Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers ϕ, car $\phi > 1$, donc ϕ^{-2k} tend vers 0. □

2.7 Suites de Cauchy

Est-il possible de savoir si une suite converge (vers une limite finie), sans connaître sa limite ? La notion de suite de Cauchy répond à cette question. Elle traduit l'idée intuitive que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

Définition 2.7.1 *Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout ε les distances entre termes $|u_{n+k} - u_n|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang :*

$$\forall \varepsilon\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\quad |u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon\,,\ \forall k \in \mathbb{N} .$$

Il n'est pas surprenant qu'une suite convergente soit une suite de Cauchy.

Théorème 2.7.2 *Si une suite de réels converge vers une limite finie, alors c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration : En utilisant l'inégalité triangulaire, écrivons :

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - l + l - u_n| \leq |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon/2$, donc aussi $|u_{n+k} - l| \leq \varepsilon/2$. On a donc, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

L'intérêt de cette notion est qu'elle *caractérise* les suites convergentes : la réciproque du théorème précédent est vraie.

Théorème 2.7.3 *Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.*

Nous donnerons une démonstration de ce théorème en complément du cours (section 2.11).

2.8 Suites à valeurs complexes

On étend aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des suites de réels, sauf celles qui font référence à l'ordre (on ne parle pas de suite complexe croissante, décroissante, majorée ou minorée). Pour les propriétés où la distance $|x - y|$ intervient, la valeur absolue est remplacée par le module, qui se note de la même façon. Par exemple une suite (z_n) est bornée si pour tout n, $|z_n| \leq M$. Elle converge vers $l \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \quad |z_n - l| \leq \varepsilon \ ,$$

qu'il faut comprendre comme "tous les termes de la suite restent dans un disque de rayon ε autour de la limite à partir d'un certain rang" (voir la figure 2.3 pour une illustration).

Le théorème suivant montre que la convergence d'une suite de complexes équivaut à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Théorème 2.8.1 *Soit (z_n) une suite de complexes. La suite (z_n) converge vers l dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}\ z_n)$ et $(\mathrm{Im}\ z_n)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}\ l$ et $\mathrm{Im}\ l$.*

Démonstration : Elle est essentiellement basée sur l'encadrement suivant entre le module d'un nombre complexe et les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire. Soit $z = a + ib$ un complexe, alors

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |z| \leq |a| + |b| \qquad (2.8.1)$$

On note a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de z_n. Si $|z_n - l|$ reste inférieur à ε, alors il en est de même pour $|a_n - \mathrm{Re}\ l|$ et $|b_n - \mathrm{Im}\ l|$, par la première inégalité de

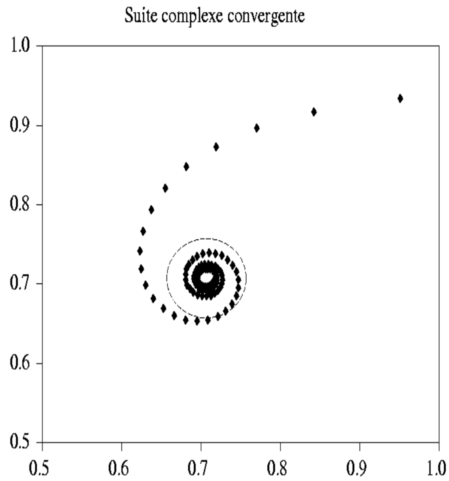


FIG. 2.3 – Convergence dans $\mathbb{C}$ de la suite $(e^{i\pi/4} + e^{in/4}/n)$.

(2.8.1). Réciproquement, si $|a_n - \text{Re } l|$ et $|b_n - \text{Im } l|$ sont inférieurs à $\varepsilon/2$, alors $|z_n - l|$ est inférieur à ε, par la seconde inégalité de (2.8.1). □

Posons par exemple

$$z_n = e^{i\pi/4} + \frac{e^{in/4}}{n} \; .$$

Les parties réelle et imaginaire sont :

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\cos(n/4)}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin(n/4)}{n}$$

Les deux suites convergent vers $\sqrt{2}/2$, et (z_n) converge vers $e^{i\pi/4}$. La figure 2.3 représente dans le plan complexe les 100 premiers termes de la suite (z_n), ainsi que le cercle de rayon $\varepsilon = 0.05$ centré en $l = e^{i\pi/4}$.

2.9 Introduction aux séries

Définition 2.9.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels ou de complexes. On appelle* série de terme général u_n, *et on note* $\sum u_n$ *la suite des sommes partielles,* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *où pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \; .$$

Comme premier exemple de série, observons le développement décimal d'un réel strictement compris entre 0 et 1.

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \; , \qquad \text{où pour tout } n, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\} \; .$$

Cette écriture correspond en fait à la série de terme général $\frac{a_n}{10^n}$. La somme partielle s_n est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près.

Les deux séries les plus souvent utilisées sont la série géométrique et la série exponentielle.

- **Série géométrique**
  Le terme général d'une série géométrique est $u_n = z^n$, où $z \in \mathbb{C}$. Les sommes partielles ont une expression explicite.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} z^i = 1 + z + \cdots + z^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \end{cases}$$

- **Série exponentielle**
  Le terme général d'une série exponentielle est $u_n = z^n/n!$, où $z \in \mathbb{C}$. Les sommes partielles s_n n'ont pas d'expression explicite.

Observons que n'importe quelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une série de terme général u_n, si on pose $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = s_0$. Dans la plupart des cas, les sommes partielles n'ont pas d'expression explicite, et c'est souvent pour cela que l'on parle de série plutôt que de suite.

Définition 2.9.2 *On dit que la série $\sum u_n$ converge vers s si la suite des sommes partielles converge vers s, qui est appelée* somme de la série*.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s \; .$$

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Par exemple, le réel x est la limite de ses approximations décimales, et aussi la somme de la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$.

- **Série géométrique**
  La série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas, la somme est $\frac{1}{1-z}$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \; , \quad |z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \; .$$

- **Série exponentielle**
  Nous démontrerons plus loin que la série exponentielle $\sum z^n/n!$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Sa somme est l'exponentielle de z, notée e^z ou $\exp(z)$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \; , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = \exp(z) \; .$$

Voici un exemple de série dont les sommes partielles sont explicitement calculables.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 \; .$$

En effet,

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \ ,$$

donc

$$u_0 + u_1 \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \ .$$

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Changer un nombre fini de termes d'une série ajoute une même constante à toutes les sommes partielles à partir d'un certain rang. Cela ne change pas sa nature, convergente ou divergente. Si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée. Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 \ .$$

Le fait de calculer la somme d'une série à partir de $n = 0$ est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d'indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Par exemple :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)(m+2)} = 1 \ ,$$

en posant $m = n - 2$.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.

Théorème 2.9.3 *Si une série converge, alors son terme général tend vers* 0.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ .$$

La contraposée de ce résultat est plus utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

Démonstration : Rappelons qu'une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy, c'est à dire si deux termes d'indices grands sont nécessairement proches. Dans le cas de la suite des sommes partielles, la condition de Cauchy s'écrit :

$$\forall\varepsilon \ , \ \exists n_0 \ , \ \forall n > n_0 \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \ , \quad |s_{n+k} - s_n| \leq \varepsilon \ .$$

Rappelons que $s_n = u_0 + \cdots + u_n$. Donc pour $n > n_0$, on doit avoir :

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}| < \varepsilon \ .$$

En particulier, $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Donc la limite de la suite (u_n) est nulle. □

Par exemple la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

diverge : même si les termes non nuls sont très rares il y en quand même une infinité !

Le fait que le terme général tende vers 0 n'est qu'une condition nécessaire de convergence. De nombreuses séries divergentes ont un terme général qui tend vers 0. Par exemple, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$ diverge. En effet :

$$s_{2n-1} - s_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \, .$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy, donc elle ne converge pas.

La linéarité des limites entraîne immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2.9.4 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives s et t. Soient α et β deux réels quelconques. Alors la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ est convergente, et sa somme est $\alpha s + \beta t$.*

Par exemple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \, .$$

Comme conséquence de la linéarité, observons que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge. Comme autre conséquence, pour $\alpha \neq 0$, $\sum \alpha u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Pour les séries à termes complexes la convergence équivaut à celle des parties réelle et imaginaire.

Proposition 2.9.5 *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout n, notons a_n la partie réelle et b_n la partie imaginaire de z_n. La série $\sum z_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Si c'est le cas, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, .$$

Considérons par exemple la série géométrique $\sum z^n$, où z est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument θ : $z = \rho e^{i\theta}$. Pour tout n, $z^n = \rho^n e^{in\theta}$. Les parties réelle et imaginaire de z^n sont

$$a_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad b_n = \rho^n \sin(n\theta) \, .$$

On déduit de la proposition précédente que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-z}\right) \, .$$

Le calcul donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos(n\theta) = \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin(n\theta) = \frac{\rho\sin(\theta)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)} .$$

Etant donnée une série réelle ou complexe $\sum z_n$, on se ramène à une série à termes positifs en étudiant la série des valeurs absolues ou des modules.

Définition 2.9.6 *On dit que la série $\sum z_n$ est* absolument convergente *si la série $\sum |z_n|$ converge.*

Théorème 2.9.7 *Une série absolument convergente est convergente.*

Démonstration : Soit $\sum z_n$ une série absolument convergente. Nous allons démontrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Pour tout $n \geq 0$, posons $s_n = z_0 + \cdots + z_n$. Soient n et k deux entiers.

$$|s_{n+k} - s_n| = |z_{n+1} + \cdots + z_{n+k}| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+k}| .$$

Or si la série $\sum |z_n|$ converge, la suite de ses sommes partielles est de Cauchy, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+k}| < \varepsilon ,$$

Donc, $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$: la suite des sommes partielles est de Cauchy, donc elle converge.
□

Nous allons démontrer que la série exponentielle $\sum z^n/n!$ est absolument convergente, en comparant la série des modules avec une série géométrique.

Théorème 2.9.8 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n/n!$ est absolument convergente.*

Démonstration : Posons $r = |z|$, donc $|z^n/n!| = r^n/n!$. Posons $u_n = r^n/n!$ et $v_n = 1/2^n$. Nous savons que $\sum v_n$ converge, et nous voulons montrer que $\sum u_n$ converge. Calculons le rapport u_n/v_n.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{r^n/n!}{1/2^n} = \frac{(2r)^n}{n!} .$$

Le rapport tend vers 0, donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Posons

$$a_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_n \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_n .$$

Pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq b_n$. Or la série de terme général $v_n = 1/2^n$ converge, donc la suite (b_n) converge, donc la suite (a_n) est bornée. Comme elle est croissante, elle converge. Ceci implique que la série de terme général u_n converge. □

2.10 Exercices

Exercice 2.1 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Toute suite récurrente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, est périodique à partir d'un certain rang.
2. ☐ Si x est un réel, la suite des décimales de x est périodique.
3. ☐ Si x est rationnel, la suite des décimales de x est périodique.
4. ☒ Si x est décimal, la suite des décimales de x est constante à partir d'un certain rang.
5. ☐ Si F est une application croissante, la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ est croissante.
6. ☒ Si f est une application croissante, la suite $(f(n))$ est croissante.
7. ☒ Si P est une application polynôme, la suite $(P(n))$ est monotone à partir d'un certain rang.
8. ☐ La suite $(e^{ni\pi/4})$ est périodique de période 4.
9. ☒ La suite $((-1)^k)$ est une suite extraite de la suite $(e^{ni\pi/4})$.
10. ☒ On peut extraire de la suite $(e^{ni\pi/4})$ une sous-suite constante.

Exercice 2.2 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors pour tout n, $u_n < 1$.
2. ☒ Si (u_n) tend vers 0, alors $u_n < 1$ pour n assez grand.
3. ☒ Si (u_n) tend vers 2, alors $u_n > 1$ pour n assez grand.
4. ☐ Toute suite croissante et minorée tend vers $+\infty$.
5. ☒ Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
6. ☒ Toute suite croissante et bornée converge.
7. ☒ Si la suite des décimales de x converge, alors x est un nombre rationnel.
8. ☐ Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
9. ☒ Si (u_n) tend vers 0 alors $(\cos(n)\,u_n)$ tend vers 0.
10. ☐ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\,u_n)$ tend vers 1.
11. ☒ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\,u_n)$ est bornée.
12. ☐ Si $r \leq 1$ alors $(\cos(n)\,r^n)$ tend vers 0.
13. ☒ Si $r < 1$ alors $(\cos(n)\,r^n)$ tend vers 0.
14. ☐ Si la suite $(|u_n|)$ converge vers l, alors la suite (u_n) converge vers l ou vers $-l$.
15. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
16. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n^2}) converge vers l.
17. ☒ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^2) converge vers 1.

18. ☐ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^n) converge vers 1.

Exercice 2.3 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si pour tout n, $(u_n) \geq \sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si pour tout n, $(u_n) \geq -\sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.
3. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) tendent vers 1, alors (v_n) tend vers 1.
4. ☐ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.
5. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) est bornée.
6. ☒ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
7. ☐ Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
8. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n/v_n) est bornée.
9. ☐ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
10. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$.

Exercice 2.4 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $n2^n = O(2^n)$.
2. ☒ $2^{n+1} = O(2^n)$.
3. ☐ $2^{n^2+n} = O(2^{n^2})$.
4. ☒ $n2^n = o(3^n)$.
5. ☐ $n2^n/\sqrt{n+1} = O(2^n)$.
6. ☒ $n2^n/\sqrt{n^2+1} \sim 2^n$.
7. ☐ $3^n/n = O(2^n)$.
8. ☒ $2^n/n = o(2^n)$.
9. ☐ $n2^{-n} = O(2^{-n})$.
10. ☒ $n3^{-n} = o(2^{-n})$.
11. ☐ $n2^{-n}/\sqrt{n+1} = O(2^{-n})$.
12. ☒ $n2^{-n}/\sqrt{n^2+1} \sim 2^{-n}$.
13. ☒ $3^{-n}/n = O(2^{-n})$.
14. ☒ $2^{-n}/n = o(2^{-n})$.

Exercice 2.5 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum 1/u_n$ diverge.
2. ☐ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum nu_n$ converge.

3. ☐ Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors la série $\sum u_n + v_n$ diverge.
4. ☒ Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
5. ☒ Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum \cos(n) u_n$ converge.
6. ☒ Si la série $\sum e^{in} u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum \cos(2n) u_n$ converge.
7. ☐ Si $|r| \leq 1$ alors $\sum n r^n$ converge.
8. ☒ Si $|r| < 1$ alors $\sum r^n$ converge.
9. ☐ Si $|r| < 1$ alors $\sum e^n r^n$ converge.
10. ☒ Si $|r| < 1$ alors $\sum n r^n$ converge.
11. ☐ Si $|r| \leq 1$ alors $\sum \cos(n) r^n$ converge.
12. ☒ Si $|r| \geq 1$ alors $\sum \cos(n) r^n$ diverge.
13. ☒ Si $|r| < 1$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $\sum u_n r^n$ converge.

Exercice 2.6 On considère les suites (u_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\ ,\ u_n = \frac{2n+3}{2n+1}\ ,\ u_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\ ,$$

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}\ ,\ u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}\ ,\ u_n = \frac{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+n+1}\ ,$$

Pour chacune de ces suites :

1. Montrer qu'elle converge vers 1.
2. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Exercice 2.7 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\ .$$
2. $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}\ .$$
3. $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ , \quad u_n = s_{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n}\ .$$
4. $$u_0 = a > 0\ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}\ , \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 2.8 Soit (u_n) une suite de réels.

1. Montrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
3. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent, alors (u_n) converge.
4. Montrer par un exemple que les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) et (u_{n^2}) peuvent converger sans que (u_n) converge.

Exercice 2.9 Démontrer les relations suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln n}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ , \ \frac{n^2 \ln n}{2^n} = o(\frac{1}{n^4}) \ , \ \frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n}) \ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$10^n = o(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n}) \ , \ n^4 \, 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3}) \ , \ (\ln n)^4 \sqrt{n} = o(n^2 \ln(\ln n)) \ .$$

Exercice 2.10 Démontrer les résultats suivants.

1.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e} \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{1/2}}\right)^n = +\infty \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \ ,$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^6 + 2^{3n}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1} + (-1)^n}{n^{-3} + (-1)^{3n}} = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1/2} + (-1/2)^n}{n^{-3} + (-1/2)^{3n}} = +\infty \ ,$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = 1 \ ,$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2} = +\infty \ , \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = 1 \ ,$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2-1}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n - \sqrt{n^2-1}} = -1 \ .$$

Exercice 2.11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) \ .$$

la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée "suite des moyennes de Cesaro" de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (c_n) converge aussi vers l.
3. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
4. Soit (u_n) une suite de réels telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l. Montrer que la suite (u_n/n) converge également vers l.
5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $l > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge également vers l.

Exercice 2.12 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1$, $u_0 = 1$, $u_0 = 3$. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0,2]) \subset [0,2]$ et que $F([-2,0]) \subset [-2,0]$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$.
3. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.13 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geq -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \sqrt{2+x} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$. Montrer que 2 est le seul point fixe de F.
2. Pour $u_0 \in [-2, 2[$, montrer que (u_n) est croissante, et tend vers 2.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.14 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul point fixe de F.
2. On suppose $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers 0.
3. On suppose $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

Exercice 2.15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2) .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 2$, $u_0 = -1/2$. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0,1]) \subset [0,1]$ et que $F([-1,0]) \subset [-1,0]$.
2. On suppose $u_0 \in [0,1]$. Montrer que (u_n) est décroissante et donner sa limite.
3. On suppose $u_0 > 1$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
4. On suppose $u_0 \in [-1,0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 2^{-n}$. En déduire que (u_n) tend vers 0.
5. On suppose $u_0 < -1$. Montrer qu'on peut se ramener aux trois cas précédent. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 2.16 Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1} .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n - 1}{n+1} .$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$$

Exercice 2.17 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 2.18 Soit a un réel et r un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} = r\, u_n + a\ .$$

1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de raison r.
2. On pose $\lambda = a/(1-r)$. Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à λ est solution de l'équation de récurrence (E).
3. Montrer que la suite $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique.

4. En déduire l'expression suivante de u_n :

$$u_n = \frac{a}{1-r} + \left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) r^n .$$

Exercice 2.19 On considère l'équation de récurrence qui engendre la suite de Fibonacci :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

1. Soit r un réel. Montrer qu'une suite géométrique de raison r vérifie (E) si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 = r + 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n = a\phi^n + b(-1/\phi)^n$, où a et b sont deux réels, et ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

   Montrer que la suite (u_n) vérifie l'équation de récurrence (E).
3. Calculer les valeurs de a et b telles que

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ a\phi - b/\phi & = & 1 \end{cases}$$

4. En déduire l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \right) .$$

5. A partir de cette expression, retrouver le résultat du cours (proposition 2.6.1) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi .$$

Exercice 2.20 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & (a_n - b_n)/2 \\ b_{n+1} & = & (a_n + b_n)/2 \end{cases}$$

On pose $z_n = a_n + i\, b_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n .$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{1}{2^{n/2}} e^{in\pi/4} .$$

3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.
5. Montrer que les séries $\sum z_n$, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et calculer leur somme.

Exercice 2.21 Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs, tendant vers 0. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \ .$$

1. Montrer que les suites (s_{2n+1}) et (s_{2n}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
3. Montrer que la série $\sum(-1)^n/(n+1)$ est convergente et qu'elle n'est pas absolument convergente.

Exercice 2.22 Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs, tendant vers 0. Soit (b_n) une suite de complexes. On note (B_n) la suite de ses sommes partielles, que l'on suppose bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad |B_n| = |b_0 + b_1 + \cdots + b_n| \leq M \ .$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = B_0(a_0 - a_1) + B_1(a_1 - a_2) + \cdots + B_n a_n \ .$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} |B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M(a_0 - a_{n+1}) \ .$$

3. En déduire que la série de terme général $B_n(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente.
4. En déduire que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.
5. Montrer que les séries

$$\sum \frac{e^{in}}{n}\ ,\ \sum \frac{\sin n}{n}\ ,\ \sum \frac{\cos n}{n}\ ,$$

sont convergentes.

2.11 Compléments

Limite sup et limite inf

Quand on définit une notion mathématique, le fait qu'elle refuse de s'appliquer à certains objets la rend aussitôt suspecte. La suite $((-1)^n)$ ne converge pas. Serait-ce que la notion de limite est insuffisante ?

Au contraire de la limite d'une suite, la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble existent toujours (elles peuvent être infinies).

Soit (u_n) une suite de réels. Considérons la suite d'ensembles (U_n) où U_n est défini par :

$$U_n = \{u_m \,,\; m \geq n\} \,.$$

Posons alors :

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n \,,$$

Comme les ensembles U_n sont emboîtés ($U_{n+1} \subset U_n$), la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante, donc elle admet une limite (éventuellement infinie), par le théorème 2.4.1. Sa limite est la *limite inférieure* de la suite (u_n). La *limite supérieure* est la limite de la suite (décroissante) $\overline{u}_n$.

Définition 2.11.1

1. *On appelle limite inférieure de la suite* (u_n)*, et on note* $\liminf u_n$ *ou* $\underline{\lim}\, u_n$*, la quantité*

$$\liminf u_n = \sup\{\underline{u}_n \,,\; n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{où} \quad \underline{u}_n = \inf\{u_m \,,\; m \geq n\} \,.$$

2. *On appelle limite supérieure de la suite* (u_n)*, et on note* $\limsup u_n$ *ou* $\overline{\lim}\, u_n$*, la quantité*

$$\limsup u_n = \inf\{\overline{u}_n \,,\; n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{où} \quad \overline{u}_n = \sup\{u_m \,,\; m \geq n\} \,.$$

On retient de façon abrégée que

$$\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} u_m \quad \text{et} \quad \limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} u_m \,.$$

La $\liminf$ et la $\limsup$ existent pour toute suite réelle. Voici trois exemples.

u_n	$\liminf u_n$	$\limsup u_n$
$\sin(n)$	-1	1
$n\sin(n)$	$-\infty$	$+\infty$
$\sin(n)/n$	0	0

On peut voir la $\liminf$ comme la plus petite limite d'une suite extraite de la suite (u_n), et la $\limsup$ comme la plus grande. Elles peuvent éventuellement être infinies. On peut toujours extraire de (u_n) deux sous-suites qui convergent vers ces deux limites. Elles fournissent une caractérisation de la convergence : une suite converge si et seulement si sa $\liminf$ est égale à sa $\limsup$.

Proposition 2.11.2 *Une suite de réels (u_n) converge vers l si et seulement si*

$$\liminf u_n = \limsup u_n = l \; .$$

Démonstration : Ce résultat reste vrai si la suite tend vers $\pm\infty$. Nous le démontrons pour une limite finie. Rappelons la construction de $\liminf$ et $\limsup$, comme limite des suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$, où

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n \; ,$$

avec

$$U_n = \{u_m \; , \; m \geq n\} \; .$$

Démontrons d'abord la condition suffisante. Par construction, la suite (u_n) est encadrée par les suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.

$$\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n \; .$$

Si les deux suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ ont la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite, par le théorème des gendarmes (corollaire 2.5.3).

Réciproquement, si la suite (u_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les ensembles U_n sont inclus dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui implique :

$$l - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq l + \varepsilon \; .$$

Donc,

$$l - \varepsilon \leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq l + \varepsilon \; .$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il entraîne :

$$l = \liminf u_n = \limsup u_n \; .$$

□

Nous avons maintenant les bons outils pour démontrer le théorème 2.7.3 :

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Commençons par montrer que (u_n) est bornée. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon \; .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \varepsilon \leq u_{n_0+k} \leq u_{n_0} + \varepsilon \; .$$

La suite (u_n) est bornée à partir du rang n_0, donc bornée tout court. Donc pour tout n, l'ensemble $U_n = \{u_m \; , \; m \geq n\}$ est borné et les quantités $\underline{u}_n = \inf U_n$ et $\overline{u}_n = \sup U_n$ sont finies. Nous avons déjà observé que $(\underline{u}_n)$ est une suite croissante et $(\overline{u}_n)$ une suite décroissante, car les ensembles U_n sont emboîtés. Nous allons démontrer que les suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ sont adjacentes, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}_n - \underline{u}_n = 0 \; .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n_0+k} \leq u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, $u_{n_0} - \varepsilon$ est un minorant de l'ensemble U_n et $u_{n_0} + \varepsilon$ en est un majorant. Par définition des bornes inférieure et supérieure :

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Donc $\overline{u}_n - \underline{u}_n < \varepsilon$, ce que nous voulions démontrer. □

Dichotomies

Comme application de la proposition 2.4.3 (deux suites adjacentes convergent vers la même limite), nous présentons sur deux exemples une technique d'encadrement très efficace, la *dichotomie* (action de partager en deux).

Le premier exemple est un résultat proche de la proposition 1.7.1.

Proposition 2.11.3 *Soit f une application continue de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même. Alors f admet un point fixe :*

$$\exists a \in [0,1] , \quad f(a) = a .$$

Démonstration : La démonstration de la proposition 1.7.1 assurait l'existence, mais ne fournissait aucun moyen de localiser le point fixe ou de le calculer. Celle que nous proposons ici en revanche, est *constructive* : on peut la transformer en un algorithme pour calculer une valeur approchée du point fixe.

Posons $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Si $f(u_0) = u_0$, ou si $f(v_0) = v_0$, inutile d'aller plus loin, on a trouvé un point fixe. Sinon, on a forcément $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Examinons le point $1/2$: si $f(1/2) = 1/2$, le point fixe est trouvé. Si $f(1/2) > 1/2$, on pose $u_1 = 1/2$ et $v_1 = v_0$. Si $f(1/2) < 1/2$, on pose $u_1 = u_0$ et $v_1 = 1/2$. On itère ensuite la construction. Supposons que u_n et v_n ont été construits de sorte que $f(u_n) > u_n$ et $f(v_n) < v_n$. On examine le point $x = (u_n + v_n)/2$. si $f(x) = x$, le point fixe est trouvé. Si $f(x) > x$, on pose $u_{n+1} = x$ et $v_{n+1} = v_n$. Si $f(x) < x$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = x$.

Plaçons nous dans le cas où la procédure se prolonge jusqu'à l'infini (on ne trouve jamais de point fixe). Vu la manière dont elles ont été construites, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n = 2^{-n}$. Donc elles convergent vers la même limite a. Comme f est continue les suites $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergent vers $f(a)$. Par construction, $f(u_n) > u_n$, donc $f(a) \geq a$. De même, $f(v_n) < v_n$, donc $f(a) \leq a$. Donc $f(a) = a$: a est bien un point fixe. □

Voici un résultat beaucoup plus important, démontré également par dichotomie : le *théorème de Bolzano-Weierstrass*.

Théorème 2.11.4 *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : Soit m un minorant et M un majorant de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad m \leq u_n \leq M\,.$$

Posons $a_0 = m$ et $b_0 = M$, et $\varphi(0) = 0$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés : l'une au moins contient une infinité de termes de la suite (u_n). Supposons que $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ contienne une infinité de termes de la suite. On note $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, et $\phi(1) > 0$ un entier tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$. Si la première moitié ne contient qu'un nombre fini de termes, on la remplace par l'autre moitié $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(M-m)/2^k$, et des valeurs extraites $u_{\phi(k)} \in [a_k, b_k]$. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Par le théorème des gendarmes (corollaire 2.5.3) la suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers la même limite que (a_n) et (b_n). $\square$

Fractions continues

Voici une autre situation où l'on rencontre des suites adjacentes comme approximations numériques d'un réel. Nous allons construire par récurrence une suite de rationnels (u_n) qui encadrent un réel x de manière optimale, en un sens qui sera précisé plus loin.

On construit d'abord une suite d'entiers (a_n) de la façon suivante. Soit (a_0) la partie entière de x. On calcule l'inverse de la partie décimale, $1/D(x)$ qui est un réel supérieur à 1. On note a_1 sa partie entière. On itère ensuite le procédé, en prenant pour chaque entier la partie entière de l'inverse de la partie décimale. Voici ce que cela donne pour $x = \pi$.

$$\begin{array}{lll}
a_0 = \lfloor \pi \rfloor & = 3 & d_0 = \pi - a_0 \\
a_1 = \lfloor 1/d_0 \rfloor & = 7 & d_1 = 1/d_0 - a_1 \\
a_2 = \lfloor 1/d_1 \rfloor & = 15 & d_2 = 1/d_1 - a_2 \\
a_3 = \lfloor 1/d_2 \rfloor & = 1 & d_3 = 1/d_1 - a_3 \\
a_4 = \lfloor 1/d_3 \rfloor & = 292 & d_4 = 1/d_3 - a_4 \\
a_5 = \lfloor 1/d_4 \rfloor & = 1 & d_5 = 1/d_4 - a_5
\end{array}$$

Vous pourrez vérifier que la suite (a_n) associée à $\sqrt{2}$ est $(1, 2, 2, 2, \ldots)$. La suite associée au nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ est $(1, 1, 1, 1, \ldots)$.

La suite des entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant donnée, on fabrique une suite de rationnels u_n en reprenant le processus à l'envers.

$$u_0 = a_0\,,\; u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}\,,\; u_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Le terme général u_n est

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Le terme "fraction continue" est assez clair. Il n'y a pourtant pas de rapport direct avec les fonctions continues. Il vaudrait mieux dire, comme en anglais, "fraction continuée".

Voici les premiers termes de la suite (u_n) pour $x = \pi$, et la valeur numérique de $\pi - u_n$. Le premier terme $u_1 = 22/7$ était déjà connu des égyptiens comme approximation de π.

n	u_n	$\pi - u_n$
0	3	0.1415926535
1	$\frac{22}{7}$	-0.0012644893
2	$\frac{333}{106}$	0.0000832196
3	$\frac{355}{113}$	-0.0000002668
4	$\frac{103993}{33102}$	0.0000000006
5	$\frac{104348}{33215}$	-0.0000000003

Les u_n s'approchent rapidement de π, et de plus ils encadrent la vraie valeur : les deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes. On démontre le résultat suivant.

Théorème 2.11.5 *Soit x un réel et (u_n) la suite des fractions continues associée à x. Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes et convergent vers x.*

Pour tout n, notons h_n et b_n les deux entiers premiers entre eux tels que $u_n = h_n/b_n$. Alors :

$$\frac{1}{b_n(b_{n+1} + b_n)} < \left| x - \frac{h_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n b_{n+1}} .$$

Cet encadrement montre que l'erreur commise en approchant x par u_n est de l'ordre du carré du dénominateur. La taille du dénominateur est en quelque sorte le prix que l'on accepte de payer pour une approximation rationnelle de x. On démontre que parmi les rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à b_n, c'est u_n qui est le plus proche de x. L'approximation par fractions continues est donc la meilleure possible.

Applications contractantes

Le principal problème des suites récurrentes est que selon la valeur initiale u_0 et la fonction F que l'on itère, tous les comportements sont possibles, même les plus sauvages. Pour vous en convaincre, essayez de suivre le plus longtemps possible la toile d'araignée de la figure 2.4.

Il existe pourtant une situation particulièrement agréable, celle où l'application F est *contractante*.

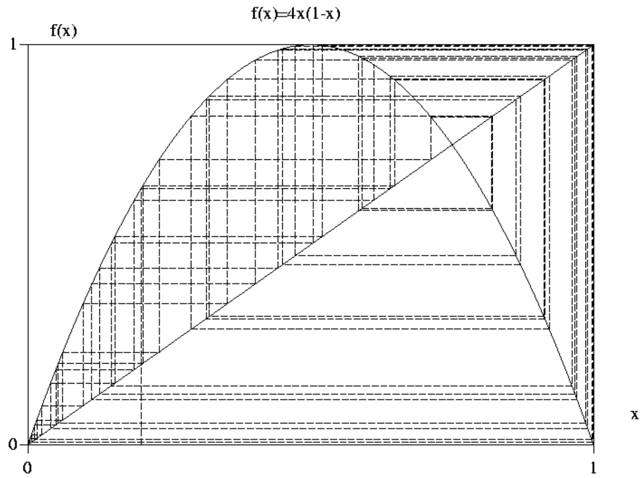


FIG. 2.4 – Comportement chaotique d'une suite récurrente.

Définition 2.11.6 *Soit ρ un réel tel que $0 < \rho < 1$. Soit F une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On dit que F est* contractante *de rapport ρ si pour tous x et y distincts dans I,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho |x - y| \ .$$

Théorème 2.11.7 *Soit F une application contractante. Alors F possède un point fixe unique et pour tout $u_0 \in I$ la suite des itérés $(F^{\circ n}(u_0))$ converge vers ce point fixe.*

La démonstration sera l'occasion d'utiliser la notion de suite de Cauchy.

Démonstration :

Notons $u_n = F^{\circ n}(u_0)$. Nous allons montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \rho |u_n - u_{n-1}| \ ,$$

et donc par récurrence,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \rho^n |u_1 - u_0| \ .$$

Utilisons l'inégalité triangulaire pour écrire :

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+k} - u_n| & \leq & |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+2} - u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \\ & \leq & |u_1 - u_0|(\rho^n + \rho^{n+1} + \cdots + \rho^{n+k-1}) \\ & = & |u_1 - u_0|\rho^n(1 + \rho + \cdots + \rho^{k-1}) \\ & = & |u_1 - u_0|\rho^n \dfrac{1 - \rho^k}{1 - \rho} \\ & < & \dfrac{|u_1 - u_0|}{1 - \rho}\, \rho^n \ . \end{array}$$

Comme $\rho < 1$, la suite géométrique (ρ^n) tend vers 0, donc la distance $|u_{n+k} - u_n|$ peut être rendue arbitrairement petite, pour n assez grand. Donc (u_n) est une suite de Cauchy.

Par le théorème 2.7.3, la suite (u_n) converge. Soit l sa limite. La suite $(f(u_n))$ est telle que :

$$|f(u_n) - f(l)| < |u_n - l| \ .$$

Donc $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$ (f est continue) et $f(l) = l$.

S'il y avait deux points fixes différents l et l', ils seraient tels que

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| < |l - l'| \ ,$$

ce qui est impossible. □

Méthode de Newton

Supposons que l'on souhaite résoudre numériquement l'équation

$$f(z) = 0 \ .$$

La méthode consiste à écrire une solution z comme point fixe d'une fonction F, choisie de manière à être contractante, avec le meilleur rapport de contraction possible sur un intervalle contenant le point fixe. Supposons que f soit une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que l'on connaisse une valeur x_0 pas trop éloignée de la solution. L'équation de la tangente en x_0 au graphe de f est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \ .$$

Cette droite coupe l'axe des x au point :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ .$$

Il est raisonnable d'espérer que x_1 soit beaucoup plus proche de la solution cherchée que x_0. La suite itérative que l'on se propose de calculer est donc $(F^n(x_0))$, avec :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

Par exemple, si on souhaite calculer numériquement $\sqrt{2}$, on pourra l'écrire comme solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$, et contruire la suite définie par $x_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \ .$$

La figure 2.5 montre une illustration graphique.

La précision de la méthode est décrite par le théorème suivant, que nous admettrons.

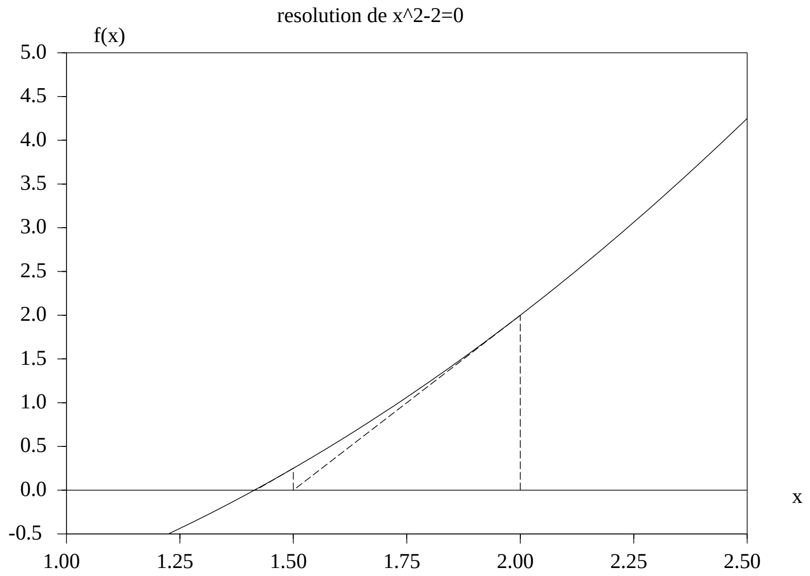


FIG. 2.5 – Méthode de Newton.

Théorème 2.11.8 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z un réel tel que $f(z) = 0$. On suppose que f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant z, et que $f'(z) \neq 0$. Notons :*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,, \quad et \quad M = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\,.$$

Il existe h, $0 < h < 1/M$ tel que pour tout $x_0 \in [z-h, z+h]$, la suite itérative $(F^n(x_0))$ est définie et vérifie :

$$|F^n(x_0) - z| < \frac{1}{M}(M|x_0 - z|)^{2^n}\,. \tag{2.11.2}$$

La majoration (2.11.2) traduit une convergence extrêmement rapide. Supposons pour fixer les idées que $M = 1$ et $|x_0 - z| = 10^{-1}$, alors la précision sera de 10^{-2} à la première itération, 10^{-4} à la seconde, 10^{-8} à la troisième, et on peut s'attendre à 32 décimales exactes à la cinquième itération. Chaque itération double le nombre de décimales exactes. En ce qui concerne la constante M, il est intuitivement normal que la méthode soit d'autant meilleure que la dérivée seconde est plus faible (la courbe est plus proche de sa tangente), et la dérivée plus grande.

Exemple : Reprenons l'équation $z^2 - 2 = 0$, en partant de $x_0 = 2$. Voici les 5 premières valeurs de la suite $(F^n(2))$, à comparer avec $\sqrt{2} \simeq 1.4142135623730950488$.

n	$F^n(2)$
1	1.5000000000000000000
2	1.4166666666666666666
3	1.4142156862745098039
4	1.4142135623746899106
5	1.4142135623730950488

La méthode de Newton est extrêmement précise. En revanche, elle nécessite une initialisation relativement proche de la solution que l'on cherche. Utiliser la méthode à partir d'un point quelconque peut conduire à des résultats numériquement instables, dans la mesure où deux suites récurrentes, même si elles partent de points très voisins, peuvent converger vers des valeurs très éloignées.

Exemple : Considérons l'équation $\sin(\pi z) = 0$, dont les solutions sont les entiers relatifs. Si $f(x) = \sin(\pi x)$, alors :

$$F(x) = x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi \cos(\pi x)} .$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $F^5(x_0)$ pour quelques valeurs de x_0 proches de 0.5, valeur en laquelle f' s'annule.

x_0	0.491	0.493	0.495	0.497	0.499	0.501	0.503	0.505	0.507	0.509
$F^5(x_0)$	$-11.$	$-14.$	$-20.$	$-33.$	$-101.$	102.	34.	21.	15.	12.

Chapitre 3

Espaces vectoriels

3.1 Plan vectoriel

Avant de passer aux définitions générales, il est bon de se remettre en tête l'image familière du plan vectoriel, même si les notions que nous allons introduire dépassent de loin ce cadre.

Etant donnés deux vecteurs v et w, non nuls et non proportionnels entre eux, le plan vectoriel contenant v et w est l'ensemble des *combinaisons linéaires* de v et w.

$$V = \{\lambda\, v + \mu\, w\,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ .$$

Les ensembles de vecteurs proportionnels à v ou à w sont des *droites vectorielles*, engendrées par v ou w. L'ensemble des vecteurs proportionnels à $-2v + w$ est une autre droite vectorielle, qui contient en particulier le vecteur $4v - 2w$ (cf. figure 3.1).

$$D = \{\lambda(-2v + w)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

Il est habituel de représenter les vecteurs dans le plan muni d'un repère orthonormé, auquel cas ils sont repérés par leurs coordonnées. Chaque vecteur du plan est associé de façon unique à son couple de coordonnées, qui est un élément de $\mathbb{R}^2$. Si les coordonnées de v sont (x_v, y_v) et celles de w sont (x_w, y_w), alors les coordonnées de $4v - 2w$ sont $(4x_v - 2x_w, 4y_v - 2y_w)$: l'addition des vecteurs et la multiplication par un réel agissent sur chaque coordonnée.

La droite D engendrée par $(-2v + w)$ s'identifie à un ensemble de couples de réels

$$D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \exists\lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda(-2x_v + x_w)\ ,\ y = \lambda(-2y_v + y_w)\ \}\ .$$

On peut aussi écrire cet ensemble sous la forme suivante :

$$D = \{\ (x, x) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x\,(-2y_v + y_w) - y\,(-2x_v + x_w) = 0\ \}\ .$$

Toute équation du type $ax + by = 0$, admet une droite vectorielle comme ensemble de solutions, pourvu que a et b ne soient pas tous les deux nuls. Une telle équation est dite "linéaire".

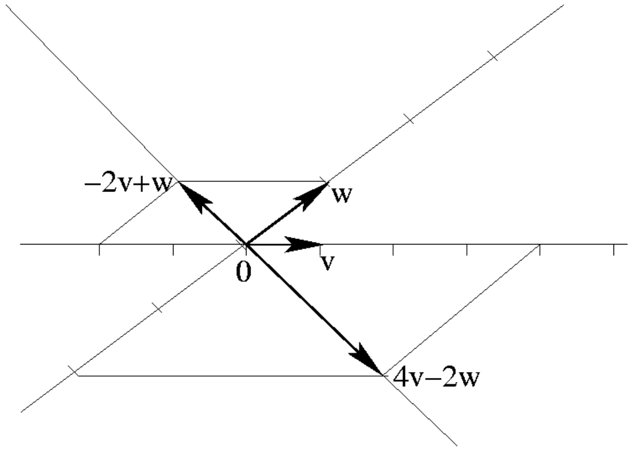


FIG. 3.1 – Plan vectoriel ; droites vectorielles engendrées par les vecteurs v et w. Droite engendrée par le vecteur $-2v+w$.

Nous avons volontairement laissé dans le flou la nature exacte des vecteurs v et w. Ce qui précède vaut pour des objets mathématiques quelconques, à partir du moment où on peut les ajouter entre eux et les multiplier par un réel : polynômes, suites, fonctions...

3.2 Définition et exemples

Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies

- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble)
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la définition 3.2.1. Pour la multiplication externe, le corps des réels peut être remplacé par n'importe quel corps de nombres, par exemple $\mathbb{C}$, sans changer aucun des énoncés qui suivent.

Définition 3.2.1 *On dit que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si V est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- Addition : $\left\{\begin{array}{ccc} V\times V & \longrightarrow & V \\ (v,w) & \longmapsto & v+w \end{array}\right.$

  1. *Associativité :* $\forall u,v,w\in V\ ,\quad u+(v+w)=(u+v)+w$
  2. *Elément neutre :* $\exists e\in V\ ,\ \forall v\in V\ ,\quad v+e=e+v=v$
  3. *Opposé :* $\forall v\in V\ ,\exists v'\in V\ ,\quad v+v'=v'+v=e$
  4. *Commutativité :* $\forall v,w\in V\ ,\quad v+w=w+v$

Ces propriétés font de $(V,+)$ un groupe commutatif.

- Multiplication externe : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda\, v \end{array}\right.$

  5. *Associativité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall v \in V\ ,\quad \lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)\, v$
  6. *Elément neutre :* $\forall v \in V\ ,\quad 1\, v = v$
  7. *Distributivité (1) :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall v \in V\ ,\quad (\lambda+\mu)\, v = \lambda\, v + \mu\, v$
  8. *Distributivité (2) :* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v, w \in V\ ,\quad \lambda\,(v+w) = \lambda\, v + \lambda\, w$

La proposition suivante nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons "vecteur nul") et $-v$ l'opposé de v.

Proposition 3.2.2 *Soit V un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel 0 d'un vecteur v quelconque est l'élément neutre pour l'addition :*
$$\forall v \in V\ ,\quad 0\, v = e\ .$$
2. *Le produit par le réel -1 d'un vecteur v quelconque est son opposé pour l'addition :*
$$\forall v \in E\ ,\quad v + (-1)\, v = e\ .$$

Démonstration : Notons (provisoirement) v' l'opposé de v pour l'addition : $v + v' = e$. En utilisant les propriétés de la définition 3.2.1 :

$$\begin{array}{rcll} 0\, v & = & 0\, v + e & \text{par } \mathit{2.} \\ & = & 0\, v + (v + v') & \text{par } \mathit{3.} \\ & = & 0\, v + (1\, v + v') & \text{par } \mathit{6.} \\ & = & (0\, v + 1\, v) + v' & \text{par } \mathit{1.} \\ & = & (0+1)\, v + v' & \text{par } \mathit{7.} \\ & = & 1\, v + v' = v + v' = e & \text{par } \mathit{6.} \end{array}$$

Ceci démontre le premier point. Pour le second, il suffit d'écrire

$$v + (-1)\, v = 1\, v + (-1)\, v = (1 + (-1))\, v = 0\, v = e\ .$$

□

L'associativité de l'addition permet d'écrire (sans parenthèses) des *combinaisons linéaires* de vecteurs sous la forme suivante.

$$\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n\ ,$$

où $v_1, \ldots, v_n$ sont des éléments de V (vecteurs) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Un espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de ses vecteurs.

Voici quelques exemples d'espaces vectoriels.

1. *n-uplets :* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3, \ldots$), est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.
   - Addition : $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$
   - Multiplication externe : $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$
2. *suites :* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble des suites réelles est lui aussi muni de l'addition et de la multiplication par un réel, terme à terme.
   - Addition : $(2^{-n}) + (3^n) = (2^{-n} + 3^n)$
   - Multiplication externe : $(-2)\,(2^{-n}) = (-2^{-n+1})$
3. *polynômes :* $\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n\,,\ n \in \mathbb{N}, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.
L'ensemble des polynômes d'une variable, à coefficients réels est aussi muni naturellement d'une addition et d'une multiplication externe.
   - Addition : $(-1 + 2X + 3X^2) + (3X - X^2 - 2X^4) = -1 + 5X + 2X^2 - 2X^4$
   - Multiplication externe : $(-2)\,(3X - X^2 - 2X^4) = -6X + 2X^3 + 4X^4$
4. *applications :* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f\ : x \mapsto f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni de l'addition des images et de leur multiplication par un réel.
   - Addition : $(\cos + \sin)\ : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$
   - Multiplication externe : $(-2)\ \cos\ : x \mapsto -2\cos(x)$

Il est inutile de s'inquiéter de la quantité de propriétés à vérifier dans la définition 3.2.1. Dans tous les exemples que l'on rencontrera, les opérations sont parfaitement naturelles et leurs propriétés évidentes. On ne vérifie d'ailleurs jamais les 8 propriétés de la définition 3.2.1. La raison pour laquelle c'est inutile sera explicitée dans la section suivante. Remarquons seulement pour l'instant que tous les exemples ci-dessus peuvent être mis en correspondance avec l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$, pour un certain ensemble E. Cela va sans dire pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les n-uplets de réels peuvent être vus comme des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{R}$. Les suites sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Nous montrerons plus loin comment les polynômes se ramènent à des suites. Nous nous contenterons donc de vérifier que l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Théorème 3.2.3 *Soit E un ensemble et $V = \mathbb{R}^E$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$:*

$$V = \{\ v\ :\ x \in E \mapsto v(x) \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

L'ensemble V est muni des deux opérations suivantes.
- Addition : $(v + w)\ : x \mapsto v(x) + w(x)$
- Multiplication externe : $\lambda\, v\ : x \mapsto \lambda v(x)$

Muni de ces deux opérations, V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Démonstration : Chacune des propriétés requises par la définition 3.2.1 provient d'une propriété analogue des réels. Plutôt que de répéter formellement les énoncés des propriétés, il est plus intéressant de comprendre quels sont les objets que l'on manipule.

Par exemple, l'élément neutre pour l'addition, même si on le note aussi 0 n'est pas le réel 0 : c'est l'application nulle.

$$0 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \in E & \mapsto & 0 \end{array} \right.$$

De même l'opposé de v est l'application qui à x associe $-v(x)$.

$$-v \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \in E & \mapsto & -v(x) \end{array} \right.$$

Considérons la propriété *5.* de la définition 3.2.1.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V \ , \quad \lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)\, v \ .$$

Elle signifie ici :
"si on multiplie par λ l'application qui à x associe $\mu\, v(x)$, on trouve la même chose que si on multiplie par $\lambda\mu$ l'application qui à x associe $v(x)$, c'est à dire l'application qui à x associe $(\lambda\mu)\, v(x)$" ... ce qui est bien vrai n'est-ce pas ?

Nous laissons au lecteur le plaisir de traduire de même chacune des propriétés de la définition 3.2.1. □

3.3 Sous-espaces

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel qui est inclus dans un autre. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème 3.3.1, qui affirme qu'un sous-ensemble est un espace vectoriel, s'il contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments.

Théorème 3.3.1 *Soit V un espace vectoriel et $W \subset V$ un sous-ensemble non vide de V. L'ensemble W, muni de l'addition et de la multiplication de V est un espace vectoriel, si et seulement si*

$$\forall v, w \in W \ , \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \quad \lambda\, v + \mu\, w \in W \ . \tag{3.3.1}$$

Démonstration : Parmi les 8 propriétés de la définition 3.2.1, celles qui ne font intervenir que le quantificateur $\forall$ (associativités, commutativité, distributivités), puisqu'elles sont vraies dans V, restent vraies dans W à cause de (3.3.1). Il suffit donc de vérifier les 2 propriétés impliquant une existence (élément neutre et opposé). Nous devons démontrer que V contient le vecteur nul, ainsi que l'opposé de tout vecteur. D'après le premier point de la proposition 3.2.2, le vecteur nul s'écrit $0\, v$ pour tout vecteur v de V, donc pour tout vecteur de W. Il est donc dans W. De même si v est un vecteur de W, alors son opposé, qui s'écrit $(-1)\, v$ d'après le second point de la proposition 3.2.2, est aussi dans W. □

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème 3.3.1.

Corollaire 3.3.2 *L'intersection de deux espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

C'est faux pour la réunion : si $v \in V$ et $w \in W$, il n'y a aucune raison que $v + w$ appartienne à $V \cup W$ (pensez à deux droites distinctes). La réunion de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel en général.

Tous les espaces vectoriels que nous rencontrerons sont des sous-espaces vectoriels d'un certain espace d'applications $\mathbb{R}^E$ (cf. théorème 3.2.3). Ils sont en général définis comme l'ensemble des applications satisfaisant certaines contraintes. Par exemple si on identifie un polynôme à la suite de ses coefficients, cette suite est nulle à partir d'un certain rang. Si (u_n) et (v_n) sont nulles à partir d'un certain rang, alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$ l'est aussi. Donc les suites nulles à partir d'un certain rang forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Une manière courante de définir un espace vectoriel consiste à imposer une ou plusieurs *contraintes linéaires* aux éléments d'un espace plus grand. Elles sont telles que si deux vecteurs les satisfont, alors toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs les satisfont aussi. Voici un catalogue d'exemples, pour différents espaces vectoriels. Dans chacun des tableaux qui suivent, la colonne "linéaire" contient des contraintes qui définissent effectivement un sous-espace vectoriel. La colonne "non linéaire" contient des contraintes telles que l'ensemble qui les satisfait n'est pas un espace vectoriel.

vecteurs de $\mathbb{R}^2$	
$x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$	
Linéaire	Non linéaire
$x = 0$	$x = 1$
$3x - 2y = 0$	$3x^2 - 2y^2 = 0$
$2x + 3y = 0$	$\sin(3x + 2y) = 0$

vecteurs de $\mathbb{R}^3$	
$x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$	
Linéaire	Non linéaire
$2x + 3y - z = 0$	$2x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$
$x = 0$ et $y + z = 0$	$x = 0$ ou $y + z = 0$
$x = y = 0$	$x = y = 1$

suites réelles	
$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	
Linéaire	Non linéaire
(u_n) converge	(u_n) ne converge pas
(u_n) est bornée	(u_n) est croissante
(u_n) tend vers 0	(u_n) tend vers $+\infty$
$\sum u_n$ converge	$\sum u_n$ ne converge pas
$\sum u_n = 0$	$\sum u_n = 1$
$\forall n \geq 0\,,\ u_{n+1} = 2u_n$	$\forall n \geq 0\,,\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
$\exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ u_n = 0$	$\exists n_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ u_n > 0$

Polynômes	
$P \in \mathbb{R}[X]$	
Linéaire	Non linéaire
P est de degré ≤ 5	P est de degré 5
$P(X) = P(-X)$	P est de degré pair
$P + P' = 0$	$P^2 + P' = 0$
$P(2) = 0$	$P(2) = 1$
$P(2) = 0$ et $P'(2) = 0$	$P(2) = 0$ et $P'(2) = 1$

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	
$f\ : x \mapsto f(x)$	
Linéaire	Non linéaire
f est bornée	f n'est pas bornée
f est continue en 0	$\lvert f \rvert$ est continue en 0
f est dérivable en 1	f^2 est dérivable en 1
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$	f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$
f continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$	f continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$

3.4 Combinaisons linéaires

Un sous-espace vectoriel contient non seulement toutes les combinaisons linéaires de deux vecteurs mais toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : pour tout entier n, pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de W, et pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in W\ .$$

Une des manières de fabriquer un sous-espace vectoriel est de partir d'un ensemble quelconque d'éléments (dans ce cas on dit une "famille"), puis de lui ajouter toutes les combinaisons linéaires de ces éléments.

Définition 3.4.1 *Soit V un espace vectoriel et F une famille (finie ou non) de vecteurs de V. On appelle* sous-espace engendré *par F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de F.*

Pour vérifier que l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de F est bien un espace vectoriel, il suffit d'observer qu'une combinaison linéaire de combinaisons linéaires est encore une combinaison linéaire.

Voici une première application de la notion de sous-espace engendré.

Définition 3.4.2 *Soient V et W deux espaces vectoriels. On appelle* somme *de V et W, et on note $V + W$ l'espace engendré par $V \cup W$. Si $V \cap W = \{0\}$, on dit que la somme est* directe*, et on la note $V \oplus W$.*

La justification du terme "somme" et l'intérêt de cette notion résident dans la proposition suivante.

Proposition 3.4.3 *Soient V et W deux espaces vectoriels.*

1. $V + W = \{v + w\, ,\ v \in V\, ,\ w \in W\}$.

2. Si $V \cap W = \{0\}$, alors pour tout vecteur u dans $V \oplus W$ il existe un unique couple de vecteurs (v, w), tels que $v \in V$, $w \in W$ et $u = v + w$.

La figure 3.2 illustre la notion de somme directe.

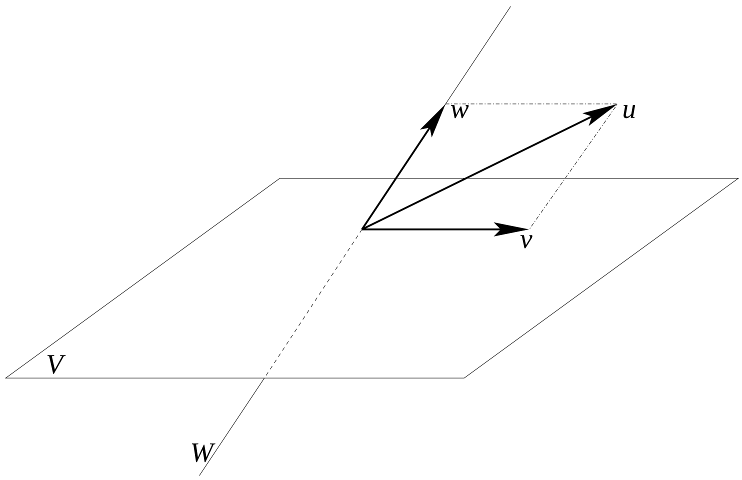


FIG. 3.2 – Somme directe d'espaces vectoriels et décomposition d'un vecteur de la somme.

Démonstration : Tout vecteur de la forme $v + w$, où $v \in V$ et $w \in W$ appartient à l'espace engendré par $V \cup W$. Réciproquement l'espace engendré par $V \cup W$ est formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $V \cup W$. Mais une telle combinaison linéaire peut s'écrire comme la somme de deux combinaisons linéaires : l'une ne contient que des éléments de V, et appartient donc à V, l'autre ne contient que des éléments de W, et appartient donc à W.

Dans le cas où la somme est directe, l'existence de la décomposition $u = v + w$ découle de ce qui précède. Nous devons donc démontrer l'unicité. Supposons $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, avec $v_1, v_2 \in V$ et $w_1, w_2 \in W$. On a donc $v_1 - v_2 = w_1 - w_2$, donc les deux vecteurs $v_1 - v_2$ et $w_1 - w_2$ appartiennent à la fois à V et à W. Par hypothèse, $V \cap W = \{0\}$, donc $v_1 = v_2$ et $w_1 = w_2$. □

Soit F une famille finie : $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$. L'espace vectoriel engendré par F est

$$\{\ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\ ,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

Pour $n = 1$, l'espace engendré par un seul vecteur v (non nul) est une droite vectorielle :

$$\{\lambda\, v\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

Pour $n = 2$, l'espace engendré par deux vecteurs v et w (non proportionnels) est un plan vectoriel :

$$\{\lambda\, v + \mu\, w\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ .$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs

$$(1, 0, \ldots, 0)\ ,\ (0, 1, \ldots, 0)\ ,\ \ldots\ ,\ (0, 0, \ldots, 1)\ .$$

En effet, on peut écrire tout vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, comme la combinaison linéaire :

$$x_1\,(1,0,\dots,0) + x_2\,(0,1,\dots,0) + \cdots + x_n\,(0,0,\dots,1)\;.$$

La famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ engendre l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. La famille $\{1, X^2, X^4, \dots, X^{2n}, \dots\}$ engendre l'espace vectoriel des polynômes formés uniquement de monômes de degrés pairs.

Deux familles de vecteurs différentes peuvent engendrer le même espace vectoriel. Par exemple $\mathbb{R}^2$ est engendré par

$$F = \{\,(1,0)\,,\,(0,1)\,\}\;,$$

mais aussi par

$$G = \{\,(1,1)\,,\,(1,-1)\,\}\;.$$

En effet, tout vecteur (x, y) s'écrit :

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}\,(1,1) + \frac{x-y}{2}\,(1,-1)\;.$$

Définition 3.4.4 *Soit V un espace vectoriel et F une famille d'éléments de V. On dit que F est une famille génératrice si l'espace engendré par F est égal à V.*

Par exemple $F = \{(1,0),(0,1)\}$ et $G = \{(1,1),(1,-1)\}$ sont deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$. Par contre $\{(0,1),(0,2)\}$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Les familles suivantes sont aussi des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.

$$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}\;,\;\{(1,1),(1,-1),(0,1)\}\;,\;\{(1,0),(0,1),(1,1),(1,-1)\}\;,\;.$$

Par rapport à F et G, elles contiennent des vecteurs superflus. Si dans une famille de vecteurs, un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace engendré. Une famille de laquelle on ne peut rien enlever sans changer l'espace engendré est une famille libre. Nous n'utiliserons cette notion que pour des familles finies.

Définition 3.4.5 *Soit $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs. On dit que F est une famille libre si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda_1\,v_1 + \cdots + \lambda_n\,v_n = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\;.$$

Elle est dite liée *dans le cas contraire.*

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre, on ne peut pas avoir

$$v_1 = \lambda_2\,v_2 + \cdots + \lambda_n\,v_n\;.$$

Aucun élément d'une famille libre ne peut être combinaison linéaire des autres. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(0,1),(0,2)\}$ est liée. Dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même, la famille $\{1, \cos^2(x), \cos(2x)\}$ est liée.

A l'inverse, les familles $F = \{(1,0),(0,1)\}$ et $G = \{(1,1),(1,-1)\}$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$,

$$\{\, (1,0,\dots,0)\,,\ (0,1,\dots,0)\,,\ \dots\,,\ (0,0,\dots,1)\,\}$$

est une famille libre.

Nous rassemblons dans la proposition suivante d'autres exemples.

Proposition 3.4.6

1. *Soient $d_1,\dots,d_k$ k entiers distincts deux à deux. Pour tout $i = 1,\dots,k$, soit P_i un polynôme de degré d_i. Alors $\{P_1,\dots,P_k\}$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des polynômes.*
   Exemple : $\{1, X^2, X^4\}$.
2. *Soient $r_1,\dots,r_k$ k réels distincts deux à deux. Alors $\{(r_1^n),\dots,(r_k^n)\}$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des suites.*
   Exemple : $\{(1), (-1)^n, (2^n)\}$.
3. *Soient $r_1,\dots,r_k$ k réels strictement positifs, distincts deux à deux. Pour tout $i = 1,\dots,k$, notons f_i la fonction $x \mapsto e^{r_i x}$. Alors $\{f_1,\dots,f_k\}$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
   Exemple : $\{\, e^{-x}, 1, e^x \,\}$.

Démonstration : Les 3 démonstrations se font par récurrence sur k. Pour initialiser les récurrences, observons que la famille formée d'un seul vecteur non nul est toujours libre, quel que soit l'espace.

1. Sans perte de généralité, supposons que les polynômes ont été rangés par ordre croissant de leurs degrés. Si $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k = 0$, alors le coefficient du terme de plus haut degré est nul, donc $\lambda_k = 0$. D'où le résultat, par récurrence.
2. Supposons que les réels r_i ont été rangés par ordre croissant. Supposons que la suite de terme général $\lambda_1 r_1^n + \cdots + \lambda_k r_k^n$ soit nulle. Puisque r_k est strictement supérieur à tous les autres r_i,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_k^n}(\lambda_1 r_1^n + \cdots + \lambda_k r_k^n) = \lambda_k\ ,$$

   donc $\lambda_k = 0$. D'où le résultat, par récurrence.
3. Supposons que les réels r_i ont été rangés par ordre croissant. Supposons que la fonction $x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \cdots + \lambda_k e^{r_k x}$ soit nulle. Puisque r_k est strictement supérieur à tous les autres r_i,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{r_k n}}(\lambda_1 e^{r_1 n} + \cdots + \lambda_k e^{r_k n}) = \lambda_k\ ,$$

   donc $\lambda_k = 0$. D'où le résultat, par récurrence.

$\square$

3.5 Bases

Nous nous préoccupons dans cette section uniquement d'espaces de dimension finie.

Définition 3.5.1 *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

Toutes les familles, qu'elles soient génératrices, libres ou les deux, sont désormais finies.

Voici deux observations symétriques.

1. *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors elle ne peut plus être libre.* En effet, tout vecteur ajouté est forcément combinaison linéaire des précédents, ce qui n'est pas possible dans une famille libre.
2. *Si on enlève un vecteur à une famille libre, alors elle ne peut plus être génératrice.* En effet, le vecteur que l'on vient d'enlever n'est pas combinaison linéaire des autres, donc il n'est pas dans l'espace engendré par les autres.

Pour une famille de vecteurs, le fait d'être à la fois génératrice et libre est donc une situation intermédiaire.

Définition 3.5.2 *On appelle* base *toute famille à la fois génératrice et libre.*

Nous avons déjà rencontré plusieurs bases. Les familles $\{(1,0),(0,1)\}$ et $\{(1,1),(1,-1)\}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$,

$$\{\,(1,0,\ldots,0)\,,\;(0,1,\ldots,0)\,,\;\ldots\,,\;(0,0,\ldots,1)\,\}$$

est une base, que l'on appelle la *base canonique*. La famille $\{1,X,X^2,X^3\}$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. La proposition suivante nous permettra de parler de bases en étant assurés de leur existence. Sa démonstration montrera aussi qu'on peut extraire une base de toute famille génératrice.

Proposition 3.5.3 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base.*

Démonstration : Soit $\{v_1,\ldots,v_n\}$ une famille génératrice. On peut considérer que les v_i sont non nuls (le vecteur nul n'engendre que lui-même). Parmi les sous-ensembles de $\{v_1,\ldots,v_n\}$, considérons ceux qui sont des familles libres, et choisissons parmi eux une famille libre ayant le plus grand nombre d'éléments. Notons m ce nombre d'éléments maximal. Quitte à changer l'ordre des v_i, on peut décider que $\{v_1,\ldots,v_m\}$ est une famille libre. Puisque le nombre m est maximal, les vecteurs $v_{m+1},\ldots,v_n$ sont combinaison linéaire de $v_1,\ldots,v_m$. Donc tout vecteur est combinaison linéaire de $\{v_1,\ldots,v_m\}$. Donc $\{v_1,\ldots,v_m\}$ est à la fois génératrice et libre : c'est une base. □

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.5.4 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration : La partie difficile de la démonstration réside dans le lemme suivant.

Lemme 3.5.5 *Si un espace possède une famille génératrice à n éléments, alors toute famille de $n+1$ éléments est liée.*

Admettons ce lemme pour l'instant. Si deux bases B_1 et B_2 ont pour cardinaux n_1 et n_2, alors $n_2 \leq n_1$ d'après le lemme, car B_1 est génératrice et B_2 est libre. De façon symétrique, puisque B_2 est génératrice et B_1 est libre, $n_1 \leq n_2$. Donc $n_1 = n_2$, et le théorème est démontré.

La démonstration du lemme se fait par récurrence sur le cardinal de la famille génératrice. Supposons que l'espace admette une famille génératrice à un seul élément v. C'est une droite vectorielle : tous les vecteurs sont proportionnel à v. Deux vecteurs quelconques s'écrivent $\lambda\, v$ et $\mu\, v$, et ils sont liés car $\mu\,(\lambda\, v) - \lambda\,(\mu\, v) = 0$.

Supposons maintenant que le résultat du lemme est vrai pour une famille génératrice de n vecteurs. Nous voulons passer au rang $n+1$. Considérons un espace engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ et une famille de $n+2$ vecteurs $\{w_1, \ldots, w_{n+2}\}$. Nous devons montrer qu'elle est liée.

Chacun des w_i est combinaison linéaire des v_i. Dans ces combinaisons linéaires, isolons la partie concernant v_{n+1}.

$$\forall i = 1, \ldots, n+2\;, \quad w_i = w_i' + \lambda_i\, v_{n+1}\;,$$

où w_i' appartient au sous-espace engendré par $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Si tous les λ_i sont nuls, cela signifie que les $n+2$ vecteurs w_i sont tous dans le sous-espace engendré par $\{v_1, \ldots, v_n\}$. La famille est donc liée, par application de l'hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que l'un des λ_i est non nul, par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors v_{n+1} s'écrit :

$$v_{n+1} = \frac{1}{\lambda_1}(w_1 - w_1')\;.$$

Donc,

$$\forall i = 2, \ldots, n+2\;, \quad w_i = w_i' + \frac{\lambda_i}{\lambda_1}(w_1 - w_1')\;,$$

soit,

$$\forall i = 2, \ldots, n+2\;, \quad w_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} w_1 = w_i' - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} w_1'\;.$$

Les $n+1$ vecteurs $w_i' - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} w_1'$, qui appartiennent à l'espace engendré par $v_1, \ldots, v_n$, sont liés, d'après l'hypothèse de récurrence. Donc il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ tels que

$$\sum_{i=2}^{n+2} \alpha_i \left(w_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} w_1 \right) = 0\;.$$

Ceci entraîne que $w_1, \ldots, w_{n+2}$ sont liés, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Le théorème 3.5.4 permet de définir rigoureusement la notion de dimension.

Définition 3.5.6 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On appelle* dimension *de V le nombre d'éléments commun à toute base de V.*

Les espaces de dimension 1 sont les droites vectorielles, ceux de dimension 2 sont les plans vectoriels. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. Les sous-espaces de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ s'appellent les *hyperplans*.

Si on connaît la dimension de l'espace, il est facile de vérifier si une famille de vecteurs est ou non une base, grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.5.7 *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n éléments est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n éléments,*
4. *toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Démonstration : Le premier point découle directement du lemme 3.5.5 : toute famille ayant au moins $n+1$ vecteurs est liée.

Pour le second point, si v est un vecteur quelconque de l'espace et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre, alors, $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ est forcément liée d'après le premier point, donc v est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. Donc $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est génératrice : c'est une base.

Pour le troisième point si une famille génératrice avait $n-1$ éléments, alors par le lemme 3.5.5 toute famille de n éléments serait liée, et donc aucune base ne pourrait avoir n éléments.

Le quatrième point découle de la démonstration de la proposition 3.5.3. Si une famille est génératrice, un de ses sous-ensembles est une base. Si la famille génératrice a n éléments, la base extraite ne peut être que la famille elle-même. $\square$

La dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est le *rang* de cette famille.

Définition 3.5.8 *On appelle* rang *d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre.*

Nous verrons dans le chapitre 5 un moyen systématique de calculer le rang d'une famille finie de vecteurs. Contentons nous pour l'instant des observations suivantes, déduites de la proposition 3.5.7.

- Le rang d'une famille de n vecteurs est au plus n.
- Le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est libre.
- Le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on la transforme par des opérations successives, décrites dans la proposition 3.5.9.

Proposition 3.5.9 *Deux familles de vecteurs déduites l'une de l'autre par les opérations suivantes engendrent le même sous-espace.*

1. *Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*
2. *Supprimer un vecteur nul ou combinaison linéaire des autres.*

Démonstration : Considérons une famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs. Soient $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels fixés, et posons

$$v_1' = v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \, .$$

Nous devons démontrer que les sous-espaces engendrés par les familles $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ et $\{v_1', v_2, \ldots, v_n\}$ sont les mêmes. Toute combinaison linéaire de $v_1', v_2, \ldots, v_n$ est aussi combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Réciproquement, comme

$$v_1 = v_1' - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n ,$$

toute combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est combinaison linéaire de $v_1', v_2, \ldots, v_n$. D'où le premier point.

Le deuxième point est aussi facile. Si v_1 s'écrit

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n ,$$

alors toute combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est aussi combinaison linéaire de $v_2, \ldots, v_n$. On peut donc retirer v_1 de la famille sans modifier le sous-espace engendré. $\square$

Pour illustrer la méthode, nous allons déterminer le rang de la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\,(1,2,-1), (-3,-6,3), (2,1,3), (8,7,7)\,\}$$

On garde un vecteur de référence, puis on ajoute à chacun des autres un vecteur proportionnel au vecteur de référence, de manière à annuler une des coordonnées. Ici, gardons v_1 comme vecteur de référence, et remplaçons v_2, v_3, v_4 respectivement par $v_2 + 3v_1$, $v_3 - 2v_1$, $v_4 - 8v_1$. La nouvelle famille est

$$\{\,(1,2,-1), (0,0,0), (0,-3,5), (0,-9,15)\,\} ,$$

et elle a le même rang que l'ancienne. On peut supprimer le second vecteur, qui est nul, et le quatrième, qui est proportionnel au troisième. Il reste la famille

$$\{\,(1,2,-1), (0,-3,5)\,\} ,$$

dont on vérifie facilement qu'elle est libre. Donc elle engendre un espace de dimension 2. Donc le rang de la famille initiale était 2.

L'intérêt des bases est qu'elles permettent d'identifier tout espace de dimension finie à $\mathbb{R}^n$, grâce à la notion de coordonnées.

Théorème 3.5.10 *Soit V un espace de dimension n et $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de V. Pour tout vecteur $v \in V$ il existe un n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ unique tel que :*

$$v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n .$$

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* de v dans la base B. Par exemple les coordonnées de $(2,3)$ dans la base $\{(1,0), (0,1)\}$ sont $2, 3$. Dans la base $\{(1,1), (1,-1)\}$, ses coordonnées sont $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. Les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $x_1, \ldots, x_n$ (d'où le nom de "canonique"). Les coordonnées du polynôme $X - 2X^2$ dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ des polynômes de degré ≤ 3 sont $0, 1, -2, 0$.

Le théorème suivant, dit "théorème de la base incomplète" montre qu'on peut fabriquer une base en complétant une famille libre par les éléments d'une famille génératrice.

Théorème 3.5.11 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, L une famille libre, et G une famille génératrice. Alors V admet une base B telle que*

$$L \subset B \subset L \cup G\,.$$

La démonstration est proche de celle de la proposition 3.5.3.

Démonstration : On considère l'ensemble (fini) de toutes les familles libres contenant L et incluses dans $L \cup G$. Dans cet ensemble, on choisit une famille ayant le plus grand nombre possible d'éléments. Appelons-la B. Nous allons démontrer que B est génératrice. Soit v un élément de G. La famille $B \cup \{v\}$ n'est pas libre, par définition de B. Il s'ensuit que v est combinaison linéaire des éléments de B. Mais si tous les éléments de G sont des combinaisons linéaires d'éléments de B, alors il en est de même de tout vecteur de l'espace V, puisque G est génératrice. Donc B est génératrice. □

On utilise le théorème 3.5.11 le plus souvent sous la forme affaiblie suivante.

Corollaire 3.5.12 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit k un entier tel que $1 \leq k < n$ et $\{b_1, \ldots, b_k\}$ une famille libre dans V. Il existe $n-k$ vecteurs $c_1, \ldots, c_{n-k}$ tels que*

$$\{b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k}\}$$

soit une base de V.

Le corollaire 3.5.12 entraîne que tout sous-espace vectoriel de dimension finie admet un *supplémentaire*, au sens suivant.

Proposition 3.5.13 *Soit U un espace vectoriel de dimension finie, et V un sous-espace vectoriel de U. Il existe un sous-espace vectoriel W tel que*

$$U = V \oplus W\,.$$

Démonstration : Soit n la dimension de U, $k \leq n$ celle de V. Soit $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ une base de V. Vue comme famille d'éléments de U, B reste une famille libre. On peut donc la compléter par $n-k$ vecteurs $c_1, \ldots, c_{n-k}$ de sorte que

$$\{\, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k} \,\}$$

soit une base de U. Tout élément u de U s'écrit de façon unique sous la forme

$$u = x_1\, b_1 + \cdots + x_k\, b_k + y_1\, c_1 + \cdots + y_{n-k}\, c_{n-k}\,.$$

Notons W le sous-espace engendré par $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Tout élément u de U est bien la somme d'un élément v de V et d'un élément w de W, avec :

$$v = x_1\, b_1 + \cdots + x_k\, b_k \qquad w = y_1\, c_1 + \cdots + y_{n-k}\, c_{n-k}\,.$$

L'intersection de V et W est réduite au seul vecteur nul, car B est une famille libre. □

Un sous-espace vectoriel W tel que $U = V \oplus W$ s'appelle un *supplémentaire* de V dans U. Il découle de la proposition 3.5.13, que si W est un supplémentaire de V, alors la somme des dimensions de V et W est la dimension de U.

$$U = V \oplus W \implies \dim U = \dim V + \dim W\ .$$

Voici une relation plus générale entre les dimensions.

Théorème 3.5.14 *Soient V et W deux sous-espaces d'un même espace vectoriel. Alors :*

$$\dim V + W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W\ .$$

Démonstration : Choisissons un supplémentaire W' de $V \cap W$ dans W. La somme de V et W' est directe, car $W' \cap (V \cap W) = W' \cap V = \{0\}$. Donc :

$$V + W = V \oplus W'\ ,$$

Or $\dim W' = \dim W - \dim V \cap W$. Donc :

$$\dim V + W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W\ .$$

□

Dans un espace de dimension 3, une droite vectorielle (dimension 1) a pour supplémentaire un plan vectoriel (dimension 2). L'intersection de deux plans vectoriels est une droite vectorielle : $3 = 2 + 2 - 1$.

3.6 Récurrences linéaires d'ordre deux

Comme application des notions de ce chapitre, nous proposons d'étudier l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence suivante :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n\ ,$$

où α et β sont deux réels fixés. L'exemple le plus simple est l'équation définissant les nombres de Fibonacci, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Nous notons V l'ensemble des suites de réels qui vérifient (E). Dire que (E) est linéaire revient à dire que V est un espace vectoriel.

Proposition 3.6.1 *L'ensemble V des suites de réels vérifiant (E) est un espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration : Commençons par vérifier que V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de réels. Nous en donnerons ensuite une base.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant (E), λ, μ deux réels.

$$u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} = \alpha\, v_{n+1} + \beta\, v_n$$

impliquent

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \alpha\,(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \beta\,(\lambda u_n + \mu v_n)\ .$$

Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie (E). D'où le résultat en appliquant le théorème 3.3.1.

Considérons maintenant les deux suites (b_n) et (b'_n), vérifiant (E) et telles que

$$b_0 = 1\,,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad b'_0 = 0\,,\ b'_1 = 1\,.$$

Soit (u_n) une suite quelconque vérifiant (E). La suite (u_n) est définie de façon unique par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et l'équation (E). Donc la suite (u_n) est égale à la combinaison linéaire $u_0(b_n) + u_1(b'_n)$: la famille $\{(b_n), (b'_n)\}$ est génératrice. Supposons que (u_n) soit la suite nulle. Alors $u_0 = u_1 = 0$. Donc la famille $\{(b_n), (b'_n)\}$ est libre : c'est une base. □

Pour trouver une expression explicite aux solutions de (E), nous allons trouver une autre base. Nous commençons par écarter le cas où $\alpha = \beta = 0$: dans ce cas, les suites solutions de (E) sont nulles à partir du rang 2. Nous supposons désormais que α et β ne sont pas tous les deux nuls. Cherchons quelles suites géométriques vérifient (E). Supposons que (r^n) vérifie (E). Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad r^{n+2} = \alpha\, r^{n+1} + \beta\, r^n\,.$$

C'est vrai si r est nul, ou bien s'il est solution de l'équation du second degré suivante, qu'on appelle l'*équation caractéristique associée.*

$$(ECA) \qquad r^2 = \alpha\, r + \beta\,.$$

Théorème 3.6.2 *Si l'équation caractéristique associée a*

1. *deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors $\{(r_1^n), (r_2^n)\}$ est une base de V :*

$$V = \{(\lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n)\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}\,.$$

2. *une racine double r, alors $\{(r^n), (nr^n)\}$ est une base de V :*

$$V = \{(\lambda\, r^n + \mu\, nr^n)\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}\,.$$

3. *deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors $\{(\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))\}$ est une base de V :*

$$V = \{(\lambda\, \rho^n \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n \sin(n\theta))\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}\,.$$

Démonstration : Puisque l'espace vectoriel V est de dimension 2, il suffit dans chacun des trois cas de montrer que les deux suites proposées vérifient (E) et forment une famille libre.

Dans le premier cas, les deux suites vérifient (E) car r_1 et r_2 sont racines de (ECA). Pour montrer qu'elle forment une famille libre, supposons que la suite $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda r_1 + \mu r_2 = 0$$

Puisque $r_1 \neq r_2$, ce système de deux équations a une solution unique, $\lambda = \mu = 0$.

Dans le second cas la racine double est $r = \alpha/2$ et elle est non nulle, le cas $\alpha = \beta = 0$ étant écarté. Il est évident que (r^n) vérifie (E). On le vérifie facilement pour (nr^n). Pour montrer que la famille est libre, supposons que la suite $(\lambda r^n + \mu n r^n)$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda r + \mu r = 0 \; .$$

Donc (puisque $r \neq 0$), $\lambda = \mu = 0$.

Traitons maintenant le dernier cas : (ECA) a deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Les suites (complexes) $(\rho^n e^{ni\theta})$ et $(\rho^n e^{-ni\theta})$ vérifient (E). Leur somme et leur différence sont :

$$\rho^n e^{ni\theta} + \rho^n e^{-ni\theta} = 2\rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \rho^n e^{ni\theta} - \rho^n e^{-ni\theta} = 2i\rho^n \sin(n\theta) \; .$$

On en déduit que les deux suites proposées vérifient (E). Pour montrer que la famille est libre, supposons que la suite $(\lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta))$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda = 0 \; , \quad \lambda \rho \cos(\theta) + \mu \rho \sin(\theta) = 0 \; .$$

On en déduit donc que $\mu \rho \sin(\theta) = 0$, donc $\mu = 0$ car $\rho \sin(\theta)$ est non nul (sinon les racines de (ECA) seraient réelles). $\square$

Comme premier exemple, considérons l'équation définissant les nombres de Fibonacci :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \; .$$

L'équation caractéristique associée est

$$(ECA) \qquad r^2 = r + 1 \; .$$

Elle a deux racines réelles distinctes, ϕ et $-1/\phi$, où ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; .$$

L'ensemble des suites réelles vérifiant (E) est donc

$$\left\{ \left(\lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \; , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Les nombres de Fibonacci sont définis par (E), avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Pour calculer les coordonnées λ et μ de cette suite, il faut résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ \lambda \phi - \mu/\phi & = & 1 \end{array} \right.$$

On en déduit l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \right) \, .$$

(Persuadez-vous que u_n est bien un entier !)

Considérons maintenant l'équation suivante.

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \, .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^2 = -r - 1 \, .$$

Ses racines sont :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3} \quad \text{et} \quad \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}$$

Toute solution réelle de l'équation de récurrence s'écrit :

$$(u_n) = (\, \lambda \, \cos(n2\pi/3) + \mu \, \sin(n2\pi/3) \,) \, .$$

Les solutions sont périodiques de période 3.

3.7 Exercices

Exercice 3.1 Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ une droite quelconque
2. ☒ une droite contenant $(0, 0, 0)$
3. ☐ un plan quelconque
4. ☒ un plan contenant $(0, 0, 0)$
5. ☐ une sphère
6. ☐ un cône
7. ☒ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = 0$
8. ☐ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x + y = 1$
9. ☒ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = 0$ et $x + y + z = 0$
10. ☐ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = 0$ et $x + y + z = 1$
11. ☐ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $\sin x = 0$
12. ☒ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = y = z$
13. ☐ ensemble des triplets (x, y, z) tels que $|x| = |y| = |z|$

Exercice 3.2 Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ ensemble des suites bornées.
2. $\square$ ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
3. $\boxtimes$ ensemble des suites périodiques.
4. $\boxtimes$ ensemble des suites convergeant vers 0.
5. $\square$ ensemble des suites monotones.
6. $\square$ ensemble des suites équivalentes à $1/n$.
7. $\boxtimes$ ensemble des suites dominées par $1/n$.
8. $\boxtimes$ ensemble des suites négligeables devant $1/n$.
9. $\square$ ensemble des suites dont le terme général est ≤ 1 à partir d'un certain rang.

Exercice 3.3 Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des polynômes, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ ensemble des polynômes de degré 0.
2. $\square$ ensemble des polynômes de degré 3.
3. $\boxtimes$ ensemble des polynômes dont le terme constant est nul.
4. $\square$ ensemble des polynômes à coefficients positifs ou nuls.
5. $\boxtimes$ ensemble des polynômes multiples de $X - 1$.
6. $\square$ ensemble des polynômes multiples de $X - 1$ ou $X + 1$.
7. $\boxtimes$ ensemble des polynômes multiples de $X - 1$ ou $X^2 - 1$.
8. $\square$ ensemble des polynômes contenant uniquement des monômes de degrés impairs.
9. $\boxtimes$ ensemble des polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit formée uniquement de monômes de degrés impairs.

Exercice 3.4 Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ ensemble des fonctions telles que $f(0) = f(1)$.
2. $\square$ ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$.
3. $\boxtimes$ ensemble des fonctions nulles sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. $\square$ ensemble des fonctions croissantes.
5. $\square$ ensemble des fonctions f telles que $f^2(x) = f^2(-x)$.
6. $\boxtimes$ ensemble des fonctions périodiques de période 2π.
7. $\boxtimes$ ensemble des fonctions f telles que la suite $(f(n))$ tend vers 0.
8. $\boxtimes$ ensemble des fonctions dérivables sur f telles que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
9. $\square$ ensemble des fonctions dérivables sur f telles que $\int_0^1 \cos(f(x))\,dx = 0$.

Exercice 3.5 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide.
2. ☐ Si un ensemble contient toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
3. ☒ Si un ensemble contient tous les plans vectoriels engendrés par deux de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
4. ☐ Si un ensemble contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
5. ☒ Si l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est réduite au vecteur nul, alors leur somme est directe.

Exercice 3.6 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
2. ☐ L'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 3 est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
3. ☒ L'ensemble des suites réelles, constantes ou bien périodiques de période 3, est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
4. ☒ L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré ≤ 3 est un espace vectoriel de dimension 8 sur $\mathbb{R}$.
5. ☐ L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
6. ☒ L'ensemble des fonctions de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.7 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont génératrices ?

1. ☐ $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$
2. ☒ $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$
3. ☐ $\{(0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$
4. ☒ $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$

Exercice 3.8 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont génératrices ?

1. ☐ $\{(0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1)\}$
2. ☒ $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$
3. ☐ $\{(0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1)\}$
4. ☒ $\{(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1)\}$

Exercice 3.9 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont libres ?

1. ☒ $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$
2. ☒ $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$
3. ☐ $\{(0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$
4. ☐ $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$

Exercice 3.10 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont libres ?

1. ☒ $\{(0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1)\}$
2. ☒ $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$
3. ☐ $\{(0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1)\}$
4. ☒ $\{(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1)\}$

Exercice 3.11 Donner des conditions sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que les familles suivantes soient des bases de $\mathbb{R}^3$.

1. $\{(1,0,1),(a,b,1),(b,a,1)\}$
2. $\{(1,a,b),(a,1,a),(b,b,1)\}$
3. $\{(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a)\}$
4. $\{(0,a,b),(a,0,b),(a,b,0)\}$

Exercice 3.12 Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel des suites de réels.

1. $\{(1),(2^n),(n2^n)\}$
2. $\{(1),(\cos(n\pi/4)),(\cos(n\pi/2))\}$
3. $\{(1),(\sin(n\pi/4)),(\sin(n\pi/2))\}$
4. $\{(1),(2^n\cos(n\pi/4)),(n2^n\cos(n\pi/4))\}$

Exercice 3.13 On considère les espaces vectoriels suivants.

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x+y=0\}\ , \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x=y\}$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x+y+z=0\}\ , \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x=y=z\}$$

1. Déterminer la dimension de V.
2. Donner une base de V.

Exercice 3.14 Soit V l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad f(x) = f(-x)\ .$$

Soit W l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad f(x) = -f(-x)\ .$$

1. Montrer que V et W sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $V \cap W$ est réduit à la fonction nulle.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions ϕ et ψ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} .$$

   Montrer que $\phi \in V$, $\psi \in W$ et $f = \phi + \psi$.

4. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V \oplus W$.

Exercice 3.15 Soient U, V, W trois sous-espaces d'un même espace vectoriel.

1. Montrer que $U \cap (V + W) \supset (U \cap V) + (U \cap W)$.
2. Montrer que $U + (V \cap W) \subset (U + V) \cap (U + W)$.
3. Montrer que $U \cap (V + (U \cap W)) = (U \cap V) + (U \cap W)$.
4. Les trois espaces U, V, W, sont définis comme suit.
   - $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = y = 0\}$
   - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ z = 0\}$
   - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\}$

   Donner la dimension de U, V, W, et de chacun des sous-espaces apparaissant dans les questions précédentes.

Exercice 3.16 Déterminer le rang des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $\{ (1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3) \}$
2. $\{ (1, 0, 1), (-1, -1, 2), (1, 2, 3) \}$
3. $\{ (1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1) \}$
4. $\{ (2, 3, 1), (4, 1, 1), (1, 3, 3), (1, 1, 1) \}$

Exercice 3.17 Déterminer le rang des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. $\{ (1, -3, 2, 8), (2, -6, 1, 7), (-1, 3, 3, 7) \}$
2. $\{ (1, 2, 3, 1), (-3, 4, 1, 1), (2, 1, 3, 1) \}$
3. $\{ (1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (2, 0, 1, 1), (0, -2, 1, -1) \}$
4. $\{ (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0) \}$
5. $\{ (0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1), (1, 1, 1, 1) \}$

Exercice 3.18 Compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ les familles suivantes.

1. $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$
2. $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
3. $\{(1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$
4. $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$

Exercice 3.19 On considère les équations de récurrence linéaires suivantes.

$$\begin{array}{rclcrcl} u_{n+2} & = & u_{n+1} + 2u_n & \qquad & u_{n+2} & = & \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n \\ u_{n+2} & = & 2u_{n+1} - 2u_n & & u_{n+2} & = & -2u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} & = & \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n & & u_{n+2} & = & -u_n \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} - u_n & & u_{n+2} & = & u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} & = & 4u_{n+1} - 4u_n & & u_{n+2} & = & 4u_{n+1} + 4u_n \end{array}$$

Pour chacune de ces équations,

1. Déterminer l'ensemble des suites de réels qui la vérifient.
2. Déterminer la suite (u_n) vérifiant l'équation et $u_0 = 1$, $u_1 = -1$.
3. Déterminer la suite (u_n) vérifiant l'équation et $u_0 = 0$, $u_1 = 2$.

3.8 Compléments

Equations de récurrence linéaires

Nous présentons ici la généralisation du théorème 3.6.2 aux équations d'ordre quelconque.

Considérons l'équation :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{d-1} u_{n+d-1}\ ,$$

Pour connaître la forme des solutions de (E), il faut résoudre l'*équation caractéristique associée.*

$$(ECA) \qquad r^d = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{d-1} r^{d-1}\ .$$

C'est la condition pour que $(u_n) = (r^n)$ soit solution de (E).

On démontre le résultat suivant, qui généralise le théorème 3.6.2.

Théorème 3.8.1 *L'ensemble des suites complexes solution de* (E) *est un espace vectoriel de dimension* d *sur* $\mathbb{C}$.

Notons $r_1, \ldots, r_k$ *les racines (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique associée* (ECA) *et* $m_1, \ldots, m_k$ *leurs multiplicités. Toute solution de l'équation* (E). *s'écrit :*

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \lambda_{i,j} n^j (r_i)^n\ , \tag{3.8.2}$$

où les d *coefficients* $\lambda_{i,j}\ ,\ i = 1, \ldots, k\ ,\ j = 0, \ldots, m_i - 1$ *sont réels ou complexes.*

En pratique, pour déterminer une solution vérifiant d conditions particulières, il suffit de calculer ses coefficients $\lambda_{i,j}$ en résolvant un système linéaire ordinaire, de d équations à d inconnues.

Exemple : Considérons l'équation suivante :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+3} = u_n + u_{n+1} - u_{n+2}\ .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^3 = 1 + r - r^2\ .$$

Elle a pour racines 1 (racine simple) et -1 (racine double). Toute solution de l'équation de récurrence s'écrit donc :

$$u_n = a(1)^n + b(-1)^n + cn(-1)^n\ .$$

Pour trouver la solution qui vérifie $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, on résout le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{lcr} a+b & = & -1 \\ a-b-c & = & 1 \\ a+b+2c & = & 0 \end{array}\right.$$

La solution est $a = 1/4$, $b = -5/4$, $c = 1/2$. On obtient :

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n\ .$$

Equations différentielles linéaires

Les équations différentielles linéaires sont très proches des équations de récurrence traitées ci-dessus. Considérons l'équation :

$$(E) \qquad y^{(d)}(t) = a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_{d-1} y^{(d-1)}(t)\ ,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ sont d coefficients réels, y est une fonction indéfiniment dérivable, et $y^{(k)}$ désigne sa dérivée k-ième. Pour connaître la forme des solutions de (E), il faut résoudre l'équation suivante :

$$(ECA) \qquad r^d = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{d-1} r^{d-1}\ .$$

Cette équation porte aussi le nom d'*équation caractéristique associée.* C'est la condition pour que $y(t) = e^{rt}$ soit solution de (E).

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 3.8.1 et sa démonstration est très proche.

Théorème 3.8.2 *L'ensemble des solutions (réelles ou complexes) de l'équation* (E) *est un espace vectoriel de dimension* d *sur* $\mathbb{C}$.

Notons $r_1, \ldots, r_k$ *les racines (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique associée* (ECA) *et* $m_1, \ldots, m_k$ *leurs multiplicités. Toute solution de l'équation* (E) *s'écrit :*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \lambda_{i,j} t^j e^{r_i t}\ ,$$

où les d *coefficients* $\lambda_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, m_i - 1$ *sont réels ou complexes.*

En pratique, pour déterminer une solution vérifiant d conditions particulières, il suffit de calculer ses coefficients $\lambda_{i,j}$ en résolvant un système linéaire ordinaire, de d équations à d inconnues.

Exemple : Considérons l'équation suivante :

$$(E) \qquad y'''(t) = y(t) + y'(t) - y''(t) \; .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^3 = 1 + r - r^2 \; .$$

Cette équation a pour racines 1 (racine simple) et -1 (racine double). Toute solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$y(t) = ae^t + be^{-t} + cte^{-t} \; .$$

Pour trouver la solution qui vérifie $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, on résout le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{lcr} a+b & = & -1 \\ a-b+c & = & 1 \\ a+b-2c & = & 0 \end{array} \right.$$

La solution est $a = 1/4$, $b = -5/4$, $c = -1/2$. La fonction cherchée est donc :

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} \; .$$

Il se peut que l'équation caractéristique associée admette des racines complexes conjuguées. Supposons que $\lambda = \alpha + i\beta$ soit racine de (ECA), alors $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ est aussi solution. Donc $e^{\lambda t}$, $e^{\overline{\lambda} t}$ et toutes leurs combinaisons linéaires sont solutions de (E). En particulier :

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\overline{\lambda} t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} - e^{\overline{\lambda} t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \; .$$

Parmi les solutions réelles de (E), on trouvera donc toutes les combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

L'ensemble des solutions *réelles* de (E) est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Considérons l'équation suivante.

$$(E) \qquad y''(t) = -y(t) - y'(t) \; .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^2 = -1 - r \; .$$

Ses racines sont :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \,.$$

Toute solution *réelle* de l'équation différentielle s'écrit :

$$y(t) = ae^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) + be^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2) \,.$$

Cette équation pourrait correspondre aux petites oscillations d'un pendule en milieu visqueux. Les solutions trouvées tendent vers 0, avec des oscillations de plus en plus atténuées.

Polynômes de Lagrange

Même s'ils le font très vite, il n'y a guère qu'une chose que les ordinateurs sachent faire avec des nombres : les ajouter et les multiplier, donc évaluer des fonctions polynômes. Si on doit effectuer des calculs sur une fonction quelconque, il est important de pouvoir l'approcher par des fonctions polynômes.

Selon le sens précis que l'on donne à "approcher", il existe une grande variété de techniques, et autant de familles de polynômes qui leur sont adaptées. Nous traitons ici une des questions les plus simples : comment construire un polynôme de degré minimal, dont le graphe passe par certains points du plan. C'est le problème de l'*interpolation*.

Nous commençons par nous donner les abscisses des points. Ce sont n réels, $a_1, \ldots, a_n$, différents deux à deux. Nous définissons maintenant n polynômes $L_1, \ldots, L_n$, de degré $n-1$, qui sont tels que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$.

Définition 3.8.3 *On appelle* polynômes interpolateurs de Lagrange *aux abscisses $a_1, \ldots, a_n$, les n polynômes $L_1, \ldots, L_n$, définis pour $i = 1, \ldots, n$ par :*

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \,.$$

Voici les trois polynômes associés aux abscisses $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$.

$$L_1(X) = \frac{X-4}{2-4}\,\frac{X-5}{2-5} \,, \quad L_2(X) = \frac{X-2}{4-2}\,\frac{X-5}{4-5} \,, \quad L_3(X) = \frac{X-2}{5-2}\,\frac{X-4}{5-4} \,,$$

Nous sommes intéressés par les combinaisons linéaires des $L_i(X)$. Prenons n réels $b_1, \ldots, b_n$, et formons le polynôme

$$P(X) = b_1\, L_1(X) + \cdots + b_n\, L_n(X) \,.$$

Remplaçons X par a_i. Tous les termes $L_j(a_i)$ s'annulent, sauf $L_i(a_i)$ qui vaut 1. Donc $P(a_i) = b_i$. La fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ passe par les n points $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$: elle les *interpole*. Par exemple pour $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ et $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$,

$$P(X) = 3\, L_1(X) + 2\, L_2(X) + 3\, L_3(X) = \frac{5}{6}X^2 - \frac{11}{2}X + \frac{32}{3} \,.$$

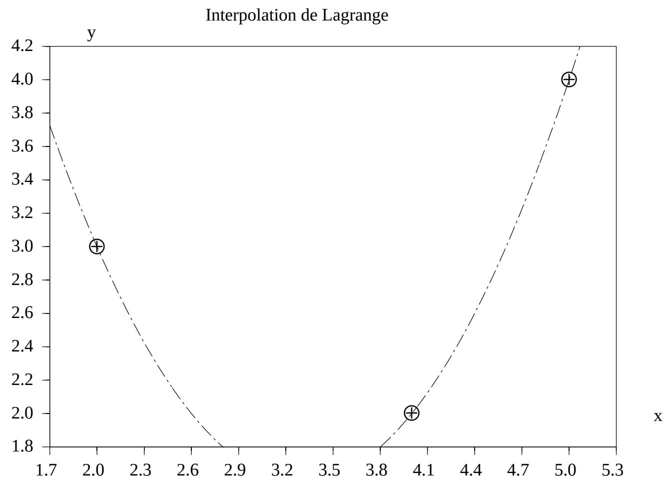


FIG. 3.3 – Interpolation par un polynôme de Lagrange des points d'abscisses $(2, 4, 5)$ et d'ordonnées $(3, 2, 4)$.

La figure 3.3 représente le graphe de $P(x)$.

Le polynôme P ainsi construit est le seul polynôme de degré $\leq n-1$ qui interpole les points $(a_1, b_n), \ldots, (a_n, b_n)$: on le déduit de la proposition suivante.

Proposition 3.8.4 *Les n polynômes $L_1(X), \ldots, L_n(X)$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n-1$.*

Démonstration : Comme la dimension de l'espace est n, il suffit de montrer que la famille $\{L_1(X), \ldots, L_n(X)\}$ est libre. Considérons une combinaison linéaire, et supposons qu'elle est nulle.

$$P(X) = b_1\, L_1(X) + \cdots + b_n\, L_n(X) = 0 \,.$$

Comme pour tout $i = 1, \ldots, n$, $P(a_i) = b_i$, on doit avoir $b_i = 0$. D'où le résultat. $\square$

Les valeurs $b_1, \ldots, b_n$ sont les *coordonnées* du polynôme $P(X)$ dans la base $\{L_1(X), \ldots, L_n(X)\}$.

Transformée de Fourier

D'autres polynômes, à valeurs complexes, nous donnent l'occasion d'évoquer Joseph Fourier (1768 – 1830). Le travail qu'il a réalisé à Grenoble sur la diffusion de la chaleur entre 1804 et 1807 (il était préfet de l'Isère sous Napoléon), se basait sur une intuition géniale : toute fonction continue peut être approchée par des polynômes trigonométriques.

Considérons la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\{\, e^{-nix}, e^{-(n-1)ix}, \ldots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{(n-1)ix}, e^{nix} \,\} \,.$$

On peut démontrer que c'est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elle engendre l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent :

$$\varphi(x) = \lambda_{-n}\, e^{-nix} + \cdots + \lambda_{-1}\, e^{-ix} + \lambda_0 + \lambda_1\, e^{ix} + \cdots + \lambda_n\, e^{inx} \; .$$

On les appelle des *polynômes trigonométriques.* Ce sont des fonctions continues, périodiques de période 2π. Il suffit de remplacer x par $2\pi x/T$ pour obtenir des fonctions de période T.

Etant donnée une fonction f, continue sur $[0, 2\pi]$, on définit ses *coefficients de Fourier* par :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \; , \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \; .$$

On leur associe les polynômes trigonométriques

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} \; .$$

Le théorème suivant n'a pas été démontré par Fourier, mais par Dirichlet.

Théorème 3.8.5 *Soit f une fonction continue sur $]0, 2\pi[$. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$,*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} \; .$$

Le passage de la fonction f à la (double) suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'appelle *transformation de Fourier.* De nos jours, la transformation de Fourier est un outil fondamental dans de nombreux domaines, en particulier le traitement du signal. Elle est à la base du format JPEG de compression des images.

Parce qu'il n'avait pas établi sa méthode sur des bases suffisamment rigoureuses, Fourier a subi de nombreuses critiques de la part de ses contemporains (Euler, Lagrange, Poisson, Laplace, etc...). Son travail a été finalement reconnu par une élection à l'Académie des Sciences en 1817, et publié en 1822.

Codes correcteurs d'erreurs

Tout corps de nombres doit contenir au moins les éléments neutres pour l'addition et la multiplication : 0 et 1. Le plus petit corps de nombres, celui des entiers modulo 2, ne contient que 0 et 1. On le note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voici les tables d'addition et de multiplication.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Sur l'ensemble des n-uplets de 0 ou de 1, les opérations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissent composante par composante. Par exemple pour $n = 4$:

$$(0, 1, 0, 1) + (1, 0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0) \; .$$

Cet ensemble, noté $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tout comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Deux éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ qui diffèrent en une seule coordonnée sont dits *voisins.* Si on met une arête entre deux n-uplets voisins, on obtient un graphe, que l'on appelle l'*hypercube* de dimension n. Pourquoi hypercube ? La figure 3.4 devrait vous convaincre.

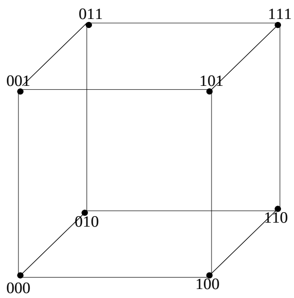


FIG. 3.4 – Cube en dimension 3. Chaque arête joint deux triplets qui diffèrent par une seule coordonnée.

L'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ est-il une fantaisie de mathématicien ? Pas du tout ! Les ordinateurs ne connaissent que les 0 et les 1 (les bits), rangés en mémoire par n-uplets, avec $n = 8$ (les octets ou bytes), $n = 16$, $n = 32$, $n = 64$, ... Ils peuvent représenter n'importe quel ensemble fini, pourvu que l'on ait choisi au préalable une application injective de cet ensemble dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ pour un certain n. Cette application s'appelle un *code.* Le plus connu est le code ASCII standard qui associe 64 caractères (chiffres, lettres, \$, %, /, ...) aux éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.

Les transmissions entre ordinateurs, que ce soit par câble, par ondes radio ou infrarouges, sont des échanges de signaux composés de paquets de 0 et de 1, qui ont été codés par l'émetteur et seront décodés par le récepteur. Mais si dans un paquet une erreur est commise (un 0 est changé en 1 ou le contraire), alors le paquet entier, et peut-être tout le message, seront perdus. A moins que l'on utilise un *code correcteur d'erreurs.*

Un code est "correcteur d'erreurs" si parmi les voisins dans l'hypercube d'un élément codé, on ne trouve jamais ni un autre élément codé, ni l'un de ses voisins. De cette façon, si un n-uplet est reçu, soit il a été transmis sans erreur et il figure dans le code, soit une erreur a été commise, et elle sera corrigée en remplaçant le n-uplet reçu par celui de ses voisins qui figure dans le code. Cela ne fonctionne plus si deux erreurs ou plus ont été commises, mais on peut généraliser : il existe des codes capables de corriger plusieurs erreurs.

Les codes de Hamming utilisent certains sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Nous verrons plus loin comment ils sont construits. Contentons nous pour l'instant de comprendre le problème en dimension 4 (cf. figure 3.5). Supposons que $(0, 0, 0, 0)$ code un objet, alors aucun de ses 4 voisins ne peut être codant. Mais si un de ces voisins est transmis, il faut pouvoir le relier à $(0, 0, 0, 0)$ sans ambiguïté. Donc les voisins des voisins de 0 ne peuvent pas non plus coder. Il reste 5 vecteurs codants possibles, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ et $(1,1,1,1)$. Si l'un de ceux-là est codant, aucun des 4 autres ne peut l'être. Donc on ne peut coder que 2 éléments, par exemple par $\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}$. Si une coordonnée est changée, on pourra retrouver où est l'erreur et la corriger. Observons au passage que l'ensemble $\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$: c'est une "droite" vectorielle.

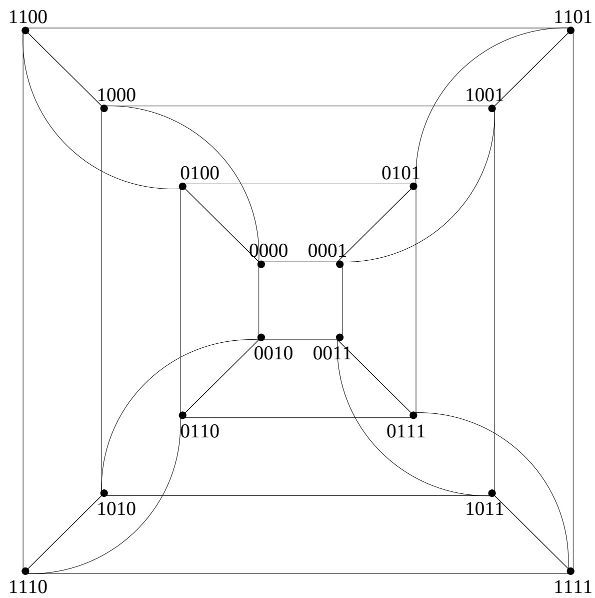


FIG. 3.5 – Hypercube en dimension 4. Chaque arête joint deux quadruplets qui diffèrent par une seule coordonnée.

Chapitre 4

Applications Linéaires

4.1 Morphismes

Une application entre deux espaces vectoriels est dite *linéaire* si elle envoie une combinaison linéaire de vecteurs sur la même combinaison linéaire de leurs images.

Définition 4.1.1 *Soient V et W deux espaces vectoriels et f une application de V dans W. On dit que f est une* application linéaire *si*

$$\forall v, w \in V\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ , \quad f(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, f(v) + \mu\, f(w)\ .$$

Observons qu'une application linéaire f de V dans W envoie nécessairement le vecteur nul de V sur le vecteur nul de W. Elle envoie l'opposé de v sur l'opposé de $f(v)$.

Voici quelques exemples d'applications linéaires.

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \mapsto (y, x, x + y)$
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(x, y, z) \mapsto (y - x, 2z + y)$
- *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}$: $P(X) \mapsto P(0)$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $P(X) \mapsto (P(0), P'(1))$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}[X]$: $P(X) \mapsto (X + 1)P'(X)$
- *de l'espace vectoriel des suites convergentes, dans* $\mathbb{R}$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim u_n$

Une application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel : l'image d'une somme est la somme des images, l'image du produit par un réel est le produit de l'image par le même réel. D'une application entre deux structures algébriques (groupes, corps, etc...) qui respecte la structure, on dit qu'elle est un *morphisme*. Le vocabulaire classique est le suivant.

Définition 4.1.2 *Une application linéaire de V vers W est un*

- endomorphisme *si $V = W$,*
- isomorphisme *si elle est bijective,*
- automorphisme *si $V = W$ et l'application est bijective.*

Si une application f est un isomorphisme, son inverse, que nous noterons f^{-1} est aussi une application linéaire.

Théorème 4.1.3 *Soit f un isomorphisme de V dans W. Son inverse f^{-1} est un isomorphisme de W dans V.*

Démonstration : Nous devons vérifier que pour tous $w, w' \in W$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\lambda\, w + \mu\, w') = \lambda\, f^{-1}(w) + \mu\, f^{-1}(w')$. Puisque f est bijective, il existe $v, v' \in V$ tels que $f(v) = w$ et $f(v') = w'$. Utilisons la linéarité de f pour écrire :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda\, w + \mu\, w') &= f^{-1}(\lambda\, f(v) + \mu\, f(v')) \\ &= f^{-1}(f(\lambda\, v + \mu\, v')) \\ &= \lambda\, v + \mu\, v' \\ &= \lambda\, f^{-1}(w) + \mu\, f^{-1}(w') \; . \end{aligned}$$

□

La composée de f par f^{-1} est l'application identique, ou *identité*, de V dans lui-même. C'est un automorphisme particulier, que nous noterons I_V.

$$I_V \; : V \longrightarrow V \; , \quad v \longmapsto I_V(v) = v \; .$$

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Théorème 4.1.4 *Soient U, V, W trois espaces vectoriels, f une application linéaire de U dans V et g une application linéaire de V dans W. La composée $g \circ f$ est une application linéaire de U dans W.*

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \\ u & \longmapsto & f(u) & \longmapsto & g \circ f(u) = g(f(u)) \; . \end{array}$$

Démonstration : On utilise successivement la linéarité de f et celle de g.

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda\, v + \mu\, w) &= g(f(\lambda\, v + \mu\, w)) \\ &= g(\lambda\, f(v) + \mu\, f(w)) \\ &= \lambda\, g(f(v)) + \mu\, g(f(w)) \\ &= \lambda\, g \circ f(v) + \mu\, g \circ f(w) \; . \end{aligned}$$

□

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Théorème 4.1.5 *Soient V et W deux espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de V dans W et λ, μ deux réels. L'application $\lambda\, f + \mu\, g$ est encore une application linéaire.*

Démonstration : L'application $\lambda\, f + \mu\, g$ est celle qui à v associe $\lambda\, f(v) + \mu\, g(v)$. Sa linéarité découle de celles de f et g, comme pour le théorème 4.1.4. □

Nous terminons la section par des interprétations géométriques d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout couple de réels (x, y) est associé le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. C'est le vecteur dont l'origine est O et dont l'extrémité est le point de coordonnées (x, y). Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est associée à une transformation géométrique du plan, qui à un vecteur associe un autre vecteur. En voici trois (cf. figure 4.1) :

- *rotation d'angle* $\pi/2$
  $(x, y) \mapsto (-y, x)$
- *symétrie par rapport à la première bissectrice*
  $(x, y) \mapsto (y, x)$
- *projection sur la première bissectrice*
  $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$

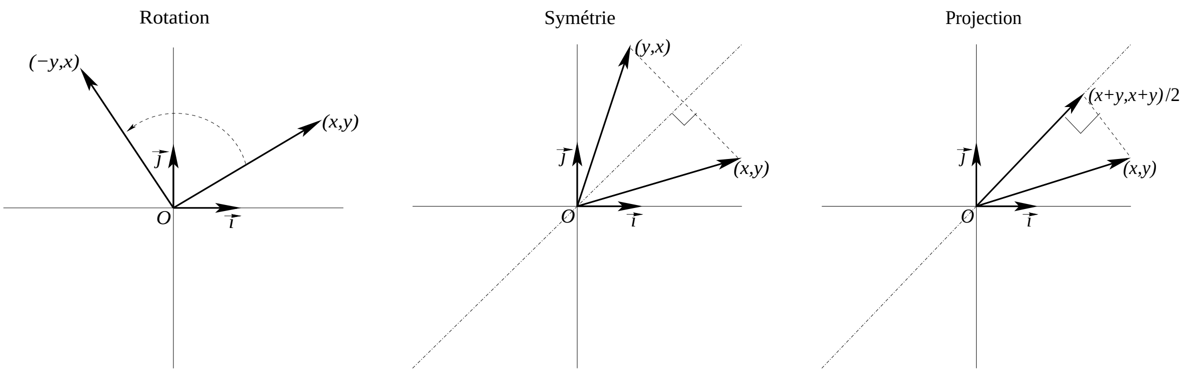


FIG. 4.1 – Interprétations géométriques de 3 applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: rotation d'angle $\pi/2$, symétrie par rapport à la première bissectrice, projection sur la première bissectrice.

Les rotations et les symétries sont des automorphismes du plan vectoriel. Les projections sont des endomorphismes, mais elles ne sont pas bijectives. Observons que les translations, par exemple $(x, y) \mapsto (x + 2, y - 1)$, ne sont pas linéaires. Ce sont des bijections, mais pas des automorphismes du plan vectoriel.

4.2 Images et noyaux

Qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 4.2.1 *Soient V, W deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de V dans W.*

1. *Soit V' un sous-espace vectoriel de V. Alors*

$$f(V') = \{\, w \in W\,,\ t.q.\ \exists v \in V'\,,\ w = f(v)\,\}\,,$$

est un sous-espace vectoriel de W.

2. *Soit W' un sous-espace vectoriel de W. Alors*

$$f^{-1}(W') = \{\, v \in V\,,\ f(v) \in W'\,\}\,,$$

est un sous-espace vectoriel de V.

L'ensemble des images par une application linéaire des éléments d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée (point *1*). L'ensemble des éléments de l'espace de départ dont l'image par une application linéaire est dans un sous-espace de l'espace d'arrivée, est un sous-espace de l'espace de départ (point *2*). Attention à la notation $f^{-1}(W')$: elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Démonstration :

1. Deux vecteurs quelconques de $f(V')$ s'écrivent $f(v), f(v')$, où $v, v' \in V'$. Etant donnés deux réels λ et μ, $\lambda\, f(v) + \mu\, f(v')$ est l'image par f de $\lambda\, v + \mu\, v'$ qui est un vecteur de V'.
2. Si v et v' sont tels que $f(v)$ et $f(v')$ appartiennent à W', alors $f(\lambda\, v + \mu\, v') = \lambda\, f(v) + \mu\, f(v') \in W'$. Donc $\lambda\, v + \mu\, v' \in f^{-1}(W')$.

□

Parmi les cas particuliers du théorème 4.2.1, l'image et le noyau jouent un rôle important.

Définition 4.2.2 *Soient V, W deux espaces vectoriels et f une application linéaire de V dans W.*

1. On appelle image de f *et on note* $\operatorname{Im} f$ *le sous-espace vectoriel de W :*

$$\operatorname{Im} f = f(V) = \{\, w \in W\,,\ \exists v \in V\,,\ w = f(v)\,\}\ .$$

2. On appelle noyau de f *et on note* $\operatorname{Ker} f$ *le sous-espace vectoriel de V :*

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{\, v \in V\,,\ f(v) = 0\,\}\ .$$

La notation Ker vient de l'allemand, où noyau se dit "Kern".

Considérons par exemple l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\ :\ (x, y) \longmapsto (x + y, x + y, x + y)\ .$$

Son image est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$: c'est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(1, -1)$.

$$\operatorname{Im} f = \{\, \lambda\, (1, 1, 1)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f = \{\, \lambda\, (1, -1)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\,\}\ .$$

Considérons maintenant la dérivation des polynômes. C'est l'application D, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

$$\begin{array}{rcl} & D & \\ \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = P(X) & \longmapsto & P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} \end{array}$$

C'est une application linéaire. L'image de D est $\mathbb{R}[X]$ tout entier, le noyau de D est l'ensemble des polynômes constants (de degré 0). Nous verrons plus loin qu'une telle situation, où l'espace de départ et l'image sont les mêmes tandis que le noyau est non nul, est impossible entre espaces vectoriels de dimension finie.

Avant de passer à la dimension finie, étudier les projections et les symétries dans le cas général sera l'occasion non seulement de manipuler les notions de noyau et d'image, mais aussi de réviser les sommes de sous-espaces vectoriels.

4.3 Projecteurs et symétries

Aussi bien pour les projections que pour les symétries, l'ingrédient principal est une somme directe. Soit U un espace vectoriel, V et W deux sous-espaces tels que $U = V \oplus W$. Pour tout vecteur u dans U, il existe un couple unique de vecteurs (v, w) tels que $v \in V$, $w \in W$ et $u = v + w$ (voir la proposition 3.4.3 et la figure 3.2).

Définition 4.3.1 *Soit U un espace vectoriel, V et W deux sous-espaces tels que $U = V \oplus W$.*

1. *On appelle* projection *sur V parallèlement à W l'application qui à $u \in U$ associe l'unique élément v de V tel que $u - v \in W$.*
2. *On appelle* symétrie *par rapport à V parallèlement à W l'application qui à $u \in U$ associe $v - w$, où (v, w) est le couple unique de vecteurs tels que $v \in V$, $w \in W$ et $u = v + w$.*

La figure 4.2 illustre la projection sur V parallèlement à W et la symétrie correspondante.

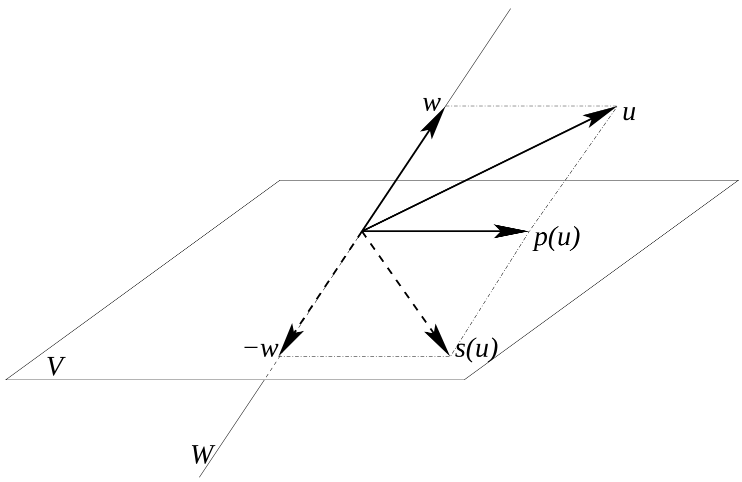


FIG. 4.2 – Somme directe $U = V \oplus W$, projection sur V, et symétrie par rapport à V.

Proposition 4.3.2 *Soit U un espace vectoriel, V et W deux sous-espaces tels que $U = V \oplus W$. La projection sur V ainsi que la symétrie par rapport à V, parallèlement à W, sont des applications linéaires.*

Démonstration : Si $u = v + w$ et $u' = v' + w'$, alors

$$\lambda\, u + \mu\, u' = (\lambda\, v + \mu\, v') + (\lambda\, w + \mu\, w') \ .$$

Puisque les vecteurs $\lambda\, v + \mu\, v'$ et $\lambda\, w + \mu\, w'$ appartiennent respectivement à V et W, la formule précédente donne la décomposition de $\lambda\, u + \mu\, u'$. Sa projection sur V est donc $\lambda\, v + \mu\, v'$, et son symétrique par rapport à V est

$$(\lambda\, v + \mu\, v') - (\lambda\, w + \mu\, w') = \lambda\,(v - w) + \mu\,(v' - w') \ ,$$

d'où le résultat. □

La projection sur V parallèlement à W a pour image V et pour noyau W. La symétrie est un automorphisme de U. Le théorème suivant caractérise les projections et les symétries, indépendamment de la décomposition en somme directe.

Théorème 4.3.3 *Soit U un espace vectoriel.*

1. *Un endomorphisme p de U est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.*
2. *Un endomorphisme s de U est une symétrie si et seulement si $s \circ s = I_U$.*

Démonstration : Si p est la projection sur V parallèlement à W, alors pour tout $v \in V$, $p(v) = v$, et donc $p \circ p = p$. Réciproquement, si $p \circ p = p$, nous allons montrer que p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Commençons par montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires, c'est à dire que $U = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$. Observons que pour tout $u \in U$,

$$p(u - p(u)) = p(u) - p \circ p(u) = 0 \ ,$$

donc $u - p(u) \in \mathrm{Ker}\, p$. On peut toujours écrire $u = p(u) + (u - p(u))$. Pour vérifier que la somme est directe, nous devons montrer que l'intersection de l'image et du noyau est réduite au vecteur nul. Si $u \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$, alors il existe v tel que $u = p(v)$ (puisque u est dans l'image), et de plus $p(u) = 0$ (puisque u est dans le noyau). Donc $p(p(v)) = 0$. Mais $p(p(v)) = p(v) = u$. D'où le résultat.

Nous avons montré que $U = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$. La décomposition d'un vecteur u selon cette somme directe est

$$u = p(u) + (u - p(u)) \ .$$

Donc $p(u)$ est bien la projection de u sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

La formule $v - (-w) = v + w$ entraîne que la composée d'une symétrie par elle-même est l'application identique. Réciproquement, soit s une application telle que $s \circ s = I_U$. Définissons les applications p_1 et p_2 par :

$$p_1 \ : u \longmapsto \frac{1}{2}(u + s(u)) \quad \text{et} \quad p_2 \ : u \longmapsto \frac{1}{2}(u - s(u)) \ .$$

Composons l'application p_1 par elle-même :

$$\begin{aligned} p_1 \circ p_1(u) &= p_1(\frac{1}{2}(u + s(u))) \\ &= \frac{1}{2}(p_1(u) + p_1(s(u)) \\ &= \frac{1}{4}(u + s(u) + s(u) + s \circ s(u)) \\ &= \frac{1}{4}(2u + 2s(u)) = p_1(u) \ . \end{aligned}$$

On vérifie de même que $p_2 \circ p_2 = p_2$. D'après ce qui précède, p_1 et p_2 sont donc des projections. Or $p_1 + p_2 = I_U$. Il s'ensuit que si p_1 est la projection sur V parallèlement à W, alors p_2 est la projection sur W parallèlement à V. Mais puisque $s = p_1 - p_2$, alors s est la symétrie par rapport à V, parallèlement à W. □

4.4 Applications linéaires en dimension finie

Désormais, les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie. Observons d'abord qu'une application linéaire est déterminée par l'image qu'elle donne d'une base de l'espace de départ.

Proposition 4.4.1 *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de V. Soit $\{c_1, \ldots, c_n\}$ une famille de vecteurs de W. Il existe une application linéaire unique f telle que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(b_i) = c_i$.*

Démonstration : Tout vecteur v de V s'écrit de façon unique sous la forme

$$v = \lambda_1 \, b_1 + \cdots + \lambda_n \, b_n \ ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les coordonnées de v dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Puisque f doit être linéaire, l'image de v ne peut être que

$$f(v) = \lambda_1 \, f(b_1) + \cdots + \lambda_n \, f(b_n) = \lambda_1 \, c_1 + \cdots + \lambda_n \, c_n \ .$$

□

Le *rang* d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 4.4.2 *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de V dans W. On appelle* rang *de f la dimension de* $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \ .$$

Supposons que V soit de dimension n et choisissons une base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. L'image par f de tout vecteur de V est une combinaison linéaire des vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. Donc $\operatorname{Im} f$ est le sous-espace vectoriel de W engendré par $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$. Le rang de f est la dimension de ce sous-espace ; c'est donc le rang de la famille de vecteurs

$\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ (cf. définition 3.5.8). Observons que le rang est inférieur ou égal aux deux dimensions des espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

$$\operatorname{rang} f \leq \min\{\dim V, \dim W\}.$$

Les renseignements que l'on peut tirer de la famille $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ sont plus précis.

Théorème 4.4.3 *Soit V un espace vectoriel de dimension n et W un espace vectoriel de dimension m. Soit $\{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de V. Soit f une application linéaire de V dans W. L'application f est :*

1. *injective si et seulement si $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ est une famille libre dans W,*
2. *surjective si et seulement si $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ est une famille génératrice de W,*
3. *bijective si et seulement si $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ est une base de W.*

Démonstration : Démontrons d'abord que si f est injective alors $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ est une famille libre dans W. Supposons que

$$\lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n) = 0.$$

Par la linéarité de f,

$$\lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n) = f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = 0.$$

Si f est injective, alors le seul vecteur d'image nulle est le vecteur nul, donc $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$. Mais $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base, donc une famille libre. Donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Montrons maintenant la réciproque. Soient v_1 et v_2 tels que $f(v_1) = f(v_2)$. Alors $f(v_1 - v_2) = 0$. Décomposons le vecteur $v_1 - v_2$ dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

$$v_1 - v_2 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Donc

$$f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n) = 0.$$

Mais si la famille $\{f(b_1) \ldots f(b_n)\}$ est libre, alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, donc $v_1 - v_2 = 0$, soit $v_1 = v_2$: f est injective.

Démontrons maintenant que si f est surjective alors la famille $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ est génératrice. Pour tout élément w de W, il existe $v \in V$ tel que $f(v) = w$. Décomposons v dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Donc

$$w = f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n).$$

Tout vecteur w de W est combinaison linéaire de la famille $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$, qui est donc génératrice.

Voici la réciproque. Si $\{f(b_1), \ldots , f(b_n)\}$ est génératrice, alors un vecteur w de W quelconque s'écrit

$$w = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n) = f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) .$$

Donc w est l'image par f d'un vecteur de V : f est bien surjective.

Pour terminer la démonstration, il suffit d'observer qu'une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective ; d'autre part une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice. Le point *3* du théorème est donc conséquence des deux précédents. □

La combinaison du théorème 4.4.3 avec la proposition 3.5.7 implique les relations suivantes entre les dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

Corollaire 4.4.4 *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de V dans W.*

1. *Si f est injective alors* $\dim V \leq \dim W$.
2. *Si f est surjective alors* $\dim V \geq \dim W$.
3. *Si f est bijective alors* $\dim V = \dim W$.

La dimension est donc une forte contrainte sur la nature des applications linéaires. On peut aussi voir cette contrainte comme suit.

Corollaire 4.4.5 *Soient V et W deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire de V dans W est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.*

Il ne peut exister un isomorphisme entre deux espaces vectoriels que s'ils ont la même dimension. Réciproquement, si deux espaces ont la même dimension, on peut toujours construire un isomorphisme entre eux, en envoyant une base de l'un sur une base de l'autre. En particulier, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Si V est de dimension n, avec une base $\{b_1, \ldots , b_n\}$, tous les vecteurs de V ont une décomposition unique

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n ,$$

où $\lambda_1 \ldots , \lambda_n$ sont les coordonnées de v (théorème 3.5.10). L'application de V dans $\mathbb{R}^n$ qui à v associe le n-uplet de ses coordonnées $(\lambda_1, \ldots , \lambda_n)$ est un isomorphisme de V dans $\mathbb{R}^n$.

Reprenons l'exemple de la dérivation des polynômes, mais cette fois-ci vue comme une application de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ dans lui-même. L'espace est de dimension $n+1$, et la base la plus naturelle est $\{1, X, \ldots , X^n\}$. L'application D envoie ces $n+1$ polynômes sur $0, 1, \ldots , nX^{n-1}$. Ils engendrent l'espace vectoriel des polynômes de degré $n-1$, qui est de dimension n. Le noyau de D est $\mathbb{R}_0[X]$, et l'image de D est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. La somme des dimensions de l'image et du noyau est la dimension de l'espace de départ : ceci est un cas particulier du théorème 4.4.6 ci-dessous, que l'on appelle *théorème du rang*.

Théorème 4.4.6 *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de V dans W.*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V \ .$$

Démonstration : Le noyau $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de V. Choisissons un supplémentaire V' de $\operatorname{Ker} f$ dans V (cf. proposition 3.5.13). Nous allons montrer que l'application f est un isomorphisme de V' vers $\operatorname{Im} f$. Tout vecteur w de $\operatorname{Im} f$ est l'image d'un vecteur v de V. Décomposons v en $v = v' + v''$, avec $v' \in V'$ et $v'' \in \operatorname{Ker} f$. Alors $w = f(v) = f(v') + f(v'') = f(v')$, car $f(v'') = 0$. Donc f est surjective de V' vers $\operatorname{Im} f$. Montrons maintenant qu'elle est injective. Soient v_1 et v_2 appartenant à V' tels que $f(v_1) = f(v_2)$. Alors $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0$. Donc $v_1 - v_2 \in V' \cap \operatorname{Ker} f$. Mais puisque la somme est directe, $V' \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Donc $v_1 = v_2$.

Comme f est un isomorphisme de V' dans $\operatorname{Im} f$, ces deux espaces ont nécessairement la même dimension. Or puisque V' et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans V, on a

$$\dim V = \dim V' + \dim \operatorname{Ker} f \ ,$$

d'où le résultat. □

4.5 Matrice d'une application linéaire

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels est déterminée par les images des vecteurs d'une base dans l'espace de départ (proposition 4.4.1). Si on choisit une autre base dans l'espace d'arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S'il y a n vecteurs de base au départ et m à l'arrivée, l'application linéaire est déterminée par $m \times n$ réels : m coordonnées pour chacun des n vecteurs de base. Une *matrice* est la représentation sous forme de tableau de ces $m \times n$ réels.

Notons $\{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de l'espace de départ, et $\{c_1, \ldots, c_m\}$ une base de l'espace d'arrivée. Soit $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \ldots, n \ , \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i + \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i \ .$$

Les coordonnées des vecteurs images $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ sont conventionnellement notées en colonnes. L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est l'indice de ligne, l'indice

j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne.

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \textit{départ} & & & & \\
 & & & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \textit{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques. Comme premier exemple, considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : \quad (x,y) \longmapsto (x+y, 2x+3y, x-y) \ .$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\{(1,0),(0,1)\}$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1,0)) = (1,2,1) \quad \text{et} \quad f((0,1)) = (1,3,-1) \ .$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonne).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $\{(1,1),(1,-1)\}$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ à l'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont

$$\begin{array}{rclcl}
f((1,1)) &=& (2,5,0) &=& -3\,(1,0,0) + 5\,(1,1,0) + 0\,(1,1,1) \\
f((1,-1)) &=& (0,-1,2) &=& 1\,(1,0,0) - 3\,(1,1,0) + 2\,(1,1,1) \ .
\end{array}$$

D'où la matrice,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'application dérivation, de l'espace des polynômes de degré ≤ 3 dans celui des polynômes de degré ≤ 2. La base de l'espace de départ est $\{1, X, X^2, X^3\}$. Celle de l'espace d'arrivée est $\{1, X, X^2\}$. La matrice de l'application est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quand l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont les mêmes (l'application est un endomorphisme), on choisit la même base au départ et à l'arrivée. La matrice d'un endomorphisme a autant de lignes que de colonnes : on dit qu'elle est carrée. Voici les matrices de trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, dans la base canonique.

- *Rotation d'angle* $\pi/2$ *:* $(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Symétrie par rapport à la première bissectrice :* $(x, y) \mapsto (y, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Projection sur la première bissectrice :* $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans un espace de dimension n, la matrice de l'application identique est la matrice carrée $n \times n$ qui a des 1 sur la diagonale (termes d'indices (i, i)) et des 0 en dehors (termes d'indices (i, j) avec $i \neq j$). On l'appelle *matrice identité d'ordre* n et on la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La représentation matricielle présente l'avantage d'automatiser de nombreux calculs. Nous consacrerons le chapitre 5 au calcul matriciel. Pour l'instant nous allons voir comment la matrice d'une application linéaire permet de calculer l'image d'un vecteur dont on se donne les coordonnées dans la base de départ. Reprenons la situation générale : $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base de l'espace de départ, et $\{c_1, \ldots, c_m\}$ une base de l'espace d'arrivée. Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice de f, noté $a_{i,j}$, est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \ldots, n\,, \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i\,.$$

Considérons maintenant un vecteur v de l'espace de départ dont les coordonnées dans l'espace de départ sont $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$$v = \lambda_1\, b_1 + \cdots + \lambda_n\, b_n\,.$$

L'image de v par f est

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \lambda_j \ . \end{aligned}$$

Donc le vecteur $f(v)$ se décompose dans la base $\{c_1, \ldots, c_m\}$ en $f(v) = \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_m c_m$, avec :

$$\forall i = 1, \ldots, m \ , \quad \mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \lambda_j \ .$$

On dit que le vecteur $(\mu_i)_{i=1,\ldots,m}$ est le *produit* de la matrice $(a_{i,j})$ par le vecteur $(\lambda_j)_{j=1,\ldots,n}$. Observez que ce produit n'a de sens que si le nombre de coordonnées du vecteur est égal au nombre de colonnes de la matrice.

Il est commode, pour calculer le produit d'une matrice par un vecteur, de représenter les λ_i en colonne, au-dessus et à droite de la matrice $(a_{i,j})$ (voir figure 4.3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Reprenons l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : \quad (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y, x - y) \ .$$

Les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant les bases canoniques, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

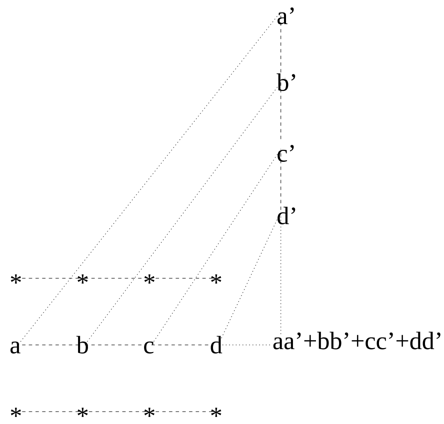


FIG. 4.3 – Comment présenter le produit d'une matrice par un vecteur colonne.

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x, y).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

4.6 Exercices

Exercice 4.1 Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $(x, y) \mapsto (x, 0)$
2. $\square$ $(x, y) \mapsto (x, 1)$
3. $\square$ $(x, y) \mapsto (|x|, 0)$
4. $\boxtimes$ $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
5. $\boxtimes$ $(x, y) \mapsto (y, x)$

Exercice 4.2 Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$
2. $\square$ $P(X) \mapsto P(X + 1) - X$
3. $\boxtimes$ $P(X) \mapsto XP(X + 1) - P'(X)$
4. $\boxtimes$ $P(X) \mapsto XP(X + 1) - P'(1)$
5. $\square$ $P(X) \mapsto XP(X + 1) - P^2(1)$

Exercice 4.3 Soient V et W deux espaces vectoriels et f une application linéaire de V dans W. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ L'image du vecteur nul de V est le vecteur nul de W.
2. ☒ L'image de f est un sous-espace vectoriel de W.
3. ☐ L'image par f d'une famille libre dans V est une famille libre dans W.
4. ☒ L'image par f d'une famille liée dans V est une famille liée dans W.
5. ☐ L'image par f d'une famille génératrice dans V est une famille génératrice dans W.
6. ☐ Si W est de dimension finie alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace de dimension finie de V.
7. ☒ Si V est de dimension finie alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de dimension finie de W.
8. ☒ Si V et W sont de dimension finie, et $\dim V > \dim W$ alors $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.
9. ☐ Si V et W sont de dimension finie, et $\dim V > \dim W$ alors f est surjective.
10. ☐ Si V et W sont de dimension finie, et $\dim V < \dim W$ alors f est injective.

Exercice 4.4 Soient U un espace vectoriel, V et W deux sous-espaces tels que $V \oplus W = U$. On note :

- p la projection sur V parallèlement à W,
- s la symétrie par rapport à V parallèlement à W,
- p' la projection sur W parallèlement à V,
- s' la symétrie par rapport à W parallèlement à V,
- I l'application identique de U.

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $p + p' = I$.
2. ☐ $s + s' = I$.
3. ☐ $s - s' = 2p'$.
4. ☒ $p - p' = s$.
5. ☐ $s - p = p'$.
6. ☒ $s + p' = p$.
7. ☐ $p \circ s' = p$.
8. ☒ $p' \circ s' = p'$.
9. ☒ $s' \circ s = -I$.
10. ☐ $p' \circ p = I$.

Exercice 4.5 Soient V un espace vectoriel de dimension n, W un espace vectoriel de dimension m et f une application linéaire de V dans W. On choisit une base $\{b_1, \dots, b_n\}$ dans V, une base $\{c_1, \dots, c_m\}$ dans W, et on note A la matrice de f relative à ces bases. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La matrice A est carrée si et seulement si $m = n$.
2. ☐ Les lignes de A sont les images des vecteurs $c_1, \ldots, c_m$.
3. ☐ Si toutes les colonnes de A sont non nulles, alors l'application f est injective.
4. ☒ Si toutes les colonnes de A sont proportionnelles au même vecteur de $\mathbb{R}^m$, alors le rang de f est 0 ou 1.
5. ☒ La j-ième colonne de A est nulle si et seulement si le vecteur b_j appartient au noyau de f.
6. ☐ Si une ligne de A est nulle, alors f n'est pas injective.
7. ☒ Si une ligne de A est nulle, alors le rang de f est strictement inférieur à m.
8. ☒ Si les colonnes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^m$, alors f est injective.
9. ☐ Si les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors f est surjective.
10. ☒ Si les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$, alors f est surjective.

Exercice 4.6 Pour chacune des applications linéaires f suivantes, déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

1. $f\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ,\quad (x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$.
2. $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ,\quad (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (0, y-z, z-x)$.
3. $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ,\quad (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.
4. $f\ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\quad (x,y,z,t) \longmapsto f(x,y,z,t) = (x+y+2z-t, 2x+y+z+t)$.
5. $f\ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad (x,y,z,t) \longmapsto f(x,y,z,t) = x-y+2z+3t$.

Exercice 4.7 Pour tout entier $d \geq 1$, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq d$ en la variable X. Vérifier que chacune des applications f suivantes est linéaire, déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

1. $f\ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P) = P(1)$.
2. $f\ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) + P(X)$.
3. $f\ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) - P(X)$.
4. $f\ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = (X^2+1)P'(X) - 2XP(X)$.
5. $f\ : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(1) + (X-1)P'(1)$.
6. $f\ : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]\ ,\quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

Exercice 4.8 Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. On considère l'application f qui à un polynôme $P(X)$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = 2(X+1)P(X) - (X+1)^2 P'(X)\ .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de V.
2. Donner les images par f des polynômes 1, X, X^2, $X+1$, $(X+1)^2$.
3. Donner une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 4.9 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ll} (x,y)\mapsto(-x,-y) & (x,y)\mapsto(2x,2y) \\ (x,y)\mapsto(x,0) & (x,y)\mapsto(x,x) \\ (x,y)\mapsto(y,0) & (x,y)\mapsto(y,y) \\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y) & (x,y)\mapsto(x-y,x+y) \end{array}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Donner une interprétation géométrique comme transformation du plan, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. L'application est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
3. Reprendre les deux questions précédentes pour l'application $f-I$, où f est l'application considérée et I désigne l'application identique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.10 On considère les applications linéaires suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} f\ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y,y-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y,2x+3y) \end{array}$$

1. L'application f est elle injective ? surjective ?
2. L'application g est elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $g\circ f$. Est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer $f\circ g$. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4.11 Soient U, V et W des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit f une application linéaire de U dans V et g une application linéaire de V dans W.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} g\circ f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} g\circ f\subset\operatorname{Im} g$.
3. Montrer que $g\circ f$ est l'application nulle si et seulement si $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g$.
4. Montrer que $g\circ f$ est injective si et seulement si f est injective et $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} g=\{0\}$.
5. Montrer que $g\circ f$ est surjective si et seulement si $g(\operatorname{Im} f)=W$.

Exercice 4.12 Soit V un espace vectoriel et f un endomorphisme de V.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{array}{ll} (1) & \operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}\ , \\ (2) & \operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker}(f\circ f)\ . \end{array}$$

2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{array}{ll} (3) & \operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f=V\ , \\ (4) & \operatorname{Im} f=\operatorname{Im}(f\circ f)\ . \end{array}$$

3. Montrer que si V est de dimension finie, alors les 4 propositions (1), (2), (3) et (4) sont équivalentes.

Exercice 4.13 Soit V un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de V.

1. On suppose que $f \circ f$ est l'application nulle. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Montrer que n est nécessairement pair.
3. On suppose qu'il existe un entier k tel que $f^{\circ k}$ (composée de f avec elle-même k fois) est l'application nulle (on dit que f est *nilpotente*). Soit k_0 le plus petit entier tel que $f^{\circ k_0}$ est l'application nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in V$ tel que $f^{\circ(k_0-1)}(v) \neq 0$. Montrer que si $f^{\circ(k_0-1)}(v) \neq 0$, alors la famille de vecteurs $\{v, f(v), \ldots, f^{\circ(k_0-1)}\}$ est libre.
4. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n}$ est l'application nulle.

Exercice 4.14 Soit V un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on définit la i-ième application coordonnée L_i comme l'application de V dans $\mathbb{R}$ qui à $v \in V$ associe le réel λ_i qui est la i-ième coordonnée de v sur la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_i b_i + \cdots + \lambda_n b_n \\ &= L_1(v)\, b_1 + \cdots + L_i(v)\, b_i + \cdots + L_n(v)\, b_n \,. \end{aligned}$$

1. Montrer que les L_i sont des applications linéaires.
2. Montrer que le noyau de L_i est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de V (hyperplan).
3. On prend $V = \mathbb{R}^3$ et :

$$b_1 = (1, 0, -1)\,, \quad b_2 = (0, 2, 3)\,, \quad b_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Montrer que $\{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de V. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'image par L_i d'un vecteur $v = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.15 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ll} (x,y) \mapsto (-x,-y) & (x,y) \mapsto (2x,2y) \\ (x,y) \mapsto (x,0) & (x,y) \mapsto (x,x) \\ (x,y) \mapsto (y,0) & (x,y) \mapsto (y,y) \\ (x,y) \mapsto (x+y,x-y) & (x,y) \mapsto (x-y,x+y) \end{array}$$

Déterminer la matrice de chacune de ces applications dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(0,1),(1,0)\}$.
2. $\{(1,0),(0,1)\}$.
3. $\{(0,2),(-3,0)\}$.
4. $\{(0,1),(1,1)\}$.
5. $\{(1,1),(1,-1)\}$.

Exercice 4.16 Pour tout entier n, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. Donner la matrice de chacune des applications suivantes.

1. $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
2. $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (0, y - z, z - x)$.
3. $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.
4. $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \longmapsto f(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, 2x + y + z + t)$.
5. $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \longmapsto f(x, y, z, t) = x - y + 2z + 3t$.

Exercice 4.17 Pour tout entier $d \geq 1$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d[X]$ des polynômes de degré $\leq d$ en la variable X, de la base $\{1, X, \ldots, X^d\}$. On considère les applications f suivantes.

- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(X) \longmapsto f(P) = P(1)$.
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) + P(X)$.
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) - P(X)$.
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = (X^2 + 1)P'(X) - 2XP(X)$.
- $f \ : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(1) + (X - 1)P'(1)$.
- $f \ : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.
- $f \ : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$, $P(X) \longmapsto f(P)(X) = 2(X + 1)P(X) - (X + 1)^2 P'(X)$.

Pour chacune de ces applications :

1. Donner la matrice de f.
2. Calculer l'image par f du polynôme $(X + 2)^2$.
3. Calculer les coordonnées du polynôme $(X+2)^2$ dans la base de l'espace de départ, effectuer le produit du vecteur obtenu par la matrice de f, et vérifier le calcul de la question précédente.

Exercice 4.18 On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs suivants.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit de chacune des matrices par chacun des vecteurs.

4.7 Compléments

Applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

D'après la définition 4.1.1, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire si $\forall v, w, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda\, v+\mu\, w) = \lambda\, f(v)+\mu\, f(w)$. Posons $\lambda = x$, $v = 1$ et $\mu = w = 0$. L'application f doit vérifier $f(x) = xf(1)$. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont toutes de la forme $x \mapsto ax$, avec $a = f(1)$.

La condition $f(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, f(v) + \mu\, f(w)$ est trop forte : il suffit d'exiger $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v)$ pour obtenir le même résultat. Suffirait-il d'imposer que f vérifie $f(v + w) = f(v) + f(w)$? Presque.

Proposition 4.7.1 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $v, w \in \mathbb{R}$, $f(v + w) = f(v) + f(w)$ (on dit que f est* additive*). Si f est continue, alors f est l'application qui à x associe $xf(1)$.*

Démonstration : C'est l'occasion d'employer une technique classique, que l'on appelle un "argument de continuité" : on démontre d'abord que la propriété est vraie pour tous les rationnels, on l'étend ensuite à tous les réels en utilisant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

On déduit d'abord de l'hypothèse que pour tout n entier, $f(nx) = nf(x)$, par récurrence sur n. Ceci entraîne, en posant $nx = y$, que $f(y/n) = f(y)/n$. Les deux combinés donnent que pour tout rationnel p/q, $f(p/q) = (p/q)f(1)$.

Tout réel x est limite d'une suite de rationnels :

$$x = \lim_{n\to\infty} p_n/q_n \; .$$

Puisque la fonction f est supposée continue,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(p_n/q_n) = \lim_{n\to\infty} p_n/q_n\, f(1) = x\, f(1) \; .$$

□

Existe-t-il des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont additives sans être linéaires ? Oui, il est possible d'en construire, de manière assez tordue, en faisant appel à l'axiome du choix.

Application linéaire tangente

La tangente au graphe d'une fonction en un point est une droite passant par ce point, dont la pente est la dérivée. Pour une application dérivable en a, on peut écrire :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + o(h) \; , \tag{4.7.1}$$

où $o(h)$ désigne une fonction telle que $o(h)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Imaginons que l'on souhaite approcher f au voisinage de a (pour une valeur de h petite), sans savoir calculer $f(a + h)$. On peut remplacer $f(a + h) - f(a)$ par $f'(a)\, h$, et l'erreur commise est négligeable devant h. Dans (4.7.1), une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ apparaît : l'application $h \mapsto f'(a)\, h$.

Ceci se généralise à des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, avec n et m quelconques. L'application $h \mapsto f(a)\, h$ devient une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$: l'application linéaire tangente. Pour ne pas compliquer les notations, nous prendrons l'exemple d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \end{array}$$

Ce pourrait être par exemple l'application qui aux trois dimensions d'un parallélépipède associe sa surface et son volume.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2xy + 2xz + 2yz, xyz) \end{array}$$

Les applications f et g, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, sont les *applications coordonnées*. Si on fixe un point (a,b,c) dans l'espace de départ, on définit 6 *applications partielles*.

$$\begin{array}{ccl} x & \mapsto & f(x,b,c) \\ y & \mapsto & f(a,y,c) \\ z & \mapsto & f(a,b,z) \\ x & \mapsto & g(x,b,c) \\ y & \mapsto & g(a,y,c) \\ z & \mapsto & g(a,b,z) \end{array}$$

Nous commençons par une application f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Si les applications partielles sont dérivables, leurs dérivées s'appellent les *dérivées partielles* en (a,b,c).

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) & = & \dfrac{df(x,b,c)}{dx}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) & = & \dfrac{df(a,y,c)}{dy}(b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) & = & \dfrac{df(a,b,z)}{dz}(c) \end{array}$$

Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à x, il suffit de dériver en x l'expression de f, en traitant les autres variables comme des constantes paramétriques.

Supposons par exemple que f soit l'application qui à (x,y,z) associe la surface du parallélépipède dont les longueurs d'arêtes sont x,y,z.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2(xy + yz + xz) \end{array}$$

Voici ses trois dérivées partielles.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &= 2(b+c)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &= 2(a+c)\\
\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &= 2(a+b)
\end{aligned}$$

Si elles sont continues, les dérivées partielles permettent d'approcher la fonction par une application linéaire au voisinage d'un point. Le résultat qui suit est l'analogue pour les fonctions de plusieurs variables du théorème des accroissements finis.

Théorème 4.7.2 *Soit, $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une application continûment différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et (a,b,c) un point de $\mathbb{R}^3$. Notons $o(x,y,z)$ la fonction définie par :*

$$f(x,y,z) = f(a,b,c)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)+o(x,y,z)\ .$$

Alors :

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{o(x,y,z)}{\max\{|x-a|,|y-b|,|z-c|\}} = 0\ .$$

Ce théorème dit que les variations de la fonction f autour du point (a,b,c) peuvent être approchées par une application linéaire, la *différentielle* de f.

Définition 4.7.3 *On appelle* différentielle *de f au point (a,b,c) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (h_x,h_y,h_z) associe :*

$$h_x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+h_y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+h_z\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\ .$$

En physique, on interprète h_x, h_y et h_z comme des petites variations des variables x, y, et z, et on les note plutôt dx, dy et dz. Si on note df la différentielle de f, ceci justifie l'écriture abrégée suivante.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\ .$$

La différentielle est plus facile à visualiser en dimension 2. Pour une fonction de deux variables, le théorème 4.7.2 donne une approximation de $f(x,y)$ sous la forme :

$$f(x,y) = f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+o(x,y)\ .$$

La surface d'équation $z = f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est celle du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (a,b) (cf. figure 4.4). Pour rappeler cette interprétation géométrique, la différentielle de f au point (a,b) porte aussi le nom d'*application linéaire tangente*.

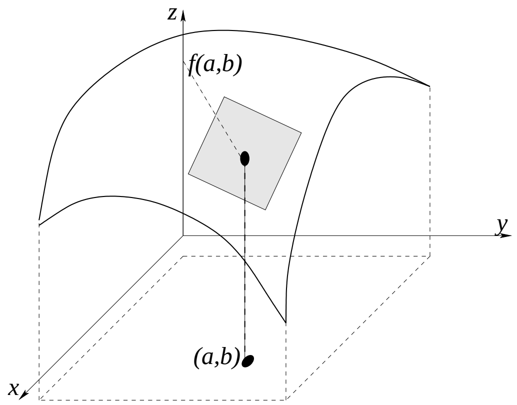


FIG. 4.4 – Plan tangent à une surface en un point.

Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continûment différentiable si ses m applications coordonnées le sont. On peut donc lui appliquer, coordonnée par coordonnée, le théorème 4.7.2. La différentielle en un point de $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Sa matrice est la *matrice jacobienne.* Ici encore nous donnons la définition en dimension réduite pour des raisons de clarté.

Définition 4.7.4 *Soit Φ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.*

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \end{array}$$

Soit (a,b,c) un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice jacobienne *de Φ au point (a,b,c), la matrice des dérivées partielles de f et g :*

$$MJ(\Phi)(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} (a,b,c)$$

On appelle différentielle *de Φ au point (a,b,c) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est la matrice jacobienne.*

Voici la matrice jacobienne au point (a,b,c) pour la surface et le volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions.

$$MJ = \begin{pmatrix} 2(b+c) & 2(a+c) & 2(a+b) \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} .$$

Dualité

D'après le théorème 4.1.5, une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire. Donc l'ensemble des applications linéaires de V dans W est un espace vectoriel. L'espace des applications linéaires de V dans $\mathbb{R}$ joue un rôle important autant en algèbre qu'en analyse : on l'appelle l'espace dual, et on le note V^*.

Une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$ s'appelle une *forme linéaire*. Plaçons-nous d'abord en dimension finie : V est un espace vectoriel de dimension n. Sauf si celle-ci est nulle, l'image d'une forme linéaire est $\mathbb{R}$, et son rang est donc 1. D'après le théorème du rang (théorème 4.4.6), la dimension du noyau est $n-1$. Le noyau d'une forme linéaire s'appelle un hyperplan (un plan ordinaire si V est de dimension 3).

Munissons V d'une base, $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Parmi les formes linéaires définies sur V, les *applications coordonnées* jouent un rôle particulier. Nous les notons $b_1^*, \ldots, b_n^*$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, b_i^* est l'application qui à un vecteur de V associe sa i-ième coordonnée dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

$$b_i^* \;:\quad v = \lambda_1 \, b_1 + \cdots + \lambda_i \, b_i + \cdots + \lambda_n \, b_n \longmapsto b_i^*(v) = \lambda_i \;.$$

Théorème 4.7.5 *La famille $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ est une base de V^*.*

En conséquence, l'espace vectoriel V et son dual V^* ont la même dimension.

Démonstration : Montrons d'abord que la famille $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ est libre. Supposons que la forme linéaire

$$v^* = \lambda_1^* \, b_1^* + \cdots + \lambda_n^* \, b_n^*$$

est nulle, c'est à dire que l'image qu'elle donne de tout vecteur est 0. En particulier l'image qu'elle donne du vecteur b_i est nulle. Or,

$$b_i^*(b_i) = 1 \quad \text{et} \quad b_j^*(b_i) = 0 \,,\; \forall j \neq i \;.$$

Donc $v^*(b_i) = \lambda_i^* = 0$. La forme v^* ne peut être nulle que si tous les λ_i^* sont nuls.

Montrons maintenant que la famille $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ est génératrice. Soit v^* une forme linéaire quelconque. D'après la proposition 4.4.1, v^* est déterminée par les images qu'elle donne aux vecteurs de la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Notons $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ ces images :

$$\forall i = 1, \ldots, n \;, \quad v^*(b_i) = \lambda_i^* \in \mathbb{R} \;.$$

On vérifie facilement que v^* est combinaison linéaire des b_i^* :

$$v^* = \lambda_1^* \, b_1^* + \cdots + \lambda_n^* \, b_n^* \;.$$

$\square$

Le mot "dual" évoque une certaine symétrie entre V et V^* : tout se passe comme si V^* était une image miroir de V. On note traditionnellement par $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ le *crochet de dualité*, à savoir l'image d'un vecteur par une forme linéaire :

$$\langle v^* \,, v \rangle = v^*(v) \in \mathbb{R} \;.$$

Le crochet de dualité est linéaire par rapport à chacun des arguments.

$$\begin{aligned} \langle v^* \,, \lambda \, v_1 + \mu v_2 \rangle &= \lambda \langle v^*, v_1 \rangle + \mu \langle v^*, v_2 \rangle \\ \langle \lambda^* \, v_1^* + \mu^* v_2^* \,, v \rangle &= \lambda^* \langle v_1^*, v \rangle + \mu^* \langle v_2^*, v \rangle \;. \end{aligned}$$

Le résultat suivant illustre l'aspect miroir de la dualité.

Proposition 4.7.6 *Soient V et W deux espaces vectoriels et f une application linéaire de V dans W. Il existe une application linéaire unique f^*, de W^* vers V^*, telle que pour tout $v \in V$ et pour tout $w^* \in W^*$,*

$$\langle w^*\,, f(v)\rangle = \langle f^*(w^*)\,, v\rangle\ .$$

Soit $\{b_1, \dots, b_n\}$ une base de V, $\{c_1, \dots, c_m\}$ une base de W, et

$$A = (a_{i,j})\ ,\ i = 1, \dots, m\ ,\ j = 1, \dots, n\ ,$$

la matrice de f dans ces bases. Alors la matrice de f^* dans les bases $\{c_1^*, \dots, c_m^*\}$ (au départ) et $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ (à l'arrivée) est la transposée de la matrice A, à savoir la matrice à n lignes et m colonnes :

$${}^tA = (a_{j,i})\ ,\ j = 1, \dots, n\ ,\ i = 1, \dots, m\ .$$

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Démonstration : La double linéarité du crochet de dualité permet de travailler uniquement sur les images des vecteurs de bases. Soit i un indice entre 1 et m et j un indice entre 1 et n.

$$\langle c_i^*\,, f(b_j)\rangle = \langle c_i^*\,, \sum_{i'=1}^{n} a_{i',j}\, c_{i'}\rangle = a_{i,j}\ ,$$

par définition de la base duale $\{c_1^*, \dots, c_m^*\}$. Notons $(a_{j,i}^*)_{j=1,\dots,n, i=1,\dots,m}$ la matrice de l'application f^*. On a de même :

$$\langle f^*(c_i^*)\,, b_j\rangle = \langle \sum_{j'=1}^{m} a_{j',i}^*\, b_{j'}^*\,, b_j\rangle = a_{j,i}^*\ ,$$

et donc nécessairement $a_{i,j} = a_{j,i}^*$, car $\langle c_i^*\,, f(b_j)\rangle = \langle f^*(c_i^*)\,, b_j\rangle$.

La relation $\langle w^*\,, f(v)\rangle = \langle f^*(w^*)\,, v\rangle$ étant vérifiée pour $v = b_j$ et $w^* = c_i^*$, elle est vraie pour tous $v \in V$ et $w^* \in W^*$, par la double linéarité. D'où l'existence. L'application f est unique car elle est déterminée par sa matrice.

$\square$

La notion de dualité prend toute sa puissance en dimension infinie pour les espaces de fonctions, quand on y ajoute une notion de continuité que nous n'expliciterons pas. Le dual d'un espace de fonctions est l'ensemble des formes linéaires continues définies sur cet espace.

Comme premier exemple, notons $\mathcal{C}_0([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Voici une forme linéaire définie sur $\mathcal{C}_0([0,1])$

$$f \in \mathcal{C}_0([0,1]) \longmapsto \int_0^1 f(x)\, dx\ .$$

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{C}_0([0,1])$. L'application

$$f \in \mathcal{C}_0([0,1]) \longmapsto \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\ ,$$

est encore une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0([0,1])$. Il y en a beaucoup d'autres : le dual de $\mathcal{C}_0([0,1])$ est l'espace des mesures de Radon sur $[0,1]$.

En dimension infinie, les duaux ont la propriété de s'emboîter à l'inverse des espaces fonctionnels dont ils sont issus. Par exemple l'espace $\mathcal{C}_1([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ est inclus dans $\mathcal{C}_0([0,1])$. Son dual contient le dual de $\mathcal{C}_0([0,1])$. Pour fabriquer un très gros espace vectoriel, qui englobe les fonctions, les mesures, et bien d'autres objets utiles, il faut prendre le dual d'un espace fonctionnel très petit. En novembre 1944, au cours de ce qu'il décrit comme "la plus belle nuit de sa vie" dans ses mémoires, Laurent Schwartz a eu l'idée de prendre le dual de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, nulles en dehors d'un intervalle fermé et borné : $\mathcal{C}^b_\infty$. Les objets de ce dual généralisent à la fois les fonctions et les mesures : ce sont les *distributions.*

Un des miracles des distributions est la possibilité de les dériver à volonté, par la formule "miroir" :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^b_\infty\ , \quad \langle f\,,\phi' \rangle = -\langle f'\,,\phi \rangle\ .$$

Prenons pour f la fonction de Heaviside :

$$f\ ; \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction s'identifie à la forme linéaire

$$\phi \longmapsto \langle f\,,\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx\ .$$

Sa dérivée au sens des distributions est la *masse de Dirac en* 0, à savoir la forme linéaire δ_0, définie par :

$$\delta_0\ : \quad \phi \longmapsto \langle \delta_0\, \phi \rangle = \phi(0)\ .$$

Ceci n'a pas surpris les physiciens, qui depuis un quart de siècle ne se privaient pas de dériver la fonction de Heaviside (et d'autres) chaque fois qu'ils en avaient besoin...

Codes de Hamming

Nous avons déjà évoqué au chapitre précédent les codes correcteurs d'erreurs. Nous allons étudier un exemple de code de Hamming. Notre objectif sera surtout de relier ses propriétés aux applications linéaires sur l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Nous considérons le problème de coder les éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ par ceux de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, donc de définir une application injective de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$. Evidemment, m doit être plus grand que n. Pour les codes de Hamming, on prend $m = 2^k - 1$, et

$n = m - k$, où k est un certain entier. Nous prendrons l'exemple $k = 3$, donc nous coderons les 16 éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ par autant d'éléments choisis dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$. Dans la pratique, on utilise les codes de Hamming pour des valeurs de k beaucoup plus élevées, et la "place perdue" n'est pas aussi importante qu'il y paraît. Comme nous l'avons vu précédemment, si on veut pouvoir corriger une erreur, deux mots du code ne peuvent ni être voisins, ni avoir un voisin en commun. Ils doivent donc différer en au moins 3 coordonnées. Nous devons donc trouver une application de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$, telle que les images de deux vecteurs quelconques diffèrent en 3 coordonnées au moins.

Dans toute la suite, les espaces vectoriels considérés sont munis de leur base canonique. Considérons l'application linéaire f, de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$, définie par la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons a_1, a_2, a_3, a_4 les 4 vecteurs colonnes de A. Pour vérifier que f est injective, c'est à dire que son noyau est réduit au seul vecteur nul, il suffit de montrer que son image est de dimension 4, c'est à dire que les vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 forment une famille libre. On voit immédatement que c'est le cas en examinant leurs 4 dernières coordonnées.

Les 4 vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 codent les 4 vecteurs de la base canonique de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Pour obtenir le code (l'image par f) d'un autre vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, il suffit de le multiplier par la matrice A (toutes les opérations se font dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est à dire modulo 2). Voici par exemple le calcul de $f(v)$, avec $v = (1, 1, 0, 1)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observons que les 4 dernières lignes de la matrice A sont celles de la matrice identité en dimension 4. Donc l'image par f d'un vecteur de 4 bits quelconque se termine par ces mêmes 4 bits. Les trois bits de tête sont des "bits de correction". Nous laissons au lecteur le soin de calculer les images par f des 16 vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ et de vérifier que ces images diffèrent deux à deux en au moins 3 bits.

Pour comprendre comment fonctionne la correction d'erreur, il faut considérer l'application linéaire g, de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, dont la matrice B est la suivante.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquez que les colonnes de B sont les écritures en base 2 des entiers de 1 à 7.

Proposition 4.7.7 *Le noyau de l'application g de matrice B et l'image de l'application f de matrice A sont le même sous-espace vectoriel de dimension 4 de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$.*

Démonstration : Il est facile de vérifier que l'image par g des 4 vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 est le vecteur nul. Ceci entraîne que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Il suffit alors de vérifier que les dimensions de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont toutes deux égales à 4. Nous l'avons déjà montré pour $\operatorname{Im} f$. Pour $\operatorname{Ker} g$, observons que les trois premiers vecteurs colonnes de B sont les 3 vecteurs de la base canonique en dimension 3. Donc $\operatorname{Im} g$ a pour dimension 3, et donc $\operatorname{Ker} g$ a pour dimension $7 - 3 = 4$. □

Par la proposition précédente, l'image par f d'un vecteur quelconque est dans le noyau de g. Donc si un code a été correctement transmis, son image par g doit être nulle. Reprenons le vecteur $v = (1,1,0,1)$ et supposons maintenant qu'une erreur a été commise sur son codage : au lieu de transmettre le vecteur $f(v) = (0,0,0,1,1,0,1)$, on a transmis $(0,0,0,1,0,0,1)$, c'est à dire que le cinquième bit a été changé : c'est $f(v) + e_5$ qui a été transmis, avec $e_5 = (0,0,0,0,1,0,0)$. Puisque $g(f(v))$ est le vecteur nul, l'image par g de $f(v) + e_5$ est $g(e_5)$, à savoir la cinquième colonne de B.

Etant donné un vecteur de 7 bits reçu, on commence par prendre son image par g (en le multipliant par la matrice B). Si cette image est nulle, alors il n'y a pas eu d'erreur de transmission, et il suffit de lire les 4 derniers bits du vecteur transmis. Si l'image est égale à l'un des vecteurs colonnes de B, disons le i-ième, alors le i-ième bit du vecteur reçu est faux : on le corrige et on lit ensuite les 4 derniers bits du vecteur corrigé.

Chapitre 5

Matrices et systèmes

5.1 Opérations sur les matrices

Etant donnés deux entiers m et n, une *matrice à m lignes et n colonnes* est un tableau rectangulaire de réels $A = (a_{i,j})$. L'indice de ligne i va de 1 à m, l'indice de colonne j va de 1 à n.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} .$$

Les entiers m et n sont les *dimensions* de la matrice, $a_{i,j}$ est son *coefficient d'ordre* (i, j). L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ce qui suit s'applique aussi, si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, à l'ensemble des matrices à coefficients complexes.

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une addition interne (on peut ajouter deux matrices de mêmes dimensions terme à terme) et d'une multiplication externe (on peut multiplier une matrice par un réel terme à terme).

- *Addition :* Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, leur somme $A + B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Multiplication externe :* Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et λ est un réel, le produit λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})$. Par exemple :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Proposition 5.1.1 *L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes, muni de son addition et de sa multiplication externe est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : On peut voir une matrice $A = (a_{i,j})$ comme une application de l'ensemble $E = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{R}$, qui au couple d'entiers (i, j) associe le coefficient $a_{i,j}$. La proposition 5.1.1 est donc un cas particulier du théorème 3.2.3. □

L'ensemble $E = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ a mn éléments. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{mn}$: c'est un espace vectoriel de dimension mn. Sa base canonique est formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls, sauf un qui vaut 1.

L'opération la plus importante est le *produit matriciel.*

Définition 5.1.2 *Soient m, n, p trois entiers. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle* produit matriciel *de A par B la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \ldots, m$ et pour tout $k \in 1, \ldots, p$ par :*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} \ .$$

Nous insistons sur le fait que le produit AB de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B sont les mêmes. Observons d'abord que la définition 5.1.2 est cohérente avec la définition du produit d'une matrice par un vecteur, donnée au chapitre précédent : si $p = 1$, la matrice B a n lignes et 1 colonne, et le produit AB a m lignes et 1 colonne. D'autre part, appliquer la définition 5.1.2 revient à effectuer successivement le produit de A par chacune des colonnes de B. Pour effectuer ce produit, nous conseillons d'adopter la même disposition que pour le produit par un vecteur, en plaçant B au-dessus et à droite de A.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{j,k} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & \vdots & & c_{1,p} \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{i,k} & & \\ & & & & \\ c_{m,1} & & & & c_{m,p} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Posons par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A a 3 lignes et 2 colonnes, la matrice B a 2 lignes et 4 colonnes. Le produit AB a donc un sens : c'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le produit matriciel a toutes les propriétés que l'on attend d'un produit, sauf qu'il n'est pas commutatif.

Proposition 5.1.3 *Le produit matriciel possède les propriétés suivantes.*

1. Associativité : *Si les produits AB et BC sont définis, alors les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont aussi et ils sont égaux.*

$$A(BC) = (AB)C\ .$$

2. Linéarité à droite : *Si B et C sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si A a autant de colonnes que B et C ont de lignes, alors*

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC\ .$$

3. Linéarité à gauche : *Si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si C a autant de lignes que A et B ont de colonnes, alors*

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC\ .$$

La démonstration de ces propriétés à partir de la définition 5.1.2 ne présente aucune difficulté autre que de manipulation d'indices. Comme elle ne présente pas non plus beaucoup d'intérêt, nous l'omettons.

La transposition est une notion importante, dont la justification provient de la dualité, évoquée dans les compléments du chapitre précédent.

Définition 5.1.4 *Etant donnée une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, sa* transposée *est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'ordre (j,i) est $a_{i,j}$.*

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^t\!A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Observons que la transposée de la transposée est la matrice initiale.

$${}^t({}^t\!A) = A\ .$$

La transposée d'un produit est le produit des transposées, mais il faut inverser l'ordre des facteurs.

Proposition 5.1.5 *Soient m, n, p trois entiers. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée du produit de A par B est le produit de la transposée de B par la transposée de A.*

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA\,.$$

Par exemple, en reprenant les matrices A et B définies ci-dessus :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observons que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice *carrée* (autant de lignes que de colonnes) et *symétrique*.

Définition 5.1.6 *Soit n un entier et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. On dit que A est symétrique si pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, ce qui est équivalent à dire que A est égale à sa transposée.*

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique. En effet :

$$^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA\,.$$

5.2 Matrices carrées

En général si le produit AB est défini, le produit BA n'a aucune raison de l'être. Le produit d'une matrice par sa transposée est une exception, les matrices carrées en sont une autre : si A et B sont deux matrices à n lignes et n colonnes, les produits AB et BA sont tous deux définis et ils ont les mêmes dimensions que A et B. En général ils ne sont pas égaux. Par exemple,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous noterons simplement $\mathcal{M}_n$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels. Parmi elles la *matrice identité*, notée I_n joue un rôle particulier.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, elle est l'élément neutre du produit matriciel : pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$,

$$A\, I_n = I_n\, A = A\ .$$

On le vérifie facilement à partir de la définition 5.1.2.

Définition 5.2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n$, notée A^{-1}, telle que*

$$A\, A^{-1} = A^{-1}\, A = I_n\ .$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin une méthode qui permet de savoir si une matrice est inversible, et de calculer son inverse quand elle l'est. Observons que l'inverse, s'il existe, est nécessairement unique. En effet, soient B_1 et B_2 deux matrices telles que $A\, B_1 = B_1\, A = I_n$ et $A\, B_2 = B_2\, A = I_n$. En utilisant l'associativité, le produit $B_1\, A\, B_2$ vaut $B_1\,(A\, B_2) = B_1\, I_n = B_1$, mais aussi $(B_1\, A)\, B_2 = I_n\, B_2 = B_2$. Donc $B_1 = B_2$.

Il suffit de trouver une matrice B telle que $A\, B = I_n$ pour être sûr que A est inversible et que son inverse est B.

Théorème 5.2.2 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $A\, B = I_n$* ou bien *$B\, A = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe une matrice B telle que $A\, B = I_n$. Considérons l'application, de $\mathcal{M}_n$ dans lui-même, qui à une matrice X associe le produit $X\, A$. D'après le point *3.* de la proposition 5.1.3, c'est une application linéaire, donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$. Montrons qu'elle est injective, c'est à dire que son noyau ne contient que la matrice nulle. Si $X\, A = 0$, alors $(X\, A)\, B = 0$, mais $(X\, A)\, B = X\,(A\, B) = X\, I_n = X$ par hypothèse. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension qui est injective est aussi surjective (corollaire 4.4.5). Donc il existe une matrice X telle que $X\, A = I_n$. Il reste à vérifier que cette matrice est B. Si $X\, A = A\, B = I_n$, alors $X\,(A\, B) = X$ et $(X\, A)\, B = B$. D'où le résultat.

On procède de façon symétrique si $B\, A = I_n$, en considérant l'application qui à X associe $A\, X$. $\square$

Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$, leur produit est inversible.

Proposition 5.2.3 *Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. Le produit AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration : Il suffit de vérifier la définition 5.2.1 en utilisant l'associativité du produit :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n\ .$$

$\square$

5.3 Matrices et applications linéaires

Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{c_1, \ldots, c_m\}$.
Une application linéaire f est déterminée par les images des vecteurs $b_1, \ldots, b_n$. Les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\{c_1, \ldots, c_m\}$, rangés en n colonnes, forment la matrice de l'application f, relative aux bases considérées (cf. section 4.5).

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \textit{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \textit{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent en des opérations analogues sur les matrices. Soient f, g deux applications linéaires de V dans W et λ, μ deux réels. Si les matrices de f et g (relatives aux mêmes bases au départ et à l'arrivée) sont A et B, alors la matrice de $\lambda f + \mu g$ est $\lambda A + \mu B$. La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire (théorème 4.1.4). Sa matrice est le produit des matrices de f et g.

Proposition 5.3.1 *Soient U, V, W trois espaces vectoriels, f une application linéaire de U dans V et g une application linéaire de V dans W. Soient $\{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de U, $\{c_1, \ldots, c_m\}$ une base de V et $\{d_1, \ldots, d_p\}$ une base de W.*
Soit A la matrice de f relative aux bases $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{c_1, \ldots, c_m\}$.
Soit B la matrice de g relative aux bases $\{c_1, \ldots, c_m\}$ et $\{d_1, \ldots, d_p\}$.
Alors la matrice de $g \circ f$ relative aux bases $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{d_1, \ldots, d_p\}$ est le produit BA.

Remarquez que l'ordre dans lequel s'effectue le produit est l'ordre dans lequel s'écrit la composition.

$$\text{matrice de } g \circ f = (\text{matrice de } g)\ (\text{matrice de } f)\ .$$

Démonstration : L'image par $g \circ f$ des vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ se calcule en prenant l'image par g des vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. On calcule les coordonnées de ces images dans la base $\{d_1, \ldots, d_p\}$ en effectuant le produit par la matrice de g, des vecteurs exprimant $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ dans la base $\{c_1, \ldots, c_m\}$, qui sont les vecteurs colonnes de A. Effectuer successivement le produit de B par chacun des vecteurs colonnes de A revient à calculer le produit de B par A. □

Pour les endomorphismes (l'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes), nous avons déjà convenu de choisir la même base au départ et à l'arrivée.

Proposition 5.3.2 *Soit V un espace vectoriel, muni de la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$, et f une application linéaire de V dans lui-même. L'application f est un automorphisme si et seulement si la matrice de f dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est inversible. Si c'est le cas, la matrice de f^{-1} est l'inverse de la matrice de f.*

Démonstration : Observons d'abord que la matrice de l'application identique est la matrice identité, quelle que soit la base. Si l'application f est bijective, alors son inverse est l'unique application dont la composée avec f est l'application identique.

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_V \; .$$

Si A est la matrice de f et B la matrice de f^{-1}, la proposition 5.3.1 entraîne que $A\,B = B\,A = I_n$.

Réciproquement si A est inversible, alors A^{-1} définit une application linéaire unique de V dans V. La composée de cette application avec f a pour matrice I_n : c'est l'application identique. Donc cette application est l'inverse de f. □

Un automorphisme de V est une application linéaire qui envoie une base de V sur une autre base (théorème 4.4.3). Effectuer un changement de base (remplacer une base par une autre) revient à prendre l'image par l'automorphisme qui envoie la nouvelle base sur l'ancienne, donc le produit par la matrice de cet automorphisme.

Proposition 5.3.3 *Soit V un espace vectoriel. Soient $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{c_1, \ldots, c_n\}$ deux bases de V. Notons P la matrice dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de l'application qui à b_i associe c_i (nouveaux vecteurs en fonction des anciens). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coordonnées de v dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (anciennes) et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coordonnées de v dans la base $\{c_1, \ldots, c_n\}$ (nouvelles).*

$$v = \lambda_1\, b_1 + \cdots + \lambda_n\, b_n = \mu_1\, c_1 + \cdots + \mu_n\, c_n \; .$$

Alors le vecteur $(\mu_j)_{j=1,\ldots,n}$ est le produit de la matrice P^{-1} par le vecteur $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$.

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \; .$$

Démonstration : Notons ϕ l'automorphisme de v qui à b_i associe c_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ecrivons :

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\, c_1 + \cdots + \mu_n\, c_n \\ &= \mu_1\, \phi(b_1) + \cdots + \mu_n\, \phi(b_n) \; . \end{aligned}$$

Par définition, les coordonnées de $\phi(b_j)$ dans la base b_i forment la j-ième colonne de la matrice $P = (p_{i,j})$. Donc :

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\, b_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, \mu_j \right) \end{aligned}$$

Comme les coordonnées dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sont uniques, on en déduit, pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, \mu_j \ ,$$

donc $(\lambda_i) = P(\mu_j)$, d'où le résultat en multipliant à gauche par P^{-1}. □

La matrice P s'appelle la matrice de passage. Dans un changement de base, nous conviendrons toujours de noter P la matrice qui donne les nouveaux vecteurs en fonction des anciens. Voici un exemple. Munissons $V = \mathbb{R}^3$, des deux bases suivantes.

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ et } \{c_1, c_2, c_3\} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \, .$$

Voici la matrice de passage P et son inverse.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si un vecteur v a pour coordonnées x, y, z dans la base canonique $\{b_1, b_2, b_3\}$, alors ses coordonnées dans la base $\{c_1, c_2, c_3\}$ s'obtiennent en effectuant le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$$

Constatez que :

$$(x - y)(1,0,0) + (y - z)(1,1,0) + z(1,1,1) = (x, y, z) \, .$$

On peut appliquer ce qui précède pour trouver la matrice d'un endomorphisme quelconque dans la nouvelle base : c'est la *formule de changement de base.*

Théorème 5.3.4 *Soit V un espace vectoriel, soient $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{c_1, \ldots, c_n\}$ deux bases de V. Soit f un endomorphisme de V, et A sa matrice dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Soit P la matrice de l'application linéaire qui à b_i associe c_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

La matrice de f dans la base $\{c_1, \ldots, c_n\}$ est $P^{-1} A P$.

Démonstration : Notons ϕ l'application qui à b_i associe c_i. La matrice de f dans la base $\{c_1, \ldots, c_n\}$ a pour vecteurs colonnes les images des vecteurs $c_1, \ldots, c_n$. Pour calculer $f(c_i)$, on peut calculer $f(\phi(b_i)) = f \circ \phi(b_i)$. Donc les coordonnées des vecteurs $f(c_i)$ dans la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sont les colonnes de la matrice de $f \circ \phi$, qui est AP. D'après la proposition 5.3.3, pour obtenir les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\{c_1, \ldots, c_n\}$, il faut multiplier à gauche par la matrice P^{-1}, d'où le résultat. □

Reprenons l'exemple en dimension 3 des deux bases

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ et } \{c_1, c_2, c_3\} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} .$$

Considérons l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f \ : \quad (x, y, z) \longmapsto (x - z, 2x - 3y + z, y - 2z) .$$

Sa matrice dans la base canonique (b_1, b_2, b_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base $\{c_1, c_2, c_3\}$ est :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image par f du vecteur $c_2 = (1,1,0)$ est le vecteur $(1,-1,1) = 2c_1 - 2c_2 + c_3$. Les coordonnées $2, -2, 1$ figurent dans la seconde colonne de $P^{-1}AP$.

Définition 5.3.5 *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n$ sont dites semblables si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n$ telle que*

$$B = P^{-1}AP .$$

Le théorème 5.3.4 affirme que deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Il se généralise à des applications linéaires quelconques, comme suit.

Théorème 5.3.6 *Soit V un espace vectoriel, soient $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ deux bases de V. Soit W un autre espace vectoriel, soient $\{c_1, \ldots, c_m\}$ et $\{c'_1, \ldots, c'_m\}$ deux bases de W. Soit f une application linéaire de V dans W, et $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ sa matrice relative aux bases $\{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\{c_1, \ldots, c_m\}$. Soit $P \in \mathcal{M}_n$ la matrice de l'application linéaire qui à b_i associe b'_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $Q \in \mathcal{M}_m$ la matrice de l'application linéaire qui à c_i associe c'_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

La matrice de f relative aux bases $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ et $\{c'_1, \ldots, c'_n\}$ est $Q^{-1}\, A\, P$.

La démonstration est pratiquement la même que celle du théorème 5.3.4, avec des notations plus lourdes. Nous l'omettons.

Définition 5.3.7 *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont dites* équivalentes *si et seulement si il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n$ et $Q \in \mathcal{M}_m$ telles que :*

$$B = Q^{-1} A P \; .$$

Le théorème 5.3.6 affirme que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles peuvent représenter la même application linéaire, à un changement de base près dans les espaces de départ et d'arrivée.

5.4 Rang d'une matrice

Nous avons déjà défini la notion de rang pour une famille de vecteurs et pour une application linéaire (définitions 3.5.8 et 4.4.2).

1. Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous espace vectoriel qu'elle engendre.
2. Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Soient V et W deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de V dans W. Si $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base de V, l'image de f est le sous-espace vectoriel de W engendré par $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$. Donc le rang de f est aussi le rang de la famille $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ et ce, quelle que soit la base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Ce rang ne dépend pas non plus de la base dans laquelle on écrit la famille $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ à l'arrivée : c'est le rang des vecteurs colonnes de la matrice de f, quelle que soient les bases par rapport auxquelles on écrit cette matrice.

Définition 5.4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle* rang *de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.*

Observons que la connaissance du rang fournit un critère d'inversibilité.

Proposition 5.4.2 *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son rang est n.*

Démonstration : D'après la proposition 5.3.2, une matrice est inversible, si et seulement si elle représente une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Or d'après le théorème 4.4.3 une application linéaire est bijective si et seulement si l'image qu'elle donne d'une base est une base, c'est à dire si son rang est n. $\square$

Le rang d'une matrice est celui de l'application linéaire qu'elle représente, qui ne dépend pas des bases. Si deux matrices représentent la même application dans des bases différentes, elles auront nécessairement même rang. Rappelons (définition 5.3.7 et théorème 5.3.6) que deux matrices sont *équivalentes* si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, ou encore si on déduit l'une de l'autre en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible. Deux matrices équivalentes ont même rang. Nous allons démontrer la réciproque.

Théorème 5.4.3 *Deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Démonstration : Nous devons démontrer que deux matrices ayant le même rang sont équivalentes. Soit A une matrice à m lignes, n colonnes, et de rang r. Notons $\{a_1, \ldots, a_n\}$ les n vecteurs colonnes de A, qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Le rang de A est la dimension de l'espace engendré par $\{a_1, \ldots, a_n\}$, qui est inférieure ou égale à n et à m. Nous allons montrer que la matrice A est équivalente à la matrice J_r obtenue en complétant la matrice identité I_r par des zéros, à droite et en dessous.

$$J_r = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccccc} 1 & & \cdots & & r & & \cdots & n \end{array} & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ m \end{array} \end{array}$$

Considérons l'application f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont la matrice relative aux bases canoniques est A. Nous voulons trouver une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée, telles que la matrice de f relative à ces bases soit J_r.

Comme la dimension de l'image de f est r, la dimension du noyau est $n-r$, d'après le théorème du rang 4.4.6. Notons W un supplémentaire du noyau $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^n$. La dimension de W est $n - (n-r) = r$. Choisissons une base $\{b_1, \ldots, b_r\}$ de W et une base $\{b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ de $\operatorname{Ker} f$. Comme W et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires, la famille $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Les images $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ engendrent $\operatorname{Im} f$, qui est de dimension r par hypothèse. Or les vecteurs $f(b_{r+1}), \ldots, f(b_n)$ sont nuls puisque par construction $b_{r+1}, \ldots, b_n$ appartiennent à $\operatorname{Ker} f$. Donc les vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_r)$, qui engendrent un espace de dimension r, sont indépendants. On peut les compléter en une base de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$. Soit $\{c_1, \ldots, c_m\}$ une base de $\mathbb{R}^m$ telle que $f(b_i) = c_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. La matrice de f relative aux bases $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (au départ) et $\{c_1, \ldots, c_m\}$ (à l'arrivée) est la matrice J_r.

Puisque A et J_r sont équivalentes, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $J_r = Q^{-1}AP$, et donc $A = QJ_rP^{-1}$. Soit B une autre matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, également de rang r. Il existe deux autres matrices inversibles R et S telles que $J_r = S^{-1}BR$. En multipliant à gauche par Q et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$A = (QS^{-1})B(RP^{-1}) .$$

Donc deux matrices de même taille et de même rang sont équivalentes. □

On déduit de la démonstration qui précède que A et ${}^tA$ ont le même rang.

Proposition 5.4.4 *Une matrice et sa transposée ont même rang.*

Démonstration : Nous avons démontré qu'une matrice A de rang r est équivalente à la matrice J_r obtenue en complétant I_r par des zéros. Or ${}^tJ_r$ est du même type que J_r : elle contient la matrice identité I_r, complétée par des zéros. Elle est aussi de rang r. Par la proposition 5.1.5, si $A = QJ_rP^{-1}$, la transposée de A s'écrit :

$$ {}^tA = {}^t(P^{-1}){}^tJ_r{}^tQ \; . $$

Donc ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$, qui est de rang r. □

Déterminer le rang d'une matrice consiste à déterminer le rang de ses vecteurs colonnes, ou encore de ses vecteurs lignes, puisque ce sont les colonnes de la transposée. Pour ce faire, on utilise des opérations élémentaires, déjà annoncées dans la proposition 3.5.9 : permuter les vecteurs de la famille, ou ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres. Sur une matrice A, ces opérations se traduisent par une suite d'opérations élémentaires, enchaînant les trois transformations suivantes :

1. echanger deux lignes ou deux colonnes
2. multiplier une ligne ou une colonne par un réel non nul
3. ajouter une ligne à une autre ligne ou une colonne à une autre colonne.

Soient i et j deux entiers entre 1 et n. Nous définissons ci-dessous trois matrices carrées T_1, T_2 et T_3, et nous décrivons l'effet de la multiplication, à gauche ou à droite, par ces matrices.

1. La matrice T_1 est déduite de l'identité en échangeant ses lignes (ou ses colonnes) d'indice i et j.
   - Multiplier à gauche par T_1 revient à échanger les lignes d'indices i et j.
   - Multiplier à droite par T_1 revient à échanger les colonnes d'indices i et j.

   Par exemple :
$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} $$
$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} $$

2. La matrice T_2 est déduite de l'identité en remplaçant le terme diagonal d'ordre i par $\lambda \neq 0$.
   - Multiplier à gauche par T_2 revient à multiplier la i-ième ligne de A par λ.
   - Multiplier à droite par T_2 revient à multiplier la i-ième colonne de A par λ.

   Par exemple :
$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} $$
$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} $$

3. La matrice T_3 est déduite de l'identité en remplaçant le terme d'ordre (i,j) par 1.
   - Multiplier à gauche par T_3 revient à ajouter la j-ième ligne de A à la i-ième.
   - Multiplier à droite par T_3 revient à ajouter la i-ième colonne de A à la j-ième.

   Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices définies ci-dessus sont inversibles. Pour le démontrer, on peut par exemple vérifier que leurs vecteurs colonnes sont indépendants. Il est aussi facile d'expliciter leur inverse qui est du même type :

1. L'inverse de T_1 est T_1 : si on échange deux fois i et j, on revient à la matrice de départ.
2. L'inverse de T_2 est une matrice du même type, obtenue en remplaçant λ par $1/\lambda$: si on divise par λ après avoir multiplié, on revient à la matrice de départ.
3. L'inverse de T_3 est une matrice du même type, obtenue en remplaçant le coefficient d'ordre (i,j) par -1 : si on enlève ce qu'on vient d'ajouter, on revient à la matrice de départ.

Puisque les matrices T_1, T_2, T_3 sont inversibles, multiplier par un certain nombre d'entre elles à gauche et/ou à droite conduit à une matrice équivalente : le rang n'est pas modifié. La méthode du pivot de Gauss est un moyen systématique de transformer une matrice quelconque en une matrice dont le rang est connu.

5.5 Méthode du pivot de Gauss

Nous allons montrer comment, à partir d'une matrice quelconque, on peut se ramener à une matrice *triangulaire.*

Définition 5.5.1 *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est*
- triangulaire supérieure *si $a_{i,j}$ est nul pour tout couple (i,j) tel que $i > j$.*
- triangulaire inférieure *si $a_{i,j}$ est nul pour tout couple (i,j) tel que $i < j$.*

Par définition, la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure. Voici une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, le rang d'une matrice triangulaire est maximal.

Proposition 5.5.2 *Si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre d'éléments sur sa diagonale.*

Le rang des deux matrices données en exemple ci-dessus est égal à 4.

Démonstration : Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée, et la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure : il suffit donc de démontrer la proposition pour une matrice triangulaire supérieure. Commençons par considérer une matrice carrée, triangulaire supérieure, dont tous les éléments diagonaux sont non nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Montrons que son rang est maximal, c'est à dire égal à n. Il suffit pour cela de vérifier que ses n vecteurs colonnes forment une famille libre. Notons $b_1, \ldots, b_n$ ses colonnes et supposons que la combinaison linéaire $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$ est nulle. C'est un vecteur dont la dernière coordonnée est $\lambda_n a_{n,n}$. Puisque $a_{n,n}$ est supposé non nul, il faut donc que λ_n soit nul. Si $\lambda_n = 0$, l'avant-dernière coordonnée est $\lambda_{n-1} a_{n-1,n-1}$, donc pour la même raison λ_{n-1} est nul. Par récurrence, on montre ainsi que tous les λ_i doivent être nuls. Les vecteurs colonnes sont donc indépendants, ce qui entraîne que le rang est n.

Considérons maintenant une matrice triangulaire à m lignes et n colonnes, dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Si $m > n$, alors les $m - n$ dernières lignes de A sont nulles, et le raisonnement qui précède reste valable : le rang est n. Si $m < n$, alors le raisonnement qui précède s'applique aux m premières colonnes et le rang est m. □

La *méthode du pivot de Gauss* consiste à transformer une matrice A quelconque, par une série d'opérations élémentaires, en une matrice de mêmes dimensions, telle que ses r premières lignes forment une matrice triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non nuls, et ses $m - r$ dernières lignes sont nulles.

$$T = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & \cdots & b_{r,r} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_r & \cdots & b_{r,n} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux $p_1, \ldots, p_r$ s'appellent les *pivots*. Ils doivent être non nuls. Si tel est le cas, la matrice formée des r premières lignes est de rang r, d'après la proposition 5.5.2. Ajouter des lignes nulles ne modifie pas le rang, donc le rang de T est r, et toute matrice qui lui est équivalente est aussi de rang r.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Voici la suite des opérations à effectuer.

1. Si A est la matrice nulle, son rang est nul et il n'y a rien à faire. Sinon, choisir un coefficient $a_{i,j}$ non nul, échanger les colonnes 1 et j, puis les lignes 1 et i. On obtient ainsi une matrice $A' = (a'_{i,j})$ telle que $a'_{1,1} \neq 0$. Le coefficient $a'_{1,1} = p_1$ est le premier pivot.
2. Pour i allant de 2 à m, retrancher de la i-ième ligne la première multipliée par $a'_{i,1}/p_1$. Le premier coefficient de la i-ième ligne devient nul.
3. Soit B la matrice formée des coefficients d'ordre (i,j) pour $i,j \geq 2$. Si B est la matrice nulle, on s'arrête. Sinon, on recommence la suite d'opérations à partir de la deuxième ligne et la deuxième colonne.

Considérons la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient d'ordre $(1,1)$ est non nul, il n'y a donc pas de permutations à effectuer. Le premier pivot est $p_1 = 1$. Voici les transformations qui annulent la première colonne au-dessous du pivot.

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le second pivot est -1. Les transformations qui annulent le bas de la seconde colonne sont les suivantes.

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un troisième pivot non nul, il faut échanger les deux dernières colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième pivot est -2. Il ne reste qu'une ligne à transformer.

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice est donc 3.

Si elle ne servait qu'à la détermination du rang, la méthode du pivot de Gauss aurait peu d'intérêt. Nous allons l'appliquer à la résolution de systèmes linéaires, puis au calcul de l'inverse d'une matrice carrée.

5.6 Systèmes linéaires

Une équation linéaire à deux inconnues, du type $a_1x + a_2y = b$, est l'équation d'une droite dans le plan. Plus précisément, l'ensemble des couples (x, y) tels que $a_1x + a_2y = b$ est une droite affine. Chercher les couples (x, y) qui vérifient plusieurs équations du même type, c'est chercher les points communs à plusieurs droites affines. Voici trois exemples de systèmes de trois équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ 2x & -2y & = & -2 \\ -x & +y & = & 1 \end{array}\right.$$

Le premier n'a pas de solution. Le second a une solution unique : la solution des deux premières équations vérifie la troisième. Le troisième a une infinité de solutions : les trois équations sont équivalentes.

La figure 5.1 donne une interprétation géométrique des trois systèmes. Dans chacun des trois graphiques, D_1, D_2, D_3 sont les droites correspondant aux trois équations du système.

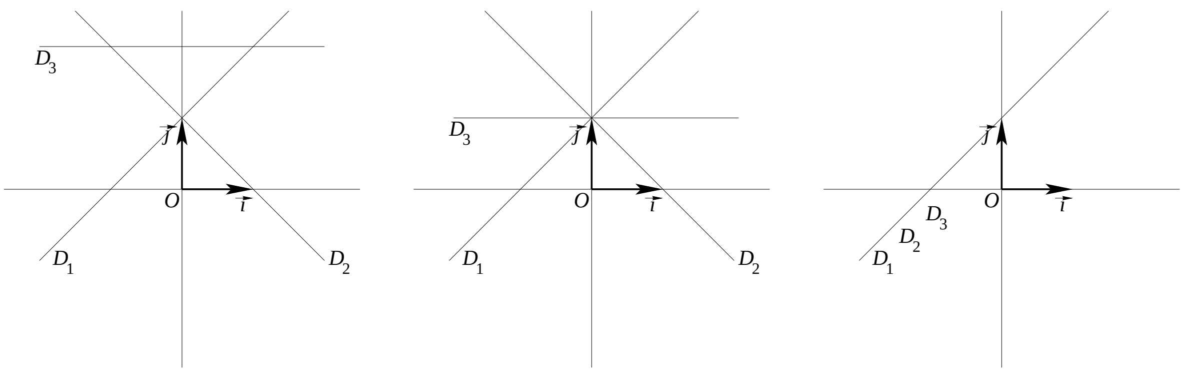


FIG. 5.1 – Interprétations géométriques de 3 systèmes linéaires de 3 équations à 2 inconnues.

Un système linéaire de m équations à n inconnues se présente sous la forme suivante.

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Par exemple,

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ x & +3y & +z & -t & = & 2 \\ -x & +y & +7z & +2t & = & 3 \\ 2x & +y & -8z & +t & = & 4 \end{array}\right.$$

La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice du système, le vecteur $(b_i) \in \mathbb{R}^m$ est son second membre. Les variables réelles $x_1, \ldots, x_n$ sont les inconnues. Résoudre le système (S) consiste à déterminer l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont les m équations.

Le produit de la matrice du système par le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ (disposé en colonne) donne le premier membre. Nous pouvons donc réécrire le système sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ le vecteur des inconnues, et $b = (b_1, \ldots, b_m)$ le second membre. Le système s'écrit sous forme abrégée :

$$Ax = b\ .$$

Considérons l'application linéaire f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, qui a pour matrice A dans la base canonique. Notre problème consiste à trouver un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'image de x par l'application f (le produit de A par x) soit le vecteur $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Si la matrice A est carrée et inversible, le problème est facile en théorie : le système admet une solution unique, qui est l'image de b par l'inverse de f, ou encore le produit matriciel de A^{-1} par b :

$$x = A^{-1}\, b\ .$$

Cette écriture ne fournit aucun moyen de calculer effectivement x : nous verrons plus loin que calculer A^{-1} revient à résoudre n systèmes linéaires, il est donc exclu d'inverser A pour en résoudre un seul. D'autre part, même s'il y a autant d'équations que d'inconnues, la matrice A peut très bien ne pas être inversible. Le système peut admettre une infinité de solutions ou n'en admettre aucune.

La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer l'ensemble des solutions. Elle revient à écrire la matrice A sous la forme :

$$A = Q^{-1}TP\ ,$$

où P et Q sont des matrices inversibles, et T est une matrice triangulaire supérieure.

$$T = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & \cdots & b_{r,r} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_r & \cdots & b_{r,n} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplions le système $Ax = b$ à gauche par Q :

$$QAx = QAP^{-1}Px = Qb$$

En posant $y = Px = (y_1, \ldots, y_n)$ et $c = Qb = (c_1, \ldots, c_m)$, le système $Ax = b$ est équivalent au système $Ty = c$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} p_1\, y_1 + & b_{1,2}\, y_2 + & \cdots & + b_{1,j}\, y_j + & \cdots & + b_{1,n}\, y_n & = & c_1 \\ & p_2\, y_2 + & \cdots & + b_{2,j}\, y_j + & \cdots & + b_{2,n}\, y_n & = & c_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & p_r\, y_r + & \cdots & + b_{r,n}\, y_n & = & c_r \\ & & & & & 0 & = & c_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = & c_m \end{array} \right.$$

Sous cette forme, la discussion devient facile.

1. Si $r < m$, les $m - r$ dernières équations sont les *équations de compatibilité* : si l'un des réels $c_{r+1}, \ldots, c_m$ est non nul, le système n'a pas de solution. On dit aussi qu'il est impossible ou que ses équations sont incompatibles.
2. Si $r = m$, ou bien si $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$, les équations sont compatibles le système a
   (a) une solution unique si $r = n$.
   (b) une infinité de solutions si $r < n$.

Dans le cas où les équations sont compatibles, et le système mis sous forme triangulaire, il est facile de déterminer l'ensemble des solutions. Pour cela, on commence par la r-ième équation, et on calcule y_r en fonction de $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Puis on résout l'équation précédente qui donne y_{r-1}, et on remonte ainsi jusqu'à y_1. L'ensemble des solutions possède une structure particulière, proche de celle d'un sous-espace vectoriel : c'est un sous-espace affine.

Proposition 5.6.1 *L'ensemble des solutions du système $Ax = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Supposons que le système $Ax = b$ ait au moins une solution, notée x_0. Toute autre solution est la somme de x_0 et d'un vecteur v, solution de $Av = 0$.

Démonstration : L'ensemble des solutions de $Ax = 0$ est le noyau de l'application linéaire de matrice A. C'est donc bien un sous espace vectoriel. Notons-le K.

Si x_0 et x sont deux solutions, elles vérifient $Ax_0 = Ax = b$ et donc, $A(x - x_0) = 0$. Le vecteur $x - x_0$ appartient bien à K. □

Le système $Ax = 0$ s'appelle *système homogène associé*. Supposons que l'on connaisse une base $\{s_1, \dots, s_p\}$ de l'ensemble K des solutions du système homogène associé. L'ensemble des solutions du système initial s'écrit :

$$x_0 + K = \{\, x_0 + \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_p s_p\,,\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \,\} \,.$$

Il dépend de p paramètres réels qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. On dit que c'est un sous-espace affine de dimension p. Si $p = 1$ c'est une droite affine, si $p = 2$ c'est un plan affine. La forme $x_0 + K$ montre qu'un sous-espace affine est un espace vectoriel, translaté d'un vecteur fixe.

On peut résumer la forme des solutions d'un système linéaire par la phrase suivante.

La solution générale d'un système linéaire est la somme
d'une solution particulière
et de la solution générale du système homogène associé.

On retrouve ce même principe dans des situations très différentes : équations de récurrence, équations différentielles, ...

Pour résoudre un système donné, on applique la méthode du pivot de Gauss, sans oublier d'effectuer sur le second membre les opérations du premier. Voici un premier exemple.

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ x & +3y & +z & -t & = & 2 \\ -x & +y & +7z & +2t & = & 3 \\ 2x & +y & -8z & +t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ & y & +2z & -2t & = & 1 \\ & 3y & +6z & +3t & = & 4 \\ & -3y & -6z & -t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ & y & +2z & -2t & = & 1 \\ & & & +9t & = & 1 \\ & & & -7t & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{9}L_3 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ & y & +2z & -2t & = & 1 \\ & & & 9t & = & 1 \\ & & & 0 & = & \frac{52}{9} \end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solution.

Voici un deuxième exemple.

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -3z & -4t & = & -1\\ 2x & +2y & +2z & -3t & = & 2\\ 3x & +6y & -2z & +t & = & 8\\ 2x & +y & +5z & +t & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -3z & -4t & = & -1\\ & & 8z & +5t & = & 4\\ & 3y & +7z & +13t & = & 11\\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_4\\ \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{array}\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -3z & -4t & = & -1\\ & -y & +11z & +9t & = & 7\\ & 3y & +7z & +13t & = & 11\\ & & 8z & +5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2\\ \\ \end{array}\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -3z & -4t & = & -1\\ & -y & +11z & +9t & = & 7\\ & & 40z & +40t & = & 32\\ & & 8z & +5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5}L_3 \end{array}\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -3z & -4t & = & -1\\ & -y & +11z & +9t & = & 7\\ & & 40z & +40t & = & 32\\ & & & -3t & = & -\frac{12}{5} \end{array}\right.$$

Il n'y a pas d'équation de compatibilité et le rang est égal au nombre d'inconnues : le système a une solution unique. Pour la calculer, on tire t de la dernière équation, on reporte la valeur obtenue dans la précédente, et on remonte ainsi jusqu'à la première équation. On obtient successivement

$$t = \frac{4}{5}\,,\; z = 0\,,\; y = \frac{1}{5}\,,\; x = 2\,.$$

Voici un troisième exemple.

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & +t & = & 3\\ 5x & +2y & -z & -3t & = & 5\\ -3x & -4y & +3z & +2t & = & 1\\ 6x & +y & & -2t & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{array}\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & +t & = & 3\\ & 7y & -6z & -8t & = & -10\\ & -7y & +6z & +5t & = & 10\\ & 7y & -6z & -8t & = & -10 \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
L_4 \leftarrow L_4 - L_2
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rrrrcr}
x & -y & +z & +t & = & 3 \\
 & +7y & -6z & -8t & = & -10 \\
 & & & -3t & = & 0 \\
 & & & 0 & = & 0
\end{array}
\right.
$$

Le système a une infinité de solutions. De la troisième équation on tire $t = 0$. On peut choisir z arbitrairement, et calculer y en fonction de z dans la deuxième équation, puis x en fonction de z dans la première :

$$
y = -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z \;, \quad x = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}z \;.
$$

Au bilan l'ensemble des solutions s'écrit :

$$
\left\{ (x, y, z, t) = \left(\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, 0, 0\right) + z\left(-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1, 0\right) \;,\; z \in \mathbb{R} \right\} \;.
$$

Il a bien la forme annoncée par la proposition 5.6.1. Le vecteur $(\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, 0, 0)$ est une solution particulière. Si A désigne la matrice du système, l'ensemble des vecteurs v tels que $Av = 0$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1, 0)$.

5.7 Calcul de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Nous savons maintenant résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, donc calculer $x = A^{-1}b$. Nous pouvons en déduire A^{-1}. Voici ce qu'on obtient pour une matrice A à deux lignes et deux colonnes.

$$
\left\{
\begin{array}{rrcl}
x & +2y & = & a \\
3x & +4y & = & b
\end{array}
\right.
\quad
\left\{
\begin{array}{rrcl}
x & +2y & = & a \\
 & -2y & = & b - 3a
\end{array}
\right.
\quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
x & = & \frac{1}{-2}(4a - 2b) \\
y & = & \frac{1}{-2}(-3a + b)
\end{array}
\right.
$$

Les coefficients de A^{-1} sont ceux de a et b dans l'expresion de x et y. Dans le cas général on obtient :

$$
A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}
$$

L'expression de A^{-1} est facile à retrouver. Pour inverser une matrice à deux lignes et deux colonnes, il faut :

1. échanger les deux coefficients diagonaux
2. changer le signe des deux autres
3. diviser tous les coefficients par le "déterminant" $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Pour $n \geq 3$, il n'y a pas de formule générale aussi facile. Nous proposons trois méthodes équivalentes :

1. résoudre le système $Ax = b$ avec un second membre quelconque

2. résoudre le système successivement avec pour second membre chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour calculer une par une les colonnes de A^{-1}
3. transformer simultanément par la méthode du pivot de Gauss, A en I_n et I_n en A^{-1}.

La troisième méthode consiste en fait à appliquer la seconde, en traitant tous les vecteurs de la base canonique en un seul passage. Nous l'illustrons sur un exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

5.8 Exercices

Exercice 5.1 Soient A et B deux matrices. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
2. ☐ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
3. ☒ Si le produit AB est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini.
4. ☒ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini.
5. ☐ Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. ☒ Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
7. ☒ Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tA$ est définie.
8. ☐ Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
9. ☐ Si le produit AB est défini, alors la somme $A\,{}^tA+B\,{}^tB$ est définie.
10. ☒ Si le produit AB est défini, alors la somme ${}^tA\,A+B\,{}^tB$ est définie.

Exercice 5.2 Soit A une matrice carrée. On dit que A est *diagonale* si tous ses coefficients d'ordre (i,j) avec $i \neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si A est inversible, alors $A^tA = {}^tAA$.
2. ☒ Si A est inversible, alors A^tA est inversible.
3. ☐ Si A est inversible, alors $A + {}^tA$ est inversible.
4. ☒ Si A est inversible, alors A est équivalente à la matrice identité.
5. ☒ Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.
6. ☐ Si A est diagonale, alors A est inversible.
7. ☒ Si A est diagonale, alors A est symétrique.
8. ☒ Si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
9. ☐ Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.
10. ☐ Si A est diagonale, alors A est équivalente à la matrice identité.

Exercice 5.3 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si une matrice est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice I_r
2. ☒ Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang r.
3. ☒ Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang r.
4. ☐ Si une matrice A est de rang r, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.
5. ☒ Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geq r$.
6. ☒ La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. ☐ Si deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, alors le rang de A est au plus 2.
8. ☐ Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. ☒ Si une matrice carrée de $\mathcal{M}_r$, extraite de A est inversible, alors A est de rang $\geq r$.
10. ☒ Si A est de rang r, alors aucune matrice carrée de $\mathcal{M}_{r+1}$ extraite de A n'est inversible.
11. ☐ Si toute matrice carrée de $\mathcal{M}_r$, extraite de A est de rang r, alors A est de rang r.

Exercice 5.4 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si un système linéaire a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
2. ☐ Si un système linéaire a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.
3. ☒ Si le rang de la matrice d'un système est égal au nombre d'équations, et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.
4. ☐ Si un système linéaire a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
5. ☒ Si un système linéaire a une solution unique, alors le rang de sa matrice est égal au nombre d'inconnues.
6. ☒ Si un système linéaire n'a pas de solution, alors son second membre est non nul.
7. ☐ Si un système linéaire a un second membre nul et si le rang de sa matrice est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.
8. ☒ Pour $m < n$, si un système linéaire de m équations à n inconnues a une matrice de rang m, alors il a une infinité de solutions.
9. ☒ Si un système de deux équations à deux inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans le plan.
10. ☐ Si un système de deux équations à trois inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans l'espace.

Exercice 5.5 On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.
2. Etant données deux matrices A, B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits $A\,B$, ${}^t\!A\,B$, $A\,{}^t\!B$, ${}^t\!A\,{}^t\!B$ qui sont définis.

Exercice 5.6 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\{ e_1, e_2, e_3 \}$.

1. Montrer que $f \circ f(e_1) = f(e_2) = 0$. Montrer que $f \circ f(e_3) = f(e_3)$.
2. En déduire A^2. Vérifier en effectuant le produit matriciel.
3. Montrer que $A^3 = A^2$ sans effectuer le produit matriciel, puis vérifier en l'effectuant.
4. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$

Exercice 5.7 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\{ e_1, e_2, e_3 \}$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, puis $f \circ f \circ f(e_i)$.
2. En déduire que $A^2 = A^{-1}$. Vérifier en calculant le produit matriciel.

Exercice 5.8 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\{ e_1, e_2, e_3 \}$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, puis $f \circ f \circ f(e_i)$.
2. En déduire A^2 et A^3.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
4. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 5.9 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\{ e_1, e_2, e_3 \}$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, en déduire que $f \circ f = 3f$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer par récurrence que $f^{\circ k} = 3^{k-1} f$.
3. En déduire l'expression de A^k en fonction de k.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
5. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 5.10 On rappelle qu'une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques. On dit qu'une matrice carrée est *antisymétrique* si elle est l'opposée de sa transposée : ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques.

1. Montrer que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
2. Soit A une matrice carrée quelconque. Montrer que $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$.
4. Soit T l'application de $\mathcal{M}_n$ dans lui-même qui à une matrice associe sa transposée. Montrer que T est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n$, parallèlement à $\mathcal{A}_n$.
5. Montrer que le produit de deux matrices symétriques A et B est symétrique si et seulement si $AB = BA$ (on dit que A et B "commutent").
6. Montrer que le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
7. Soit A une matrice inversible. Montrer que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.
8. Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.
9. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Montrer que son inverse est antisymétrique.
10. Montrer qu'aucune matrice de $\mathcal{A}_3$ n'est inversible.

Exercice 5.11 On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. On note $tr(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n$.

1. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n$. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
3. Soit A une matrice carrée non nulle. Montrer que les traces de $A\,{}^tA$ et ${}^tA\,A$ sont strictement positives.

Exercice 5.12 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 en la variable X. On considère les applications linéaires suivantes, de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même.

- $f\ : P(X) \longmapsto f(P)(X) = P'(1) + P(1)X$
- $f\ : P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) + P(X)$
- $f\ : P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) - P(X)$

- $f\ : P(X) \longmapsto f(P)(X) = (X^2+1)P'(X) - 2XP(X)$

On considère les deux bases suivantes de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \{1, X, X^2\} \quad , \quad \{c_1, c_2, c_3\} = \{(X-1)^2, (X^2-1), (X+1)^2\} \, .$$

1. Déterminer la matrice de passage P de la base $\{b_1, b_2, b_3\}$ à la base $\{c_1, c_2, c_3\}$ et calculer son inverse.
2. Calculer l'image par f des 6 vecteurs $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$.
3. Ecrire la matrice de f dans chacune des deux bases, puis vérifier la formule de changement de base en effectuant le produit matriciel.

Exercice 5.13 Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.14 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - 2y + 3z & = & 5 \\ 2x - 4y + z & = & 5 \\ 3x - 6y + 2z & = & 8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} x + 2y - z & = & 5 \\ 2x + y + z & = & 10 \\ x \quad\ + 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} 10x + 9y + z & = & -50 \\ 9x + 10y + 5z & = & 40 \\ x + 5y + 9z & = & 180 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} 10x + 9y + z & = & -50 \\ 9x + 10y + 5z & = & 41 \\ x + 5y + 9z & = & 180 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y - z - t & = & 3 \\ 2x \quad\ - z + 3t & = & 9 \\ 3x + 3y + 2z & = & 4 \\ -x - 2y + z - t & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} x - y + z - t & = & 1 \\ x + y - z - t & = & -1 \\ x + y + z - t & = & 0 \\ x - y - z + t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} 3x + 4y + z + 2t & = & 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t & = & 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t & = & 13 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} x - 2y + z + t & = & -2 \\ 2x - y - z - t & = & -1 \\ x + y + z + t & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} x + 2y - 3z & = & 4 \\ x + 3y - z & = & 11 \\ 2x + 5y - 5z & = & 13 \\ x + 4y + z & = & 18 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \quad y + z & = & 5 \\ x \quad\ + z & = & 4 \\ x + y + 2z & = & 9 \\ -x + y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5.15 Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel λ, l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3y - 2z & = & 5 \\ x - 2y + 3z & = & 2 \\ 4x - y + 4z & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} x - y + \lambda z & = & \lambda \\ x + \lambda y - z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+\lambda y+4z & = & 0 \\ x+y+2\lambda z & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x-2y+\lambda z & = & 1 \\ 3x-\lambda y+2z & = & 1 \\ \lambda x+y-z & = & 0 \\ x-2y+z & = & \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+t & = & 1 \\ x+3y+z-t & = & 1 \\ 2x+y-8z+t & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} \lambda x+y+z+t & = & 1 \\ x+\lambda y+z+t & = & -1 \\ x+y+\lambda z+t & = & 1 \\ x+y+z+\lambda t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 5.16 Calculer l'inverse des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.17 Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A - \lambda I_2$.
2. On note λ_1 et λ_2 les deux réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_2$ est 1. Pour $i = 1, 2$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire
$$(A - \lambda_i I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
On note v_i un vecteur non nul solution de ce système.
3. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\{v_1, v_2\}$. Calculer P^{-1}. Montrer que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
5. Montrer que la matrice $(A - \lambda_1 I_2)(A - \lambda_2 I_2)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et I_2.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que
$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}.$$
7. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.

Exercice 5.18 Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les trois réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_3$ est 2. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$(A - \lambda_i I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   On note v_i un vecteur non nul solution de ce système.
3. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Calculer P^{-1}. Montrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

5. Montrer que la matrice $(A - \lambda_1 I_3)(A - \lambda_2 I_3)(A - \lambda_3 I_3)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix} .$$

7. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.

5.9 Compléments

Diagonalisation

Voici deux systèmes linéaires d'équations.

$$(a) \left\{ \begin{array}{rrrcr} & y & +z & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ \frac{3}{2}x & -\frac{3}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \end{array} \right. \qquad (d) \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & & = & 0 \\ & -y & & = & -1 \\ & & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations de récurrence.

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcrrr} u_{k+1} & = & & v_k & +w_k \\ v_{k+1} & = & -\frac{1}{2}u_k & +\frac{3}{2}v_k & -\frac{1}{2}w_k \\ w_{k+1} & = & \frac{3}{2}u_k & -\frac{3}{2}v_k & +\frac{1}{2}w_k \end{array} \right. \qquad (d) \left\{ \begin{array}{rcrrr} u_{k+1} & = & u_k & & \\ v_{k+1} & = & & -v_k & \\ w_{k+1} & = & & & 2w_k \end{array} \right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations différentielles.

$$(a)\left\{\begin{array}{rclccc} x'(t) & = & & y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rclccc} x'(t) & = & x(t) & & \\ y'(t) & = & & -y(t) & \\ z'(t) & = & & & 2z(t) \end{array}\right.$$

Les trois problèmes, de natures très différentes, ont en commun leur écriture matricielle, avec les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tous les problèmes linéaires sont plus faciles à résoudre quand la matrice est diagonale !

Il se trouve que les deux matrices A et D sont *semblables*, c'est à dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, ou encore, il existe une *matrice de passage* P telle que $P^{-1}AP = D$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Définition 5.9.1 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est* diagonalisable *si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire s'il existe une matrice de passage P telle que*

$$P^{-1}AP = D\ .$$

Les techniques permettant de savoir si une matrice donnée est diagonalisable et de calculer la matrice de passage P si elle l'est, dépassent le cadre de ce cours. On commence par calculer les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible : on les appelle les *valeurs propres*, et leur ensemble est le *spectre* de la matrice. Pour chaque valeur propre λ, on détermine ensuite le *sous-espace propre* associé à λ : c'est l'ensemble des vecteurs v tels que $(A - \lambda I_n)v = 0$. La matrice est diagonalisable lorsque $\mathbb{R}^n$ est la somme directe des sous-espaces propres. On peut alors trouver une base constituée de vecteurs appartenant aux sous-espaces propres, et la matrice de passage P est la matrice de ces vecteurs dans la base canonique. Quelques exemples élémentaires sont donnés dans les exercices 5.17 et 5.18.

Quand une matrice A est diagonalisable, il est facile de résoudre le système linéaire $Ax = b$: il est équivalent au système $Dy = c$, avec $y = P^{-1}x$ et $c = P^{-1}b$. Or dans un système dont la matrice est diagonale, toutes les équations n'ont qu'une inconnue et se résolvent séparément.

Prenons maintenant l'exemple d'un système d'équations de récurrence linéaire, du type $U_{k+1} = A\,U_k$, où U_k désigne un vecteur dont on souhaite connaître l'expression en fonction de k. Du point de vue théorique, il n'y a pas de problème :

$$U_k = A^k\,U_0 \ .$$

Mais cela n'avance à rien si on ne sait pas calculer formellement l'expression de A^k en fonction de k. C'est possible si A est diagonalisable. En effet, si $A = PDP^{-1}$:

$$A^k = PDP^{-1}\,PDP^{-1}\ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1} \ .$$

Ecrire D^k est immédiat. On en déduit l'expression générale de A^k, donc de U_k. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} & \frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2} - \frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2} + \frac{2^k}{2} \end{pmatrix}$$

Passons maintenant aux systèmes d'équations différentielles, du type

$$Y'(t) = A\,Y(t) \ , \tag{5.9.1}$$

où Y est une fonction (inconnue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, et $A \in \mathcal{M}_n$ est une matrice carrée de réels.

Dans le cas particulier $n = 1$, la matrice est réduite à un scalaire a, et la solution de $y'(t) = ay(t)$, partant de y_0 à l'instant 0 est :

$$y(t) = e^{at}y_0 \ .$$

On peut définir e^{at} comme la somme de la série $\sum a^k t^k/k!$. Sa dérivée est :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}a^k = a\sum_{h\geq 0}\frac{t^h}{h!}a^h \ .$$

Cette écriture formelle reste valable en dimension n. Pour trouver une solution à l'équation (5.9.1), il suffit d'écrire de manière analogue $Y(t) = (\sum \frac{t^k}{k!}\,A^k)Y(0)$. Encore faut-il s'assurer que cette série, à coefficients matriciels, converge.

Proposition 5.9.2 *Soit $M \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée. La série suivante converge dans $\mathcal{M}_n$:*

$$I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \cdots + \frac{1}{k!}M^k + \cdots \ .$$

La somme de cette série est appelée exponentielle *de la matrice M et notée* $\exp(M)$.

L'exponentielle de matrice a des propriétés comparables à l'exponentielle ordinaire. En particulier :

Proposition 5.9.3 *Si deux matrices M_1 et M_2 commutent, alors :*

$$\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2) \; .$$

La propriété qui nous intéresse est la suivante :

Proposition 5.9.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors :*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) \; .$$

Démonstration : Nous nous contenterons d'une vérification formelle.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp(tA) &= \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k \\ &= A\Big(\sum_{h\geq 0}\frac{t^h}{h!}A^h\Big) \\ &= A\exp(tA) \; . \end{aligned}$$

□

Il s'ensuit immédiatement que $Y(t) = \exp(tA)y_0$ est solution de (5.9.1), pour $Y(0) = y_0$.

Si une matrice est diagonalisable, son exponentielle est particulièrement facile à calculer.

Théorème 5.9.5 *Supposons que la matrice A soit diagonalisable. Notons*

- *$\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de A,*
- *D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_d$,*
- *P une matrice de passage, telle que $A = PDP^{-1}$.*

Alors $\exp(tD)$ *est la matrice diagonale dont les coefficients sont $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_d t}$, et :*

$$\exp(tA) = P\,\exp(tD)\,P^{-1} \; .$$

Comme conséquence immédiate, si $Y(t)$ est solution de (5.9.1), alors les coordonnées de Y sont des combinaisons linéaires des fonctions $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_d t}$. Voici la résolution du système donné en exemple.

$$\left\{ \begin{array}{rclccc} x'(t) &=& & y(t) & +z(t) \\ y'(t) &=& -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) &=& \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array} \right.$$

Ce système s'écrit sous la forme $Y'(t) = A\,Y(t)$, avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

En utilisant la diagonalisation de A, on peut calculer $\exp(tA)$.

$$\exp(tA) \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{\exp(tD)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Pour calculer par exemple la solution vérifiant $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$, il suffit de multiplier à droite par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On obtient :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} \\ y(t) &= \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \\ z(t) &= \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{cases}$$

Présentée ainsi la diagonalisation semble un outil magique. En réalité, les algorithmes qui calculent numériquement les valeurs propres et les vecteurs propres sont relativement lents et il est impossible de diagonaliser une matrice si sa dimension dépasse quelques dizaines.

Réduction de dimension

C'est un des vieux rêves de l'intelligence artificielle : un ordinateur peut-il apprendre une langue, et produire des textes ayant du sens, si on lui donne à lire un ensemble de documents écrits dans cette langue ? Plus prosaïquement, comment les moteurs de recherche spécialisés font-ils à partir de la masse énorme de documents disponibles, pour reconnaître des ensembles d'expressions qui se retrouvent souvent associées ?

Donnons-nous un vocabulaire formé de mots, numérotés de 1 à n, et un ensemble de textes, numérotés de 1 à m. Les entiers n et m peuvent être très grands. Il y a plusieurs milliers de mots dans une langue, des milliards de pages html sur internet. On appelle *matrice d'incidence* la matrice $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,j}$ vaut 1 si le mot j se rencontre dans le document i, et 0 sinon. Considérons la matrice $S = (s_{j,k}) = {}^tA\,A$. C'est une matrice carrée symétrique, qui a autant de lignes et de colonnes qu'il y a de mots dans le vocabulaire. Quelle information donne-t-elle sur les mots ? Si j est un mot, le coefficient diagonal $s_{j,j}$ est

$$s_{j,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \;,$$

car les $a_{i,j}$ valent 0 ou 1. Le coefficient diagonal $s_{j,j}$ est égal au nombre de textes parmi les n où le mot j apparaît. Il permet de savoir si c'est un mot rare, ou d'usage courant. Si j et k sont deux mots distincts, le coefficient $s_{j,k}$ est :

$$s_{j,k} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} a_{i,k} \ .$$

Le produit $a_{i,j}a_{i,k}$ vaut 1 si i et j apparaissent tous les deux dans le texte i, et 0 dans les autres cas. Donc $s_{j,k}$ est égal au nombre de textes parmi les m où j et k apparaissent simultanément. Ces occurrences communes donnent une idée de la proximité sémantique de j et k. Par exemple, si on se limite aux 3 mots "penalty, endomorphisme, corner", il y a fort à parier qu'on trouvera plus souvent "penalty" et "corner" dans les mêmes textes, que "penalty" et "endomorphisme" (OK, il y aura probablement plus de textes contenant "penalty" que "endomorphisme"). Si deux mots ne se rencontrent jamais dans le même texte, le coefficient $s_{j,k}$ correspondant sera nul. A l'inverse si deux mots apparaissent systématiquement ensemble, le coefficient $s_{j,k}$ sera maximal, et égal aux deux coefficients diagonaux $s_{j,j}$ et $s_{k,k}$.

Ici intervient une interprétation géométrique des mots. La matrice d'incidence A résume les occurrences de chaque mot par une colonne de 0 et de 1, qui est un vecteur dans l'espace $\mathbb{R}^m$. La distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$ peut se mesurer, comme dans le plan, par la racine carrée de la somme des carrés de différences entre coordonnées : c'est la distance euclidienne usuelle. Si on considère deux mots j et k, leur distance dans l'espace $\mathbb{R}^m$, notée $d_{j,k}$ est donnée par :

$$d_{j,k}^2 = \sum_{i=1}^{m} (a_{i,j} - a_{i,k})^2 = s_{j,j} + s_{k,k} - 2s_{j,k}.$$

La distance entre deux mots qui apparaissent toujours ensemble dans les mêmes textes est nulle, alors que la distance entre deux mots qui n'apparaissent jamais dans les mêmes textes sera probablement très grande : ceci correspond bien à l'idée que l'on se fait d'une distance. Mais on souhaite aller au-delà des couples de mots, et identifier des ensembles de mots qui sont proches sémantiquement.

S'il y a 1000 mots et autant de textes, nous disposons d'un ensemble de 1000 points dans un espace à 1000 dimensions, que l'on appelle un *nuage de points*. Il est bien sûr impossible de les "voir". Mais on peut toujours projeter le nuage sur un plan pour le voir en dimension 2. Quel est le meilleur plan de projection ? La réponse réside dans la diagonalisation de la matrice $(d_{i,j}^2)$. On démontre que ses valeurs propres sont positives, et qu'on peut trouver une base orthonormée de vecteurs propres. La plus grande des valeurs propres λ_1 est associée à un vecteur propre v_1 qui donne la direction de l'espace le long de laquelle le nuage de points est le plus dispersé, et λ_1 mesure cette dispersion. Si on projette orthogonalement dans la direction de v_1, on se retrouve dans un espace ayant une dimension de moins. La plus grande dispersion est mesurée par la seconde plus grande valeur propre λ_2, le long du vecteur propre v_2 qui lui est associé. La projection sur le plan engendré par v_1 et v_2 offre la meilleure vue possible de l'ensemble des mots. La figure 5.2 montre un exemple de projection pour des mots rencontrés dans des titres de livres. Même s'il y a peu de mots et peu de titres, cela suffit déjà pour distinguer les mots et titres plutôt informatiques des mots et titres plutôt mathématiques.

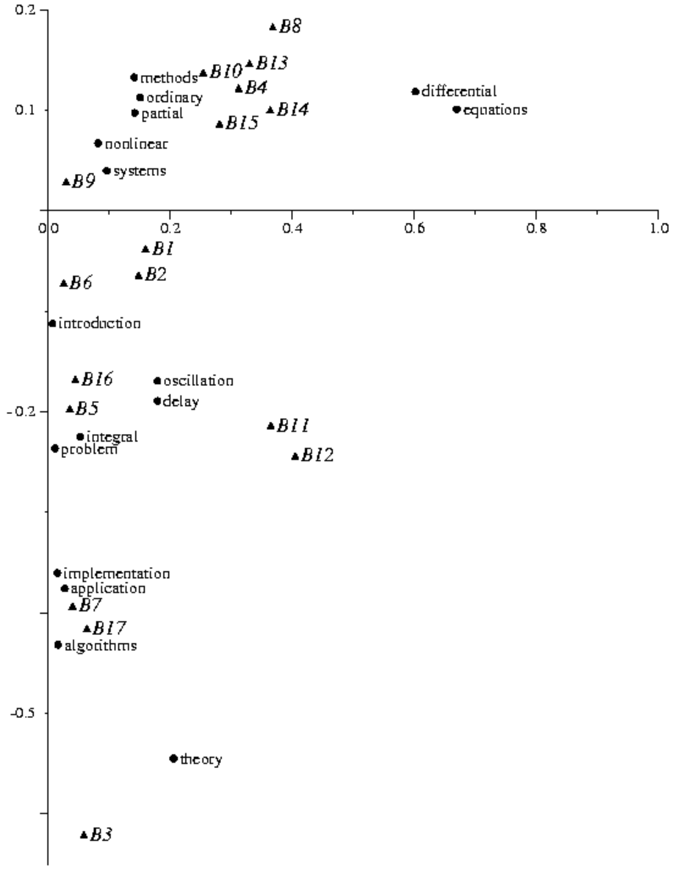


FIG. 5.2 – Décomposition en Valeurs Singulières pour un ensemble de mots apparaissant dans des titres de livres : projection sur le plan associé au deux plus grandes valeurs propres. Les triangles marqués B_i sont les projections des directions de l'espace initial (les livres). Les mots sont repérés par des ronds.

En pratique, on choisit une dimension d, en général inférieure à 10. Il existe des algorithmes capables de calculer en un temps raisonnable les d plus grandes valeurs propres, les vecteurs propres qui leur sont associés, et les projections des mots sur l'espace de dimension d qu'ils engendrent. D'autres algorithmes sont ensuite capables d'identifier des classes de mots à partir de leur projection en dimension d.

Cette méthode de réduction de la dimension par projection sur des espaces de dimension faible est une des techniques de base de la statistique descriptive : on l'appelle Analyse en Composantes Principales (ACP). Curieusement, elle porte un nom différent en informatique : Décomposition en Valeurs Singulières (DVS). En physique, on procède de la même façon pour étudier les mouvements d'un solide autour de son centre de gravité : les valeurs propres s'appellent des moments d'inertie, et les droites engendrées par les vecteurs propres sont les axes d'inertie.

Les algorithmes évoqués ci-dessus seraient capables d'associer "ACP" et "statistique", "DVS" et "informatique", "axe d'inertie" et "physique" ; mais l'algorithme capable de reconnaître que les trois techniques sont mathématiquement identiques n'a pas encore été inventé !

Matrice d'incidence

La figure 5.3 représente un graphe : cinq sommets numérotés de 1 à 5 et des arêtes entre eux.

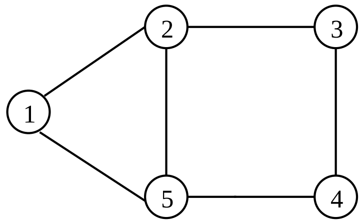


FIG. 5.3 – Graphe à 5 sommets et 6 arêtes.

Imaginez que sur chaque sommet se trouve une ampoule, et un interrupteur qui commande non seulement l'ampoule du même sommet, mais aussi celles des sommets voisins. Par exemple appuyer sur l'interrupteur du sommet 2 bascule l'état des ampoules 1, 2, 3 et 5, de "éteinte" à "allumée", ou bien le contraire. Si toutes les ampoules sont éteintes, quel ensemble d'interrupteurs faut-il actionner pour les allumer toutes ? De manière assez surprenante, ce problème a toujours au moins une solution quel que soit le graphe, et on peut le résoudre à l'aide de la méthode du pivot de Gauss[1].

La matrice d'incidence d'un graphe est la matrice carrée dont les lignes et les colonnes sont indicées par les sommets, dont le terme d'ordre (i, j) vaut 1 s'il y a une arête entre les sommets i et j, et 0 sinon. Nous conviendrons ici de mettre des 1 sur la diagonale. Voici la matrice d'incidence du graphe de la figure 5.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Que représente la matrice d'incidence par rapport au problème des interrupteurs ? Sa j-ième colonne décrit l'effet sur les ampoules de l'interrupteur j. Si l'interrupteur du sommet 2 est actionné, les ampoules basculées sont celles pour lesquelles les coordonnées de la deuxième colonne valent 1. Si deux interrupteurs sont actionnés, disons j

[1] Je dois cet exemple à Michel Burlet.

et j', alors l'effet sur les ampoules sera la somme modulo 2 des colonnes j et j'. Pour obtenir l'effet final sur les ampoules qu'aura le fait d'actionner un ensemble d'interrupteurs, il faut d'abord traduire cet ensemble en un vecteur binaire x. Par exemple $x = (1,1,0,0,1)$ signifie que l'on actionne les interrupteurs 1, 2 et 5. Multiplier à droite la matrice A par le vecteur x revient à ajouter les colonnes correspondant aux coordonnées non nulles de x, donc aux interrupteurs qui ont été actionnés. Si toutes les opérations sont faites modulo 2 (dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), le vecteur Ax décrit l'effet sur les ampoules : une coordonnée nulle indique une ampoule éteinte, une coordonnée égale à 1, une ampoule allumée. Vous pouvez vérifier dans l'exemple, en multipliant A par $x = (1,1,0,0,1)$ (en colonne et modulo 2), que le résultat est $(1,1,1,1,1)$: toutes les ampoules sont allumées. Actionner les interrupteurs 1, 2 et 5 allume bien toutes les ampoules pour le graphe de la figure 5.

Si le graphe est trop compliqué pour deviner la solution, comment la calculer ? Par la méthode du pivot de Gauss bien sûr ! Ce qui a été exposé pour les matrices à coefficients réels, vaut pour tous les corps de nombres, et en particulier pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si on applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice ci-dessus, on vérifie qu'elle est de rang 5, donc inversible. La procédure décrite dans la section 5.7 permet de calculer son inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc quelle que soit la configuration d'ampoules allumées et éteintes que l'on souhaite atteindre, traduite en un vecteur binaire b, le système $Ax = b$ a une solution unique : il y a un ensemble d'interrupteurs et un seul que l'on doit actionner pour atteindre la configuration souhaitée.

Ce n'est pas toujours le cas. Le graphe complet à n sommets est tel que deux sommets quelconques sont toujours reliés par une arête. Sur un graphe complet, basculer un interrupteur quelconque allume ou éteint toutes les ampoules à la fois. Si on commence au début par toutes les ampoules éteintes, la seule autre configuration que l'on puisse atteindre est celle où tout est allumé. Dans ce cas, tous les coefficients de la matrice d'incidence A sont égaux à 1, son rang est 1, et le système $Ax = b$ n'a de solution que si toutes les coordonnées de b sont égales.

Le miracle est que si le second membre b a tous ses coefficients égaux à 1, le système $Ax = b$ a toujours au moins une solution : quel que soit le graphe, il y a toujours un ensemble d'interrupteurs à actionner pour allumer toutes les ampoules.

Théorème 5.9.6 *Soit A la matrice d'incidence d'un graphe quelconque à n sommets, et $\mathbb{I}$ le vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dont toutes les coordonnées valent 1. Le système $Ax = \mathbb{I}$ a au moins une solution.*

Démonstration : Appliquons la méthode du pivot de Gauss au système $Ax = \mathbb{I}$. On le transforme en prenant des combinaisons linéaires des lignes, jusqu'à le mettre sous forme triangulaire. Si le rang de la matrice A est n, il n'y aura pas de condition de compatibilité : le système se résout, et on trouve une condition unique. Mais si le rang est inférieur à n, la méthode du pivot de Gauss fait apparaître une combinaison linéaire des lignes de A qui est nulle. Or nous sommes dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$: les coefficients d'une combinaison linéaire ne peuvent être que 0 ou 1. Donc une combinaison linéaire est forcément une somme. Que se passe-t-il quand une somme de lignes, disons $L_{i_1}+\cdots+L_{i_k}$ est nulle ? Cela implique en particulier que chacun des sommets $i_1,\ldots,i_k$ a un nombre impair de voisins parmi les autres sommets du même ensemble. Si on restreint le graphe à ces sommets, on obtient un sous-graphe, tel que le nombre de voisins de chaque sommet est impair. Or dans un graphe ayant un nombre impair de sommets, il y a toujours un sommet dont le nombre de voisins est pair (ce n'est pas facile à démontrer : réflechissez !). Si tous les sommets parmi $i_1,\ldots,i_k$ ont un nombre impair de voisins, alors k est pair. Donc si $L_{i_1}+\cdots+L_{i_k}=0$, alors nécessairement k est un entier pair. Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, on doit effectuer les mêmes transformations à la fois sur le premier membre et sur le second. Or le second ne contient que des 1. La somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'un nombre pair de 1 donne 0. Ceci entraîne que si la méthode du pivot de Gauss mène à une équation dont le premier membre est nul, alors le second membre de cette même équation est nul également, et les équations sont compatibles. Donc le système a une solution. $\square$

La proposition 5.6.1 entraîne que l'ensemble des solutions est en bijection avec un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Le nombre de solutions est donc nécessairement une puissance de 2. Pour le graphe de la figure 5.4, vous pouvez calculer les solutions par la méthode du pivot de Gauss, et vérifier qu'il y en a 2.

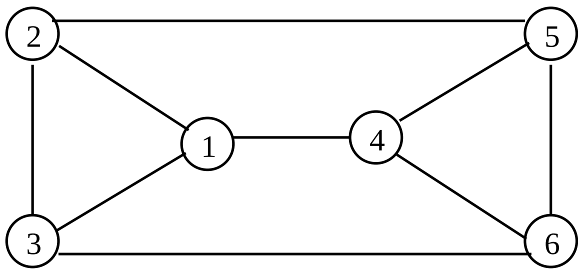


FIG. 5.4 – Graphe à 6 sommets et 9 arêtes.

Les grands systèmes

Même si aucun des systèmes résolus dans le cours ne dépassait 4 inconnues, on demande couramment aux ordinateurs de résoudre des systèmes à plusieurs millions d'inconnues. D'où viennent-ils ?

La physique fournit toute une famille d'équation différentielles ou d'équations aux dérivées partielles qui décrivent avec une précision étonnante les phénomènes auxquels elles s'appliquent : équation de Maxwell, de Schrödinger, d'Euler, de Navier-Stokes… A titre d'exemple, voici la plus célèbre des équations aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur. Considérons un corps homogène dans l'espace, et notons $f(t,x,y,z)$ la température au temps t du point de coordonnées (x, y, z). L'application f est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) .$$

où λ est la conductivité thermique, ρ la masse volumique et C_p la chaleur spécifique. L'application suivante porte le nom de "noyau de la chaleur" car elle est solution de l'équation de la chaleur, ce qui se vérifie facilement.

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2 + y^2 + z^2)\right) ,$$

où $c = \frac{\rho C_p}{4\lambda}$.

Il est extrêmement rare qu'une équation différentielle admette une solution explicite comme celle-ci, et quand c'est le cas, la solution trouvée correspond à des conditions qui ne sont pas physiquement réalistes. Il n'y a en général pas d'autre recours que de résoudre l'équation de manière approchée par un *algorithme de discrétisation*. L'idée consiste à approcher les dérivées de la fonction inconnue par ses accroissements sur un pas de discrétisation, choisi suffisamment petit.

Pour donner une idée plus précise, nous allons considérer l'équation de la chaleur en dimension 1. Considérons une tige homogène, et notons $f(t, x)$ sa température à l'instant t et à l'abscisse x.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

Choisissons un pas de temps δt et un pas d'espace δx (petits). A l'instant t, nous approchons la dérivée partielle en temps par le taux d'accroissement sur un intervalle de longueur δt :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq \frac{1}{\delta t}\Big(f(t + \delta t, x) - f(t, x)\Big) .$$

De même la dérivée partielle seconde en espace est approchée par une différence d'accroissements, soit :

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{(\delta x)^2}\Big((f(t, x + \delta x) - 2f(t, x) + f(t, x - \delta x)\Big) .$$

On ne conserve que les instants et les abscisses qui sont des multiples entiers de δt et δx. Posons donc, pour tout couple d'entiers i, j,

$$f_{i,j} = f(i\delta t, j\delta x) .$$

L'équation de la chaleur est remplacée par un système linéaire d'équations reliant entre elles les inconnues $f_{i,j}$:

$$\frac{1}{\delta t}\Big(f_{i+1,j} - f_{i,j}\Big) = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{1}{(\delta x)^2}\Big(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}\Big) .$$

Pour arriver à un système lisible, simplifions encore. Prenons une barre en équilibre thermique, dont la température est fixée à a à l'abscisse 0 et b à l'abscisse $(n+1)\delta x$, Calculons sa temperature à l'abscisse $i\delta x$, pour $i = 1, \ldots, n$. Puisque l'équilibre thermique est atteint, nous cherchons une fonction constante en temps, c'est à dire telle que $\partial f/\partial t = 0$. Notons f_i la valeur approchée de la température au point $i\delta x$ de la barre. Le système dont les f_i sont solution est le suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2f_1 - f_2 & = & a \\ & \vdots & \\ -f_{i-1} + 2f_i - f_{i+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ -f_{n-1} + 2f_n \qquad & = & b \end{array}\right.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce système admet une solution unique, définie pour $i = 1, \ldots, n$ par

$$f_i = a + (b-a)\frac{i}{n+1} .$$

Ceci correspond bien au fait qu'une fonction telle que $f''(x) = 0$ est un polynôme de degré 1 : $f(x) = \alpha x + \beta$.

La matrice A du système est symétrique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Elle a des diagonales constantes (on dit que c'est une matrice *de Toeplitz*), et elle a surtout beaucoup de termes nuls (on dit qu'elle est *creuse*). C'est le cas en général pour les matrices des systèmes obtenus après discrétisation d'un problème différentiel. Tout ceci facilite le stockage en mémoire, et accélère la résolution, grâce à la mise au point d'algorithmes adaptés. Il reste ensuite à démontrer que la solution du système linéaire approche bien la solution du problème différentiel, en un sens qui reste à préciser. Ceci fait l'objet de théorèmes de convergence que nous n'aborderons pas.

L'équilibre thermique d'une barre n'a évidemment aucun intérêt pratique. Pour un bâtiment en construction, prévoir la puissance de la chaufferie et calculer la consommation d'énergie sont des problèmes nettement plus concrets. Or les volumes à chauffer ont 3 dimensions. Pour peu qu'on souhaite 100 pas de discrétisation dans chacune des trois dimensions, on arrive à un système certes linéaire, mais qui a déjà un million d'inconnues. Des moyens de découper l'espace plus astucieusement que par des petits cubes ont été inventés. On les appelle des *maillages*. Vous en voyez parfois dans les "making of" des films d'animation, où ils sont utilisés pour rendre les mouvements plus réalistes. Vous les voyez aussi sur des présentations de voitures ou d'avions : ils sont utilisés pour calculer par l'équation de Navier-Stokes l'écoulement de l'air autour de la carrosserie, et donc prédire la portance de l'avion ou la consommation de la voiture.

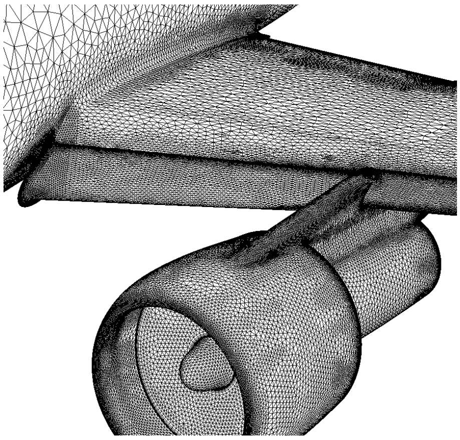


FIG. 5.5 – Exemple de maillage.

Décomposition LU

La méthode du pivot de Gauss, point central de ce chapitre, n'est pas exactement programmée comme elle a été présentée. Il y a plusieurs raisons à cela, dont la principale est le problème de la précision numérique.

Voici un système de deux équations à deux inconnues, dépendant du paramètre $\varepsilon \neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon x + y &=& 1 \\ x + y &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon x + y &=& 1 \\ (1-\frac{1}{\varepsilon})y &=& 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{\varepsilon}(1-(2-\frac{1}{\varepsilon})/(1-\frac{1}{\varepsilon})) \\ y &=& (2-\frac{1}{\varepsilon})/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \end{array}\right.$$

Voici le même système, après avoir échangé les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ \varepsilon x + y &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ (1-\varepsilon)y &=& 1-2\varepsilon \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-(1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \\ y &=& (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \end{array}\right.$$

Les deux solutions sont évidemment les mêmes. Pourtant, si ε est très petit en valeur absolue, les deux calculs ne sont pas du tout équivalents numériquement. Diviser par un petit nombre, ou multiplier par un grand nombre augmente les erreurs d'approximation. Pour éviter que celles-ci ne se propagent au cours d'un long calcul et faussent complètement le résultat, on fait toujours en sorte de multiplier ou ajouter entre eux à chaque étape des nombres du même ordre de grandeur.

Dans la méthode du pivot de Gauss, on choisit l'ordre dans lequel on traite les lignes, de sorte que les pivots soient à chaque pas les plus grands possibles en valeur absolue. Ceci conduit à permuter les lignes de la matrice, donc à la multiplier à gauche par une matrice de permutation P. Une matrice de permutation est la matrice de passage de la base $\{b_1, \dots, b_n\}$ à la base $\{b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}\}$, où σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. On peut la voir comme un produit de matrices du type T_1 (cf. section 5.4). Ses coefficients d'ordre $(\sigma(i), i)$ valent 1, les autres 0. On applique la méthode du pivot de Gauss non pas à la matrice A, mais à la matrice PA. Une fois choisi l'ordre dans lequel on traite les lignes, la i-ième étape de la méthode consiste à ajouter aux lignes d'indice $i+1, i+2, \dots, n$ la i-ième ligne multipliée par un certain coefficient. Cela revient à multiplier à gauche par une matrice du type suivant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_{m,i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces matrices, pour i allant de 1 à m est la matrice ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ \lambda_{m,1} & \cdots & \lambda_{m,i} & \cdots & \lambda_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est encore une matrice du même type : trianglaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On la note L (pour "lower triangular"). Le produit $L^{-1}PA$ est une matrice triangulaire supérieure, que l'on note U pour "upper triangular".

$$L^{-1}PA = U \Longleftrightarrow PA = LU \; .$$

La décomposition LU de la matrice A est la donnée des trois matrices P, L, U telles que $PA = LU$. Si on doit résoudre le système $Ax = b$, on le transformera en deux systèmes triangulaires, un de matrice L, l'autre de matrice U.

$$Ax = b \Longleftrightarrow PAx = Pb \Longleftrightarrow LUx = Pb \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ly = Pb \\ \\ Ux = y \end{array} \right.$$

Pour les problèmes différentiels évoqués précédemment, il est fréquent que l'on ait à résoudre successivement de nombreux systèmes linaires ayant tous la même matrice A, mais des seconds membres différents. Calculer au préalable la décomposition LU de A réduit de beaucoup le temps de calcul. Pour certaines matrices qui reviennent souvent dans les calculs, la décomposition LU figure dans les bibliothèques de codes, et elle est chargée en mémoire avant le début du calcul.