Math. Ann. 205, 13–54 (1973)

Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude

Christian Houzel

Introduction

Dans ce travail on donne une nouvelle version du théorème de finitude de Grauert [6] pour des espaces analytiques relatifs. Le cadre des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes où l'on se place ici est plus large que celui des espaces annelés en algèbres de Fréchet utilisés dans [4] et [12]; il permet de développer une théorie plus souple et d'inclure, par exemple, les espaces analytiques réels et les variétés analytiques banachiques comme espaces de base (mais malheureusement pas les espaces analytiques banachiques). En outre l'argument essentiel de perturbation par une application nucléaire (§ 1, n° 5 et 6) apparaît particulièrement clairement si l'on utilise les bornologies et la possibilité de travailler sur les faisceaux bornologiques eux-mêmes, et non sur des espaces de sections, évite des restrictions inutiles. Pour appliquer cet argument à la démonstration du théorème de Grauert, on utilise la méthode mise au point par Forster et Knorr dans [3] et [4] d'après une idée de Malgrange (cf. § 4, n° 2); dans le cas où la base S est un espace analytique ordinaire, on peut d'ailleurs obtenir le résultat plus simplement en utilisant le théorème 1 directement.

L'idée d'utiliser les faisceaux vectoriels bornologiques pour développer une théorie des espaces analytiques relatifs remonte à 1965, mais à l'époque je ne disposais pas des techniques d'algèbre homologique nécessaires pour mettre en œuvre cette idée et j'avais reçu peu d'encouragements. Après avoir entendu l'exposé de Kiehl au congrès de Nice en 1970, j'ai repris cette idée et j'ai organisé un séminaire sur le théorème de Grauert au Département de Mathématiques de Nice; c'est au cours de ce séminaire que ce travail a pris forme, et je tiens à remercier tous ceux qui y ont participé et particulièrement L. Boutet de Monvel. Enfin ma reconnaissance la plus profonde va à B. Malgrange pour l'intérêt continuel qu'il m'a porté et les encouragements toujours renouvelés qu'il m'a prodigués.

Paragraphe 1. Algèbres bornologiques complètes

Dans ce paragraphe le corps de base $\mathbb{K}$ est un corps valué complet non discret supposé maximalement complet dans le cas ultramétrique.

1. Rappels sur les espaces vectoriels bornologiques (cf. [9])

Définition 1. Une bornologie vectorielle de type convexe sur un espace vectoriel E est un ensemble $\mathfrak{B}$ non vide de parties de E vérifiant les axiomes suivants:

a) *si $B \in \mathfrak{B}$ et $B' \subset B$ alors $B' \in \mathfrak{B}$;*
b) *si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ alors $B_1 \cup B_2 \in \mathfrak{B}$;*
c) *si $B \in \mathfrak{B}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda B \in \mathfrak{B}$;*
d) *si $B \in \mathfrak{B}$ son enveloppe disquée (i.e. convexe et équilibrée) $\Gamma(B) \in \mathfrak{B}$;*

On dit que $(E, \mathfrak{B})$ est un espace vectoriel bornologique de type convexe, en abrégé e.b.c., si de plus E est la réunion des éléments de $\mathfrak{B}$: ces éléments s'appellent alors les parties bornées de E. ▮

Remarques. 1) La réunion des éléments de $\mathfrak{B}$ est de toute façon un sous-espace vectoriel de E; muni de $\mathfrak{B}$ ce sous-espace est un e.b.c.

2) Les axiomes b), c) et d) impliquent que si B_1 et B_2 sont bornés il en est de même de $B_1 + B_2$.

3) Toute semi-norme finie sur un espace vectoriel E définit une bornologie vectorielle faisant de E un e.b.c.; les parties bornées sont celles dont le diamètre est fini.

Définition 2. On dit qu'une application $u: E \to F$ d'un e.b.c. dans un autre est bornée si l'image par u de tout borné de E est borné dans F. ▮

On prend les applications linéaires bornées comme morphismes de la catégorie des e.b.c. Cette catégorie admet des limites inductives et des limites projectives quelconques; les constructions de ces limites sont évidentes.

A tout disque (partie convexe et équilibrée) B d'un espace vectoriel E on associe le sous-espace E_B engendré par B muni de la semi-norme *jauge* de B, qui est finie sur E_B. Si E est un e.b.c. il est canoniquement isomorphe à la limite inductive des E_B, B parcourant l'ensemble des disques bornés de E. La catégorie (ebc) s'identifie à celle des ind-espaces semi-normés (avec semi-norme finie); dualement la catégorie (elc) des espaces localement convexes s'identifie à celle des pro-espaces semi-normés.

Definition 3. On dit qu'un disque B de E est séparant (resp. complétant) si E_B est séparé (resp. séparé et complet). On dit qu'un e.b.c. E est séparé (resp. complet) si toute partie bornée de E est contenue dans un disque borné séparant (resp. complétant). Il revient au même de dire que E est limite inductive d'espaces normés (resp. d'espaces de Banach) qui s'appliquent injectivement dans E. ▮

Toute limite projective d'e.b.c. séparés (resp. complets) l'est encore; si E est séparé et limite inductive d'e.b.c. complets il est complet. A tout e.b.c. E on associe un e.b.c. séparé $E^{\cdot} = E/\{\overline{0}\}$ et un e.b.c. complet $\hat{E}$ caractérisés par des propriétés universelles claires; notons que $\hat{E}$ peut être nul même si E est séparé et non réduit à 0.

Définition 4. On dit qu'une suite (x_n) *de points d'un e.b.c.* E *converge vers une limite* a *(au sens de Mackey) s'il existe un disque borné* B *de* E *tel que* $x_n - a$ *reste dans* E_B *et converge vers* 0 *dans cet espace semi-normé.* ▮

Si E est séparé une suite de points de E ne peut avoir plus d'une limite.

On dit qu'une partie X de E est *fermée* si toute limite de suite de points de X appartient à X. L'intersection $\bar{X}$ des parties fermées de E qui contiennent une partie donnée X est encore fermée; on l'appelle la fermeture de X (en général $\bar{X}$ est strictement plus grand que l'ensemble des limites de suites de points de X).

Pour qu'un sous-espace vectoriel F de E soit fermé il faut et il suffit que E/F soit séparé; dans ce cas, si E est complet il en est de même de F et de E/F.

Espaces d'applications linéaires et produits tensoriels. Considérons des e.b.c. E et F; on dit qu'un ensemble H d'applications de E dans F est *équiborné* si pour tout borné B de E, $H(B) = \bigcup_{u \in H} u(B)$ est borné dans F. Les ensembles équibornés d'applications linéaires sont les bornés d'une bornologie vectorielle sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E, F)$ qui fait de l'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F un e.b.c. noté $\mathscr{L}(E, F)$; il dépend fonctoriellement de E et F et les propriétés de commutation aux limites inductives ou projectives qu'on peut prévoir sont vraies. Si F est séparé (resp. complet) il en est de même de $\mathscr{L}(E, F)$.

On définit d'une manière analogue un e.b.c. $\mathscr{B}(E_1, E_2; F)$ d'applications bilinéaires bornées de $E_1 \times E_2$ dans F (où E_1, E_2 et F sont des e.b.c.); il est canoniquement isomorphe à $\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, F))$ et à $\mathscr{L}(E_2, \mathscr{L}(E_1, F))$. Sur le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ la bornologie la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique $E_1 \times E_2 \to E_1 \otimes E_2$ est bornée possède la propriété universelle exprimée par l'isomorphisme $\mathscr{L}(E_1 \otimes E_2, F) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(E_1, E_2; F)$ (F e.b.c. arbitraire); on considérera toujours $E_1 \otimes E_2$ comme muni de cette bornologie. Si E_1 et E_2 sont séparés il en est de même de $E_1 \otimes E_2$. Le produit tensoriel est associatif, commutatif et commute aux limites inductives; il en est de même du produit tensoriel complété $E_1 \hat{\otimes} E_2$ (qu'on obtient en complétant les produit tensoriel)[1]. On peut identifier $E_1 \hat{\otimes} E_2$ à un quotient de l'espace

$$\ell^1(E_1 \times E_2) = \varinjlim \ell^1(B_1 \times B_2)$$

(où B_1 parcourt la bornologie de E_1 et B_2 celle de E_2); autrement dit pour tout borné B de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ il existe un borné B_1 et un borné B_2 de E_2

[1] Dans ce cas, en calcule bien sûr la limite inductive dans la catégorie des e.b.c. complets.

tel que tout élément de B soit somme d'une série $\Sigma \lambda_n x_n \otimes y_n$ où (λ_n) est une suite sommable de scalaires, (x_n) une suite de points de B_1 et (y_n) une suite de points de B_2.

Comparaison avec la topologie. Si E et F sont des espaces localement convexes on leur associe un e.b.c. dont les bornés sont les ensembles équicontinus d'applications linéaires de E dans F et que l'on note encore $\mathscr{L}(E, F)$. Pour $E = \mathbb{K}$, on a une bijection canonique $\mathscr{L}(\mathbb{K}, F) \xrightarrow{\sim} F$; la bornologie correspondante sur F est dite canonique, et on note ${}^bF$ l'espace F muni de cette bornologie; ses bornés sont les parties absorbées par tout voisinage de 0. Pour que ${}^bF$ soit séparé il faut et il suffit que F le soit; si F est complet il en est de même de ${}^bF$ [plus généralement $\mathscr{L}(E, F)$ est séparé – resp. complet – si F l'est].

Considérons maintenant un e.b.c. E et un e.l.c. F; on définit l'espace localement convexe $\mathscr{L}(E, F)$ comme l'espace des applications linéaires bornées de E dans ${}^bF$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans les bornés de E. Considérons encore un e.l.c. G; on a une bijection canonique $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(F, G)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}(F, \mathscr{L}(E, G))$; les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G qui correspondent aux éléments de ces espaces sont dites *hypocontinues*. La plus fine des topologies localement convexes sur $E \otimes F$ rendant hypocontinue l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ possède la propriété universelle exprimée par l'isomorphisme

$$\mathscr{L}(E \otimes F, G) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(F, G)). \tag{1}$$

(G espace localement convexe arbitraire). Pour $F = \mathbb{K}$ on a une bijection canonique $E \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} E$; la topologie correspondante sur E est dite canonique et on note ${}^tE$ l'espace E muni de cette topologie; les voisinages de 0 sont les ensembles contenant un disque bornivore. D'après (1) on a $\mathscr{L}(E, {}^bG) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}({}^tE, G)$ (E e.b.c.; G e.l.c.), ce qui montre que (t, b) est un couple de foncteurs adjoints. On dit qu'un e.b.c. E (resp. un e.l.c. G) est *normal* si $E = {}^{bt}E$ (resp. ${}^{tb}G = G$); les espaces normaux ne sont autres que les espaces bornologiques au sens de Bourbaki [1].

Si E est un espace localement convexe métrisable, il est normal et pour qu'une suite converge vers 0 au sens de Mackey dans ^{b}E il faut et il suffit qu'elle converge vers 0 dans E. Le complété de ${}^bE$ s'identifie ensemblistement à $\hat{E}$.

2. *Algèbres*

Définition 5. On appelle $\mathbb{K}$-algèbre bornologique un e.b.c. A sur $\mathbb{K}$ muni d'une loi de composition interne $A \times A \to A$ bilinéaire et bornée. ▮

Nous supposerons toujours cette loi associative et unifère sauf mention expresse du contraire, et nous la noterons multiplicativement.

Les morphismes d'algèbres bornologiques sont les homomorphismes unifères d'algèbres qui sont bornés.

On dit qu'une algèbre bornologique A est *multiplicativement convexe* si tout borné de A est absorbé par un disque borné stable pour la loi multiplicative. Il revient au même de dire que A est limite inductive d'algèbres semi-normées.

Exemples d'algèbres bornologiques.

1) Toute algèbre semi-normée est une algèbre bornologique; pour toute algèbre localement convexe A, ${}^bA$ est une algèbre bornologique.

2) Soit E un e.b.c. où un e.l.c.; la composition des endomorphismes fait de $\mathrm{End}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ une algèbre bornologique.

3) Soit K une partie compacte d'un espace analytique complexe X; l'algèbre $\mathcal{O}_X(K) = \varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ (U parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de K) est une algèbre bornologique sur $\mathbb{C}$; sa structure provient des structures de Fréchet habituelles sur les $\mathcal{O}_X(U)$. Notons que c'est une algèbre multiplicativement convexe, car si B est un borné de $\mathcal{O}_X(K)$ il existe un voisinage ouvert U de K et un borné B_1 de $\mathcal{O}_X(U)$ dont B est l'image; si U' est un voisinage ouvert de K relativement compact dans U on voit que $B_1' = B_{1\,|U'}$ représente encore B et est absorbé par un borné multiplicativement stable de $\mathcal{O}_X(U')$.

4) Soit U un ouvert d'un espace de Banach complexe E; l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes dans U a une structure naturelle d'algèbre bornologique: un ensemble B de fonctions holomorphes dans U est dit borné s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U et une famille de constantes $(M_i)_{i \in I}$ tels que $|f(x)| \leqq M_i$ pour tout $f \in B$, tout $i \in I$ et tout $x \in U_i$.

5) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$; l'algèbre $\mathscr{E}(K)$ des fonctions indéfiniment différentiables au sens de Whitney sur K a une structure d'algèbre bornologique multiplicativement convexe. Un ensemble B de fonctions différentiables sur K est dit borné s'il existe une suite de constantes $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$|f_\alpha(x)| \leqq M_{|\alpha|} \quad \text{et} \quad \left| f_\alpha(x+y) - \sum_{|\beta| \leqq n} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} f_{\alpha+\beta}(x)\, y^\beta \right| \leqq M_{n-|\alpha|} \|y\|^{n-1-|\alpha|}$$

pour tout $f = (f_\alpha) \in B$, tout multi-indice α, tout $x \in K$, tout entier n et tout y assez petit. A l'aide du théorème de prolongement de Whitney on voit que $\mathscr{E}(K)$ est l'e.b.c. séparé (donc complet) associé à la limite inductive des espaces de fonctions différentiables (ordinaires) $\mathscr{E}(U)$, U parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de K.

Rayon spectral

Définition 6. Soit A une algèbre bornologique; on désigne par D_A l'ensemble des éléments x de A tels que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de leurs puissances *soit bornée. Pour tout élément x de A on appelle rayon spectral de x le nombre*

$$q_A(x) = \inf(|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } x \in \lambda D_A) \qquad (\textit{éventuellement égal à } +\infty). \quad \blacksquare$$

Si $x \in A$ et si λ est un scalaire, la condition $q_A(x) < |\lambda|$ implique l'existence d'un borné B de A tel que $x^n \in \lambda^n B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; inversement, s'il existe un tel borné on a $q_A(x) \leqq |\lambda|$. En particulier, si A est une algèbre semi-normée (avec une boule unité stable par multiplication, ce qu'on peut toujours supposer quitte à remplacer la semi-norme par un de ses multiples), on voit que $q_A(x) \leqq \|x\|$ pour tout $x \in A$. Il est clair que $q_A(\lambda x) = |\lambda| \, q_A(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in A$.

Proposition 1. *Soit A une algèbre bornologique; considérons des éléments x et y de A tels que $xy = yx$; on a* $q_A(x+y) \leqq q_A(x) + q_A(y)$
et $q_A(xy) \leqq q_A(x)\, q_A(y)$.
Pour tout entier n, on a $q_A(x^n) = q_A(x)^n$. $\blacksquare$

Démonstration. On va voir que $q_A(x) < |\lambda|$ et $q_A(y) < |\mu|$ impliquent $q_A(x+y) \leqq |\lambda| + |\mu|$ et $q_A(xy) \leqq |\lambda|\,|\mu|$, ce qui suffira (on laisse au lecteur le soin d'examiner le cas où la valeur absolue de $\mathbb{K}$ provient d'une valuation discrète). Or l'hypothèse implique l'existence d'un borné B de A tel que $x^n \in \lambda^n B$ et $y^n \in \mu^n B$ pour tout entier n; on a alors, en utilisant le fait que x et y commutent:

$$(x+y)^n = \Sigma \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \in \Sigma \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} BB \subset \nu^n C$$

si ν est un scalaire tel que $|\nu| \geqq |\lambda| + |\mu|$ et C est l'enveloppe disquée de BB, qui est encore un ensemble borné; de même:

$$(xy)^n = x^n y^n \in \lambda^n \mu^n BB \subset (\lambda\mu)^n C.$$

Remarque. Dans cette démonstration, ainsi que dans l'énoncé, il faut remplacer les signes $+$ entre des valeurs absolues ou des raçons spectraux par des sup lorsque $\mathbb{K}$ est ultramétrique.

Montrons maintenant que $q_A(x^n) = q_A(x)^n$. D'après ce qui précède on sait déjà que le premier membre est majoré par le second; inversement on va voir que si $q_A(x^n) < |\lambda|^n$ on a $q_A(x)^n \leqq |\lambda|^n$, c'est à dire $q_A(x) \leqq |\lambda|$. Par hypothèse il existe un borné B tel que $x^{mn} \in \lambda^{mn} B$ pour tout entier m; si r est un entier arbitraire on peut l'écrire $r = mn + s$ avec $s \leqq n-1$ (division euclidienne), et $x^r = x^{mn} x^s \in \lambda^{mn} x^s B = \lambda^r (x/\lambda)^s B \subset \lambda^r B'$ où B' est un disque borné contenant la réunion des $(x/\lambda)^s B$ pour $0 \leqq s \leqq n-1$; ceci donne bien $q_A(x) \leqq |\lambda|$.

Corollaire. *Si A est commutative, q_A est une semi-norme multiplicative sur les puissances.* $\blacksquare$

Proposition 2. *Soit A une algèbre semi-normée; pour tout élément x de A on a $q_A(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf \|x^n\|^{1/n}$.* ∎

Démonstration. $q_A(x)^n = q_A(x^n) \leqq \|x^n\|$ donc $q_A(x) \leqq \|x^n\|^{1/n}$ pour tout n et $q_A(x) \leqq \inf \|x^n\|^{1/n}$. Inversement si $q_A(x) < |\lambda|$ il existe une constante M telle que $\|x^n\| \leqq M|\lambda|^n$ pour tout entier n; on en tire

$$\|x^n\|^{1/n} \leqq M^{1/n}|\lambda| \quad \text{d'où} \quad \limsup \|x^n\|^{1/n} \leqq |\lambda|,$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire. *Si $\|x^2\| = \|x\|^2$ pour tout $x \in A$, on a $q_A(x) = \|x\|$.* ∎

Proposition 3. *Soit u un homomorphisme borné d'une algèbre bornologique A dans une autre B; on a $u(D_A) \subset D_B$ et $q_B(u(x)) \leqq q_A(x)$ pour tout $x \in A$.* ∎

Cette proposition est évidente.

Corollaire. *Soit A une algèbre bornologique limite inductive filtrante d'une famille des sous-algèbres A_i (munies de bornologies); on a $D_A = \cup D_{A_i}$ et $q_A(x) = \inf q_{A_i}(x)$ pour tout $x \in A$.* ∎

On laisse la vérification (immédiate) au lecteur.

Ce corollaire s'applique en particulier aux algèbres multiplicativement convexes et montre que pour une telle algèbre A le rayon spectral q_A est toujours fini, puisqu'il en est ainsi pour une algèbre semi-normée. C'est une application *bornée* de A dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition 4. *Soit r un nombre réel strictement positif; sur l'algèbre $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles, considérons la semi-norme définie par $\|\Sigma a_n X^n\| = \Sigma |a_n| r^n$ et désignons par $\mathbb{K}(r)$ la sous-algèbre formée des séries dont la semi-norme est finie; c'est une algèbre bornologique complète pour cette semi-norme. Pour toute algèbre bornologique complète A et tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'application qui à tout homomorphisme borné φ de $\mathbb{K}(|\lambda|)$ dans A associe $\varphi(X)$ est une bijection de* $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}(|\lambda|), A)$ *sur λD_A.* ∎

Comme $\|X^n\| = r^n$ dans $\mathbb{K}(r)$, l'application considérée prend bien ses valeurs dans λD_A (cf. proposition 3). L'algèbre $\mathbb{K}(r)$ étant la complétée de l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[X]$, on peut se contenter de montrer que tout élément x de λD_A détermine un unique homomorphisme *borné* de $\mathbb{K}[X]$ dans A transformant X en x; ainsi on doit vérifier que l'homomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans A qui applique un polynôme P sur $P(x)$ est borné lorsque $x \in \lambda D_A$, ce qui est immédiat: il existe un disque borné B de A tel que $x^n \in \lambda^n B$ pour tout n, donc $P(x) = \Sigma a_n x^n \in \Sigma a_n \lambda^n B \subset \mu B$ si $|\mu| \geqq \Sigma |a_n| |\lambda|^n = \|P\|$. (Comme toujours on remplace la somme par la borné supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ dans le cas d'une valeur absolue ultramétrique; il faut alors prendre pour $\mathbb{K}(r)$ l'algèbre formée des séries telles que $|a_n| r^n$ tende vers 0 pour n infini).

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{O}(rD) \subset \mathbb{K}[[X]]$ l'algèbre des séries de rayon de convergence $> r$, considérée comme l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage du disque fermé rD de $\mathbb{K}$; c'est une algèbre bornologique complète qui s'identifie à la limite inductive des $\mathbb{K}(r')$ pour $r' > r$. L'application qui à tout homomorphisme borné φ de $\mathcal{O}(rD)$ dans une algèbre bornologique complète A associe $\varphi(X)$ est une bijection de* $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(rD), A)$ *sur* $\{x \in A \mid q_A(x) \leqq r\}$. *Pour tout élément x d'une algèbre bornologique complète A tel que $q_A(x) < r$ et toute série $f = \Sigma a_n X^n$ de rayon de convergence $\geqq r$ (fonction holomorphe dans le disque ouvert $rD' = \{z \in \mathbb{K} \,|\, |z| < r\}$), la série $\Sigma a_n x^n$ est convergente dans A (au sens de Mackey); si $f(x)$ désigne sa somme, l'application $f \mapsto f(x)$ de $\mathcal{O}(rD')$ dans A est un homomorphisme borné.* ∎

Ce corollaire se démontre aisément. Notons que l'on n'obtient pas en général tous les homomorphismes bornés de $\mathcal{O}(rD')$ dans A en considérant les $f \mapsto f(x)$ avec $q_A(x) < r$; par exemple $q_{\mathcal{O}(rD')}(X) = r$, donc l'application identique de $\mathcal{O}(rD')$ ne peut être obtenue ainsi.

Exercice. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(D'), A)$ s'identifie à l'ensemble des éléments x de A tels que pour toute suite (λ_n) de scalaires $\neq 0$ tendant vers 0 moins vite que toute suite géométrique (r^n) avec $r < 1$, la suite (x^n/λ_n) soit bornée dans A (x^n converge «assez vite» vers 0 dans A).

Corollaire 2. *Soit x un élément d'une algèbre bornologique complète A; si* $q_A(x) < 1$, *la série Σx^n est convergente dans A et sa somme est l'inverse de* $1 - x$. ∎

En effet $(1 - X)^{-1} = \Sigma X^n$ dans $\mathcal{O}(D')$.

Remarque. Si A est limite inductive d'une famille filtrante d'algèbres A_i contenues dans A, il est clair que le spectre par rapport à A d'un élément x de A est l'intersection des $\mathrm{Sp}_{A_i} x$ pour $x \in A_i$. On en déduit que le spectre d'un élément x d'une algèbre bornologique complète multiplicativement convexe A sur $\mathbb{C}$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$ et que $q_A(x) = \sup\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\}$. Si A est une algèbre bornologique multiplicativement convexe munie d'un homomorphisme borné dans une algèbre $B = \mathscr{C}(X)$ de fonctions continues sur un espace topologique séparé X (avec la bornologie canonique associée à la topologie de la convergence compacte), l'image de A est formée de fonctions *bornées* sur X; on voit en effet facilement que $q_B(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|$ pour $f \in B$, et on a $q_B(f) \leqq q_A(g) < +\infty$ si f est l'image d'un élément g de A.

3. Modules

Définition 7. Soit A une algèbre bornologique; on appelle A-module bornologique (à gauche) un e.b.c. M muni d'une loi de composition bili-

néaire et bornée $A \times M \to M$ faisant de M un A-module à gauche (c'est à dire associative par rapport à la multiplication de A et telle que $1 \cdot x = x$ pour tout $x \in M$ si 1 est l'élément unité de A). ▮

La donnée d'une structure de A-module bornologique à gauche sur un e.b.c. M équivaut à celle d'un homomorphisme borné de A dans $\mathrm{End}(M)$. On obtient la catégorie de A-modules bornologiques en prenant comme morphismes les applications A-linéaires bornées.

Exemples

1) L'algèbre A considérée comme module à gauche sur elle-même est un A-module bornologique noté A_s.

2) Considérons deux e.b.c. (ou deux e.l.c.) E et F; la composition des morphismes fait de $\mathscr{L}(E, F)$ un $\mathrm{End}(E)$-module bornologique à droite et un $\mathrm{End}(F)$-module bornologique à gauche (ces deux structures commutent).

3) Tout e.b.c. E a une structure canonique de $\mathrm{End}(E)$-module bornologique à gauche.

4) Soient X un espace analytique complexe et $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X; si U est un ouvert et K un compact de X, $\mathscr{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module bornologique et $\mathscr{F}(K)$ est un $\mathcal{O}_X(K)$-module bornologique (cf. n° 2, exemple 3).

Lemme 1. *Soient A une algèbre bornologique et M un A-module bornologique. Pour tout borné B de A tel que $BB \subset B$ et $1 \in B$ et tout borné C de M il existe un disque borné C' de M contenant C et tel que $BC' \subset C'$. Si M est complet, on peut choisir C' complétant.* ▮

Démonstration. BC est borné dans M et contient C (puisque $1 \in B$); soit C' son enveloppe disquée: c'est encore un borné contenant C, et comme $B(BC) = (BB)\, C \subset BC \subset C'$, on a encore $BC' \subset C'$. Si M est complet on prend pour C' l'enveloppe disquée fermée de BC.

Corollaire. *Considérons une algèbre bornologique complète multiplicativement convexe $A = \varinjlim_{i \in I} A_i$ où les A_i sont des algèbres de Banach, et un A-module bornologique complet M; il existe un système inductif $(M_j)_{j \in J}$ et une application θ de J dans I tels que $M \simeq \varinjlim_{j \in J} M_j$ et que M_j soit un $A_{\theta(j)}$-module de Banach pour tout indice j.* ▮

Si M et N sont des A-modules bornologiques, l'ensemble des applications A-linéaires bornées de M dans N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(M, N)$; muni de la bornologie induite, on notera cet espace $\mathscr{L}_A(M, N)$. Notons que si N est séparé $\mathscr{L}_A(M, N)$ est séparé et *fermé* dans $\mathscr{L}(M, N)$ (c'est l'intersection des noyaux des applications linéaires bornées

$u \mapsto u(ax) - au(x)$ de $\mathscr{L}(M, N)$ dans N pour $a \in A$ et $x \in M$). Si N est complet, il en est de même de $\mathscr{L}_A(M, N)$ car $\mathscr{L}(M, N)$ est complet (cf. n° 1). Nous désignerons par $M^\vee$ le dual $\mathscr{L}_A(M, A)$; c'est un A-module bornologique à droite qui est séparé (resp. complet) si A l'est.

Supposons maintenant l'algèbre A commutative; l'espace $\mathscr{B}_A(M, N; P)$ des applications A-bilinéaires bornées de $M \times N$ dans un module A-bornologique P, muni de la bornologie induite par celle de $\mathscr{B}(M, N; P)$ s'identifie à $\mathscr{L}_A(M, \mathscr{L}_A(N, P))$ et à $\mathscr{L}_A(N, \mathscr{L}_A(M, P))$. Soit $M \otimes_A N$ le A-module bornologique quotient de $M \otimes N$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $am \otimes n - m \otimes an$ avec $a \in A$, $m \in M$ et $n \in N$; on a une application A-bilinéaire bornée canonique de $M \times N$ dans $M \otimes_A N$ et la composition avec cette application définit un isomorphisme de $\mathscr{L}_A(M \otimes_A N, P)$ sur $\mathscr{B}_A(M, N; P)$. Le produit tensoriel $M \otimes_A N$ n'est pas séparé en général, même si M et N le sont. On désignera par $M \hat{\otimes}_A N$ le complété de $M \otimes_A N$.

4. *Applications A-nucléaires (A commutative)*

Le produit tensoriel $M \otimes_A N$ est fonctoriel en M et N. Ainsi, pour quatre A-modules bornologiques M, M_1, N et N_1 on a une application canonique de $\mathscr{L}_A(M, M_1) \times \mathscr{L}_A(N, N_1)$ dans $\mathscr{L}_A(M \otimes_A N, M_1 \otimes_A N_1)$; cette application est visiblement A-bilinéaire, et on vérifie facilement qu'elle est bornée. On en déduit une application A-linéaire bornée de

$$\mathscr{L}_A(M, M_1) \otimes_A \mathscr{L}_A(N, N_1)$$

dans $\mathscr{L}_A(M \otimes_A N, M_1 \otimes_A N_1)$ par la propriété universelle du produit tensoriel («morphisme de Kronecker»).

Nous nous intéresserons surtout au cas où $M_1 = A = N$; alors $\mathscr{L}_A(M, M_1) = M^\vee$, $\mathscr{L}_A(N, N_1) = N_1$, $M \otimes_A N = M$ et $M_1 \otimes_A N_1 = N_1$. Le morphisme de Kronecker se réduit à une application linéaire bornée de $M^\vee \otimes_A N_1$ dans $\mathscr{L}_A(M, N_1)$, qui transforme $x' \otimes y$ en l'application $x \mapsto \langle x, x' \rangle y$ de M dans N_1 si x' est une forme linéaire sur M (bornée à valeurs dans A) et y un élément de N_1. Remarquons que cette application n'est pas injective en général; son image est formée des applications linéaires de M dans N_1 qui se mettent sous la forme $x \mapsto \Sigma \langle x, x'_i \rangle y_i$ ($x'_i \in M$, $y_i \in N$, $1 \leqq i \leqq r$), c'est à dire qui admettent une factorisation à travers un module libre de type fini A^r (applications «de rang fini»).

Considérons maintenant des modules bornologiques M et N, avec N complet; comme $\mathscr{L}_A(M, N)$ est complet, le morphisme $M^\vee \otimes_A N \to \mathscr{L}_A(M, N)$ se prolonge à $M^\vee \hat{\otimes}_A N$; pour tout élément u de $M^\vee \hat{\otimes}_A N$ on désignera par $\bar{u}$ son image dans $\mathscr{L}_A(M, N)$ par le morphisme canonique ainsi obtenu.

Définition 8. On pose $\mathscr{L}_A^1(M, N) = M^\vee \hat{\otimes}_A N$ *et on dit qu'une application A-linéaire bornée de M dans N est A-nucléaire si elle est de la forme* $\bar{u}$ *pour un élément u de* $\mathscr{L}_A^1(M, N)$. ∎

Il est clair que $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ dépend fonctoriellement de M et de N (contravariant en M et covariant en N); de plus le morphisme canonique de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ dans $\mathscr{L}_A(M, N)$ est fonctoriel. Autrement dit, en posant $u \cdot v = \mathscr{L}_A^1(v, N)u$ et $w \cdot u = \mathscr{L}_A^1(M, w)u$ pour $u \in \mathscr{L}_A^1(M, N)$, $v \in \mathscr{L}_A(P, M)$ et $w \in \mathscr{L}_A(N, Q)$, on peut écrire: $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \circ v$ et $\overline{w \cdot u} = w \circ \bar{u}$.

Trace

Supposons l'algèbre bornologique A complète; le morphisme canonique de $M^\vee \otimes_A M$ dans A provenant de l'application bilinéaire $(x', x) \mapsto x'(x)$ $(x' \in M^\vee, x \in M)$ se prolonge en une application A-linéaire bornée Tr de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ dans A, que nous appellerons l'application *trace*.

Remarquons qu'il est impossible en général de définir la trace d'un endomorphisme nucléaire de M, car l'application canonique de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ dans $\mathscr{L}_A(M, M)$ n'est pas injective, et son noyau ne contient pas en général celui de la trace.

Considérons des modules bornologiques M, N et P; par associativité du produit tensoriel on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_A^1(M, N) \hat{\otimes}_A \mathscr{L}_A^1(N, P) &\simeq M^\vee \hat{\otimes}_A (N \hat{\otimes}_A N^\vee) \hat{\otimes}_A P \\ &\simeq M^\vee \hat{\otimes}_A \mathscr{L}_A^1(N, N) \hat{\otimes}_A P\ ;\end{aligned}$$

en appliquant la trace au facteur du milieu, on obtient un morphisme canonique de $\mathscr{L}_A^1(M, N) \hat{\otimes}_A \mathscr{L}_A^1(N, P)$ dans $M^\vee \hat{\otimes}_A P = \mathscr{L}_A^1(M, P)$, d'où une loi de composition bilinéaire bornée: $\mathscr{L}_A^1(M, N) \times \mathscr{L}_A^1(N, P) \to \mathscr{L}_A^1(M, P)$ que nous noterons multiplicativement; on voit tout de suite que cette loi est associative. Si u est un élément de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ et v un élément de $\mathscr{L}_A^1(N, P)$, il est facile de vérifier que l'on a: $v \cdot u = \bar{v} \cdot u = v \cdot \bar{u}$ et par suite $\overline{v \cdot u} = \bar{v} \circ \bar{u}$.

Structure de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$

Pour tout e.b.c. E complet, on désigne par c_E^0 l'espace des suites de points de E qui tendent vers 0 au sens de Mackey, muni de la bornologie induite par celle de $\mathscr{L}(\ell^1, E)$ par l'application de c_E^0 dans $\mathscr{L}(\ell^1, E)$ qui à une suite $(x_n) \in c_E^0$ associe $(\lambda_n) \mapsto \Sigma \lambda_n x_n$ $((\lambda_n) \in \ell^1)$; autrement dit c_E^0 est le complété du produit tensoriel $c^0 \otimes E$ muni de la structure bornologique ε (cf. [9]).

Définition 9. On dit qu'une application linéaire bornée u d'un e.b.c. E dans un autre F est un épimorphisme semi-strict si pour toute suite bornée

(y_n) de points de F il existe une suite bornée (x_n) de points de E telle que $u(x_n)=y_n$ pour tout n. ▮

Il revient au même de dire que l'on peut relever dans E en une suite tendant vers 0 toute suite qui tend vers 0 dans F, c'est à dire que le morphisme de c_E^0 dans c_F^0 déduit de u est surjectif; en effet une suite qui tend vers 0 est de la forme $\lambda_n z_n$ où (z_n) est une suite bornée et (λ_n) une suite de scalaires convergeant vers 0.

Lemme 2. *Soit $u: E \to F$ un épimorphisme semi-strict d'e.b.c. (complets); $c_u^0: c_E^0 \to c_F^0$ est aussi un épimorphisme semi-strict.* ▮

Démonstration. On commence par observer que $c_F^0 \simeq \varinjlim_B c_{F_B}^0$ où B parcourt l'ensemble des disques bornés (complétants) de F; en effet il est clair que $\mathscr{L}(\ell^1, F) \simeq \varinjlim_B \mathscr{L}(\ell^1, F_B)$ et $\varinjlim (c^0 \otimes F_B) \subset \varinjlim c_{F_B}^0$ est un sous-espace de $\varinjlim \mathscr{L}(\ell^1, F_B)$ avec la bornologie induite, car

$$(c^0 \otimes F) \cap \mathscr{L}(\ell^1, F_B) = c^0 \otimes F_B .$$

Si (y_k) est une suite bornée de c_F^0 il existe donc un disque borné B de F tel que $y_k = (y_{kn})_n$ reste dans un borné de $c_{F_B}^0$ pour tout k; ainsi il existe une suite double bornée (z_{kn}) dans F et une suite double bornée de scalaires (λ_{kn}) telles que $y_{kn} = \lambda_{kn} z_{kn}$ et que $\lim_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 0$ pour tout k. On peut relever (z_{kn}) en une suite double bornée (t_{kn}) dans E, puisque u est semi-strict; posons alors $x_{kn} = \lambda_{kn} t_{kn}$. Il est clair que $u(x_{kn}) = y_{kn}$ pour tout couple d'indices (k, n) et que:

a) pour tout k la suite $x_k = (x_{kn})_n$ converge vers 0 dans E;
b) la suite $(x_k)_k$ est bornée dans l'espace c_E^0.

Tout épimorphisme strict est évidemment semi-strict, mais la réciproque est fausse, même pour des espaces bornologiques de Fréchet. On dit qu'un e.b.c. E possède la *propriété d'homomorphisme* si pour tout e.b.c. complet F toute application linéaire bornée et surjective de E sur F est un épimorphisme semi-strict; on trouvera en appendice quelques résultats concernant la propriété d'homomorphisme. Signalons seulement qu'elle se conserve par passage à un sous-espace fermé et que toute réunion dénombrable d'images d'espaces de Fréchet par des applications linéaires bornées la possède.

Proposition 5. *Soient A une algèbre bornologique complète et M et N des A-modules bornologiques complets. Si $(x'_n) \in \mathscr{L}_A(M, c_A^0)$, $(y_n) \in c_N^0$ et $(\lambda_n) \in \ell^1$ la suite $(\lambda_n x'_n \otimes y_n)$ est sommable dans $\mathscr{L}_A^1(M, N)$; l'application trilinéaire bornée de $\mathscr{L}_A(M, c_A^0) \times \ell^1 \times c_N^0$ dans $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ qui associe $\Sigma \lambda_n x'_n \otimes y_n$ au triplet $((x'_n), (\lambda_n), (y_n))$ est surjective, et l'application linéaire associée est un épimorphisme semi-strict.* ▮

Démonstration. L'espace $\mathscr{L}_A^1(M, N) = M^\vee \hat{\otimes}_A N$ est un quotient de $M^\vee \hat{\otimes} N$, donc un quotient de $\ell^1(M^\vee \times N)$ (cf. n° 1); ainsi pour tout borné B de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ il existe un borné B_1 de $M^\vee$, un borné B_2 de N et une constante c tels que tout élément de B puisse s'écrire $\Sigma \lambda_n x'_n \otimes y_n$ avec $x'_n \in B_1$, $y_n \in B_2$ et $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^1$ vérifiant $\|\lambda\| \leqq c$. On peut écrire λ_n sous la forme $\lambda_n = \lambda'_n \mu_n \nu_n$ avec $(\lambda'_n) \in \ell^1$, $(\mu_n) \in c^0$ et $(\nu_n) \in c^0$; en posant $t'_n = \mu_n x'_n$ et $z_n = \nu_n y_n$, on peut écrire l'élément de B considéré sous la forme $\Sigma \lambda'_n t'_n \otimes z_n$, et on voit que la suite (t'_n) reste dans un borné de $\mathscr{L}_A(M, c_A^0)$, tandis que la suite (z_n) reste dans un borné de c_N^0. Remarquons enfin qu'on peut trouver une suite $(\lambda'_n) \in \ell^1$ permettant de développer de la manière indiquée tous les éléments d'une suite bornée dans $\mathscr{L}_A^1(M, N)$.

Corollaire 1. *Tout élément u de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ peut s'écrire sous la forme: $u = y \cdot v \cdot x'$ où x' est une application A-linéaire bornée de M dans c_A^0, y une application A-linéaire bornée de $\ell_A^1 = \ell^1 \hat{\otimes} A$ dans N et v un élément «diagonal» de $\mathscr{L}_A^1(c_A^0, \ell_A^1)$, c'est à dire de la forme $v = \Sigma \lambda_n e'_n \otimes e_n$ ((e_n) est la «base» canonique de ℓ^1). Toute application A-nuléaire $\bar{u}$ de M dans N se factorise en une application A-linéaire bornée de M dans c_A^0 suivie d'une application A-nucléaire type $\bar{v}$ de c_A^0 dans ℓ_A^1 (provenant d'une application nucléaire diagonale de c^0 dans ℓ^1 par extension des scalaires) et d'une application A-linéaire bornée de ℓ_A^1 dans N.* ∎

Corollaire 2. *Soit u un épimorphisme semi-strict d'un A-module bornologique complet N_1 dans un autre N_2. Pour tout A-module bornologique complet M, l'application de $\mathscr{L}_A^1(M, N_1)$ dans $\mathscr{L}_A^1(M, N_2)$ transformant v en $u \circ v$ est un épimorphisme semi-strict.* ∎

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 5 et du lemme 2 appliqué à u.

5. Perturbation par une application A-nucléaire

La loi de composition entre espaces $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ définie au numéro 4 fait de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ une algèbre bornologique complète sans élément unité si M est un A-module bornologique complet. Nous nous proposons d'étudier le rayon spectral d'un élément dans cette algèbre, dans le cas où A est multiplicativement convexe.

Lemme 3. *Soient A une algèbre bornologique complète, M un A-module bornologique complet et u un élément de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ écrit sous la forme $u = \Sigma \lambda_n x'_n \otimes y_n$ avec $(\lambda_n) \in \ell^1$, (x'_n) borné dans $M^\vee$ et (y_n) borné dans M. S'il existe un disque borné B de A stable par multiplication et un scalaire μ tels que $\langle y_n, x'_m \rangle \in \mu B$ quels que soient les indices m et n, le rayon spectral de u dans $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ est majoré par $|\mu| \, \Sigma |\lambda_n|$.* ∎

Démonstration. On calcule immédiatement

$$u^k = \Sigma \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \dots \lambda_{n_k} \langle y_{n_1}, x'_{n_2} \rangle \langle y_{n_2}, x'_{n_3} \rangle \cdots \langle y_{n_{k-1}}, x'_{n_k} \rangle \, x'_{n_1} \otimes y_{n_k} ;$$

par hypothèse les $\langle y_{n_i}, x'_{n_{i+1}}\rangle$ appartiennent à μB, donc leur produit appartient à $\mu^{k-1} B$, puisque B est multiplicativement stable. Ceci montre que $(u^k)_k$ est borné si $(\mu^{k-1}(\Sigma\lambda_n)^k)_k$ l'est, donc si $|\mu|\,\Sigma|\lambda_n| \leqq 1$. D'où la conclusion.

Corollaire. *Soient A une algèbre bornologique complète multiplicativement convexe. M un A-module bornologique complet et u un élément de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$. Il existe une décomposition $u = u' + u''$ avec u' de rang fini (c'est à dire image d'un élément de $M^\vee \otimes_A M$) et u'' de rayon spectral < 1 dans $\mathscr{L}_A^1(M, M)$.*

Démonstration. On écrit $u = \Sigma\lambda_n x'_n \otimes y_n$ avec $(\lambda_n) = \lambda \in \ell^1$, (x'_n) borné dans $M^\vee$ et (y_n) borné dans M. La famille $(\langle y_n, x'_m\rangle)_{m,n}$ est bornée dans A, donc il existe un disque B borné et multiplicativement stable dans A et un scalaire μ tels que $\langle y_n, x'_m\rangle \in \mu B$ quels que soient m et n. Il existe alors un entier r tel que $|\mu| \sum_{n>r} |\lambda_n| < 1$; on pose $u' = \sum_{n\leqq r} \lambda_n x'_n \otimes y_n$ et

$$u'' = \sum_{n>r} \lambda_n x'_n \otimes y_n. \quad \blacksquare$$

Ce corollaire montre que, sur une algèbre multiplicativement convexe, toute application nucléaire est somme d'une application de rang fini et d'une application $\overline{u''}$ telle que $1 + \overline{u''}$ soit inversible.

Exercice. Si A est multiplicativement convexe, il en est de même de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ pour tout A-module complet M.

Proposition 6. *Considérons deux modules bornologiques complets M et N sur une algèbre bornologique complète multiplicativement convexe A. Soient v un épimorphisme semi-strict de M sur N et u un élément de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$. Le conoyau de $v + \overline{u}$ est un A-module de type fini.* $\blacksquare$

Démonstration. L'application de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ dans $\mathscr{L}_A^1(M, N)$ déduite de v est surjective (n° 4, corollaire 2 de la proposition 5), donc il existe un élément u_1 de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$ tel que $u = v \cdot u_1$, ce qui donne $v + \overline{u} = v \circ (1 + \overline{u}_1)$. Décomposons u_1 en $u'_1 + u''_1$ avec u'_1 de rang fini et u''_1 de rayon spectral < 1; on a $v + \overline{u} = v \circ (1 + \overline{u}_1) = v \circ (1 + \overline{u''_1})(1 + \overline{t}) = v' + \overline{u'}$ avec $t = (1 + \overline{u''_1})^{-1} \cdot u'_1$ élément de rang fini de $\mathscr{L}_A^1(M, M)$, $v' = v \circ (1 + \overline{u''_1}) = v \circ (\overline{1 + u''_1})$ épimorphisme semi-strict et $u' = v \circ t$ élément de rang fini de $\mathscr{L}_A^1(M, N)$. On a $\operatorname{Coker}(v + \overline{u}) = \operatorname{Coker}(v' + \overline{u'})$, et on s'est donc ramené au cas où u est de rang fini; dans ce cas le résultat est évident: les applications composée $M \xrightarrow{-v'} N \longrightarrow \operatorname{Coker}(u + v)$ et $M \xrightarrow{\overline{u}'} N \longrightarrow \operatorname{Coker}(u + v)$ sont égales et la première est surjective tandis que la seconde est de rang fini.

Corollaire. *Soit M un module bornologique complet sur une algèbre bornologique complète A multiplicativement convexe. Si l'application identique id_M de M est A-nucléaire, M est un A-module de type fini.* $\blacksquare$

En effet $M = \operatorname{Coker}(\mathrm{id}_M - \mathrm{id}_M)$ avec id_M épimorphisme strict et nucléaire.

6. Théorème de finitude pour les complexes

On se propose de généraliser le résultat contenu dans le corollaire de la proposition 6 en un théorème de finitude pour des complexes de A-modules bornologiques complets. Ce théorème est lui-même englobé dans le critère de finitude énoncé plus loin, pour les complexes de faisceaux bornologiques complets sur un espace annelé en algèbres bornologiques complètes. Il paraît plus clair de commencer par traiter le cas particulier (correspondant à un espace réduit à un point).

Théorème 1. *Soient A une algèbre bornologique complète multiplicativement convexe et $(M_i^\cdot)_{0 \leqq i \leqq r}$ une suite de complexes de A-modules bornologiques complets (avec des différentielles A-linéaires bornées); soient de plus, pour $1 \leqq i \leqq r$, un homomorphisme de complexes $u_i : M_{i-1}^\cdot \to M_i^\cdot$ (A-linéaire et borné), et des entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leqq b$. On fait les hypothèses suivantes:*

a) *pour tout i, M_i^n possède la proprieté d'homomorphisme pour $n \geqq a$ et est nul pour $n \geqq b$;*

b) *pour $1 \leqq i \leqq r$, u_i est un a-quasi-isomorphisme (cf. [10]) et est A-nucléaire en degré $\geqq a$;*

c) $r \geqq b - a + 1$.

Alors les compexes $M_i^\cdot$ sont a-pseudo-cohérents, (cf. [10]). ∎

Démonstration. Pour $i < j$ on désignera par u_{ji} l'homomorphisme composé $u_j \circ u_{j-1} \circ \cdots \circ u_{i+1}$; on utilisera le lemme suivant:

Lemme 4. *Avec les mêmes données et les mêmes hypothèses, soit de plus $c \in]a, b]$. Supposons que $H^n(M_i^\cdot) = 0$ pour $0 \leqq i \leqq r$ et $n \geqq c$. Alors:*

(i) *Pour $0 \leqq i \leqq r - b + c$ il existe une «homotopie»*

$$h_i : M_i^\cdot \to M_{i+b-c}^\cdot[-1],$$

nucléaire en degré $\geqq a$ et telle que $u_{i+b-c,i} - h_i d - d h_i$ soit nul en degré $\geqq c$.

(ii) *$H^{c-1}(M_i^\cdot)$ est un A-module de type fini.* ∎

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $k = b - c$, c'est à dire par récurrence décroissante sur c. Pour $k = 0$, on prend $h_i = 0$ pour $0 \leqq i \leqq r$. Supposons maintenant que k est au moins égal à 1 et que le résultat est vrai pour $k - 1$; il existe donc, pour $0 \leqq i \leqq r - k$, une homotopie $h'_{i+1} : M_{i+1}^\cdot \to M_{i+k}^\cdot[-1]$ nucléaire en degré $\geqq a$ et telle que $v_{i+1} = u_{i+k,i+1} - h'_{i+1} d - d h'_{i+1}$ soit nul en degré $\geqq c + 1$. Ainsi $d v_{i+1}^c = v_{i+1}^{c+1} d = 0$ et l'image de v_{i+1}^c est donc contenue dans $Z^c(M_{i+k}^\cdot) = B^c(M_{i+k}^\cdot)$; en composant avec l'application nucléaire u_{i+1}^c, on obtient ainsi une application nucléaire de M_i^c dans $B^c(M_{i+k}^\cdot)$. La différentielle de $M_{i+k}^\cdot$

donne une application surjective de M_{i+k}^{c-1} sur $B^c(M_{i+k}^{\cdot})$; comme M_{i+k}^{c-1} possède par hypothèse la propriété d'homomorphisme, cette application est un épimorphisme semi-strict (cf. n° 4), et le corollaire 2 de la proposition 5 (n° 4) montre qu'il existe une application nucléaire $h_i''^c$ de M_i^c dans M_{i+k}^{c-1} telle que

$$dh_i''^c = v_{i+1}^c u_{i+1}^c = u_{i+k,i}^c - h_{i+1}'^{c+1} du_{i+1}^c - dh_{i+1}'^c u_{i+1}^c$$

$$= u_{i+k,i}^c - h_{i+1}'^{c+1} u_i{}_{+1}^{c+1} d - dh_{i+1}'^c u_{i+1}^c$$

Si on pose $h_i^n = h_{i+1}'^n u_{i+1}^n$ pour $n \neq c$ et $h_i^c = h_{i+1}'^c u_{i+1}^c + h_i''^c$ on obtient l'homotopie cherchée.

Démontrons maintenant que $H^{c-1}(M_i^{\cdot})$ est un A-module de type fini. On considère l'homomorphisme $v = u_{b-c+1,1} - h_1 d - dh_1$ de $M_1^{\cdot}$ dans $M_{b-c+1}^{\cdot}$; il est nul en degré $\geqq c$, donc l'image de v^{c-1} est contenue dans $Z^{c-1}(M_{b-c+1}^{\cdot})$. Le composé $w = v \circ u_1$ est un a-quasi-isomorphisme de $M_0^{\cdot}$ dans $M_{b-c+1}^{\cdot}$ qui est nucléaire en degré $\geqq a$ et nul en degré $\geqq c$; en particulier l'image de w^{c-1} est contenue dans $Z^{c-1}(M_{b-c+1}^{\cdot})$ et

$$Z^{c-1}(M_{b-c+1}^{\cdot}) = \operatorname{Im}(w^{c-1}) + dM_{b-c+1}^{c-2}.$$

Considérons les applications (w^{c-1}, d) et $(w^{c-1}, 0)$ de $M_0^{c-1} \oplus M_{b-c+1}^{c-2}$ dans $Z^{c-1}(M_{b-c+1}^{\cdot})$; la première est surjective, donc c'est un épimorphisme semi-strict puisque son espace de définition possède la propriété d'homomorphisme, et la seconde est A-nucléaire. Or $H^{e-1}(M_{b-c+1}^{\cdot})$ s'identifie au conoyau de la différence $(0, d) = (w^{c-1}, d) - (w^{c-1}, 0)$ de ces deux applications; la proposition 6 du numéro 5 permet donc de conclure.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 1 lui-même. On procède par récurrence sur $c-a$, où c vérifie l'hypothèse du lemme 3, c'est à dire que, $H^n(M_i^{\cdot}) = 0$ pour $0 \leqq i \leqq r$ et $n \geqq c$. Lorsque $c - a = 0$, le résultat est clair. Supposons $c - a = l \geqq 1$ et le résultat vrai pour $l-1$; d'après le lemme 4 il existe une application A-linéaire de A^m sur $H^{c-1}(M_0^{\cdot})$ pour m convenable. Comme $H^{c-1}(M_0^{\cdot})$ est un quotient de $Z^{c-1}(M_0^{\cdot})$, on peut relever cette application en $\theta: A^m \to Z^{c-1}(M_0^{\cdot})$ qui s'interprète comme un comme un morphisme du complexe $A^m[1-c]$ (c'est à dire A^m en degré $c-1$, 0 ailleurs) dans $M_0^{\cdot}$; par composition avec les $u_{i,0}$, on obtient, pour $0 \leqq i \leqq r$, un morphisme de complexes $\theta_i = u_{i,0} \circ \theta$ de $A^m[1-c]$ dans $M_i^{\cdot}$. Si $N_i^{\cdot}$ désigne le «cylindre d'application» de θ_i (cf. [14]), il est acyclique en degré $\geqq c-1$; comme $\theta_i = u_i \circ \theta_{i-1}$, u_i définit un morphisme de $N_{i-1}^{\cdot}$ dans $N_i^{\cdot}$, et ce morphisme v_j est un a-quasi-isomorphisme et est nucléaire en degré $\geqq a$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que les complexes $N_i^{\cdot}$ sont a-pseudo-cohérents; comme $A^m[1-c]$ est pseudo-cohérent, les triangles distingués

$$A^m[1-c] \xrightarrow{\theta_i} M_i^{\cdot} \longrightarrow N_i^{\cdot} \longrightarrow A^m[2-c]$$

montrent que les complexes $M_i^{\cdot}$ sont eux aussi a-pseudo-cohérents (cf. [10], Proposition 2.5).

Paragraphe 2. Faisceaux bornologiques

Considérons un corps de base $\mathbb{K}$ valué complet non discret et un espace topologique X (qu'on pourrait remplacer par un site quelconque).

Définition 10. On appelle préfaisceau d'e.b.c. sur X un foncteur contravariant $F: U \mapsto F(U)$ de la catégorie des ouverts U de X (avec les morphismes d'inclusion) dans la catégorie (ebc) des e.b.c. sur le corps $\mathbb{K}$.

On dit qu'un préfaisceau d'e.b.c. F est un faisceau (resp. un semi-faisceau) d'e.b.c. si pour tout e.b.c. E le préfaisceau d'ensembles:

$$U \mapsto \mathscr{L}(E, F(U))$$

est un faisceau (resp. un préfaisceau «séparé»[2]). ∎

Ainsi un préfaisceau d'e.b.c. associe à chaque ouvert U de X un e.b.c. $F(U)$ et à chaque couple d'ouverts (U, V) avec $V \subset U$ une application linéaire bornée de $F(U)$ dans $F(V)$ (restriction); ces applications de restriction sont assujetties à la condition de transitivité habituelle. Comme le foncteur $\mathscr{L}(E, F)$ commute aux limites projectives, on voit que le préfaisceau d'e.b.c. F est un faisceau si et seulement si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ de U, $F(U)$ s'identifie à l'e.b.c. $F(\mathfrak{U})$ noyau de la double flèche $\prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$ définie par les restrictions; autrement dit le préfaisceau d'ensembles sous-jacent à F est un faisceau, et la bornologie de $F(U)$ est induite par celle de $\Pi F(U_i)$. De même, pour que F soit un semi-faisceau d'e.b.c. il faut et il suffit que le préfaisceau d'ensembles sous-jacent soit un semi-faisceau, c'est à dire que $F(U) \to \Pi F(U_i)$ soit injective pour tout ouvert U et tout recouvrement ouvert (U_i) de U. Remarquons que pour tester si un préfaisceau F d'e.b.c. est un faisceau, il suffit de faire varier l'espace test E parmi les espaces semi-normés, puisque tout e.b.c. est limite inductive de tels espaces.

Un morphisme de préfaisceaux d'e.b.c. $F \to G$ est un morphisme fonctoriel, autrement dit un morphisme entre les préfaisceaux d'ensembles sous-jacents tel que $F(U) \to G(U)$ soit linéaire et borné pour tout ouvert U de X.

[2] Au sens de [15]; nous préferons parler de semi faisceau pour éviter la confusion avec la notion, d'ebc. séparé.

Faisceau associé à un préfaisceau. A tout préfaisceau d'e.b.c. F on associe fonctoriellement un faisceau d'e.b.c. $\tilde{F}$ muni d'un morphisme $F \to \tilde{F}$ tel que la composition avec ce morphisme définisse, pour tout faisceau d'e.b.c. G une bijection: $\mathrm{Hom}(\tilde{F}, G) \to \mathrm{Hom}(F, G)$. Le faisceau d'ensembles sous-jacent à $\tilde{F}$ n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau d'ensembles sous-jacent à F, et la construction de $\tilde{F}$ est parallèle à celle de [15]:

a) pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ de U, on pose $F(\mathfrak{U}) = \mathrm{Ker}\left(\prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)\right)$; si $\mathfrak{V}$ est un recouvrement ouvert de U plus fin que $\mathfrak{U}$ on a une application linéaire bornée canonique de $F(\mathfrak{U})$ dans $F(\mathfrak{V})$ définie au moyen de la restriction de F. Lorsque $\mathfrak{U}$ parcourt «l'ensemble» des recouvrements ouverts de U ordonné par l'ordre «plus fin» (pour lequel il est filtrant), les $F(\mathfrak{U})$ forment un système inductif d'e.b.c.

b) On pose $LF(U) = \varinjlim F(\mathfrak{U})$ ($\mathfrak{U}$ recouvrement ouvert de U) pour tout ouvert U de X; pour $V \subset U$, on définit d'une manière évidente une application linéaire bornée de restriction: $LF(U) \to LF(V)$, ce qui définit un préfaisceau d'e.b.c. $LF: U \mapsto LF(U)$. Les morphismes de restriction de F donnent des applications linéaires bornées $F(U) \to F(\mathfrak{U})$ puis $F(U) \to LF(U)$ définissant un morphisme de préfaisceaux d'e.b.c. de F dans LF. Toute cette construction est fonctorielle en F.

c) On sait que LF est un semi-faisceau, car il en est ainsi du préfaisceau d'ensembles sous-jacent. Montrons que si F est un semi-faisceau, LF est un faisceau d'e.b.c.; en effet, pour $\mathfrak{V}$ plus fin que $\mathfrak{U}$ le morphisme de transition $F(\mathfrak{U}) \to F(\mathfrak{V})$ est visiblement injectif, et en passant à la limite inductive on voit que $F(\mathfrak{U}) \to LF(U)$ est injectif. Si E est un espace semi-normé, on en déduit que

$$\mathscr{L}(E, LF(U)) \leftrightarrows \varinjlim \mathscr{L}(E, F(\mathfrak{U})) = LH(U)$$

où H désigne le semi-faisceau d'ensembles: $U \mapsto \mathscr{L}(E, F(U))$; comme LH est un faisceau d'ensembles (cf. [15]), on voit que LF est un faisceau d'e.b.c.

d) Le faisceau associé à F est $\tilde{F} = L(LF)$, et le morphisme canonique de F dans $\tilde{F}$ s'obtient en composant $F \to LF$ avec $LF \to L(LF)$ (caractère fonctoriel de L). Il possède visiblement la propriété universelle voulue.

Notons que le foncteur «faisceau associé»: $F \mapsto \tilde{F}$ est additif et commute aux limites inductives comme tout adjoint à gauche (en particulier il est exact à droite); mais il n'est pas exact à gauche, contrairement à ce qui se passe pour les préfaisceaux d'ensembles. Par exemple si F est un sous-préfaisceau d'e.b.c. de G, de sorte que, pour tout ouvert U de X, $F(U)$ est un sous-espace de $G(U)$ avec la bornologie induite, le morphisme $\tilde{F} \to \tilde{G}$ des faisceaux associés correspondant à l'injection de F dans G est encore injectif, mais la bornologie de $\tilde{F}(U)$ est plus fine en général que celle induite par $\tilde{G}(U)$.

Exercice. Soient (E_i) un système inductif filtrant d'e.b.c., E sa limite inductive et $\varphi_i: E_i \to E$ les morphismes canoniques. On dit que (E_i) est *stable* si pour tout i et tout borné B de E_i tel que $\varphi_i(B)=0$, il existe un indice $j \geqq i$ tel que l'image de B dans E_j soit nulle; par exemple (E_i) est stable si les φ_i sont tous injectifs; si (E_i) est un système inductif stable, et si (F_i) est un autre système inductif d'e.b.c. muni d'un morphisme à valeurs dans (E_i) tel que $F_i \to E_i$ soit injectif pour tout i, alors (F_i) est aussi un système stable.

Soit $\mu = (\mu_i): (E_i) \to (F_i)$ un morphisme de systèmes inductifs filtrants d'e.b.c. (indexés par le même ensemble ordonné). Si (F_i) est stable, le morphisme canonique de $\varinjlim \operatorname{Ker} \mu_i$ dans $\operatorname{Ker}(\varinjlim \mu_i)$ est un isomorphisme.

On dit qu'un préfaisceau d'e.b.c. F sur un espace topologique X est stable si pour tout ouvert U de X le système inductif $(F(\mathfrak{U}))$ ($\mathfrak{U}$ parcourant «l'ensemble» des recouvrements ouverts de U) est stable; par exemple un semi-faisceau, ou un sous-préfaisceau d'un préfaisceau stable est stable. Soit $u: E \to F$ un morphisme de préfaisceaux d'e.b.c. sur X; si F est stable, le morphisme canonique de $(\operatorname{Ker} u)^{\sim}$ dans $\operatorname{Ker} \tilde{u}$ (faisceaux associés) est un isomorphisme.

Questions de séparation et de complétion

Définition 11. On dit qu'un préfaisceau d'e.b.c. F sur X est séparé (resp. complet) si pour tout ouvert U de X l'espace $F(U)$ est séparé (resp. complet) (cf. § 1, *n°* 1, *définition 3).* ▮

Si F est un faisceau, pour qu'il soit séparé (resp. complet), il faut et il suffit qu'il existe une base d'ouverts U de X tels que $F(U)$ soit séparé (resp. complet). En général le faisceau associé à un préfaisceau séparé (ou complet) n'est pas séparé. On a cependant le résultat suivant:

Lemme 5. *Soit F un semi-faisceau d'e.b.c. sur un espace topologique X; si F est séparé (resp. complet), il en est de même du faisceau associé $\tilde{F}$.* ▮

Démonstration. On sait que $\tilde{F} = LF : U \mapsto LF(U) = \varinjlim F(\mathfrak{U})$; pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de U, $F(\mathfrak{U})$ est séparé (resp. complet) comme limite projective d'e.b.c. séparés (resp. complets). Comme F est un semi-faisceau, les morphismes de transition $F(\mathfrak{U}) \to F(\mathfrak{V})$ sont tous injectifs, et on en déduit que $LF(U)$ est encore séparé (resp. complet).

Si F est un faisceau d'e.b.c. et G un sous-faisceau de F, il revient au même de dire que le faisceau quotient F/G est séparé ou que pour tout ouvert U le sous-espace $G(U)$ est fermé dans $F(U)$ (car $U \mapsto F(U)/G(U)$

est un semi-faisceau, donc $F(U)/G(U)$ s'identifie à un sous-espace de $(F/G)(U)$, avec une bornologie éventuellement plus fine); on dit alors que G est un sous-faisceau fermé de F.

Lemme 6. *Soit F un faisceau complet d'e.b.c. sur X; si G est un sous-faisceau fermé de F, il est complet ainsi que F/G.* ▮

Démonstration. Pour tout ouvert U, $G(U)$ est fermé dans $F(U)$ qui est complet; donc $G(U)$ et $F(U)/G(U)$ sont complets; comme

$$U \mapsto F(U)/G(U)$$

est un semi-faisceau, le lemme 5 donne la conclusion pour F/G.

Pour construire un faisceau «complété» associé à un faisceau d'e.b.c. F donné, on se heurte à la difficulté suivante: le préfaisceau $U \mapsto \widehat{F(U)}$ n'est même pas un semi-faisceau en général, et le faisceau associé à ce préfaisceau n'est pas complet. Nous utiliserons la construction auxiliaire suivante: soit N l'intersection des sous-préfaisceaux G de $U \mapsto \widehat{F(U)}$ tels que $U \mapsto \widehat{F(U)}/G(U)$ soit un semi-faisceau séparé (donc complet); on voit facilement que $\Phi\colon U \mapsto \widehat{F(U)}/N(U)$ est encore un semi-faisceau complet et le faisceau associé $\tilde{\Phi} = \hat{F}$ est complet. Il est facile de vérifier que tout morphisme $F \to G$ à valeurs dans un faisceau complet G se factorise d'une manière unique à travers le morphisme canonique de F dans $\hat{F}$. On construit d'une manière analogue le faisceau séparé associé à un faisceau d'e.b.c.; si E est un sous-faisceau d'un faisceau d'e.b.c. F, le plus petit sous-faisceau fermé $\bar{E}$ de F contenant E est le noyau du morphisme canonique de F dans le faisceau séparé associé à F/E. Notons que si F est complet le complété $\hat{E}$ de E s'identifie à sa fermeture $\bar{E}$ dans F.

Faisceaux d'homomorphismes et produits tensoriels. Soient F et G des préfaisceaux d'e.b.c. sur un espace topologique X; l'ensemble des morphismes de F dans G est un sous-espace vectoriel de $\prod_U \mathscr{L}(F(U), G(U))$ (U ouvert de X); la bornologie induite en fait un e.b.c. que nous désignerons par $\mathscr{L}(F, G)$. Si G est séparé (resp. complet), il en est de même de l'espace $\mathscr{L}(F, G)$.

Pour tout ouvert U de X et tout préfaisceau d'e.b.c. F sur X, on désigne par $F_{|U}$ le préfaisceau d'e.b.c. sur $U: V \mapsto F(V)$ (V ouvert de U). Si F et G sont des préfaisceaux sur X on leur associe le préfaisceau d'e.b.c. $\underline{\mathscr{L}}(F, G)\colon U \mapsto \mathscr{L}(F_{|U}, G_{|U})$ (avec des morphismes de restriction évidents); lorsque G est séparé (resp. complet), il en est de même de $\underline{\mathscr{L}}(F, G)$. Lorsque G est un *faisceau*, $\underline{\mathscr{L}}(F, G)$ est un faisceau; en effet si E est un e.b.c. on a une bijection évidente de $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(F_{|U}, G_{|U}))$ sur $\mathscr{L}(F_{|U}, \underline{\mathscr{L}}(E, G_{|U}))$, en désignant par $\underline{\mathscr{L}}(E, G_{|U})$ le préfaisceau:

$$V \mapsto \mathscr{L}(E, G(V))$$

(V ouvert de U), qui est un faisceau si G en est un; on se ramène ainsi au cas des préfaisceaux d'ensembles, pour lesquels le résultat est connu (cf. [15]).

Soient E, F et G trois préfaisceaux d'e.b.c. sur X; un élément de $\mathscr{L}(E, \underline{\mathscr{L}}(F, G))$ s'identifie à la donnée, pour tout ouvert U de X, d'une application bilinéaire bornée de $E(U)\times F(U)$ dans $G(U)$, et cela de manière compatible avec les restrictions dans E, F et G. On en déduit une bijection canonique de $\mathscr{L}(E, \underline{\mathscr{L}}(F, G))$ sur $\mathscr{L}(F, \underline{\mathscr{L}}(E, G))$; cette bijection est un isomorphisme d'e.b.c., et les espaces considérés sont encore isomorphes à l'espace des morphismes du préfaisceau: $U \mapsto E(U)\otimes F(U)$ dans G. De même les préfaisceaux $\underline{\mathscr{L}}(E, \underline{\mathscr{L}}(F, G))$ et $\underline{\mathscr{L}}(F, \underline{\mathscr{L}}(E, G))$ sont canoniquement isomorphes au préfaisceau des homomorphismes de $U \mapsto E(U)\otimes F(U)$ dans G.

Soient E et F des faisceaux d'e.b.c. sur X; on désigne par $E\otimes F$ le faisceau d'e.b.c. associé au préfaisceau: $U \mapsto E(U)\otimes F(U)$. Pour tout faisceau G on a des isomorphismes canoniques: $\mathscr{L}(E\otimes F, G) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}(E, \underline{\mathscr{L}}(F, G))$ et: $\underline{\mathscr{L}}(E\otimes F, G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{L}}(E, \underline{\mathscr{L}}(F, G))$. Si E et F sont séparés, il en est de même de $E\otimes F$, car c'est le faisceau associé à un semi-faisceau séparé $U \mapsto E(U)\otimes F(U)$. Le faisceau complété de $E\otimes F$ est noté $E\hat{\otimes} F$. On laisse au lecteur le soin d'énoncer et d'établir les propriétés d'exactitude des foncteurs «faisceau d'homomorphismes» et «produit tensoriel» que nous venons de décrire.

Images directes et images réciproques. Soit f une application continue d'un espace topologique X dans un autre Y; si F est un faisceau d'e.b.c. sur X, le préfaisceau image directe $f_*(F): V \mapsto F(f^{-1}(V))$ (V ouvert de Y) est encore un faisceau d'e.b.c.; si F est séparé (resp. complet), il en est de même de $f_*(F)$.

Le foncteur image directe f_* de la catégorie des préfaisceaux d'e.b.c. sur X dans celle des préfaisceaux d'e.b.c. sur Y admet un adjoint à gauche $f^{\cdot}$, dont voisi la construction, recopiée dans [15]: si G est un préfaisceau sur Y, $f^{\cdot}(G)$ est le préfaisceau: $U \mapsto \varinjlim_{V\supset f(U)} G(V)$ (U ouvert de X) où la limite inductive est prise dans la catégorie des e.b.c.; le morphisme canonique de G dans $f_* f^{\cdot}(G)$ est évident. Remarquons que $f^{\cdot}(G)$ n'est pas séparé en général, même si G l'est. Par ailleurs le foncteur $f^{\cdot}$ n'est pas exact à gauche, contrairement à ce qui ce passe pour les préfaisceaux d'ensembles. Cependant si pour tout ouvert U de X le système inductif d'e.b.c. $(G(V))_{V\supset f(U)}$ est stable (cf. supra), pour tout morphisme $\varphi: G' \to G$ le morphisme canonique de $f^{\cdot}(\operatorname{Ker}\varphi)$ dans $\operatorname{Ker} f^{\cdot}(\varphi)$ est un isomorphisme; la condition est remplie en particulier lorsque f est une application ouverte.

Pour tout faisceau d'e.b.c. G sur Y, on désigne par $f^{-1}(G)$ le faisceau d'e.b.c. sur X associé àu préfaisceau $f^{\cdot}(G)$; il dépend fonctoriellement de G, et le foncteur f^{-1} est adjoint à gauche du foncteur f_* restreint à la catégorie des faisceaux d'e.b.c. En général f^{-1} n'est pas exact à gauche, mais c'est le cas si $f^\cdot$ est une application ouverte: en effet dans ce cas $f^\cdot$ est exact et $f^\cdot(G): U \mapsto G(f(U))$ est un semi-faisceau, donc il est stable. On ignore si f^{-1} peut être un foncteur exact dans d'autres cas.

Paragraphe 3. Espaces annelés en algèbres bornologiques et espaces analytiques relatifs

1. Généralités

Définition 12. On appelle espace annelé en algèbres bornologiques sur le corps $\mathbb{K}$ un espace topologique X muni d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ d'algèbres bornologiques associatives unifères et commutatives sur $\mathbb{K}$; ainsi $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'e.b.c. sur X avec une loi interne multiplicative $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ associative unifère et commutative. ▮

On appelle Module sur X, ou $\mathcal{O}_X$-Module, un faisceau d'e.b.c. F muni d'une loi externe $\mathcal{O}_X \otimes F \to F$ associative et unifère, c'est à dire faisant de $F(U)$ un $\mathcal{O}_X(U)$-module pour tout ouvert U de X (la donnée de cette loi équivaut à celle d'un morphisme de faisceaux d'algèbres bornologiques de $\mathcal{O}_X$ dans $\underline{\mathcal{L}}(F, F)$).

Si F et G sont des Modules sur X, on leur associe un sous-espace $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ de $\mathcal{L}(F, G)$, dont les éléments sont les morphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires de F dans G; c'est un $\mathcal{O}_X(X)$-module bornologique, complet si G l'est. De même on désigne par $\underline{\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ le sous-faisceau: $U \mapsto \mathcal{L}_{\mathcal{O}_{X|U}}(F_{|U}, G_{|U})$ de $\underline{\mathcal{L}}(F, G)$; c'est un $\mathcal{O}_X$-Module, qui est complet si G l'est (cf. § 1, n° 3).

On définit le produit tensoriel $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ de deux Modules F et G comme le faisceau associe au préfaisceau: $U \mapsto F(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} G(U)$; c'est un $\mathcal{O}_X$-Module qui est un faisceau quotient de $F \otimes G$. Par complétion on obtient le produit tensoriel complété $F \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} G$.

Considérons des espaces annelés en algèbres bornologiques X et Y. Un morphisme des X dans Y est un couple $f = (f_0, f_1)$ où f_0 est une application continue de X dans Y et f_1 un morphisme de faisceaux d'algèbres bornologiques sur Y, de $\mathcal{O}_Y$ dans $(f_0)_*(\mathcal{O}_X)$. La donnée de f_1 équivaut à celle de l'homomorphisme $f_1^{\#}: f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$ sur X. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module F le faisceau image directe $(f_0)_*(F)$ a une structure d'$\mathcal{O}_Y$-Module définie par «restriction des scalaires» au moyen de f_1; nous désignerons cet $\mathcal{O}_Y$-Module par $f_*(F)$. Inversement, si G est un Module sur Y, on lui associe un Module image réciproque $f^*(G)$ sur X ainsi défini: $f_1^{\#}$ fait de $\mathcal{O}_X$ un faisceau de $f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-algèbres bornologiques, et $f_0^{-1}(G)$ est d'une manière naturelle un faisceau de $f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules bornologiques; on pose $f^*(G) = \mathcal{O}_X \otimes_{f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f_0^{-1}(G)$. Il est clair que $f^*(G)$ dépend fonctoriellement de G et que le foncteur f^* ainsi obtenu est adjoint à gauche de f_*. Dans la suite nous considérerons surtout des faisceaux d'algèbres ou de modules complets; si F est un $\mathcal{O}_X$-Module complet, $f_*(F)$ est complet, tandis que $f^*(G)$ n'est pas complet en général (ni même séparé) si G est un $\mathcal{O}_Y$-Module; on est donc conduit à introduire le Module complété $\hat{f}^*(G)=\mathcal{O}_X\hat{\otimes}_{f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y)}f_0^{-1}(G)$ et le foncteur image réciproque complétée $\hat{f}^*$ qui est adjoint à gauche de f_* restreint aux Modules complets.

On définit les *sous-espaces annelés* d'un espace annelé en algèbres bornologiques X de la manière habituelle (cf. [7]). Si U est un ouvert de X, c'est un espace annelé en algèbres bornologiques avec le faisceau structural $\mathcal{O}_U=\mathcal{O}_{X|U}=i^{-1}(\mathcal{O}_X)$ en désignant par i l'injection canonique de U dans X (sous-espace annelé ouvert de X); si $\mathcal{O}_X$ est complet, il en est de même de $\mathcal{O}_U$. Le morphisme canonique $\mathcal{O}_X\to i_*i^{-1}(\mathcal{O}_X)=i_*(\mathcal{O}_U)$ fait de i un morphisme d'espaces annelés en algèbres bornologiques, et tout morphisme $f:Z\to X$ tel que $f(Z)\subset U$ se factorise d'une manière unique à travers i. Soit I un Idéal (c'est à dire un sous-Module de $\mathcal{O}_X$); posons $Y=\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/I)$ et désignons par j l'injection canonique de Y dans X et par $\mathcal{O}_Y$ le faisceau $j^{-1}(\mathcal{O}_X/I)$. Le couple $(Y,\mathcal{O}_Y)$ est un espace annelé en algèbres bornologiques et le morphisme canonique de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X/I$ composé avec celui de $\mathcal{O}_X/I$ dans $j_*j^{-1}(\mathcal{O}_X/I)=j_*(\mathcal{O}_Y)$ fait de j un morphisme d'espaces annelés en algèbres bornologiques; tout morphisme $f:Z\to X$ tel que $f^*(I)\,\mathcal{O}_Z=0$ se factorise d'une manière unique à travers j. On dit que $(Y,\mathcal{O}_Y)$ est le sous-espace annelé défini par l'Idéal I; rappelons que Y est fermé et que $\mathcal{O}_X/I\xrightarrow{\sim}j_*j^{-1}(\mathcal{O}_X/I)=j_*(\mathcal{O}_Y)$. On voit facilement que pour tout ouvert V de Y on a : $j^{\cdot}(\mathcal{O}_X/I)(V)=(\mathcal{O}_X/I)(U)$ où U est n'importe quel ouvert de X tel que $U\cap Y=V$; il en résulte que $j^{\cdot}(\mathcal{O}_X/I)$ est un faisceau sur Y et que $\mathcal{O}_Y=j^{\cdot}(\mathcal{O}_X/I)$. Si de plus $\mathcal{O}_X$ est complet et I est fermé dans $\mathcal{O}_X$, on voit alors que $\mathcal{O}_Y$ est complet.

La catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques admet des *produits fibrés*; si $X\to Z$ et $Y\to Z$ sont des morphismes entre de tels espaces, le produit fibré $X\times_Z Y$ a pour espace topologique sous-jacent le produit fibré topologique, et son faisceau structural est $\mathcal{O}_X\boxtimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}_Y=p^{-1}(\mathcal{O}_X)\otimes_{r^{-1}(\mathcal{O}_Z)}q^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ en désignant par p, q et r les projections de $X\times_Z Y$ dans X, Y et Z respectivement (vérification laissée au lecteur). Plus intéressant est le produit fibré dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes: l'espace topologique sous-jacent est le même, et le faisceau structural est le complété $\mathcal{O}_X\hat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}_Y$ du précédent.

2. Espaces annelés multiplicativement convexes

Définition 13. Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ un espace annelé en algèbres bornologiques. On dit qu'il est multiplicativement convexe si pour tout ouvert U de X et *toute partie bornée B de $\mathcal{O}_X(U)$ l'ensemble des ouverts $U' \subset U$ tels que $B_{|U'}$ soit absorbé par une partie bornée multiplicativement stable de $\mathcal{O}_X(U')$ est un recouvrement de U.* ∎

Il suffit visiblement que la condition soit vérifiée pour une base d'ouverts U.

Dans le cas où l'espace X est réduit à un point, on retrouve la définition des algèbes bornologiques multiplicativement convexes. Un sous-espace annelé ouvert ou un sous-espace annelé fermé défini par un Idéal dans un espace multiplicativement convexe est encore multiplicativement convexe (pour le cas d'un sous-espace annelé fermé Y on observe que si V est un ouvert de Y et B un borné de $\mathcal{O}_Y(V)$, il existe un recouvrement de V par des ouverts U_i de X et des bornés $B_i \subset \mathcal{O}_X(U_i)$ relevant les restrictions $B_{|U_i \cap V}$). Un produit d'espaces multiplicativement convexes X et Y l'est encore; ce résultat est aussi vrai lorsqu'on prend le produit dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes. Pour le voir on observe que $\mathcal{O}_{X \times Y}$ est le faisceau associé au semi-faisceau: $U \times V \mapsto \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_Y(V)$ défini sur la base d'ouverts de $X \times Y$ de la forme $U \times V$ (U ouvert de X, V ouvert de Y); par suite si B est un borné de $(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_Y)(U \times V)$, il existe des recouvrements ouverts (U_i) de U et (V_j) de V et des bornés B_{ij} de $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_Y(V_j)$ qui représentent les restrictions $B_{|U_i \cap V_j}$ ce qui permet de conclure en utilisant l'hypothèse et la description des bornées d'un produit tensoriel d'e.b.c. (cf. [9]); dans le cas où on veut des faisceaux complets, on fait un raisonnement analogue en regardant $\mathcal{O}_X \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y$ comme le faisceau associé à un semi-faisceau quotient du préfaisceau: $U \times V \mapsto \mathcal{O}_X(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y(V)$. On démontre de même qu'un produit fibré d'espaces multiplicativement convexes l'est encore.

Soit X un espace multiplicativement convexe; pour tout compact K de X, l'algèbre bornologique $\mathcal{O}_X(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{O}_X(U)$ est multiplicativement convexe. En effet si B est un borné de $\mathcal{O}_X(K)$ il existe un voisinage ouvert U de K et un borné B' de $\mathcal{O}_X(U)$ représentant B; il existe alors un recouvrement ouvert (U_i) de U tel que $B'_{|U_i}$ soit absorbe par un borné multiplicativement stable de U_i pour tout indice i et on peut extraire de (U_i) une famille finie dont la réunion U' est encore un voisinage de K; il est clair que $B'_{|U'}$ est absorbé par un borné multiplicativement stable de $\mathcal{O}_X(U')$, ce qui donne le résultat.

3. Exemples d'espaces annelés en algèbres bornologiques

1) Soit X un espace topologique séparé. On fait du faisceau $\mathscr{C}_X$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies dans les ouverts de X un faisceau d'algèbres bornologiques; pour tout ouvert U de X, une partie B

de $\mathscr{C}_X(U)$ est dite bornée si c'est un ensemble de fonctions uniformément bornées sur tout compact de U (autrement dit on prend la bornologie canonique associée à la topologie de la convergence compacte). Si X est localement compact ou métrisable, ce faisceau est complet. Comme un borné B de $\mathscr{C}_X(U)$ est multiplicativement stable si ses éléments sont des fonctions majorées par 1 en valeur absolue dans U, on voit facilement que si X est localement compact l'espace annelé $(X, \mathscr{C}_X)$ est multiplicativement convexe.

2) Soit $X = \mathbb{R}^n$ et soit $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n}$ le faisceau des fonctions complexes de classe C^r dans les ouverts de $\mathbb{R}^n (r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une partie B de $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n}$ est bornée si elle est formée de fonctions bornées uniformément sur tout compact de U ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leqq r$; on définit ainsi une bornologie sur les algèbres $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n}(U)$, et $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n}$ devient un faisceau d'algèbres bornologiques complètes. Il en résulte une structure d'espace annelé en algèbres bornologiques complètes sur tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, puis sur toute variété différentiable de classe C^r. Toutes ces structures sont multiplicativement convexes; pour le voir on observe qu'un ensemble borné de fonctions différentiables dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ telles que leurs valeurs absolues restent majorées par une constante $< \frac{1}{2}$ est contenu dans un borné stable par multiplication (formule de Leibniz). Remarquons par ailleurs que si X et Y sont des variétés de classe C^∞, la structure annelée en algèbres bornologiques de la variété produit $X \times Y$ en fait le produit de X et Y dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes (car les $\mathscr{E}_X(U)$ sont nucléaires, et le produit tensoriel ε coïncide avec le produit tensoriel π).

3) Soit $X = \mathbb{C}^n$ et soit $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ le faisceau des fonctions holomorphes dans les ouverts de $\mathbb{C}^n$. C'est un sous-faisceau bornologique complet du faisceau des fonctions continues dans $\mathbb{C}^n$ envisagé dans l'exemple 1 et $(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$ est multiplicativement convexe. On en déduit une structure d'espace annelé multiplicativement convexe sur tout ouvert U de $\mathbb{C}^n$; si $\mathscr{I}$ est un faisceau d'idéaux de type fini de $\mathscr{O}_U$, on montre en utilisant le théorème des voisinages privilégiés de [2] que c'est un sous-faisceau fermé de $\mathscr{O}_U$ et il en résulte que les sous-espace annelé fermé de U défini par $\mathscr{I}$ est encore un espace annelé en algèbres bornologiques complètes multiplicativement convexe. A partir de là on obtient une structure d'espace annelé en algèbres bornologiques complètes multiplicativement convexe sur tout espace analytique complexe.

Le produit $X \times Y$ de deux espaces analytiques complexes est le produit de X et Y dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes (nucléarité des $\mathscr{O}_X(U)$). Si X est réduit, on peut montrer que $\mathscr{O}_X$ est un sous-faisceau bornologique du faisceau des fonctions continues dans X (cf. [2], 10.3, proposition 2).

4) Soit $X = \mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ le faisceau des fonctions complexes analytiques (au sens réel) dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si j désigne l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, il est clair que $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} = j^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$: pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ on a $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(U) = \varinjlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V)$, V parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de U dans $\mathbb{C}^n$. Ceci permet de définir sur $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ une structure de faisceau d'algèbres bornologiques complètes (car si V est connexe et U non vide le morphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(U)$ est injectif); l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ ainsi défini est multiplicativement convexe. Sur tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ la structure précédente induit une structure de même type, et si $\mathcal{J}$ est un Idéal de type fini de $\mathcal{O}_U$, c'est la limite inductive d'un système d'Idéaux de type fini $(\mathcal{J}_V)$ dans les faisceaux $\mathcal{O}_V$ (V voisinage ouvert de U dans $\mathbb{C}^n$); on en déduit que c'est un sous-faisceau fermé de $\mathcal{O}_U$ et le sous-espace annelé fermé correspondant a encore une structure annelée en algèbres bornologiques complètes qui est multiplicativement convexe. On définit enfin une structure de ce type sur tout espace analytique réel (espace annelé localement isomorphe à un sous-espace annelé fermé de présentation finie d'un ouvert de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$).

5) On peut généraliser l'exemple 3 en prenant pour X un espace de Banach complexe et pour $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes dans les ouverts de X. La bornologie de $\mathcal{O}_X$ est définie comme dans le paragraphe 1, n° 2, exemple 4; il est clair que $\mathcal{O}_X$ est complet et multiplicativement convexe. On définit un sous-espace analytique banachique fermé d'un ouvert U de X par une «équation» f, application analytique de U dans un espace de Banach E (cf. [2]); à une telle équation on associe l'Idéal de $\mathcal{O}_U$ formé des $y' \circ f$ où y' parcourt l'ensemble des applications holomorphes de U dans le dual E' de E; malheureusement cet Idéal n'est pas fermé en général, de sorte que la faisceau d'algèbres bornologiques qu'on définit naturellement sur le sous-espace considéré n'est pas complet. Cependant on peut conjecturer que le faisceau obtenu est complet dans le cas où l'équation f prend ses valeurs dans un espace de dimension finie E, c'est à dire où l'Idéal est de type fini.

4. Espaces analytiques relatifs

Considérons un espace annelé en algèbres bornologiques complètes S sur le corps des complexes, et le produit $S \hat{\times} \mathbb{C}^n$ de S par $\mathbb{C}^n$ muni de la structure défine dans l'exemple 3 précédent (avec le faisceau des fonctions holomorphes). Le produit est pris dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes, et son faisceau structural est engendré par le préfaisceau qui prend la valeur $\mathcal{O}_S(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ dans le produit $V \times W$ d'un ouvert V de S par un ouvert W de $\mathbb{C}^n$.

Proposition 7. *Le préfaisceau $V \times W \mapsto \mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ est un semi-faisceau. Si W est un polydisque de $\mathbb{C}^n$, pour tout ouvert V de S, on a*

$$\mathcal{O}_{S\hat{\times}\mathbb{C}^n}(V\times W)=\mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$$

(espace des applications holomorphes de W dans l'e.b.c. complet $\mathcal{O}_S(V)$). ∎

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ est un espace nuléaire pour tout ouvert W de $\mathbb{C}^n$ le produit tensoriel π utilisé pour définir $S\hat{\times}\mathbb{C}^n$ coïncide avec le produit tensoriel ε. Soient (V_i) un recouvrement ouvert d'un ouvert V de S et (W_j) un recouvrement ouvert d'un ouvert W de $\mathbb{C}^n$; on peut écrire:

$$\mathcal{O}_S(V)\simeq\varprojlim(\mathcal{O}_S(V_i),\mathcal{O}_S(V_{ii'}))\quad\text{et}\quad\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\simeq\varprojlim(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_j),\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_{jj'}))$$

(où $V_{ii'}=V_i\cap V_{i'}$ et $W_{jj'}=W_j\cap W_{j'}$). La proposition 3 de ([9], chapitre IV, § 2, n° 2) montre alors que $\mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ s'identifie à un sous-espace bornologique de $\varprojlim(\mathcal{O}_S(V_i)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_j),\mathcal{O}_S(V_{ii'})\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_{jj'}))$ ce qui signifie que le préfaisceau considéré est un semi-faisceau.

Supposons maintenant que W est un polydisque de $\mathbb{C}^n$. Pour tout e.b.c. complet E le produit tensoriel $E\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ n'est autre que l'ensemble des séries $\Sigma a_\nu(z-c)^\nu$ à coefficients $a_\nu\in E$ telles que $(a_\nu r^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^n}$ reste borné dans E pour tout polyrayon $r=(r_i)$ vérifiant $r_i<R_i$ pour $i=1,2,\dots,n$ où c désigne le centre de W et $R=(R_i)$ son polyrayon. Considérons un ouvert V de S et un recouvrement ouvert (V_i) de V; on voit que le diagramme:

$$\mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\to\Pi\,\mathcal{O}_S(V_i)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\rightrightarrows\Pi\,\mathcal{O}_S(V_{ii'})\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$$

est exact (les coefficients des séries se recollent). On termine en prouvant que si (W_j) est un recouvrement de W par des polydisques, le diagramme

$$E\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\to\Pi\,E\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_j)\rightrightarrows\Pi\,E\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_{jj'})$$

est aussi exact pour tout e.b.c. complet E; c'est clair si le recouvrement (W_j) est fini, car on peut alors se ramener à un sous-espace de Banach de E et utiliser l'intégrale de Cauchy pour prouver qu'une fonction localement développable en série l'est globalement dans le polydisque; le résultat est donc vrai dans tout polydisque W' relativement compact dans W, et par suite aussi dans W à cause de l'unicité du développement en série.

Dans la suite nous travaillerons toujours dans la catégorie des espaces annelés en algèbres bornologiques complètes, et en particulier les produits de tels espaces seront calculés dans cette catégorie (avec des produits tensoriels complétés de faisceaux).

Définition 14. On dit qu'un espace annelé en algèbres bornologiques complètes X muni d'un morphisme $\pi: X \to S$ est analytique relativement à S s'il est recouvert par ceux de ses sous-espaces annelés ouverts U qui sont S-isomorphes à des sous-espaces annelés localement fermés d'espaces du type $S \times \mathbb{C}^n$ (n convenable). ▮

Dans cette définition, «sous-espace annelé localement fermé» signifie sous-espace annelé fermé d'un sous-espace ouvert. La restriction «de présentation finie», qui signifie que l'Idéal qui définit le sous-espace fermé est de type fini (cf. [7]), n'est pas nécessairement imposée ici.

On dit que X est analytique *lisse*, de dimension relative n, relativement à S s'il est recouvert par des ouverts U S-isomorphes à des sous-espaces annelés ouverts de $S \times \mathbb{C}^n$.

Proposition 8. a) *Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to S$ des morphismes d'espaces annelés en algèbres bornologiques complètes. Si X est analytique relativement à Y et Y analytique relativement à S, alors X (muni du morphisme $g \circ f$ à valeurs dans S) est analytique relativement à S.*

b) *Soient $X \to S$ un espace analytique relativement à S et $f: S' \to S$ un morphisme d'espaces annelés en algèbres bornologiques complètes. Le produit fibré $X' = S' \times_S X$ est analytique relativement à S'.* ▮

Démonstration. Comme le fait d'être un espace analytique relatif est une propriété locale, on se ramène pour démontrer a) au cas où Y est un sous-espace annelé fermé défini par un Idéal J dans $S \times V$ et X un sous-espace annelé fermé défini par un Idéal I dans $Y \times U$, U et V étant des ouverts de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$ respectivement. Alors il est clair que X est S-isomorphe au sous-espace annelé fermé de $S \times V \times U$ défini par l'Idéal $\overline{I + J\mathcal{O}_{S \times V \times U}}$.

De même il suffit de démontrer b) dans le cas où X est un sous-espace annelé fermé de $S \times U$ (U ouvert de $\mathbb{C}^n$) défini par un Idéal I. On voit alors que X' s'identifie au sous-espace annelé fermé de $S' \times U$ défini par l'Idéal fermé I' de $\mathcal{O}_{S' \times U}$ engendré par I.

Corollaire 1. *Si dans la proposition 8 on remplace l'hypothèse «analytique» par «analytique lisse», les conclusions sont valables avec «analytique lisse».* ▮

Corollaire 2. *Soient $X \to S$ et $Y \to S$ des espaces analytiques (resp. analytiques lisses) relativement à S. Le produit fibré $X \times_S Y$ est analytique (resp. analytique lisse) relativement à S.* ▮

Corollaire 3. *Soient X et Y des espaces analytiques relativement à S. Tout S-morphisme f de X dans Y fait de X un espace analytique relativement à Y.* ▮

Démonstration. On factorise f en le morphisme graphe $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$ suivi de la projection sur Y; celle-ci fait de $X \times_S Y$ un espace analytique relativement à Y, car elle provient par le changement de base $Y \to S$ du morphisme $X \to S$ (proposition 8b). Il reste à prouver que (X, Γ_f) est analytique relativement à $X \times_S Y$; or Γ_f provient du morphisme diagonal $\Delta_{Y/S}$ de Y dans $Y \times_S Y$ par le changement de base $f \times \mathrm{id}_Y$, et on vérifie sans peine que le morphisme diagonal d'un espace analytique relatif est «analytique» (la question étant locale on peut supposer que Y est un sous-espace fermé de $S \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$; alors $\Delta_{Y/S}$ provient de $\Delta_{S \times U/S} : S \times U \to S \times U \times U$ par le changement de base $Y \times_S Y \to S \times U \times U$ et à son tour $\Delta_{S \times U/S}$ provient de $\Delta_U : U \to U \times U$ par le changement de base $S \to e$ espace réduit à un point).

Lorsque S est réduit à un point (avec $\mathbb{C}$ comme faisceau structural) un espace analytique de présentation finie relativement à S s'identifie à un espace analytique complexe ordinaire. La proposition 8a et le corollaire 3 montrent alors que si S est un espace analytique (avec la structure définie dans l'exemple 3 du n° 3), un espace analytique de présentation finie relativement à S n'est autre qu'un espace analytique (ordinaire) X muni d'un morphisme $X \to S$.

Signalons deux cas particuliers intéressants de l'opération de changement de base étudiée dans la proposition 8b: la restriction à un sous-espace ouvert $S' \subset S$ (alors $X' = \pi^{-1}(S')$ est un sous-espace ouvert de X) et la construction d'une fibre $X_s = s \times_S X$; ici s est un espace réduit à un point (faisceau structural $\mathbb{C}$) muni d'un morphisme $s \to S$ dont la donnée équivaut à celle de l'image de l'unique point de s dans S, encore notée s par abus, et d'un homomorphisme borné de $\mathcal{O}_{S,s}$ dans $\mathbb{C}$ (autrement dit un caractère de $\mathcal{O}_{S,s}$). A tout couple d'un point s de S et d'un caractère de $\mathcal{O}_{S,s}$ on associe ainsi une fibre X_s de X qui est un espace analytique ordinaire si X est de présentation finie (et une variété analytique si X est lisse relativement à S).

5. *Cohomologie des espaces analytiques relatifs*

Soient S un espace annelé en algèbres bornologiques complètes et W un polydisque de $\mathbb{C}^n$; désignons par π la projection de $S \times W$ sur S. La proposition 7 signifie que le faisceau image directe $\pi_*(\mathcal{O}_{S \times W})$ s'identifie à $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$. La proposition suivante donne les images directes supérieures.

Proposition 9. *On a $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{S \times W}) = 0$ pour $q \geqq 1$, si S est localement paracompact.* ▮

Démonstration. Le faisceau $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{S \times W})$ est engendré par le préfaisceau:

$$V \mapsto H^q(V \times W, \mathcal{O}_{S \times W}) = \varinjlim_{\mathfrak{V},\mathfrak{W}} H^q(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}, \mathcal{O}_{S \times W})$$

($\mathfrak{V}$ recouvrement ouvert localement fini de V; $\mathfrak{W}$ recouvrement fini de W par des polydisques – on se place pour simplifier dans le cas où W est un polydisque compact). L'espace $H^q(\mathfrak{V}\times\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{S\times W})$ est le q-ième espace de cohomologie du complexe de Čech $C^{\cdot}(\mathfrak{V}\times\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{S\times W})$ qui est donné en degré q par

$$\Pi\, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V_\sigma\times W_\tau) = \Pi\, \mathcal{O}_S(V_\sigma)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W_\tau) \qquad (\dim\sigma=\dim\tau=q)\,.$$

D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber (cf. [5], 3.9.1) ce complexe est homotopiquement équivalent à $C^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes} C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Or $H^q(C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) = H^q(W, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ pour $q\geqq 1$ (théorème de Leray et théorème B) et $H^0(C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$; on en déduit que la première suite spectrale du double complexe précédent est dégénérée: en effet les suites exactes courtes

$$0\longrightarrow Z^q(C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}))\longrightarrow C^q(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})\xrightarrow{d^q} Z^{q+1}(C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}))\longrightarrow 0$$

restent exactes après tensorisation par $C^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_S)$ [à cause de la nucléarité des $Z^q(C^{\cdot}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}))$ et du fait que les d^q sont des morphismes semi-stricts]. Ceci donne $E_{2\,0}^p = H_p(C^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)) \simeq H^p(\mathfrak{V}\times\mathfrak{W}, \mathcal{O}_{S\times W})$.

Fixons maintenant un point s de S et un voisinage ouvert V_0 de s. On a

$$R^p\pi_*(\mathcal{O}_{S\times W})_s = \varinjlim_{\mathfrak{V}}\ \varinjlim_{V\ni s} H^p(C^{\cdot}(\mathfrak{V}\cap V, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W))$$

où $\mathfrak{V}$ parcourt la famille des recouvrements ouverts localement finis de V_0 et V celle des voisinages ouverts de s contenus dans V_0. Or

$$\varinjlim_{V\ni s} H^p(C^{\cdot}(\mathfrak{V}\cap V, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)) = H^p\Big(\varinjlim_{V\ni s} C^{\cdot}(\mathfrak{V}\cap V, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\Big)$$

se calcule ainsi: si

$$\mathscr{A} = \mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W) = \pi_*(\mathcal{O}_{S\times W})$$

on a

$$\varinjlim_{V\ni s} C^p(\mathfrak{V}\cap V, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W) \simeq \Lambda^{p+1}\mathscr{A}_s^n$$

où n est le nombre d'indices i tels que s appartienne à l'ouvert V_i du recouvrement $\mathfrak{V}$, et la différentielle d^p du complexe $C^{\cdot}$ induit un morphisme $\Lambda^{p+1}\mathscr{A}_s^n \to \Lambda^{p+2}\mathscr{A}_s^n$ qui n'est autre que la multiplication extérieure par l'élément $e_1+e_2+\cdots+e_n$, où (e_k) désigne la base canonique de $\mathscr{A}_s^n$ sur $\mathscr{A}_s$; comme cet élément est «unimodulaire», il est bien connu que le complexe obtenu est acyclique (cf. par exemple [13]). Ainsi $H^p\Big(\varinjlim_{V\ni s} C^{\cdot}(\mathfrak{V}\cap V, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)\Big) = 0$ pour $p\geqq 1$, d'où le résultat.

Corollaire 1. *On a* $H^q(S\times W, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}) \simeq H^q(S, \mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W))$. ∎

Démonstration. Par la suite spectrale de Leray.

Notons que si $H^q(S, \mathcal{O}_S)$ admet une bornologie *séparée* «raisonnable», le second membre peut encore s'écrire $H^q(S, \mathcal{O}_S)\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ (nucléarité de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$).

Corollaire 2. *Si* $H^q(S, \mathcal{O}_S)=0$ *on a* $H^q(S\times W, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n})=0$. ∎

Les résultats précédents s'étendent à des faisceaux plus généraux que $\mathcal{O}_{S\times W}$ (cf. [11] et [12]). Indiquons comment se fait cette extension (bien que ce ne soit pas nécessaire pour la démonstration du théorème de finitude). On a besoin d'une version relative du lemme des matrices holomorphes inversibles de Cartan, dans la situation habituelle où

$$K=K_1\times K_2\times\cdots\times K_n$$

est un polydisque compact de $\mathbb{C}^n$, réunion de deux polydisques

$$K'=K_1'\times K_2\times\cdots\times K_n \quad \text{et} \quad K''=K_1''\times K_2\times\cdots\times K_n\,;$$

on pose $K'''=K'\cap K''$. Soit U un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{C}^n$ et soit S un espace annelé en algèbre bornologiques complètes multiplicativement convexe.

Lemme 7. *Soit* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_{S\times U}$*-Module. Si* $\mathcal{L}$ *est libre de type fini au voisinage de* $S\times K'$ *et au voisinage de* $S\times K''$ *on peut recouvrir* S *par des ouverts* V *tels que* $\mathcal{L}$ *soit libre de type fini au voisinage de* $V\times K$. ∎

Démonstration. Soient θ' et θ'' des isomorphismes de $\mathcal{O}^m_{S\times U}$ sur $\mathcal{L}$ au voisinage de $S\times K'$ et de $S\times K''$ respectivement. Au voisinage de $S\times K'''$ ces isomorphismes diffèrent par un facteur a qui est une section du faisceau $GL(m, \mathcal{O}_{S\times U})$. Par des représentations conformes sur chaque facteur de K''' on peut se ramener au cas où K''' est un polydisque au sens strict (produit de disques de rayons respectifs R_i); alors a se développe en série $a=\Sigma a_\nu z^\nu$ avec des coefficients a_ν dans $M_{m^2}(\mathcal{O}_S(S))$ et une condition de convergence: il existe un polyrayon $r\gg R$ tel que $(a_\nu r^\nu)_\nu$ soit borné. Comme S est multiplicativement convexe il est recouvert par des ouverts V pour chacun desquels il existe un disque borné B multiplicativement stable de $\mathcal{O}_S(V)$ qui absorbe les restrictions de $a_{\nu,ij}r^\nu$ à V ($\nu\in\mathbb{N}^n$; $1\leqq i,j\leqq m$). Soit A l'algèbre de Banach engendrée par B dans $\mathcal{O}_S(V)$; la restriction de a au-dessus de V définit une application holomorphe d'un voisinage de K''' dans $\mathrm{GL}(m, A)$ et on sait qu'il existe alors des applications holomorphes a' et a'' à valeurs dans $\mathrm{GL}(m, A)$ et définies respectivement au voisinage de K' et K'' telles que $a_{|V}$ s'identifie à $a''\circ a'^{-1}$ au voisinage de K''' (cf. [2], 6,2). Les éléments a' et a'' définissent des sections de $\mathrm{GL}(m, \mathcal{O}_{S\times U})$ c'est à dire des automorphismes de $\mathcal{O}^m_{S\times U}$ au voisinage de $V\times K'$ et de $V\times K''$ respectivement; ces automorphismes permettent de modifier θ' et θ'' de manière qu'ils se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{O}^m_{S\times U}$ sur $\mathcal{L}$ au voisinage de $V\times K$.

Corollaire. *Soient S un espace annelé multiplicativement convexe et K un polydisque compact de $\mathbb{C}^n$. Considérons un voisinage ouvert U de K et un $\mathcal{O}_{S\times U}$-Module de r-présentation finie $\mathcal{F}$ $(r\in\mathbb{Z})$. On peut recouvrir S par des ouverts V tels que $\mathcal{F}$ admette une r-présentation finie au voisinage de $V\times K$.* ▮

Ce corollaire se démontre par la méthode habituelle (cf. [2], 6,3, théorème 3).

Voici maintenant la forme relative du théorème B au-dessus d'un espace annelé S multiplicativement convexe et localement paracompact.

Proposition 10. *Soit W un polydisque compact de $\mathbb{C}^n$ et soit U un voisinage ouvert de W. Considérons un $\mathcal{O}_{S\times U}$-Module de r-présentation finie $\mathcal{F}$ et un entier $q\geqq 1$; si $r\geqq 2n-q$ on a $R^q\pi_*(\mathcal{F})=0$ en notant π la projection de $S\times W$ sur S.* ▮

Démonstration. D'après le corollaire du lemme 8 on peut supposer que $\mathcal{F}$ admet une r-présentation finie $\mathcal{L}_r\to\cdots\to\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{F}\to 0$ au voisinage de $S\times W$ ($\mathcal{L}_i$ libre de type fini). Comme on a $R^p\pi_*(\mathcal{L}_i)=0$, grâce a la proposition 9, pour tout $p\geqq 1$, on en déduit que $R^q\pi_*(\mathcal{F})\simeq R^{q+r+1}\pi_*(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}=\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_r\to\mathcal{L}_{r-1})$. Si $r\geqq 2n-q$ on a $q+r+1>2n$ et $R^{q+r+1}\pi_*(\mathcal{G})=0$ pour des raisons de dimension.

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{L}_r\to\cdots\to\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{F}\to 0$ une r-présentation finie de $\mathcal{F}$ au voisinage de $S\times W$, avec $r\geqq 2n$. La suite de $\mathcal{O}_S$-Modules $\pi_*(\mathcal{L}_{r-2n})\to\cdots\to\pi_*(\mathcal{L}_1)\to\pi_*(\mathcal{L}_0)\to\pi_*(\mathcal{F})\to 0$ est exacte.* ▮

Corollaire 2. *Supposons que $H^q(S,\mathcal{O}_S)=0$ pour $q\geqq 1$ et $H^q(S,\mathcal{G})=0$ pour $q\geqq d+1$ (avec $d\in\mathbb{N}$) et pour tout $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{S\times U}$-Module admettant une r-présentation finie au voisinage de $S\times W$, on a $H^q(S\times W,\mathcal{F})=0$ pour tout $q\geqq d+2n-r$.* ▮

Démonstration. Ceci résulte du corollaire 1 en observant que $H^q(S,\pi_*(\mathcal{L}_i))=0$ pour $q\geqq 1$ à cause des corollaires 1 et 2 de la proposition 9. En effet la suite spectrale de Leray est dégénérée à cause de la proposition 10 et donne $H^q(S\times W,\mathcal{F})\simeq H^q(S,\pi_*(\mathcal{F}))$.

Corollaire 3. *Avec les hypothèses et les notations du corollaire précédent, supposons de plus que $r\geqq d+2n+1$. Alors*

$$\pi_*(\mathcal{F})\simeq\mathcal{O}_S\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(S)}\mathcal{F}(S\times W)\,. \quad ▮$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}^p_{S\times\mathbb{C}^n}\to\mathcal{O}^q_{S\times\mathbb{C}^n}\to\mathcal{F}\to 0$ une présentation finie de $\mathcal{F}$ au voisinage de $S\times W$. Le corollaire 1 donne la suite exacte de faisceaux: $\pi_*(\mathcal{O}^p_{S\times\mathbb{C}^n})\to\pi_*(\mathcal{O}^q_{S\times\mathbb{C}^n})\to\pi_*(\mathcal{F})\to 0$ et on a $\pi_*(\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n})\simeq\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ encore isomorphe à $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(S)}\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(S\times W)$. Le corollaire 2 donne la suite exacte $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(S\times W)^p\to\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(S\times W)^q\to\mathcal{F}(S\times W)\to 0$, d'où le résultat.

Paragraphe 4. Théorème de finitude

1. Morphismes $\mathcal{O}_S$-nucléaires

Considérons un espace S annelé en algèbres bornologiques complètes et des $\mathcal{O}_S$-Modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Comme au § 1, n° 4, on définit un morphisme canonique de $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}$ dans $\underline{\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, en désignant par $\mathcal{F}^\vee$ le faisceau dual $\underline{\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$; si le faisceau $\mathcal{G}$ est complet ce morphisme se prolonge à $\underline{\mathcal{L}}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F}^\vee \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}$ et on dit que les morphismes $\bar{u}: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ qui proviennent de sections de $\underline{\mathcal{L}}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont *$\mathcal{O}_S$-nucléaires;* le faisceau des morphismes $\mathcal{O}_S$-nucléaires de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est l'image de $\underline{\mathcal{L}}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dans $\underline{\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Si $v: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme $\mathcal{O}_S$-nucléaire, il existe un recouvrement de S par des ouverts U tels que $v_{U'}: \mathcal{F}(U') \to \mathcal{G}(U')$ soit représenté, pour $U' \subset U$, par un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{O}_U) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{S(U)}} \mathcal{G}(U)$, c'est à dire par une série $\Sigma \lambda_n x'_n \otimes y_n$ où $(\lambda_n) \in \ell^1$, (x'_n) est une suite bornée de morphismes de $\mathcal{F}_{|U}$ dans $\mathcal{O}_U$ et (y_n) une suite bornée de sections de $\mathcal{G}$ dans U. Pour toute section x de $\mathcal{F}$ dans un ouvert U' contenu dans U on a $v_{U'}(x) = \Sigma \lambda_n \langle x, x'_{n,U'} \rangle y_{n|U'}$ avec au second membre une série convergente dans $\mathcal{G}(U')$.

Nous dirons qu'un morphisme $u: \mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ de $\mathcal{O}_S$-Modules est un épimorphisme *semi-strict* si pour tout ouvert U de S et toute suite bornée (z_n) de sections de $\mathcal{G}_1$ dans U, il existe un recouvrement de U par des ouverts U' dans chacun desquels on peut relever $(z_{n|U'})$ en une suite bornée (y_n) d'éléments de $\mathcal{G}(U')$. Par exemple un épimorphisme strict est semi-strict. Si u est un épimorphisme semi-strict le morphisme correspondant de $\underline{\mathcal{L}}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dans $\underline{\mathcal{L}}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1)$ est surjectif, et pour tout morphisme nucléaire v de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}_1$ on peut recouvrir S par des ouverts U pour chacun desquels il existe un morphisme nucléaire w de $\mathcal{F}_{|U}$ dans $\mathcal{G}_{|U}$ vérifiant $v_{|U} = u_{|U} \circ w$ (cf. § 1, n° 4, corollaire 2 de la proposition 5).

Le corollaire du lemme 3 (§ 1, n° 5) admet la généralisation suivante: on considère un espace annelé multiplicativement convexe S et un $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{F}$; si v est un endomorphisme nucléaire de $\mathcal{F}$ il existe un recouvrement de S par des ouverts U pour chacun desquels on peut décomposer $v_{|U}$ en une somme $v' + v''$ où v' est un endomorphisme de rang fini de $\mathcal{F}_{|U}$ (c'est à dire qu'il se factorise à travers un Module libre de type fini) et v'' est un endomorphisme tel que $1 + v''$ soit inversible. Comme au n° 5 du § 1 on en déduit:

Proposition 6'. *Considérons de Modules bornologiques complets sur un espace annelé S multiplicativement convexe. Soient v un épimorphisme semi-strict et u un morphisme nucléaire du premier de ces Modules dans l'autre. Le conoyau de $v + u$ est un $\mathcal{O}_S$-Module de type fini.* ∎

Corollaire. *Tout Module dont l'endomorphisme identique est nucléaire est de type fini.* ∎

Voici deux résultats permettant d'affirmer que certains épimorphismes de faisceaux sont semi-stricts.

Lemme 8. *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des faisceaux d'e.b.c. sur un espace topologique S et $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un morphisme linéaire borné et surjectif. On suppose que pour tout point s de S la fibre $\mathscr{F}_s$ de $\mathscr{F}$ possède la propriété d'homomorphisme et la fibre $\mathscr{G}_s$ de $\mathscr{G}$ est un e.b.c. complet. Alors u est semi-strict.* ▮

Démonstration. Pour tout point s le morphisme $u_s:\mathscr{F}_s\to\mathscr{G}_s$ est surjectif, donc semi-strict. Si (x_n) est une suite bornée de sections de $\mathscr{G}$ dans un ouvert U de S et si $s\in U$ on peut donc relever la suite des germes $(x_{n,s})$ en une suite bornée dans $\mathscr{F}_s=\varinjlim_{V\ni s}\mathscr{F}(V)$; cette suite provient alors d'une suite bornée dans $\mathscr{F}(V)$ pour un voisinage ouvert V assez petit de s.

Lemme 9. *Soit $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux d'e.b.c. sur un espace topologique S; on suppose que $\mathscr{G}$ est complet et que u est surjectif. S'il existe une base d'ouverts U de S tels que $H^1(U,\operatorname{Ker}u)=0$ et que $\mathscr{F}(U)$ possède la propriété d'homomorphisme, alors u est semi-strict.*

Démonstration. Soient V un ouvert de S et (x_n) une suite bornée d'éléments de $\mathscr{G}(V)$. Comme $\mathscr{G}$ est engendré par son sous-préfaisceau $U\mapsto u(\mathscr{F}(U))$, il existe un recouvrement ouvert (V_i) de V tel que $x_{n|V_i}$ appartienne à $u(\mathscr{F}(V_i))$ pour tout n et tout i. On peut choisir les V_i tels que $H^1(V_i,\operatorname{Ker}u)=0$ et que $\mathscr{F}(V_i)$ possède la propriété d'homomorphisme; alors $u(\mathscr{F}(V_i))=\mathscr{G}(V_i)$ est complet, donc $(x_{n|V_i})_n$ se relève en une suite bornée dans $\mathscr{F}(V_i)$.

L'analogue du théorème 1 (§ 1, n° 6) s'énonce ainsi:

Théorème 1'. *Soient S un espace annelé en algèbres bornologiques complètes multiplicativement convexe et $(\mathscr{F}_i^{\cdot})_{0\leqq i\leqq r}$ une suite de complexes de $\mathcal{O}_S$-Modules bornologiques complets; soient de plus, pour $1\leqq i\leqq r$, un morphisme de complexes $u_i:\mathscr{F}_{i-1}^{\cdot}\to\mathscr{F}_i^{\cdot}$ et des entiers $a,b\in\mathbf{Z}$, avec $a\leqq b$. On fait les hypothèses suivantes:*

a) *Pour tout i et tout $s\in S$, $\mathscr{F}_{i,s}^n$ est séparé et possède la propriété d'homomorphisme pour $n\geqq a$ et est nul pour $n\geqq b$ (resp. $\mathscr{F}_i^n=0$ pour $n\geqq b$, et pour tout épimorphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire borné $v:\mathscr{F}_i^m\to Z^n(\mathscr{F}_j^{\cdot})$ avec $m\geqq a$ il existe une base d'ouverts U de S tels que $H^1(U,\operatorname{Ker}v)=0$ et que $\mathscr{F}_i^m(U)$ possède la propriété d'homomorphisme);*

b) *pour $1\leqq i\leqq r$, u_i est un a-quasi-isomorphisme et est $\mathcal{O}_S$-nucléaire en degré $\geqq a$;*

c) $r\geqq b-a+1$.

Alors les complexes $\mathscr{F}_i^{\cdot}$ sont a-pseudo-cohérents. ▮

Démonstration. Elle repose sur le lemme suivant:

Lemme 4'. *Avec les mêmes données et les mêmes hypothèses, soit de plus $c \in]a, b]$. Supposons que $H^n(\mathscr{F}_i^{\cdot}) = 0$ pour $0 \leqq i \leqq r$ et $n \geqq c$. Alors:*

(i) *Il existe un recouvrement de S par des ouverts U pour lesquels on a, pour $0 \leqq i \leqq r - b + c$, une «homotopie» $h_i : \mathscr{F}_{i|U}^{\cdot} \to \mathscr{F}_{i+b-c}^{\cdot}[-1]_{|U}$ nucléaire en degré $\geqq a$ et telle que $u_{i+b-c,i} - h_i d - d h_i$ soit nul dans U en degré $\geqq c$.*

(ii) *$\mathscr{H}^{c-1}(\mathscr{F}_i^{\cdot})$ est un $\mathscr{O}_S$-Module de type fini.*

La démonstration du lemme 4' est identique à celle du lemme 4 à ceci près que l'on doit rétrécir à chaque pas l'ouvert de S dans lequel on travaille.

2. Application aux espaces analytiques relatifs

Lemme 10. *Considérons un espace annelé en algèbres bornologiques complètes S et des polydisques U et U' de centre 0 et de polyrayons respectifs r et r' dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que $r' \ll r$ et on désigne par π et $\pi' = \pi \circ (\mathrm{id}_S \times j)$ les projections respectives de $S \times U$ et $S \times U'$ sur S ($j: U' \to U$ est l'injection naturelle). Le morphisme de restriction: $\pi_*(\mathscr{O}_{S \times U}) \to \pi'_*(\mathscr{O}_{S \times U'})$ (obtenu en appliquant π_* à $\mathscr{O}_{S \times U} \to (\mathrm{id}_S \times j)_*(\mathscr{O}_{S \times U'})$) est $\mathscr{O}_S$-nucléaire.* ▌

Démonstration. En utilisant la proposition 7 on voit que le morphisme considéré s'obtient par extension des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathscr{O}_S$ à partir de la restriction: $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U')$ qui est $\mathbb{C}$-nucléaire, comme c'est bien connu.

Remarque. L'argument d'extension des scalaires utilisé ci-dessus se formule ainsi d'une manière plus générale: on considère un morphisme $f: S' \to S$ d'espaces annelés en algèbres bornologiques complètes et des $\mathscr{O}_S$-Modules $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$; on pose $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_{S'} \hat{\otimes}_{f^{-1}(\mathscr{O}_S)} f^{-1}(\mathscr{F})$ et de même pour les autres faisceaux sur S. Alors on a un morphisme canonique $\underline{\mathscr{L}}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})' \to \underline{\mathscr{L}}^1_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')$ compatible avec $\underline{\mathscr{L}}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})' \to \underline{\mathscr{L}}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')$ (et fonctoriel en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$).

Pour calculer l'image directe au sens des catégories dérivées d'un complexe pseudo-cohérent sur un espace analytique relatif propre, nous appliquons la méthode de [4] qui consiste à utiliser des résolutions libres de type fini dans des cartes locales. Cette construction s'exprime bien au moyen du *topos des cartes locales* que nous allons introduire maintenant. Considérons un espace annelé en algèbres bornologiques complètes S et un espace analytique relatif $\pi: X \to S$. Soit $L(X/S)$ la catégorie des S-immersions fermées $f: U \to V$ où U est un ouvert de X et V un espace analytique lisse relativement à S; un morphisme φ de $f: U \to V$ dans $f': U' \to V'$ ne peut exister que si U est contenu dans U'

et c'est un S-morphisme de V dans V' tel que $\varphi \circ f = f'_{|U}$; la composition des morphismes est évidente. On munit cette catégorie de la topologie (cf. [15]) pour laquelle les familles couvrantes de $U \to V$ sont les $(U_i \to V_i)$ où (V_i) est un recouvrement ouvert de V et (U_i) le recouvrement induit par (V_i) sur U. Cette topologie fait de $L(X/S)$ un *site*, et nous désignerons par $X_{l/S}$ le topos des faisceaux sur ce site ([15]); on peut vérifier que la donnée d'un faisceau $\mathscr{G}$ de $X_{l/S}$ équivaut à l'ensemble des données suivantes:

1° Pour toute «carte locale» $f: U \to V$ de X, un faisceau $\mathscr{G}_f$ sur V;

2° pour tout morphisme $\varphi: f \to f'$ de cartes, un morphisme de faisceaux

$$\mathscr{G}_\varphi : \varphi^{-1}(\mathscr{G}_{f'}) \to \mathscr{G}_f \quad \text{sur} \quad V;$$

ces données sont soumises à deux conditions:

a) Si φ est une immersion ouverte $\mathscr{G}_\varphi$ est un isomorphisme, et c'est l'identité si φ est l'identité d'une carte;

b) si $\varphi: f \to f'$ et $\psi: f' \to f''$ sont des morphismes de cartes on a

$$\mathscr{G}_{\psi \cdot \varphi} = \mathscr{G}_\varphi \circ \varphi^{-1}(\mathscr{G}_\psi).$$

(Le faisceau $\mathscr{G}_f$ prend la valeur $\mathscr{G}(f^{-1}(W) \to W)$ dans l'ouvert W de V et $\mathscr{G}_\varphi$ est défini par les opérations de restriction de $\mathscr{G}$). On laisse au lecteur le soin d'expliciter en termes des faisceaux $\mathscr{G}_f$ les morphismes de $X_{l/S}$.

Le faisceau $\mathscr{O}_{X_{l/S}}$ qui prend la valeur $\mathscr{O}_V(V)$ en une carte $f: U \to V$ fait des $X_{l/S}$ un *topos annelé*; on a $(\mathscr{O}_{X_{l/S}})_f = \mathscr{O}_V$. Le morphisme de sites qui transforme la carte locale $f: U \to V$ en l'ouvert U de X est sous-jacent à une immersion fermée canonique $j: X \to X_{l/S}$; le foncteur image directe correspondant est défini par $j_*(\mathscr{F})_f = f_*(\mathscr{F}_{|U})$ pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X, et c'est un foncteur exact. Le morphisme structural π de X dans S se prolonge en $\pi_l: X_{l/S} \to S$ défini à l'aide des morphismes structuraux $\pi_f: V \to S$; le foncteur image directe correspondant est défini par:

$$\pi_{l_*}(\mathscr{G})(S') = \varprojlim_f \mathscr{G}(U \cap \pi^{-1}(S') \xrightarrow{f} \pi_f^{-1}(S'))$$

pour tout faisceau $\mathscr{G}$ de $X_{l/S}$ (limite projective sur les cartes locales $f: U \to V$ de X). Plus généralement, si $X \to Y$ est un S-morphisme d'espaces analytiques relativement à S, on lui associe un S-morphisme de topos annelés $X_{l/S} \to Y_{l/S}$; ainsi $X_{l/S}$ dépend fonctoriellement de X. De plus la construction de $X_{l/S}$ est compatible avec le changement de base; si $S' \to S$ est un morphisme d'espaces annelés en algèbres bornologiques complètes, et si on affecte de $'$ les objets au-dessus de S' déduits d'objets au-dessus de S par le changement de base défini par ce morphisme, on a $(X_{l/S})' \simeq X'_{l/S'}$ et l'immersion j' de X' dans $X'_{l/S'}$ provient par changement de base de l'immersion $j: X \to X_{l/S}$.

Définition 15. Soient X un espace analytique relativement à S, $\mathscr{F}^{\cdot}$ un complexe de $\mathcal{O}_X$-Modules et n un entier. On dit que $\mathscr{F}$ est n-pseudo-cohérent relativement à S (resp. pseudo-cohérent relativement à S) si $j_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ est n-pseudo-cohérent (resp. pseudo-cohérent) sur $X_{l/S}$ (cf. [10], *exposé III).* ∎

Les lemmes suivants donnent deux types de résolutions pour des complexes sur un espace analytique relatif *propre* X (propre au sens topologique).

Lemme 11. *Considérons un espace analytique relatif propre $\pi: X \to S$ et un complexe de $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{F}$ borné à droite. On peut recouvrir S par des ouverts S' pour chacun desquels il existe un complexe borné à droite $\mathscr{M}^{\cdot}$ de Modules π_*-acycliques sur $X' = S' \times_S X$ et un quasi-isomorphisme $\mathscr{F}^{\cdot}_{|X'} \xrightarrow{\approx} \mathscr{M}^{\cdot}$.*

On trouvera la démonstration dans [12] (Lemma 5.4). ∎

Lemme 12. *Soit $\pi: X \to S$ un espace analytique relatif propre. Il existe un recouvrement ouvert $(S_i)_{i \in I}$ de S et une famille d'entiers naturels $(d_i)_{i \in I}$ possédant la propriété suivante:*

Si $\mathscr{G}^{\cdot}$ est un complexe n-pseudo-cohérent de Modules sur $X_{l/S}$ nul en degré $\geqq b$, on peut recouvrir S_i par des ouverts S' pour chacun desquels il existe: a) *un hyper-recouvrement fini $p: \tilde{X} \to (X_{l/S})' = \pi_l^{-1}(S')$ où $\tilde{X}_k$ est pour tout k une somme de cartes locales de X à valeurs dans des espaces de la forme $S' \times W$ avec W polydisque de polyrayon $(r, r, \ldots, r)$ (r indépendant de la carte) et $\tilde{X}_k$ est vide pour $k \geqq d_i$;*

b) *un complexe de Modules $\mathscr{L}^{\cdot}$ sur $\tilde{X}$ libre de type fini en chaque degré et nul en degré $\geqq b$;*

c) *un n-quasi-isomorphisme de $\mathscr{L}^{\cdot}$ dans $p^{-1}(\mathscr{G}^{\cdot})$.* ∎

Ce résultat est établi dans [4] (II, 4, Lemma $R(n)$). On pourra aussi consulter [16]. Rappelons seulement qu'un hyper-recouvrement d'un topos est un objet simplicial de ce topos (augmenté vers le faisceau final) et vérifiant des conditions explicitées dans [15] (appendice à l'exposé *V*) et dans [16].

Définition 16. On dit qu'un espace annelé en algèbre bornologiques complètes est admissible s'il est localement paracompact et multiplicativement convexe et s'il possède l'une des deux propriétés suivantes:

1) *Pour tout $s \in S$ la fibre $\mathcal{O}_{S,s}$ du faisceau structural est un e.b.c. séparé et $\mathcal{O}_{S,s} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ possède la propriété d'homomorphisme pour tout polydisque W de $\mathbb{C}^n$.*

2) *Pour toute suite exacte $0 \to \mathscr{E} \to \mathcal{O}_S \hat{\otimes} E^0 \to \mathcal{O}_S \hat{\otimes} E^1 \to \mathcal{O}_S \hat{\otimes} E^2$ de $\mathcal{O}_S$-Modules où les E^i sont de la forme $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n_i}}(W_i))^{k_i}$ avec W_i polydisque de $\mathbb{C}^{n_i}$ et k_i entier, il existe une base d'ouverts U de S tels que $H^1(U, \mathscr{E}) = 0$ et que $\Gamma(U, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} E^0)$ possède la propriété d'homomorphisme.* ∎

Par exemple si S est un espace analytique complexe, un espace analytique réel, une variété analytique banachique, un espace topologique localement compact ou une variété différentiable, c'est un espace admissible (la propriété 1 est vérifiée dans les trois premiers cas grâce au principe du prolongement analytique, tandis que les deux derniers types d'espaces possèdent la propriété 2 de la définition à cause du fait que le faisceau structural est fin pour ces espaces; on renvoie à l'appendice pour la propriété d'homomorphisme). Il semble probable qu'un espace analytique relativement à un espace admissible est encore admissible.

Théorème 2. *Considérons un espace annelé en algèbres bornologiques complètes S, un S-morphisme propre $f: X \to Y$ d'espaces analytiques relativement à S et un complexe borné à droite $\mathscr{F}^{\cdot}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules. Si Y est admissible et $\mathscr{F}^{\cdot}$ pseudo-cohérent relativement à S l'image directe $\mathbb{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ est un complexe pseudo-cohérent relativement à S (image directe au sens des catégories dérivées, cf.* [14]*).* ▮

Démonstration. Comme la question est locale sur Y, on peut supposer que Y est un sous-espace annelé fermé de $S \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$; on peut alors remplacer Y par $S \times U$ au-dessus duquel X est un espace analytique relatif propre. Enfin on est ramené au cas où $Y = S$.

Nous supposerons donc que $f: X \to S$ est un espace analytique relatif propre, avec S admissible, et il faut montrer que $\mathbb{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ est un complexe pseudo-cohérent sur S. D'après le lemme 11 on peut supposer que $\mathscr{F}^{\cdot}$ est f_*-acyclique en chaque degré; de plus on peut supposer que S est l'un des S_i du lemme 12, et on pose $d = d_i$. Si a est un entier donné, il existe d'après de lemme 12 un recouvrement de S par des ouverts S' pour chacun desquels on a un hyper-recouvrement $\tilde{X}$ de $(X_{l/S})'$ du type indiqué, un complexe borné à droite $\mathscr{L}^{\cdot}$ libre de type fini en chaque degré sur $\tilde{X}$ et $(a-d)$-quasi-isomorphe à $p^{-1}j_*(\mathscr{F}^{\cdot})$. Comme f est propre, il existe un nombre $r' < r$ (rayon des polydisques intervenant dans $\tilde{X}$) tel que pour tout r'' compris entre r' et r le «rétrécissement» $\tilde{X}_{r''}$ de $\tilde{X}$, obtenu en remplaçant chaque polydisque W intervenant dans $\tilde{X}$ par le polydisque concentrique de rayon r'', soit encore un hyper-recouvrement de $(X_{l/S})'$; nous désignerons par $p_{r''}$ l'augmentation de $\tilde{X}_{r''}$ et par $\mathscr{L}^{\cdot}_{r''}$ la restriction de $\mathscr{L}^{\cdot}$ à $\tilde{X}_{r''}$, qui est $(a-d)$-quasi-isomorphe à $p_{r''}^{-1}j_*(\mathscr{F}^{\cdot})$.

Pour tout r'' compris entre r' et r l'image directe $\mathbb{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot}) = \mathbb{R}f_{l*} \circ j_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ est a-quasi-isomorphe à $\mathbb{R}(f_l \circ p_{r''})_*(\mathscr{L}^{\cdot}_{r''})$ en vertu de ce qui précède. D'après la proposition 9 (§ 3, n° 5) ce dernier complexe n'est autre que le complexe simple associé à $(f_l \circ p_{r''})_*(\mathscr{L}^{\cdot}_{r''})$ et chacun de ses termes est une somme directe finie de faisceaux de la forme $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W)$ où W est un polydisque de rayon r''. D'après le lemme 10 le morphisme de restriction de $\mathbb{R}(f_l \circ p_{r''})_*(\mathscr{L}^{\cdot}_{r''})$ dans $\mathbb{R}(f_l \circ p_{r'''})_*(\mathscr{L}^{\cdot}_{r'''})$ est nucléaire en chaque degré si $r''' < r''$, et chacun de ces complexes est nul en degré $\geqq b$ si b est choisi tel que $\mathscr{F}^{\cdot}$ soit nul en degré $\geqq b-d$. Choisissons des nombres $r_1 > r_2 > \cdots > r_{b-a+1} \geqq r'$ strictement inférieurs à r; le théorème 1' appliqué aux complexes $\mathbb{R}(f_l \circ p_{r_i})_* (\mathscr{L}^{\cdot}_{r_i})$ et aux morphismes de restriction donne le résultat que $\mathbb{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ est a-pseudo-cohérent sur S', ce qui démontre le théorème 2 puisque a est arbitraire.

Appendice

La propriété d'homomorphisme

Définition 1. Soit E un e.b.c. sur un corps complet $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie A de E est maigre si pour tout disque borné B de E l'ensemble $A \cap E_B$ est maigre dans l'espace semi-normé E_B. ▮

Il est clair qu'une réunion dénombrable de parties maigres de E est encore maigre. Si E est complet il n'est pas maigre.

Définition 2. On dit qu'un e.b.c. E possède la propriété d'homomorphisme (resp. la propriété d'homomorphisme forte) si pour tout e.b.c. complet F toute application linéaire bornée u de E dans F telle que $u(E)=F$ (resp. $u(E)$ ne soit pas maigre) est un épimorphisme semi-strict. ▮

Le théorème classique des homomorphismes de Banach montre, en tenant compte de la condition de convergence de Mackey (cf. [9], chapitre II, § 3, n° 4), que tout espace de Fréchet possède la propriété d'homomorphisme forte.

Proposition 1. a) *Si un e.b.c. complet E possède la propriété d'homomorphisme il en est de même de tout sous-espace fermé E_1 de E.*

b) *Soit E un e.b.c.; supposons qu'il existe une suite (E_n) d'e.b.c. possédant la propriété d'homomorphisme forte et une suite (u_n) d'applications linéaires bornées $u_n: E_n \to E$ telles que $\bigcup_n u_n(E_n) = E$. Alors E possède la propriété d'homomorphisme forte.* ▮

Démonstration. a) Considérons un e.b.c. complet F et une application linéaire bornée et surjective $u_1: E_1 \to F$. La *somme amalgamée* $G = E \oplus_{E_1} F$, quotient de $E \times F$ par le graphe de $-u_1$, est un e.b.c. complet puisque le graphe considéré est fermé dans $E_1 \times F$ (F séparé) donc aussi dans $E \times F$ (E_1 fermé dans E). On vérifie facilement que l'application canonique u de E dans G est surjective tandis que $j: F \to G$ identifie F à un sous-espace de G; par ailleurs E_1 s'identifie au produit fibré de E et de F au-dessus de G. Si (y_n) est une suite bornée d'éléments de F, son image dans G se relève en une suite bornée (x_n) d'éléments de E puisque E possède par hypothèse la propriété d'homomorphisme; alors (x_n) est une suite bornée de E_1.

b) Soit u une application linéaire bornée, de E dans un e.b.c. complet F; supposons que $u(E)$ ne soit pas maigre. Comme $u(E)$ est réunion des

$u \circ u_n(E_n)$ il existe un indice n tel que $u \circ u_n(E_n)$ ne soit pas maigre; alors $u \circ u_n$ est un épimorphisme semi-strict, et si (y_k) est une suite bornée d'éléments de F elle se relève en une suite bornée (z_k) dans E_n. Enfin $(u_n(z_k))_k$ est une suite bornée d'éléments de E qui relève (y_k).

Corollaire. *Toute limite inductive filtrante dénombrable d'espaces possédant la propriété d'homomorphisme forte la possède aussi.* ∎

Ainsi une limite inductive filtrante dénombrable d'espaces de Fréchet possède la propriété d'homomorphisme forte, et il en est ainsi en particulier d'un e.b.c. complet qui admet un système fondamental dénombrable de bornés. Si E et F sont des limites inductives dénombrables d'espaces de Fréchet, leur produit tensoriel complété $E \hat{\otimes} F$ est quotient d'une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet, donc il possède la propriété d'homomorphisme forte. Ceci s'applique en particulier si F est l'espace des fonctions holomorphes dans un polydisque et E l'espace des germes de fonctions analytiques au voisinage d'un point d'une variété analytique banachique ou d'un espace analytique réel ou complexe, ou encore l'espace des fonctions continues (resp. différentiables) dans un ouvert dénombrable à l'infini d'un espace topologique localement compact (resp. d'une variété différentiable). Ce sont les propriétés nécessaires pour pouvoir appliquer les résultats du § 4, n° 2 aux cas classique ($S =$ espace topologique localement compact, variété différentiable, espace analytique réel ou complexe, variété analytique banachique).

Nous donnons pour terminer la traduction bornologique de certains résultats de de Wilde ([17]) en rapport avec la propriété d'homomorphisme. On désignera par $\mathbb{M}$ le monoïde libre engendré par $\mathbb{N}$, c'est à dire l'ensemble des suites d'entiers naturels; la loi de composition de $\mathbb{M}$ sera notée avec une virgule: μ, ν (μ et ν éléments de $\mathbb{M}$) et son élément neutre est la suite vide $\emptyset$.

Définition 3. Soit E un e.b.c.; on appelle réseau absorbant dans E une famille $(R_\nu)_{\nu \in \mathbb{M}}$ de parties de E satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $R_\emptyset = E$;

b) *pour tout* $\nu \in \mathbb{M}$ *on a* $R_\nu \subset \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} m R_{\nu,n}$;

c) *si* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est une suite d'entiers naturels toute suite* (x_k) *d'éléments de E telle que* $x_k \in R_{n_0,\ldots,n_k}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *est sommable au sens de Mackey.* ∎

Par exemple si E est un espace de Banach dont B est la boule unité, on obtient un réseau absorbant dans E en posant $R_\emptyset = E$ et $R_\nu = B/2^{|\nu|}$, où $|\nu|$ désigne la longueur de ν (définite par $|n_0, n_1, \ldots, n_k| = k$), pour $\nu \neq \emptyset$. De même tout espace de Fréchet admet un réseau absorbant.

Proposition 2. a) *Soient E un e.b.c. et E_1 un sous-espace fermé de E; si (R_ν) est un réseau absorbant dans E, $(R_\nu \cap E_1)$ est un réseau absorbant dans E_1.*

b) *Soit E un e.b.c.; supposons qu'il existe une suite (E_n) d'e.b.c. admettant chacun un réseau absorbant $(R_\nu^{(n)})_\nu$ et une suite (u_n) d'applications linéaires bornées $u_n: E_n \to E$ telles que $\bigcup_n u_n(E_n) = E$. Posons $S_\emptyset = E$ et $S_{n,\nu} = \bigcup_{p+q=n} u_p(R_{q,\nu}^{(p)})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\nu \in \mathbb{M}$; alors (S_ν) est un réseau absorbant dans E.* ∎

La vérification de cette proposition ne présente pas de difficulté.

Théorème (de Wilde, [17]). *Soient E un e.b.c. admettant un réseau absorbant (R_ν) et u une application linéaire bornée de E sur un e.b.c. complet F. Pour tout disque absorbant U fermé au sens de Mackey dans E l'image $u(U)$ de U par u absorbe tout borné de F.* ∎

Démonstration. Soit B un disque borné complétant de F; par récurrence sur k on construit une suite (n_k) d'entiers naturels tels que, pour tout k, $u\left(\frac{1}{2^k} U \cap R_{n_0,\ldots,n_{k-1}}\right) \cap F_B$ soit non maigre dans F_B. L'adhérence A_k de l'ensemble précédent dans F_B est donc un fermé d'intérieur non vide, et on peut trouver une suite (ε_k) des scalaires telle que $\varepsilon_k B \subset A_k$ pour tout k; on peut d'ailleurs choisir cette suite de manière qu'elle converge vers 0.

On a ainsi $\varepsilon_0 B \subset A_0 = \overline{u(U) \cap F_B}$, et le théorème sera établi si on prouve que A_0 est contenu dans $2u(U)$. Soit donc y un élément de A_0; par récurrence sur k on construit une suite (x_k) de points de E tels que

$$x_k \in \frac{1}{2^k} U \cap R_{n_0,\ldots,n_{k-1}} \quad \text{et} \quad y - \sum_{s=0}^{k} u(x_s) \in \varepsilon_{k+1} B.$$

Alors la famille (x_k) est sommable dans E; sa somme appartient à

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots\right) U = 2U$$

et relève y.

Nous dirons qu'un e.b.c. E satisfait à la condition de Mackey si toute suite d'éléments de E qui converge vers 0 pour la topologie canonique de E converge vers 0 au sens de Mackey.

Corollaire. *Tout e.b.c. E admettant un réseau absorbant et dont tout quotient séparé satisfait à la condition de Mackey possède la propriété d'homomorphisme.* ∎

Bibliographie

1. Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Livre V, chapitre III. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris 1955.
2. Douady, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier, **16** (1) 1–98 (1966).
3. Forster, O., Knorr, K.: Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. Manuscripta Math. **5**, 19–44 (1971).
4. Forster, O., Knorr, K.: Relativ-analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben. Inventiones Math. **16**, 113–160 (1972).
5. Godement, R.: Théorie des faisceaux. Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Strasbourg, XIII. Paris 1958.
6. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Pub. Math. I.H.E.S., No. 5, Paris 1960.
7. Grothendieck, A.: Techniques de construction en Géométrie analytique. II Séminaire Cartan, 13e année, exposé 9, 1960–61.
8. Hartshorne, R.: Residues and Duality. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **20**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1966.
9. Houzel, C.: Séminaire Banach. Lectures Notes in Mathematics, Vol. **277**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1972.
10. Illusie, L.: Généralités sur les conditions de finitude dans les catégories dérivées, SGA VI, exposés I et III, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **225**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1971.
11. Jurchescu, M.: Espaces annelés transcendants et morphismes analytiques. Séminaires de l'Institut de Math. de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie. Bucarest 1971.
12. Kiehl, R.: Relativ analytische Räume. Inventiones Math **16**, 40–112 (1972).
13. Rham, G. de: Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. Comment. math. Helv. **28**, 346–352 (1954).
14. Verdier, J. L.: Catégories dérivées (état 0), I.H.E.S., 1964.
15. Verdier, J. L.: Topologies et faisceaux, S.G.A. IV. Vol. **269**, Lecture Notes in Mathemat. 1972.
16. Verdier, J. L.: Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente. Bull. de la S.M.F., **99**, 4 (1971).
17. Wilde, M. de: Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, **266**, A 457–A 459 (1968).

Christian Houzel
Département de Mathématique
Université de Nice
Parc Valrose
F-06 Nice, France

(Reçu le 26 septembre 1972)