

**MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES EXTRÉMALES
SUR LES SURFACES TORIQUES**
[d'après S. Donaldson]

par **Olivier BIQUARD**

INTRODUCTION

Dans les années 1980, E. Calabi, étudiant les variétés complexes, a initié le programme consistant à trouver dans une classe de Kähler une métrique privilégiée, appelée extrémale [Cal82, Cal85]. La recherche dans ce domaine est devenue particulièrement active depuis le programme de S. Donaldson dans les années 2000 [Don97, Don99]. Donnons-en la conjecture centrale dans le cas des métriques à courbure scalaire constante (un cas particulier de métrique extrémale) :

CONJECTURE 0.1 (Yau-Tian-Donaldson). — *Soit X une variété compacte complexe, munie d'une classe de Kähler entière L . Alors l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante dans L est équivalente à une propriété algébrique de (X, L) , appelée K-polystabilité.*

La condition algébrique de K-(poly)stabilité sera précisée plus loin : introduite par Tian [Tia97] dans l'étude des métriques de Kähler-Einstein, elle a été généralisée par Donaldson [Don02].

La conjecture est un analogue sur les variétés de la correspondance fameuse de Hitchin-Kobayashi entre fibrés holomorphes polystables et métriques de Hermite-Einstein.

La partie facile de la correspondance de Hitchin-Kobayashi sur les fibrés est le fait que l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein implique la stabilité. Sur les variétés, même cette direction, à savoir la nécessité de la condition de K-polystabilité, est difficile : après les travaux initiaux de Donaldson [Don01] (voir l'exposé [Biq06]), cette partie est maintenant largement démontrée [Sto09, Maba, Mabb]. En revanche, construire une métrique à courbure scalaire constante sur une variété K-polystable est considérablement plus délicat. Le théorème suivant de Donaldson est donc important, en ce qu'il exhibe la première classe assez large de variétés kählériennes sur laquelle est vérifiée la conjecture :

THÉORÈME 0.2 (Donaldson). — *La conjecture est vraie sur les surfaces complexes toriques.*

Ce théorème est le point culminant d'un travail de plusieurs années sur les variétés toriques [Don02, Don05, Don08a, Don09], dont cet exposé tente de rendre compte. Sur la géométrie kählérienne torique en général, et son extension aux variétés sans multiplicité, on pourra consulter utilement le survey [Don08b]. L'article [Szé08] étudie ce qu'on peut dire quand la variété torique n'est pas K-polystable.

Remerciements. Je remercie en particulier Paul Gauduchon et Vincent Minerbe pour leur aide précieuse dans la lecture des travaux évoqués ici.

1. GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE TORIQUE

Une *variété torique* est une variété kählérienne (X^n, ω) , munie de l'action hamiltonnienne effective d'un tore compact $T^n = \mathfrak{t}/\Lambda$.

1.1. Structure symplectique

On dispose alors d'une application moment, T -invariante, $\mu : X \rightarrow \mathfrak{t}^*$. En clair, si (K^1, \dots, K^n) est une base de champs de vecteurs induits par l'action de T^n , et (x^1, \dots, x^n) sont les coordonnées sur \mathfrak{t}^* données par $x^i = \langle K^i, \cdot \rangle$, alors on peut voir les x_i comme des fonctions sur X via μ , et elles satisfont

$$(1) \quad dx^i = -\iota_{K^i} \omega.$$

On peut choisir des coordonnées angulaires θ_i , de sorte que $K^i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$, et la forme de Kähler s'exprime alors, sur l'ouvert où l'action de T est libre, comme⁽¹⁾

$$(2) \quad \omega = dx^i \wedge d\theta_i.$$

Les (x^i, θ_i) sont les coordonnées action-angle (le choix des θ_i n'est pas unique).

L'image $P = \mu(X)$ est un polytope convexe de \mathfrak{t}^* , enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action de T ; il satisfait les axiomes des *polytopes de Delzant* :

1. P est simple : chaque sommet est l'intersection d'exactly n faces (de codimension 1) ;
2. P est rationnel : chaque face a une normale rationnelle $\nu \in \mathbb{Q}\Lambda \subset \mathfrak{t}$; on choisira toujours la normale entière ($\nu \in \Lambda$), primitive, et pointant vers l'intérieur de P ;
3. à chaque sommet, l'ensemble des normales des n faces s'intersectant en ce sommet est une base entière de Λ .

1. Dans tout l'exposé, on utilisera la convention usuelle de sommation implicite : si un symbole apparaît à la fois comme indice et comme exposant dans une formule, alors il est automatiquement sommé; par exemple, la formule (2) signifie en réalité $\sum_i dx^i \wedge d\theta_i$.

Réciproquement, tout polytope de Delzant est l'image par l'application moment d'une variété torique [Del88]. La construction se fait de la manière suivante : soient ν_1, \dots, ν_H les normales (entières, primitives, entrantes) aux H faces du polytope P , de sorte que $P = \bigcap_i \{ \langle \nu_i, x \rangle + c_i > 0 \}$. On considère l'action du tore T^H sur \mathbb{C}^H , dont l'application moment est $(\frac{1}{2}|z^1|^2 - c_1, \dots, \frac{1}{2}|z^H|^2 - c_H)$. L'application $\mathbb{R}^H \rightarrow \mathfrak{t}$, donnée par $(y_k) \mapsto \sum_1^H y_k \nu_k$, induit un morphisme $T^H \rightarrow T$ dont on appellera le noyau N . Alors on récupère la variété torique X par le quotient kählérien $X = \mathbb{C}^H // N$, muni de l'action résiduelle de $T = T^H / N$. L'application moment $\mu_N : \mathbb{C}^H \rightarrow \mathfrak{n}^*$ est la restriction à \mathfrak{n} de μ . L'application moment de l'action de T sur X apparaît alors comme la restriction de μ à $\mu_N^{-1}(0)$, et on peut vérifier explicitement que son image est le polytope P .

1.2. Structure complexe : les coordonnées complexes

L'action du tore T^n s'étend en une action holomorphe du complexifié $T_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^*)^n$. Choissant un point base dans X , un ouvert dense de X est ainsi identifié à $(\mathbb{C}^*)^n$, et donc muni de coordonnées complexes $z_a = \exp(y_a + i\theta_a)$, où $y_a \in \mathbb{R}$ et θ_a est une variable angulaire. Dans ces coordonnées, la forme de Kähler est donnée par un potentiel T -invariant φ , de sorte que $\omega = dd^C \varphi (= 2i\partial\bar{\partial}\varphi)$. On calcule alors la forme de Kähler ω et la métrique g :

$$(3) \quad \omega = \frac{\partial^2 \varphi}{dy_a dy_b} dy_a \wedge d\theta_b, \quad g = \frac{\partial^2 \varphi}{dy_a dy_b} (dy_a dy_b + d\theta_a d\theta_b).$$

1.3. Structure complexe : les coordonnées symplectiques

L'invariance sous T des x^i et de la structure complexe J implique immédiatement $(dJdx^i)_{K_j, K_k} = 0$. En outre, puisque J est une structure complexe intégrable, la 2-forme $dJdx^i = d^C dx^i$ est de type $(1, 1)$. Comme les $(1, 1)$ -formes sont engendrées par les formes

$$(4) \quad dx^j \wedge dx^k + (Jdx^j) \wedge (Jdx^k) \text{ et } (Jdx^j) \wedge dx^k - dx^j \wedge (Jdx^k),$$

ces deux faits ensemble impliquent que $dJdx^i$ se décompose uniquement sur les formes de type $(Jdx^j) \wedge dx^k - dx^j \wedge (Jdx^k)$. Ainsi l'idéal engendré par les 1-formes Jdx^i est préservé par d , donc la distribution $D = \bigcap \ker(Jdx^i)$ est intégrable. On peut alors choisir les coordonnées θ_i de sorte que $D = \bigcap \ker d\theta_i$.

On écrit alors

$$(5) \quad Jdx^i = G^{ij} d\theta_j, \quad Jd\theta_i = -G_{ij} dx^j,$$

où $(G_{ij}) = (G^{ij})^{-1}$, et on déduit de (2) la forme de la métrique :

$$(6) \quad g = G_{ij} dx^i dx^j + G^{ij} d\theta_i d\theta_j.$$

En particulier, la matrice (G_{ij}) est symétrique, définie positive. En outre, notant $f_{,k}$ la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ (souvent on notera plus simplement f_k quand le contexte est clair), la 2-forme $dJd\theta_i = -G_{ij,k} dx^k \wedge dx^j$ est à nouveau de type $(1, 1)$. Compte tenu de (4), il faut que $dJd\theta_i = 0$ donc G satisfait la symétrie des dérivées : $G_{ij,k} = G_{ik,j}$. Il existe donc une fonction réelle u , strictement convexe, telle que (G_{ij}) soit le hessien de u :

$G_{ij} = u_{ij}$. En notant (u^{ij}) la matrice inverse de (u_{ij}) , on obtient la forme définitive de la métrique :

$$(7) \quad g = u_{ij} dx^i dx^j + u^{ij} d\theta_i d\theta_j.$$

Ainsi, dans les coordonnées action-angle, la structure complexe est-elle entièrement codée par la seule donnée de la fonction u , appelée *potentiel symplectique*. Il est important de noter que u est déterminé uniquement à addition près d'une fonction affine.

1.4. La transformation de Legendre

On fait maintenant le lien entre les deux points de vue, complexe et symplectique. On a une base de $(1, 0)$ -formes,

$$(8) \quad \epsilon_a = d\theta_a - i u_{ab} dx^b = -id(u_a + i\theta_a).$$

Les $(1, 0)$ -formes ϵ_a , fermées, sont holomorphes, donc les $(u_a + i\theta_a)$ peuvent s'identifier aux coordonnées complexes $y_a + i\theta_a$ vues en 1.2. Posons ainsi

$$(9) \quad y_a = u_a.$$

Identifions la forme de Kähler ω dans les deux formalismes. Par (3),

$$\omega = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} dy_a \wedge dy_b = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} u_{ac} dx^c \wedge d\theta_b,$$

à identifier avec $\omega = dx^b \wedge d\theta_b$. Il faut donc que

$$(10) \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} \right) = (u_{ab})^{-1} = (u^{ab}).$$

Autrement dit, il faut que le hessien de φ dans les coordonnées y soit l'inverse du hessien de u dans les coordonnées x , ce qui est typique de la transformée de Legendre : la solution est que φ et u sont images l'une de l'autre par la transformée de Legendre :

$$(11) \quad \varphi = u_b x^b - u.$$

De manière plus symétrique, on pense à y comme variable dans \mathfrak{t} et x dans \mathfrak{t}^* , alors u et φ sont liés par la relation

$$(12) \quad u(x) + \varphi(y) = \langle x, y \rangle, \text{ où } y(x) = du(x).$$

Exemple 1.1. — Dans \mathbb{C}^n , on a $\omega = \frac{i}{2}(dz^1 \wedge d\bar{z}^1 + \cdots + dz^n \wedge d\bar{z}^n) = \sum_1^n d\left(\frac{|z^i|^2}{2}\right) \wedge d\theta_i$. Il en résulte $x^i = \frac{|z^i|^2}{2}$. Le polytope P est donné par les équations $x^i \geq 0$, et on calcule facilement la formule pour le potentiel symplectique :

$$(13) \quad u(x) = \frac{1}{2} \sum_1^n x^i \log x^i.$$

1.5. La formule de Guillemin

La construction de Delzant, déjà évoquée au début de cette section, produit une variété torique X_P à partir d'un polytope de Delzant P . Cette construction se faisant par quotient kählérien d'un espace plat \mathbb{C}^H de grande dimension par un sous-groupe de $U(1)^H$, la variété X_P est naturellement pourvue d'une métrique kählérienne lisse. Pour l'exprimer, notons $\lambda_i(x) = \langle \nu_i, x \rangle + c_i$ l'équation de la i -ème face de P , où ν_i est la normale entière primitive entrante. Donc $P = \bigcap_1^N \{\lambda_i \geq 0\}$.

LEMME 1.2 (formule de Guillemin [Gui94a, Gui94b]). — *Le potentiel symplectique u_G de X_P pour la métrique de Delzant est donné par $u_G = \frac{1}{2} \sum_1^N \lambda_i \log \lambda_i$.*

L'analogie de cette formule avec (13) n'est pas un hasard : la proposition se démontre en constatant que l'image de l'application moment du quotient X_P est naturellement plongée dans l'image de l'application moment de \mathbb{C}^H , et en vérifiant que la restriction du potentiel symplectique de \mathbb{C}^H à cette image est un potentiel symplectique de X_P .

Exemple 1.3. — L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} // U(1)$ admet pour polytope $P = \bigcap_1^n \{x^i \geq 0\} \cap \{x^1 + \dots + x^n \leq 1\}$. La formule de Guillemin fournit donc le potentiel symplectique de la métrique de Fubini-Study :

$$u(x) = \frac{1}{2} \{x^1 \log x^1 + \dots + x^n \log x^n + (1 - x^1 - \dots - x^n) \log(1 - x^1 - \dots - x^n)\}.$$

Dans cet exemple, la métrique quotient est Kähler-Einstein. En général il est très rare que la métrique de Delzant soit Kähler-Einstein ou même à courbure scalaire constante.

1.6. Les conditions au bord

Le potentiel symplectique est bien défini sur le polytope de Delzant, mais ses dérivées explosent au bord du polytope, comme on le voit par exemple sur \mathbb{C}^n . Il est important de connaître le comportement asymptotique des fonctions strictement convexes sur P qui sont des potentiels symplectiques de métriques kählériennes lisses sur X entier. La réponse est fournie par :

LEMME 1.4 (Conditions au bord de Guillemin). — *La métrique de Kähler associée à un potentiel symplectique u s'étend de manière lisse sur X si et seulement si*

- *u s'exprime par rapport au potentiel de Guillemin u_G comme $u = u_G + v$ avec $v \in C^\infty(\bar{P})$;*
- *la restriction de u à chaque face (de toute codimension) est encore strictement convexe.*

La démonstration se fait en passant en coordonnées complexes $\exp(y_a + i\theta_a)$ et en écrivant précisément le comportement de la métrique près des faces du polytope (c'est-à-dire près des diviseurs correspondants).

1.7. La formule d'Abreu

Un des intérêts majeurs du passage au potentiel symplectique est la simplicité des formules donnant la courbure d'une métrique kählérienne torique. En effet, on calcule facilement que, pour une fonction T -invariante f ,

$$(14) \quad dd^C f = (f_i u^{ij})_k dx^k \wedge d\theta_l, \quad \Lambda dd^C f = (f_i u^{ij})_j.$$

De la formule (3) pour g il résulte que la forme de Ricci ρ est donnée par

$$\rho = -\frac{1}{2} dd^C \log \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} \right).$$

D'après (10), les hessiens de φ par rapport à y , ou de u par rapport à x , sont inverses l'un de l'autre, et on obtient

$$(15) \quad \rho = \frac{1}{2} dd^C \log \det(u_{ij}).$$

À l'aide de (14), on obtient alors les formules suivantes pour ρ et la courbure scalaire $\text{Scal} = 2\Lambda\rho$, formule due à Abreu [Abr98] :

$$(16) \quad \rho = -\frac{1}{2} u_{ik}^{ij} dx^k \wedge d\theta_j, \quad \text{Scal} = -u_{ij}^{ij}.$$

1.8. La courbure scalaire comme application moment

On peut considérer l'espace \mathcal{J} des structures presque-complexes T -invariantes sur X , et compatibles à ω . Le groupe $\mathcal{G} = \text{Ham}^T(X, \omega)/T$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens T -invariants de X par T agit sur \mathcal{J} . On va voir que \mathcal{J} est muni naturellement d'une structure kählérienne de dimension infinie, pour laquelle l'action de \mathcal{G} est hamiltonienne, d'application moment égale à Scal .

L'espace tangent à \mathcal{J} en J s'identifie aux endomorphismes \dot{J} du fibré tangent, T -invariants, symétriques pour la métrique g_J , et satisfaisant $J\dot{J} + \dot{J}J = 0$. La structure complexe \mathbb{J} de \mathcal{J} se décrit par $\mathbb{J}(\dot{J}) = J \circ \dot{J}$, et la structure symplectique par $\Omega(\dot{J}_1, \dot{J}_2) = \frac{1}{2} \int_P \text{Tr}(J\dot{J}_1\dot{J}_2) dv$, où $dv = dx^1 \cdots dx^n$.

À une fonction $f(x^1, \dots, x^n)$ est associé le champ de vecteurs hamiltonien X_f par $\iota_{X_f} \omega = -df$, ce qui donne $X_f = f_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Les fonctions affines correspondent donc aux champs de vecteurs infinitésimaux de l'action de T , ainsi l'algèbre de Lie de \mathcal{G} s'identifie-t-elle à $C^\infty(\bar{P})/\{\text{fonctions affines}\}$. L'action infinitésimale de f sur \mathcal{J} est donnée au point J par $\mathcal{L}_{X_f} J = [\mathcal{L}_{X_f}, J]$ qui se calcule en

$$(17) \quad \mathcal{L}_{X_f} J = d^C f_i \otimes \frac{\partial}{\partial \theta_i} + df_i \otimes J \frac{\partial}{\partial \theta_i}.$$

À présent, il est immédiat que

$$\Omega(\mathcal{L}_{X_f} J, \dot{J}) = - \int_P df_i \left(\dot{J} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) dv.$$

Une application moment $\mu : \mathcal{J} \rightarrow (\text{Lie } \mathcal{G})^*$ doit satisfaire $d\langle \mu(J), f \rangle(J) = -\Omega(\mathcal{L}_{X_f} J, \dot{J})$ sur \mathcal{J} , ce qui conduit au candidat évident

$$(18) \quad \langle \mu(J), f \rangle = \int_P df_i \left(J \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) dv = - \int_P f_{ij} u^{ij} dv.$$

On utilise alors la formule d'intégration par parties, valable pour toute fonction $f \in C^\infty(\bar{P})$:

$$(19) \quad \int_P f_{ij} u^{ij} dv = \int_P f u_{ij}^{ij} dv + \int_{\partial P} f d\sigma.$$

Ici σ est une mesure sur ∂P définie en demandant que sur la face de normale entière ν , on ait $|dv| = |\nu \wedge \frac{d\sigma}{2}|$. La formule (19) se vérifie par un calcul direct près des faces utilisant l'asymptotique du potentiel symplectique u .

Le second terme de (19) ne dépend pas de la structure complexe J , donc est constant sur \mathcal{J} . On peut donc choisir comme application moment :

$$(20) \quad \langle \mu(J), f \rangle = \int_P -f u_{ij}^{ij} dv.$$

On a finalement montré :

LEMME 1.5. — *L'action de \mathcal{G} sur \mathcal{J} est hamiltonienne, avec application moment $\mu(J) = -u_{ij}^{ij} = \text{Scal}(J)$.*

Au passage, de (17) on déduit l'action infinitésimale complexifiée de \mathcal{G} :

$$\mathbb{J}\mathcal{L}_{X_f} J = J\mathcal{L}_{X_f} J = d^C f_i \otimes J \frac{\partial}{\partial \theta_i} - df_i \otimes \frac{\partial}{\partial \theta_i}.$$

En particulier $J\mathcal{L}_{X_f} J(\frac{\partial}{\partial x^j}) = -f_{ij} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Cela signifie que la variation infinitésimale $\dot{J} = J\mathcal{L}_{X_f} J$ préserve la distribution $D = \cap \ker(Jdx^i)$ introduite en § 1.3 et donc s'exprime par une variation du potentiel symplectique. Compte tenu de $J \frac{\partial}{\partial x^j} = u_{jk} \frac{\partial}{\partial \theta_k}$, il devient clair que :

LEMME 1.6. — *L'action infinitésimale complexifiée de $f \in \text{Lie}(\mathcal{G})$, à savoir $J\mathcal{L}_{X_f} J$, correspond à une modification infinitésimale du potentiel symplectique par $-f$.*

Modifier infinitésimalement le potentiel symplectique par f correspond donc à modifier J par $-J\mathcal{L}_{X_f} J = -\mathcal{L}_{JX_f} J$ (car J est intégrable), donc à l'action infinitésimale du champ de vecteurs $-JX_f$ sur J . Ainsi toutes les structures complexes correspondant à différents potentiels symplectiques sont-elles les mêmes. Il est équivalent de fixer la structure complexe en variant le potentiel de Kähler, ou de fixer la structure symplectique en variant le potentiel symplectique, le lien entre les deux points de vue étant donné par la transformation de Legendre.

1.9. Énergie, obstructions

Étant donnée une action hamiltonienne d'un groupe G sur une variété kählérienne, on peut appliquer la théorie de la réduction kählérienne en lien avec la théorie géométrique des invariants pour l'action complexifiée de $G^{\mathbb{C}}$. En dimension infinie, même si le groupe n'admet pas de complexification, certaines propriétés restent formellement vraies. Cette observation est à la base du programme proposé par Donaldson [Don97, Don99]. On va énumérer ici les conséquences formelles dans le cas torique (leur démonstration directe dans ce cas étant généralement très simple).

La première manifestation de la théorie est l'existence d'une fonctionnelle E (de Kempf-Ness) sur une $G^{\mathbb{C}}$ -orbite, dont la différentielle est l'application moment. En fait, la fonctionnelle est définie sur l'espace symétrique $G^{\mathbb{C}}/G$. Dans le cas kählérien, même si la complexification du groupe des difféomorphismes hamiltoniens n'existe pas, Donaldson a montré que l'espace symétrique correspondant s'interprète comme l'espace des potentiels de Kähler. Dans notre cas, le lemme 1.6 implique directement que $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$ s'identifie à l'espace des potentiels symplectiques. Si on veut résoudre l'équation $\text{Scal} = A$, la fonctionnelle $E(u)$ doit donc satisfaire, en utilisant (19),

$$dE(\dot{u}) = \int_P (\text{Scal} - A)\dot{u}dv = \int_P (-u_{i\bar{j}}^{i\bar{j}} - A)\dot{u}dv = \int_P (-u^{i\bar{j}}\dot{u}_{i\bar{j}} - A\dot{u})dv + \int_{\partial P} \dot{u}d\sigma$$

qui s'intègre immédiatement en

$$(21) \quad E(u) = \int_P -\log \det(u_{i\bar{j}})dv + F_A(u), \quad \text{où } F_A(f) = \int_{\partial P} f d\sigma - \int_P A f dv.$$

En géométrie kählérienne, cette fonctionnelle E est la K-énergie de Mabuchi, et la partie linéaire F_A est le caractère de Futaki.

La théorie générale dit que E est convexe le long des géodésiques de $G^{\mathbb{C}}/G$. Les géodésiques étant données par l'exponentielle du groupe, le lemme 1.6 implique que les géodésiques sont des droites dans l'espace des potentiels : $u_t = u_0 + tf$. La convexité se vérifie en effet immédiatement par un calcul :

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(u_0 + tf) = \int_P f_{i\bar{j}} u^{i\bar{k}} f_{k\bar{l}} u^{j\bar{l}} dv \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $f_{i\bar{j}} = 0$, c'est-à-dire f est affine. Cela implique :

LEMME 1.7. — *Il existe au plus une solution u de $\text{Scal}(u) = A$.*

Unique veut dire à fonction affine près, mais on se rappellera que le potentiel symplectique est justement défini à fonction affine près. Le fait que les géodésiques dans l'espace des potentiels de Kähler soient des droites fut observé par Guan [Gua99]. En particulier elles sont lisses, ce qui n'est pas connu dans le cas général (voir [Che00] pour la construction de ces géodésiques). L'unicité des métriques kählériennes toriques à courbure scalaire constante en découle immédiatement, le cas général est beaucoup plus difficile [Don01, Mab05, Mab04, CT08].

Remarque 1.8. — Dans le cas presque complexe, les raisonnements ci-avant restent valables et montrent que les géodésiques de l'espace symétrique $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$ restent données par des droites $G_{ij} - tf_{ij}$ pour des fonctions $f \in C^\infty(\bar{P})$. On peut aussi montrer que la courbure scalaire de la métrique (6) reste donnée par la formule $-G_{ij}^{ij}$. Cela s'interprète dans le cadre du programme de Donaldson : en géométrie presque-complexe, il est naturel de chercher une solution de $\text{Scal}(J) = \text{cst}$ en variant J dans une orbite complexifiée de \mathcal{G} , voir [Don97]. En général cela reste formel car on ne sait pas résoudre l'équation de variation de J et donc décrire l'orbite complexifiée. Dans le cas torique en revanche, l'orbite se décrit très bien comme les variations de (G_{ij}) par le hessien d'une fonction f , et le même raisonnement que dans le cas kählérien prouve l'unicité d'une éventuelle structure J à courbure scalaire constante. La question de l'existence est un problème ouvert et intéressant.

Une obstruction générale est l'annulation de l'invariant de Futaki dans la direction des symétries infinitésimales. Ici les champs de vecteurs X_f de l'action de T sont donnés par des potentiels f affines. Récrivons alors la formule (19) comme

$$(22) \quad \int_P f_{ij} u^{ij} dv = \int_P f(A - \text{Scal}(u)) dv + F_A(f).$$

On voit immédiatement que, pour une fonction affine f , si $\text{Scal}(u) = A$, il faut que $F_A(f) = 0$. Pour $f = 1$, on obtient la contrainte :

$$(23) \quad A = \frac{\text{Vol } \partial P}{\text{Vol } P}.$$

Pour $f = x^i$, compte tenu de cette valeur de A , la condition $F_A(x^i) = 0$ se traduit par

$$(24) \quad \frac{1}{\text{Vol}(P)} \int_P x^i dv = \frac{1}{\text{Vol}(\partial P)} \int_{\partial P} x^i d\sigma.$$

Autrement dit :

LEMME 1.9. — *Pour que $\text{Scal}(u) = A$, il est nécessaire que $A = \frac{\text{Vol } \partial P}{\text{Vol } P}$ et que le barycentre de P soit égal au barycentre de ∂P .*

Bien sûr, il s'agit d'une contrainte forte sur le polytope. Pour un polytope général, on s'attend à pouvoir résoudre seulement l'équation

$$(25) \quad -u_{ij}^{ij} = A \quad \text{avec } A = c_0 + c_i x^i.$$

On peut choisir les constantes c_i de manière unique de sorte que la contrainte $F_A(f) = 0$ pour f affine demeure respectée. Les solutions de l'équation (25) sont des métriques kählériennes extrémales, c'est-à-dire que le gradient de leur courbure scalaire est un champ de vecteurs holomorphe (condition trouvée par Calabi pour minimiser $\int \text{Scal}^2$ dans une classe de Kähler). La conjecture 0.1 a une version pour les métriques extrémales, mais le théorème de Donaldson 0.2 est restreint au cas des métriques à courbure scalaire constante, et nous nous restreindrons donc aussi le plus souvent à ce cas dans la suite.

Un cas particulier est celui d'une variété torique de Fano (ce qui, sur le polytope, revient à dire qu'on peut prendre comme équations des faces $\langle \nu_i, x \rangle + 1$). Au vu de (15), l'équation de Kähler-Einstein s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \log \det(u_{ij}) - \varphi = 0.$$

Si dans le second membre, on met une fonction linéaire, $c_i x^i$, on obtient un soliton de Kähler-Ricci. Wang et Zhu [WZ04] ont montré que toute variété torique de Fano admet un soliton de Ricci. Il est Kähler-Einstein quand l'invariant de Futaki s'annule.

1.10. Énoncé précis du théorème

Enfin, il y a une dernière obstruction plus générale qui provient de la formule (22) : si on choisit une fonction f convexe, alors le premier membre est positif; ainsi, si $\text{Scal}(u) = A$, il faut que $F_A(f) \geq 0$, avec égalité si et seulement si f est affine. On peut alors énoncer précisément la conjecture et le théorème :

CONJECTURE 1.10 (Donaldson). — *Soit $A \in C^\infty(\bar{P})$. Il existe une solution de l'équation $\text{Scal}(u) = A$ si et seulement si, pour toute fonction convexe $f \in C^\infty(\bar{P})$, on a $F_A(f) \geq 0$ avec égalité si et seulement si f est affine.*

THÉORÈME 1.11 (Donaldson). — *En dimension 2, pour $A = \frac{\text{Vol}_{\partial P}}{\text{Vol } P}$, la conjecture est vraie.*

Dans la fin de cette section, on va rapidement faire le lien entre la condition du théorème 1.11 et la notion algébrique de K-stabilité.

1.11. K-stabilité

Soit (W, Λ) une variété algébrique polarisée, munie d'une action de \mathbb{C}^* . Alors \mathbb{C}^* agit encore sur $H^0(W, \Lambda^k)$, dont on notera la dimension d_k , et sur son déterminant $\Lambda^{d_k} H^0(W, \Lambda^k)$ avec poids w_k . Alors w_k et d_k sont des polynômes à coefficients rationnels, et

$$\frac{w_k}{k d_k} = F_0 + \frac{F_1}{k} + \frac{F_2}{k^2} + \dots$$

L'invariant de Futaki de (W, Λ) est alors défini comme le terme F_1 de ce développement.

Une *configuration test* pour une variété polarisée (X, L) est la donnée :

- d'un schéma V , muni d'une action de \mathbb{C}^* , et d'un morphisme plat $p : V \rightarrow \mathbb{C}$ commutant avec l'action standard de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C} ;
- d'un fibré en droite \mathbb{C}^* -équivariant \mathcal{L} sur V

de sorte que la fibre générale de p soit (X, L^r) .

Un cas particulier est celui d'une *configuration test produit* : si (X, L) est munie d'une action de \mathbb{C}^* , alors il s'agit de la configuration test $(V, \mathcal{L}) = (X \times \mathbb{C}, L)$.

Si on a une configuration test, la fibre au-dessus de l'origine, $(p^{-1}(0), \mathcal{L}|_{p^{-1}(0)})$, est munie d'une action de \mathbb{C}^* et admet donc un invariant de Futaki F_1 qui est par définition

l'invariant de Futaki de la configuration test. Dans le cas d'une configuration test produit, il coïncide avec l'invariant de Futaki de (X, L) .

On dit alors qu'une variété polarisée (X, L) est *K-polystable* si toute configuration test a un invariant de Futaki $F_1 \leq 0$, avec égalité si et seulement si la configuration test est produit. Cette définition doit être pensée comme un analogue du critère de Hilbert-Mumford pour la stabilité en théorie géométrique des invariants, les configurations test jouant le rôle des sous-groupes à un paramètre.

C'est avec cette forme de stabilité que Donaldson [Don02] a énoncé la conjecture 0.1, mais il faut noter qu'on sait déjà que la forme précise de K-stabilité nécessaire et suffisante pour l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante n'est pas exactement celle-là [ACGT08, remark 9], et des variantes ont été proposées (K-polystabilité « uniforme »).

1.12. Configurations test toriques

Revenons à une variété torique. Fixons $A = \frac{\text{Vol}_{\partial P}}{\text{Vol}_P}$, et rappelons l'invariant de Futaki $F_A(f)$ défini dans (21). Par approximation, il est évident que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. $F_A(f) \geq 0$ pour toute fonction convexe $f \in C^\infty(\bar{P})$;
2. $F_A(f) \geq 0$ pour toute fonction convexe f affine par morceaux.

Soient f_1, \dots, f_h des fonctions affines à coefficients rationnels ; alors $f = \max(f_1, \dots, f_h)$ est une fonction convexe affine par morceaux. On va voir que f détermine une configuration test torique, dont l'invariant de Futaki est lié à $F_A(f)$. Cela fournit une interprétation algébrique de l'hypothèse du théorème 1.11.

À partir de $P \subset \mathbb{R}^n$, on obtient un nouveau polytope convexe $Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en posant

$$Q = \{(x, t), x \in P, 0 < t < R - f(x)\},$$

où R est une constante fixée assez grande.



On choisit $k \in \mathbb{N}$ minimal de sorte que kQ soit donné par des équations à coefficients entiers. Alors kQ est le polytope associé à une variété torique (V, \mathcal{L}) (singulière car les conditions de Delzant ne sont pas satisfaites). Le tore complexe $T_{\mathbb{C}}^{n+1} = T_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*$ agit sur V . Pour simplifier la suite de l'exposition, on fera comme si $k = 1$.

La face $\{x^{n+1} = 0\} \cap Q$ de Q est P , donc on obtient ainsi un plongement $T_{\mathbb{C}}$ -équivariant $i : X \hookrightarrow V$. D'un autre côté, l'application $Q \rightarrow [0, R] \subset \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto t$, correspond à une application \mathbb{C}^* -équivariante $V \rightarrow \mathbb{C}P^1$ (l'intervalle étant en effet le polytope associé à $\mathbb{C}P^1$).

Il est évident que la fibre de cette application en 0 est $i(X)$, et on en déduit assez facilement que la fibre générale de p est (X, L) . En revanche la fibre à l’infini peut être singulière, et il en résulte que (V, \mathcal{L}) est une configuration test pour (X, L) , en prenant la projection sur \mathbb{C} donnée par $1/t$. Le point crucial est alors :

LEMME 1.12. — *L’invariant de Futaki de cette configuration test est lié à l’invariant de Futaki $F_A(f)$ de la fonction convexe f par*

$$-\frac{1}{\text{Vol } P} F_1 = F_A(f).$$

La condition de positivité de $F_A(f)$ se traduit donc en la négativité de F_1 . Il en résulte que l’hypothèse du théorème 1.11 revient à la K-polystabilité de la variété torique par rapport aux configurations test toriques.

Démonstration. — La preuve repose sur les deux faits classiques suivants :

- pour une variété torique, la dimension de l’espace des sections de L^k est obtenue comme le nombre de points entiers dans le polytope $k\bar{P}$;
- l’asymptotique du nombre de points entiers est donné par

$$(26) \quad \#(k\bar{P} \cap \Lambda) = k^n \text{Vol } P + \frac{1}{2} k^{n-1} \text{Vol}_{\frac{d\sigma}{2}} \partial P + O(k^{n-2}),$$

où le volume de ∂P est calculé par rapport à la mesure entière introduite en § 1.8. La démonstration consiste alors, à l’aide de quelques suites exactes, à montrer que $d_k = h^0(X, L^k)$ et $w_k = h^0(V, \mathcal{L}^k) - h^0(X, L^k)$, puis à utiliser la formule (26) pour obtenir l’asymptotique de $\frac{w_k}{k d_k}$ et donc F_1 . \square

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

La preuve du théorème est longue et technique, elle occupe les trois articles [Don05, Don08a, Don09]. On ne pourra en donner ici qu’une idée très succincte.

2.1. La méthode de continuité

Comme souvent dans les résolutions d’équations aux dérivées partielles géométriques de type elliptique, la méthode est une méthode de continuité : on veut résoudre un problème P_1 , on dispose d’une solution à un autre problème P_0 , et on invente une suite « continue » de problèmes $(P_t)_{t \in [0,1]}$ qui interpole entre les deux. Avec un bon choix des problèmes intermédiaires, on essaie de montrer que l’ensemble des $t \in [0, 1]$ pour lesquels on peut résoudre P_t est ouvert et fermé. L’ouverture se traite par un théorème de fonctions implicites, et est généralement la partie facile ; difficile en revanche est le problème de fermeture, qui consiste en un théorème de compacité pour les solutions des problèmes P_t .

Dans le cas qui nous occupe, on cherche un potentiel symplectique u sur un polytope P , satisfaisant l'équation $-u_{i\bar{j}}^{i\bar{j}} = A$. Une méthode de continuité évidente consisterait à partir du potentiel de Guillemin u_G , de courbure scalaire $A_0 = -(u_G)_{i\bar{j}}^{i\bar{j}}$, puis à interpoler par une suite bien choisie (A_t) de fonctions sur \bar{P} entre A_0 et A , pour résoudre le problème $-(u_t)_{i\bar{j}}^{i\bar{j}} = A_t$.

Malheureusement, dans cette méthode, il semble difficile d'obtenir les estimations a priori menant au théorème de compacité nécessaire. L'argument de Donaldson utilise en effet très spécifiquement un contrôle a priori de $V^i = u_j^{i\bar{j}}$ qui n'est valable qu'avec un second membre de l'équation constant (c'est la raison fondamentale pourquoi le théorème fournit des métriques à courbure scalaire constante, mais pas des métriques extrémales).

Cela mène à inventer une méthode de continuité beaucoup plus sophistiquée : l'idée est de varier, non plus le second membre de l'équation, mais le polytope P lui-même. La donnée devient alors un couple (P, σ) d'un polytope convexe dans \mathfrak{t}^* et d'une mesure sur ∂P , proportionnelle sur chaque face à la mesure de Lebesgue. À une face E du polytope est naturellement associée une normale rentrante $\nu_E \in \mathfrak{t}$ par la relation $\frac{1}{2}|\nu_E \wedge d\sigma| = |dv|$. L'équation de la face E a alors la forme $\lambda_E(x) = \langle \nu_E, x \rangle + c_E$, où la constante c_E est ajustée de sorte que λ_E s'annule sur E . Définissons le potentiel de Guillemin $u_G = \frac{1}{2} \sum \lambda_E \log \lambda_E$, et $A = \frac{\text{Vol}_{d\sigma} \partial P}{\text{Vol}_{dv} P}$. Le problème à résoudre devient :

PROBLÈME : Étant donné (P, σ) , résoudre l'équation $-u_{i\bar{j}}^{i\bar{j}} = A$ avec conditions au bord de Guillemin.

L'invariant de Futaki F_A de la section 1.9 reste bien défini, et Donaldson démontre :

THÉORÈME 2.1. — *En dimension 2, il existe une solution du problème ci-dessus si et seulement si la condition suivante de stabilité est satisfaite : pour toute fonction convexe $f \in C^\infty(\bar{P})$, on a $F_A(f) \geq 0$ avec égalité si et seulement si f est affine.*

Comme précédemment, la condition du théorème implique que P et ∂P ont même barycentre.

Remarque 2.2. — Si le polytope n'est pas de Delzant, le problème n'est pas géométrique car le polytope ne correspond pas à une variété. Si le polytope est de Delzant et la mesure $d\sigma$ n'est pas induite par la structure entière, les solutions restent des métriques à courbure scalaire constante, avec des singularités coniques le long des diviseurs correspondant aux arêtes du polytope. La question de l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante et singularités coniques le long de diviseurs est donc également résolue, dans le cas torique, par le théorème de Donaldson.

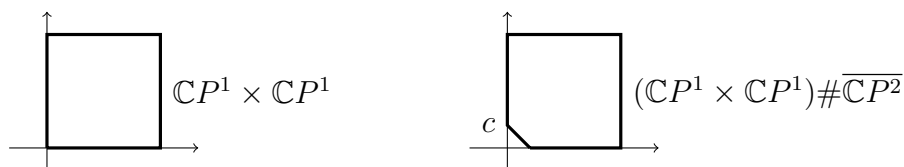
Revenons à la méthode de continuité : un polytope P étant fixé, il est facile de voir que l'ensemble C_P des mesures σ sur ∂P qui satisfont la condition de stabilité est convexe ; en outre il y a une construction simple d'une mesure naturelle $\sigma_P \in C_P$ dépendant continûment de P . Il en résulte immédiatement que deux polytopes (P_0, σ_0)

et (P_1, σ_1) satisfaisant la condition de stabilité peuvent être joints par un chemin (P_t, σ_t) de polytopes satisfaisant aussi cette condition.

En dimension 2, le seul invariant de déformation d'un polytope convexe est son nombre d'arêtes. Pour démarrer la méthode de continuité, on a donc besoin de :

LEMME 2.3. — *Pour chaque entier k , il existe un polytope à k arêtes muni d'une solution de l'équation $-u_{ij}^{ij} = A$.*

Démonstration. — On commence par observer qu'on dispose de solutions évidentes pour $k = 3$ et 4. Pour $k = 3$, le polytope de $\mathbb{C}P^2$ décrit dans l'exemple 1.3, muni du potentiel de Guillemin, donne une solution. Pour $k = 4$ on dispose aussi du polytope de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, qui est un carré. Il y a un moyen géométrique simple d'ajouter une arête à un polygone : découper un petit coin près d'un sommet correspond à éclater la variété torique au point fixe correspondant.



Le modèle est fourni par \mathbb{C}^2 éclaté à l'origine, dont le polytope de Delzant Q_c est donné par les équations $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ et $x^1 + x^2 \geq c$. Le réel $c > 0$ est le volume du diviseur exceptionnel, et quand $c \rightarrow 0$ on retrouve le polytope de \mathbb{C}^2 . Or cet éclatement est muni d'une métrique à courbure scalaire nulle, asymptotique à la métrique plate de \mathbb{C}^2 , la *métrique de Burns*, de potentiel symplectique donné par la formule (on pose $x = x^1 + x^2$) :

$$u_c = \frac{1}{2} \{ x^1 \log x^1 + x^2 \log x^2 + (x - c) \log(x - c) - x \log x \}.$$

Il est alors possible, à la manière d'Arezzo-Pacard (voir [AP06], mais leur théorème ne s'applique pas directement ici en raison de la présence de champs de vecteurs holomorphes), d'effectuer le recollement suivant : partant d'un polygone P avec une solution u de $-u_{ij}^{ij} = A$, on fixe un sommet et, quitte à changer de coordonnées par une transformation entière, on peut supposer que près du sommet le polytope est donné par les équations $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$. Alors pour c petit, il est possible de recoller le potentiel u avec u_c et de déformer le résultat en une solution de l'équation $-u_{ij}^{ij} = A_c = \frac{\text{Vol } \partial P_c}{\text{Vol } P_c}$ sur le polygone $P_c = P \cap Q_c$. (En réalité après cette modification de P , le barycentre de ∂P_c ne coïncide pas forcément avec celui de P_c et il est nécessaire de modifier légèrement la position des autres sommets pour satisfaire cette condition ; de ce fait le résultat n'est pas forcément un polytope de Delzant.) Ainsi au bout d'un nombre convenable d'éclatements obtient-on une solution initiale pour tout k . \square

Cette proposition permet donc de démarrer la méthode de continuité : étant donné un polytope (P, σ) à k arêtes, on choisit un chemin (P_t, σ_t) de polytopes satisfaisant la condition de stabilité vers un polytope (P_0, σ_0) .

LEMME 2.4. — *L'ensemble des t pour lesquels on peut résoudre l'équation $-u_{ij}^{ij} = \frac{\text{Vol } \partial P_t}{\text{Vol } P_t}$ avec conditions au bord de Guillemin est ouvert.*

Démonstration. — Le fait que l'ensemble des t pour lesquels on peut résoudre l'équation soit ouvert est standard dans ce contexte : pour des problèmes d'application moment, la convexité (stricte) de l'énergie conduit immédiatement à l'inversibilité de la linéarisation du problème. Les conditions au bord de P ne font que traduire que le problème vu sur la variété torique associée X_P correspond à des potentiels lisses sur X_P entier (en différenciant (12), on s'aperçoit que $\dot{u}(x) + \dot{\varphi}(y) = 0$, donc une variation infinitésimale du potentiel symplectique se traduit par une variation opposée du potentiel kählerien sur X_P). La linéarisation se ramène ainsi à un problème elliptique (d'ordre 4), inversible, sur la variété compacte X_P et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. (Les choses se compliquent un peu quand P ne satisfait pas les conditions de Delzant, puisqu'on ne dispose plus de la variété X_P ; néanmoins X_P continue alors à exister localement et cela permet de définir dans des cartes locales les espaces fonctionnels dans lesquels la linéarisation peut être inversée.) \square

2.2. Le théorème de compacité

On en arrive maintenant à la partie la plus délicate du théorème : la compacité. Il s'agit d'une démonstration incroyablement difficile et longue, malgré l'apparence que beaucoup d'outils relèvent de l'analyse convexe à deux variables. Aussi ne pourra-t-on faire ici que quelques commentaires superficiels. Les différentes étapes sont :

1. contrôle L^1 de la solution ;
2. contrôle L^∞ ;
3. convergence près des arêtes, mais loin des sommets ;
4. convergence près des sommets.

On a donc une solution de $-u_{ij}^{ij} = A$ sur (P, σ) et on veut contrôler u et toutes ses dérivées, et aussi avoir une borne inférieure sur le hessien (u_{ij}) . Comme u est défini à fonction affine près, on peut fixer un point $p \in P$ tel que $u \geq u(0) = 0$. On dira alors que u est *normalisée*.

La seule étape facile est la première ; la K-stabilité est directement utilisée pour montrer :

LEMME 2.5. — *Si on a une solution normalisée u de $-u_{ij}^{ij} = A$ sur (P, σ) , alors*

$$\int_{\partial P} u d\sigma \leq c(P, \sigma, A), \quad \int_P u dv \leq c'(P, \sigma, A).$$

Ce contrôle peut sembler faible, mais parce que u est convexe positive, il implique déjà une borne uniforme C^1 sur u sur tout compact de l'intérieur de P , ainsi que sur la restriction $u|_{\partial P}$ sur tout compact inclus dans l'intérieur d'une arête ; ainsi ce contrôle permet-il de contrôler C^0 la fonction u en dehors des sommets, et C^1 sur les compacts.

Démonstration. — La condition de stabilité implique, pour toute fonction convexe $f \in C^0(\bar{P})$, l'inégalité

$$(27) \quad F_A(f) = \int_{\partial P} f d\sigma - \int_P A f dv \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si f est affine. On en déduit, si f est normalisée,

$$(28) \quad \int_{\partial P} f d\sigma \leq C(P, \sigma, A) F_A(f).$$

(Par l'absurde : sinon existe une suite f_n avec $\int_{\partial P} f_n d\sigma = 1$ et $F_A(f_n) \rightarrow 0$. Par la compacité pour les fonctions convexes mentionnée ci-dessus, on extrait une limite $f_n \rightarrow f$ où f est continue en dehors des sommets, vérifie $\int_{\partial P} f d\sigma = 1$ et $F_A(f) = 0$. L'inégalité (27) reste valable pour ce type de fonctions, et on aboutit à ce que f doit être affine, ce qui est impossible puisqu'elle est normalisée.)

Appliquant (28) à u , et observant que par (19) on a $F_A(u) = \int_P u^{ij} u_{ij} dv = 2 \text{Vol } P$, on déduit immédiatement le lemme. \square

Partant de ce contrôle, qui, comme on l'a vu, implique un contrôle C^1 à l'intérieur, et en utilisant l'équation $-u_{ij}^{ij} = A$, on peut montrer des estimations intérieures pour la solution : sur toute partie compacte de l'intérieur,

$$(29) \quad K^{-1} \leq (u_{ij}) \leq K, \quad |\nabla^\ell u| \leq c_\ell.$$

Ces contrôles intérieurs ne sont pas faciles et s'appuient notamment sur des idées de Trudinger-Wang pour certaines équations d'ordre 4 (voir [TW05] et les références qui s'y trouvent). En tout cas, ces estimations disent que, sur tout compact intérieur, une suite de solutions converge C^∞ vers une limite. Le problème est donc de comprendre le comportement au bord, et c'est la difficulté majeure du théorème.

La seconde étape est le contrôle L^∞ : la fonction u étant convexe positive, il suffit de la borner aux sommets du polygone. L'argument est délicat et s'appuie notamment sur l'intégration par parties $F_A(f) = \int_P u^{ij} f_{ij} dv$, appliquée à des fonctions f judicieusement choisies.

La troisième étape est importante, elle permet de comprendre le comportement au bord. Elle s'appuie sur une astuce liée à la dimension 2 et sur le fait que le second membre de l'équation soit constant : dans ce cas, on a une borne uniforme sur le champ de vecteurs $V^i = u_j^{ij}$:

$$(30) \quad |V| \leq c(P, \sigma, A).$$

Cette borne s'établit en observant que l'équation $-u_{ij}^{ij} = A$ implique $\text{div } W = 0$, où $W(x) = V(x) - \frac{A}{2}x$, donc $W = J \text{ grad } H$ (ici J et grad sont pour la métrique plate $(dx^1)^2 + (dx^2)^2$), pour une fonction H dont on montre qu'elle satisfait l'équation

$$u^{ij} H_{ij} = 0.$$

Pour ce type d'équation, on sait borner $|dH|$ en fonction de la donnée au bord, et cela donne le contrôle sur V .

Cette estimation a priori va servir pour empêcher l'*effondrement* des solutions. C'est un problème général en géométrie riemannienne de dimension 4 : si on a une suite de métriques, solutions d'une équation aux dérivées partielles non linéaire géométrique, alors la norme L^2 de la courbure est contrôlée par la topologie (formules de Chern-Weil) ; si en outre le rayon d'injectivité est borné inférieurement (la métrique ne s'effondre pas), alors on peut souvent montrer qu'il y a compacité pour le problème, c'est-à-dire qu'on peut toujours extraire une limite d'une suite de solutions. L'idée de Donaldson est de fournir pour les fonctions convexes un substitut au rayon d'injectivité, suffisant pour contrôler la convergence des solutions.

Au vu de la forme (7) pour la métrique, on bornera inférieurement un rayon d'injectivité en bornant inférieurement la matrice (u^{ij}) , c'est-à-dire en bornant supérieurement le hessien (u_{ij}) . Près d'une arête, qu'on peut supposer donnée par l'équation (entière) $x^1 = 0$, Donaldson borne plutôt la quantité suivante, qui est une sorte de dérivée seconde dans la direction x^1 :

$$(31) \quad D(x^1, x^2) = \frac{1}{x^1} \left(u(0, x^2) - (u(x^1, x^2) - x^1 u_1(x^1, x^2)) \right).$$

Par exemple, pour $u = \frac{1}{2}x^1 \log x^1 + (x^2 - ax^1)^2$, on obtient le champ de vecteurs $V = (2, a)$ et la quantité $D(x^1, x^2) = \frac{1}{2} + a^2(x^1)^2$. L'idée de la preuve, suggérée par cet exemple, est qu'une borne sur V implique une borne sur D , mais la réalisation est très difficile : elle passe par un argument d'éclatement et des manipulations qui utilisent la transformation de Legendre pour estimer certaines aires. C'est le cœur de la démonstration.

La borne sur D permet le contrôle de la métrique g , mais ce n'est pas une étape facile. On dérive une borne sur la courbure, comme souvent en géométrie riemannienne, par un argument d'éclatement : si la courbure n'est pas bornée, on extrait aux points de concentration des limites dont on montre qu'elles ne peuvent pas exister. Un autre argument est nécessaire pour borner inférieurement la métrique et surtout son rayon d'injectivité. À partir de là, des arguments plus classiques de compacité permettent, à partir de l'équation sur la courbure scalaire, de borner toutes les dérivées de la métrique et donc de u .

Enfin la dernière étape consiste en le contrôle près des sommets, où des arguments similaires (mais pas plus faciles) sont employés près des sommets.

RÉFÉRENCES

- [Abr98] M. ABREU – « Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics », *Internat. J. Math.* **9** (1998), p. 641–651.

- [ACGT08] V. APOSTOLOV, D. M. J. CALDERBANK, P. GAUDUCHON & C. W. TØNNESEN-FRIEDMAN – « Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. III. Extremal metrics and stability », *Invent. Math.* **173** (2008), p. 547–601.
- [AP06] C. AREZZO & F. PACARD – « Blowing up and desingularizing constant scalar curvature Kähler manifolds », *Acta Math.* **196** (2006), p. 179–228.
- [Biq06] O. BIQUARD – « Métriques kählériennes à courbure scalaire constante : unicité, stabilité », Séminaire Bourbaki (2004/2005), Exp. n° 938, *Astérisque* **307** (2006), p. 1–31.
- [Cal82] E. CALABI – « Extremal Kähler metrics », Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, p. 259–290.
- [Cal85] ———, « Extremal Kähler metrics. II », Differential geometry and complex analysis, Springer, Berlin, 1985, p. 95–114.
- [Che00] X. X. CHEN – « The space of Kähler metrics », *J. Differential Geom.* **56** (2000), p. 189–234.
- [CT08] X. X. CHEN & G. TIAN – « Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2008), no. 107, p. 1–107.
- [Del88] T. DELZANT – « Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment », *Bull. Soc. Math. France* tbf116 (1988), p. 315–339.
- [Don97] S. K. DONALDSON – « Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology », Fields Medallists’ lectures, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, p. 384–403.
- [Don99] ———, « Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics », Northern California Symplectic Geometry Seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 13–33.
- [Don01] ———, « Scalar curvature and projective embeddings. I », *J. Differential Geom.* **59** (2001), p. 479–522.
- [Don02] ———, « Scalar curvature and stability of toric varieties », *J. Differential Geom.* **62** (2002), p. 289–349.
- [Don05] ———, « Interior estimates for solutions of Abreu’s equation », *Collect. Math.* **56** (2005), p. 103–142.
- [Don08a] ———, « Extremal metrics on toric surfaces : a continuity method », *J. Differential Geom.* **79** (2008), p. 389–432.
- [Don08b] ———, « Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry », Handbook of geometric analysis. No. 1, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008, p. 29–75.

- [Don09] ———, « Constant scalar curvature metrics on toric surfaces », *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), p. 83–136.
- [Gua99] D. GUAN – « On modified Mabuchi functional and Mabuchi moduli space of Kähler metrics on toric bundles », *Math. Res. Lett.* **6** (1999), p. 547–555.
- [Gui94a] V. GUILLEMIN – « Kaehler structures on toric varieties », *J. Differential Geom.* **40** (1994), p. 285–309.
- [Gui94b] ———, *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n -spaces*, Progress in Mathematics, vol. 122, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [Maba] T. MABUCHI – « K-stability of constant scalar curvature polarization », arXiv :0812.4093 [math.DG].
- [Mabb] ———, « A stronger concept of K-stability », arXiv :0910.4617 [math.DG].
- [Mab04] ———, « Uniqueness of extremal Kähler metrics for an integral Kähler class », *Internat. J. Math.* **15** (2004), p. 531–546.
- [Mab05] ———, « An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. I », *Invent. Math.* **159** (2005), p. 225–243.
- [Sto09] J. STOPPA – « K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds », *Adv. Math.* **221** (2009), p. 1397–1408.
- [Szé08] G. SZÉKELYHIDI – « Optimal test-configurations for toric varieties », *J. Differential Geom.* **80** (2008), p. 501–523.
- [Tia97] G. TIAN – « Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature », *Invent. Math.* **130** (1997), p. 1–37.
- [TW05] N. S. TRUDINGER & X.-J. WANG – « The affine Plateau problem », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 253–289 (electronic).
- [WZ04] X.-J. WANG & X. ZHU – « Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class », *Adv. Math.* **188** (2004), p. 87–103.
- [ZZ08] B. ZHOU & X. ZHU – « K-stability on toric manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), p. 3301–3307.

Olivier BIQUARD
 UPMC Université Paris VI
 UMR 7586
 Institut de Mathématiques de Jussieu
 Case 247
 4 place Jussieu, F-75005 PARIS
E-mail : biquard@math.jussieu.fr