Inventiones Math. 48, 293-302 (1978)

Un exemple de fibre holomorphe non de Stein a fibre C^2 ayant pour base le disque ou le plan

Jean-Pierre Demailly

Ecole Normale Sup$_{rieure}$, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05 France, et L.A. au C.N.R.S. n°213\ Universit de Paris Vl. Dpartement de Math$_{matique}$

Introduction

Dans le prsent travail, nous construisons un fibr holomorphe non de Stein au dessus d'un ouvert connexe non vide quelconque de C, ayant pour fibre C^2, et dont les automorphismes de transition sont de type exponentiel.

La premiare reponse ngative au probleme pos en 1953 par J.-P. Serre [4] de savoir si un espace fibr base et fibre de Stein est lui-mme de Stein, a t donnee recemment par H. Skoda dans [5] et [6], ou le lecteur trouvera une bibliographie complete sur le sujet. Dans le contre-exemple de H. Skoda, la base est un ouvert multiplement connexe, et les automorphismes de transition sont localement constants et a croissance exponentielle.

En reponse a une question soulevee par H. Skoda, nous avons donne dans [1] un contre-exemple ou la base est une couronne, ou les automorphismes de transition sont polynomiaux, et nous avons montre qu'alors le groupe de Dolbeault $H^{0,1}$ de l'espace total du fibr est muni de la topologie grossiere,

L'outil principal pour la construction de tels fibrs est une ingalit due a P. Lelong [3], qui permet de contrler precisement la croissance des fonctions plurisousharmoniques sur les fibres. On prouve 1C1, par un calcul d'enveloppe pseudo-convexe utilisant le principe du disque, que les fonctions plurisoushar- moniques continues sont constantes sur certaines fibres particulibres, achevant ainsi la construction du fibr. On montre de plus (cf. la remarque 3) que les fonctions holomorphes du fibr sont triviales, c'est--dire constantes sur toutes les fibres.

1. L'inegalite de P. Lelong

Nous nous contenterons d'noncer le rsultat, et renvoyons le lecteur a [3], §1, [3] p. 193 th. 6.5.2 et p. 194, th. 6.5.4, ou [6], §9, pour un expos complet.

Soient Ω une varit analytique *connexe* de dimension p, V une fonction plurisousharmonique sur $\Omega \mathrm{x} C^n$, ω un ouvert relativement compact de Ω.

0020-9910/78/0048/0293/$ 02.00

On mesure la croissance de V sur les fibres en posant

$M(V,\omega,r) = \mathrm{upx} \in \omega^{\mathrm{s}}, |z| \leqq rV(x,z)$,

ou $r \geqq 0$ et $|z| = \sup |z_j|$.

$$1 \leqq j \leqq n$$

D′aprS P. Lelong [3], $M(V,\omega,r)$ est une fonction convexe croissante de Log$r$, strictement croissante pour r assez grand si V est non constante sur au moins une fibre au dessus de ω.

Lemme. *Si* Ω *est un ouvert de* C^p, $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3$ *trois polydisques concentriques de rayons* $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, *relativement compacts dans* Ω, *et* V *une fonction plurisoushar- monique sur* $\Omega \times \mathrm{C}^n$, *alors*

$M(V,\omega_2,r) \leqq M(V,\omega_1,r^\sigma) + \mu[M(V,\omega_3,1) - M(V,\omega_1,r^\sigma)]$, (1)

avec

$\sigma = \dfrac{\mathrm{Log}\rho_3/\rho_1}{\mathrm{Log}\rho_3/\rho_2}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{\mathrm{Log}\rho_2/\rho_1}{\mathrm{Log}\rho_3/\rho_1}$. (2)

Corollaire (inegalite de P. Lelong). *Soient* Ω *une varit analytique connexe de dimension* P, V *une function plurisousharmonique sur* $\Omega \times \mathrm{C}^n$ *non constante sur au moins une fibre, et* ω_1, ω_2 *deux ouverts relativement compacts de Q. II existe une constante* $\sigma > 1$ *ne dependant que de* ω_1, ω_2, Ω, *et une constante* $R\rangle$O *dependant en outre de* V *telles que*

$M(V,\omega_2,r) \leqq M(V,\omega_1,r^\sigma)$ *pour* $r \geqq R$. (3)

2. Construction du fibr X

La base du fibr sera un ouvert connexe non vide Ω de C. Nous nous intresserons surtout au cas o Ω est un disque ou le plan, car si Ω n'est pas simplement connexe, on peut donner une construction plus simple avec des automorphismes polynomiaux localement constants (cf. [1] §2, 3).

Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a, six points distincts de Ω, et posons

$\Omega_0 = \Omega - \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a\}$,

$\Omega_k = \Omega_0 \cup \{a_k\}$, $1 \leqq k \leqq$.

On definit un fibre' X a fibre C^2 au dessus de Ω par les cartes locales trivialisantes

$\tau_k : X|_{\Omega_k} \to \Omega_k \mathrm{x}\mathrm{C}^2$ au dessus de Ω_k, $0 \leqq k \leqq$, avec les automorphismes de transition

$\tau_{kl} = \tau_k \circ \tau_l^{-1}.\Omega_{\mathrm{O}}\mathrm{x}\mathrm{C}^2 \to \Omega_{\mathrm{O}}\mathrm{x}\mathrm{C}^2$,

(si $k \neq l$, $\Omega_k \mathrm{n} \Omega_l = \Omega_0$) definis par:

$\tau_{kl} = \tau_{0k}^{-1} \circ \tau_{01}$ pour tous k, $l = 1, \ldots,$,

$\tau_{0k}(x,z) = (x,w)$, $x \in \Omega_0$, $z = (z_1,z_2)$, $w = (\mathrm{tt}_{\mathrm{j}}', \iota v_2)$, ou

$w_1 = z_1$, $w_2 = z_2 \exp(z_1 j^{k-1}\varphi(x))$, si $k = 1,2,3,$

$w_1 = z_1 \exp(z_2 i^{k-4} \varphi(x)),\ w_2 = z_2$, si $k = 4, 5, ,$ avec

$z_1,\ z_2,\ w_1,\ w_2 \in$ C, $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et

$\varphi(\mathrm{x}) = \exp(\sum_{\mathrm{I} \leqq k \leqq} \dfrac{\beta_k}{x - a_k}),\ /\mathit{1}_k,\ k = 1,\ \ldots,$, tant un nombre complexe non nul.

Remarque 1. Pour definir X, la carte $\Omega_0 \times \mathrm{C}^2$ est en principe superflue, mais sa considration introduit des automorphismes τ_{0k} plus simples que les automor- phismes $\tau_{kl},\ k,\ l \neq 0$.

3. Restrictions sur la croissance d'une fonction plurisousharmonique non constante sur une fibre $\{a_k\}$xC^2

Soit V une fonction plurisousharmonique *continue* sur X, representee dans la carte $\Omega_k\rangle\langle \mathrm{C}^2$ par la fonction du meme type $V_k = V \circ \tau_k^{-\mathrm{I}}$.

On a dans sur Ω_0xC^2

$V_k \circ \tau_{kl} = V_{\downarrow},\ k,\ l = 0,\ \ldots,$.

L'idee est la suivante: la croissance de $V_k = V_0 \circ \tau_{0lt}$ au dessus d'un ouvert ω_0 relativement compact dans Ω_0 est comparable a la croissance de V_k au dessus d'un petit disque voisin de a_k (inegalite de P. Lelong). Ce petit disque peut tre choisi de sorte que φy prenne des valeurs tr s petites, et que τ_{0k}y soit proche de l'application identique. Revenant a l'ouvert initial ω_0, on voit que le croissance de V_k va etre contrle par celle de V_0, comme l'exprime de faqon prcise la proposition ci-dessous.

Proposition. *Soient* ω_0 *un ouvert relativement compact dans* Ω_0, V *une fonction plurisousharmonique continue sur X. Si pour un certain* $k = 1, ...,$ *ou* , $V_k = V \circ \tau_k^{-1}$ *est non constante sur la fibre* $\{a_k\}\rangle\langle \mathrm{C}^2$, *il existe une constante* $R > 1$ *telle que pour* $r \geqq R$ *on air*:

$M(V_0 \circ \tau_{0k}, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_0, \exp(\mathrm{Log}^4 r))$.

Dmonstrati ()n. Designons par $\omega(a, \rho)$ le disque ouvert de centre *act*, et de rayon $\rho > 0$.

29

J.-P. Demailly

Soit b un point de Ω_0 tel que $\dfrac{\beta_k}{b - a_k}$ soit rel ngatif, et assez voisin de a_k pour que le disque $\omega(b, 4\rho),\ \rho = |b - a_k|$, soit contenu et relativement compact dans Ω_k. Nous poserons:

$b, = a_k + t(b - a_k),\ \rho_t = \dfrac{1}{2}\rho\ddagger$, avec $0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ (4) Dans la suite C$_1$, C$_2$, $\ldots$, $R_1,\ R_2,\ \ldots$, designeront des constantes dpendant des donnes de l'enonce, mais independantes de r et du parametre t. Puisque Ω_k est connexe, (3) entraine pour $r \geqq R_1$

$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b, \rho), r^{C_1})$, et

$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b, , 2\rho), r^{C_1})$, car $\omega(b, \rho) \subset \omega(b_t, 2\rho)$. (5)

D'apres le lemme (formules (1), (2)) appliqu aux disques concentriques $\omega_1 = \omega(b_t, \rho_t)$, $\omega_2 = \omega(b_t, 2\rho)$, $\omega_3 = \omega(b_t, 3\rho)$, contenus dans $\omega(\mathrm{b}, 4\rho)$, on a

$M(V_k, \omega(b_t, 2\rho), r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{\sigma_{\mathrm{t}}})$

$$+\mu_t[M(V_k, \omega(b_t, 3\rho), 1) - M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r^{\sigma_{\mathrm{f}}})],$$

avec

$\sigma_t = \dfrac{\mathrm{Log} 3\rho/\rho_\iota}{\mathrm{Log} 3\rho/2\rho} = \dfrac{\mathrm{Log}/t}{\mathrm{Log} 3/2} \leqq \mathrm{C}_2 \mathrm{Log} \dfrac{1}{t}$,

$\mu_t = 1 - \dfrac{1}{\sigma_t}$, d'oti pour $r \geqq 1$, compte tenu de ce que $\sigma_t > 1$ et $\omega(b_t, 3\rho) \subset \omega(b, 4\rho)$,

$M(V_k, \omega(b_t, 2\rho), r) \leqq M(V_k, \omega(b, , \rho_{\mathrm{r}}), r^{C_2 \mathrm{Log}\frac{1}{\prime}}) + \mu_t[M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1) - M(V_k, \omega(b, , \rho_t), r)]$. () $V_k$tant non constante par hypothese sur la fibre $\{a_k\}\mathrm{xC}^2$, $\sup\limits_{|z| \leqq r} V_k(a_k, z)$ tend vers ∞ quand r tend vers ∞.

tant a la continuit de V_k, il existe pour tout nombre A une constante r_A et un voisinage U_A de a_k tels que

$\sup\limits_{|z| \leqq r_A} V_k(x, z) \geqq A$ pour tout x $\in U_A$. (7) Prenons

$A = M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1)$.

Pour $0 < t \leqq t_0$ assez petit, $\omega(b_{\mathrm{r}}, \rho_t)$ rencontre U_A, donc pour $r \geqq r_A$ on a

$M(V_k, \omega(b_t, \rho_t), r) \geqq A = M(V_k, \omega(b, 4\rho), 1)$. (8)

Un exemple de fibre holomorphe non de Stein

297

En combinant (5), () et (8), il vient:

$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_k, \omega(b_t, \rho,), r^{C_2 \mathrm{Log}\frac{1}{\mathrm{r}}})$, (9)

pour $r \geqq R_2 = \sup(R_1, 1, r_A)$ et $0 < t \leqq r_0$.

Remplaqons maintenant V_k par $V_0 \circ \tau_{0k}$ et choisissons t pour que τ_{0k} tt approche l'application identique$\rangle\}$ sur le polydisque $|z| \leqq r^{C_2 \mathrm{Log}\frac{1}{t}}$.

r etant fixe' $\geqq R_2$, determinons t pour que

$r^{C_2 \mathrm{Log}\frac{1}{t}} \cdot \sup\limits_{X \in \omega(b_{\mathrm{f}}, \rho t \mathrm{I}} |\rho(x)| \leqq 1$. (10) Le transforme du disque $\omega(b_t, \rho_t)$ par l'homographie ,x $\mapsto \underline{\beta_k}$ est le disque de points diametralement oppos s

$$x - a_k$$

$$\beta_k \beta_k$$

et

$t/2(b-a_k)$ 3 $t/2(b-a_k)$.

Comme $\dfrac{\beta_k}{b-a_k}$ a t choisi rel negatif, on a pour x $\in \omega(b_t,\rho_t)$

$\mathrm{Re}\dfrac{\beta_k}{\mathrm{x}-a_k} \leqq -\dfrac{C_3}{t}$, avec $C_3=\dfrac{2|\beta_k|}{3|b-a_k|}$.

Puisque $\omega(b_t,\rho_t)\subset cD(b,4\rho)\subset\subset\Omega_k$, on a les majorations

$|\varphi(x)| \leqq C_4 \exp(\mathrm{Re}\dfrac{\beta_k}{x-a_k})$ pour $xeoi(b,\ 4\rho)$,

(11)

$|\varphi(x)| \leqq \exp(-\dfrac{C_5}{t})$ pour $x\in\omega(b_t,\rho,)$.

(IO) est donc realise d s que

$\exp(\dfrac{C_5}{t}) \geqq r^{C_2\mathrm{Log}\frac{1}{\prime}}$, soit $\dfrac{1/t}{\mathrm{Log}1/t} \geqq \dfrac{C_2}{C_5}\mathrm{Log}r$,

ou encore avec $C>C_2/C_5$ et $r\geqq R_3$ assez grand:

$\dfrac{1}{t} \geqq C\mathrm{Log}r\cdot\mathrm{LogLog}r$ (12) Avec le choix (10) de t, l'image par τ_{0k} du polydisque $|z|\leqq r^{C_2\mathrm{Log}\frac{1}{t}}$ est incluse dans le polydisque $|w|\leqq er^{C_2\mathrm{Log}\frac{1}{\prime}}$.

On a donc d'apres (9) et (12)

$M(V_k,\omega_0,r)\leqq M(V_0\circ\tau_{0k},\omega(b_t,\rho_{\mathrm{r}}),r^{C_2\mathrm{Log}\frac{1}{t}})$,

$M(V_k,\omega_0,r)\leqq M(V_0,\omega(b_t,\rho_t),er^{C_2\mathrm{Log}\frac{1}{t}})$,

$M(V_k,\omega_0,r)\leqq M(V_0,\omega(b_{\mathrm{r}},\rho_t),r^{C_7\mathrm{LogLog}r})$ (13)

en prenant

$C\mathrm{Log}r\mathrm{LogLog}r \leqq \dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{3}{2}C\mathrm{Log}r\cdot\mathrm{LogLog}r$

$r\geqq R_4=\sup(R_2,R_3)$. (14)

Il nous reste revenir du disque $\omega(b_t,\rho_t)$ a l'ouvert ω_0. Considerons cet effet une suite de disques concentriques $\omega_1^n\subset\omega_2^n\subset\omega_3^n$ de centre b_{r_n}, de rayons $\dfrac{1}{4}\rho t_n$, $\dfrac{1}{2}\rho t_n$, $\dfrac{3}{4}\rho t_n$ (cf. (4)).

La condition $\omega_1^n\subset\omega_2^{n-1}$ equivaut $t_n\geqq\dfrac{2}{3}t_{n-1}$, $t_n\leqq\dfrac{}{5}t_{n-1}$ par un calcul facile.

Nous prendrons $t_n=\dfrac{2}{3}t_{n-1}=(\dfrac{2}{3})^n$.

Pour $n=n(r)$ de'termin de fagon unique, on a

$C\mathrm{Log}r$. $\mathrm{LogLog}r \leqq \dfrac{1}{t_n} < \dfrac{3}{2}C\mathrm{Log}r\cdot\mathrm{LogLog}r$, et d'apres (13), (14) il vient pour $r \geqq R_4$

$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_2^{n(r)}, r^{C_7 \mathrm{LogLog}\prime})$ (15)

(Noter que $\omega_2^n = \omega(b_{1_n}, \rho_{\iota_n})$.)

D$'$aprS le lemme, formules (1) et (2), on a pour $r \geqq 1$ et pour tout entier n

$M(V_0, \omega_2^n, r) \leqq M(V_0, \omega;, r^\sigma) + \mu[M(V_0, \omega_3^n, 1) - M(V_0, \omega \mathrm{j}, r)]$, (14)

avec

$\sigma = \dfrac{\mathrm{Log}3}{\mathrm{Log}3/2}, \ \mu = \dfrac{\mathrm{Log}2}{\mathrm{Log}3}$.

Or

$$M(V_0, \omega_3^n, 1) = M(\nabla_k \circ \tau_{0k}^1, \omega_3^n, 1)$$

$$\leqq M(V_k, \omega_3^n, C_8)$$

$$\leqq M(V_k, \omega(b, 3\rho), C_8), \ (17)$$

avec

$C_8 = x\epsilon\omega\{b, 3\rho\}, \mathrm{e}\dfrac{\beta_k}{\mathrm{x} - a_\mathrm{k}}, < 0 \sup_{|z| \underset{\mathrm{R}}{\leq} 1}, |\tau_{0k}^1(x, z)|$, et compte tenu de l'inclusion $\omega_3^n \subset \omega(b, 3\rho)$ (cf. (11) ainsi que la dfinition de τ_{0k} au paragraphe 2). Choisissons maintenant pour $A = M(V_k, \omega(b, 3\rho), C_8)$ une constante r_A et un voisinage U_A tels que la condition (7) soit satisfaite. On a pour $r \geqq 1$

$M(V_\mathrm{O}, \omega :, r) = M(V_k \circ \tau_{0k}^{-1}, \omega_1^n, r) \geqq M(V_k, \omega;, C_9 \mathrm{Log} r\}$, (18)

o C_9 est une constante positive assez petite,

En effet pour $x \in \omega_1^n$, on a a la lois $xcco(b,\ 4\rho)$ et $\mathrm{Re}\dfrac{\beta_k}{x - a_k} \leqq 0$, ce qui entraine $|\varphi(x)| \leqq C_4$ grce a(11). Darts ces conditions, si $|z| \leqq C_9 \mathrm{Log} r$, l'image $w = \tau_{0k}(x, z)$

Vrifie

$|w| \leqq \sup(C_9 \mathrm{Log} r, C_9 \mathrm{Log} r \exp(C_4 C_9 \mathrm{Log} r))$, d'ou

$|w| \leqq r$ si C_9 est assez petit.

Si n est plus grand qu'un certain entier n_0, ω_1^n rencontre U_A, et d'apras (7) on a

$M(V_k, \omega_1^n, C_9 \mathrm{Log} r) \geqq A$ pour $C_9 \mathrm{Log} r \geqq r_A$. (19) En prenant $n \geqq n_0$, $r \geqq \exp(r_A/C_9)$, (1), (7), (18), (19) donnent

$M(V_0, \omega_2^n, r) \leqq M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) \leqq M(V_0, \omega_2^{n-1}, r^\sigma)$, puisque $\omega_1^n \subset \omega_2^{n-1}$.

De proche en proche on obtient

M (V_0, ω_2^n , r) $\leqq M(V_0, co_2^{n_\varsigma)}, r^{\sigma^{n-}}\prime\prime)$, (20) avec

$$n \geqq n_0,\ r \geqq \exp(\frac{r_A}{C_9}).$$

Darts l'ouvert connexe Ω_{O}, (3) implique pour $r \geqq R_5\ M(V_0, \omega_2^{n_0}, r) \leqq M(V_0, \omega_0, r^{\mathrm{C}_{1()}})$.
(21) Enfin (15), (20), (21) fournissent

$M(V_k, \omega_0, r) \leqq M(V_0, \omega_0, r^{C_7 C_{10} \sigma^{\mathrm{n}(r)-\mathrm{LogLog}\Gamma} \prime\prime})$, (22) pour $r \geqq R = \sup(R_4, R_5, \exp(r_A/C_9))$.

Mais

$\sigma = \dfrac{\mathrm{Log}3}{\mathrm{Log}3/2} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ -2 \end{pmatrix}$ avec a $= 2,458\ldots < 3$, d'ou

$\sigma^{n1r\}} = \dfrac{1}{t^{\alpha}_{n(r)}} \leqq (\dfrac{3C}{2})^{\alpha}(\mathrm{Log}r \cdot \mathrm{LogLog}r)^{\alpha}$ d'apres (14), et $C_7 C_{10} \sigma^{n(r)-n_{\mathrm{O}}} \mathrm{LogLog}r \leqq$ $(\mathrm{Log}r)^3$ pour $r \geqq R_7$ assez grand.

L'inegalite de la proposition resulte de (22) en posant $R = \sup(R, R_7)$.

4. Calcul d'enveloppe pseudo-convexe

Thorme. *Le fibre X construit au paragraphe* 2 *au moyen des* 7 *cartes* Ω_{k}x C^2 *et des automorphismes de transition τ_{kl} a la propriete suivante*: *il existe une fibre*

$\tau_{\kappa}^{-1}, (\{a_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^2),\ k = 1,\ ...,$ *o toutes les fonctions plurisousharmoniques continues sur X sont constantes*; *en particulier X n'est pas de Stein, et n'est pas isomorphe au fibrk trivial* ΩxC^2 .

Demonstration. Supposons que pour tout $k = 1,\ \ldots,$ il existe une fonction $V_{(k)}$ plurisousharmonique et continue sur X non constante sur la fibre $\tau_k^{-1}(\{a_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^2)$. Posons $V = \sum_{k=1} \lambda_k V_{(k)}$ ou les λ_k sont des scalaires rels > 0. Lorsque les $f_k\vee$ sont bien choisis, V est non constante sur les six fibres $\{a_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^2$, car il y a au plus un hyperplan de $(\lambda_1\ ,\ ...,\ \hat{\lambda}) \in \mathrm{R}$ pour lesquels V soit constante sur l'une des six fibres. On peut alors appliquer la proposition a chacune des fibres $\{a_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^{\gamma}*$, $k = 1,\ ...$:

$M(V_0 \circ \tau_{0k}, \omega_0, r) \leqq M(V_{\mathrm{O}}, \omega_0, \exp(\mathrm{Log}^4 r))$ pour $r \geqq R$,

ce qul S'crit encore

$\sup_{X \in \overline{\omega}_0, z \in K_{x.r}} V_0(x, z) \leqq M(V_0, \omega_0, \exp(\mathrm{Log}^4 r))$, (23)

avec

$K_{x,r} = \cup \tau_{0k}(\{x\}\mathrm{x}1 \leqq k \leqq D_r)$.

Comme V_0 est plurisousharmonique en z, on a

$\sup_{\mathrm{x} \in \omega_{\mathrm{O}}, z \in K_{x,r}} V_0(\mathrm{x}, z) = \sup_{\mathrm{x} \in \overline{\omega}_{1\mathrm{J}}, z \in \hat{K_{\mathrm{x}r}}} V_0(x, z)$, (24) ou, pardfinition$\wedge$ meme de celle-ci, $\hat{K_{x,r}}$ est l'enveloppe pseudo-convexe de $K_{x,r}$.

$K_{x,r}$ coincide d'ailleurs avec l'enveloppe polynomialement convexe de $K_{\mathrm{x},r}$ d'apres Hrmander [2] p. 91, th. 4.3.4. Il nous reste a evaluer $\hat{K_{x.r}}$. La forme de τ_{0k} montre que pour $k = 1, 2, 3,\ \tau_{0k}(\{x\}\mathrm{x}D_r)$ contient l'ensemble

$$\{(w_1, w_2) \in \mathrm{C}^2\ ;\ |w_1| \leqq r,\ |w_2| \leqq r\exp(\frac{r}{2}|\varphi(x)|),\ \text{et}\ |\mathrm{Arg} w_1 j^{k-1}\varphi(x)| \leqq \frac{\pi}{3}\},$$

donc $\bigcup_{k=1,2,3} \tau_{0k}(\{x\}\mathrm{x}D_r)$ contient le polydisque $|w_1| \leqq r,\ |w_2| \leqq r\exp(\frac{r}{2}|\varphi(x)|)$;
de meme $\bigcup_{k=4,5,} \tau_{0k}(\{x\}\mathrm{x}D_r)$ contient le polydisque $|w_1| \leqq r\exp(\frac{r}{2}|\varphi(x)|),\ |w_2| \leqq r$.

L e principe du disque (cf. par exemple Hrmander [2], p. 34, th. 2.4.3.) montre que $K_{x,r}$ contient le polydisque de rayon moyenne geometrique

$r\exp(\frac{r}{4}|\varphi(x)|)$. (25)

Mais pour 0, et d'apres (23), (24), (25), la majoration $M\ (V_0, \omega_{\mathrm{O}},\ r\exp(\frac{Cr}{4})) \leqq M(V_0, \omega_0, \exp(\mathrm{Log}^4 r))$ est verifiee pour $r \geqq R$.

Comme V est non constante sur au moins une fibre de X , $M(V_0, \omega_0, r)$ est strictement croissante pour r assez grand; on en conclut

$r\exp(\frac{Cr}{4}) \leqq \exp(\mathrm{Log}^4 r)$

pour tout r assez grand, ce qui est contradictoire.

5. Compliments et bibliographie

Remarque 2. La dhmonstration ci-dessus ne permet pas de prdciser la fibre ⟨⟨exceptionnelle⟩⟩$\tau_k^{-1}(\{a_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^2)$ du theoreme. Supposons neanmoins qu'il existe un groupe d'automorphismes de X permutant transitivement les fibres $\tau_k^{-1}(\{\mathrm{a}_k\}\mathrm{x}\mathrm{C}^2),\ k = 1,\ ...,$: toutes les fonctions plurisousharmoniques continues sur X sont alors constantes sur chacune des six fibres. Un exemple de cette situation est obtenu avec les donnees suivantes: Ω est un disque de centre 0et de rayon $\rho,\ 0 < \rho \leqq \alpha)$,

$a_k = aj^{k-1}$ pour $k = 1,\ 2,\ 3,$

$a_k = -aj^{k-5}$ pour $k = 4, 5, ,$ avec $0 < |a| < \rho$,

$\varphi(\mathrm{x}) = \exp(\sum_{k=0,1,2} \frac{\beta}{a^2 - j^k x^2}),\ \beta \neq 0;$

le groupe d'automorphismes de X est le groupe d'ordre engendre par l'auto- morphisme 0 tel que

$\theta_{kl} = \tau_k \circ \theta \circ \tau_{\mathrm{I}}^{-1} : \Omega_\iota\mathrm{x}\mathrm{C}^2 \to \Omega_k\mathrm{x}\mathrm{C}^2$

$$(x, z_1, z_2) \mapsto (-jx, z_2, jz_1)$$

o k et l sont lis par la relation $\Omega_k = -j\Omega_l$. (Les conditions de recollement des 0_{kl} se verifient facilement sachant que $\varphi(-jx) = \varphi(x)$.)

Remarque 3. Il est aise de voir, de faąon generale, que les fonctions holomorphes sur X sont constantes sur toutes les fibres.

Soit en effet f une fonction holomorphe sur X, representee dans la carte Ω_kxC^2 par la fonction $f_k = f \circ \tau_k^{-1}$. Au dessus d'un disque de centre a_k contenu dans Ω_k, on peut ecrire

$$f_k(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - a_k)^n g_n(z),$$

ou les g_n sont des fonctions entieres de 2 variables, $g_0(z) = f_k(a_k, z)$ est une constante α_0 d'aprds le thorme; par rcurrence sur n, on voit que chaque g_n het une constante α_n en considerant la fonction holomorphe sur X

$$h_n = \frac{f - \sum_{m<n} \alpha_m (x - a_k)^n}{(x - a_k)^n},$$

302

J.-P. Demailly

qui est representee dans la carte Ω_kxC^2 par la fonction $h_{n,k} = h_n \circ \tau_k^{-1} = \sum_{m \geqq n} (x - a_k)^{m-n} g_m(z)$. On a donc $f_k(x, z) = \sum_{n=0}^{\alpha s} \alpha_n (x - a_k)^n$, et f est constante sur toutes les fibres par connexite de la base (ou par l'inegalite de Lelong).

Remarque 4. On peut montrer que le groupe de Dolbeault $H^{0,1}(X)$ est de dimension infinie, et non separe; voir [1], §.

Bibliographie

1 Demailly, J.P.: Diffrents exemples de fibrs holomorphes non de Stein, a paraltre au Seminaire

Lelong 1976/1977 2. Hrmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables Second edition. North

Holland Publishing Company, 1973 3. Lelong, P.: Fonctionnelles analytiques et fonctions entires (n variables). Montreal, les Presses de

l'Universit de Montreal, 1968, seminaire de Mathmatiques Suprieures, Ete 1967 , n°28 4. Serre, J.P.: Quelques problmes globaux relatifs aux varits de Stein. Colloque sur les fonctions

de plusieurs variables. Bruxelles, 1953 5 Skoda, H.: Fibrs holomorphes a base et a fibre de Stein. C.R. Acad Sc. de Paris, 16 mai 1977, A

1159-1202 6. Skoda, H.: Fibrs holomorphes a base et fibre de Stein, Inventiones Mathematicae, P 97-107,

Vol. 43, Fasc. 2, 1977
Reu le 5 juillet 1978