Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4' serie, t. 20, 1987, P. 579 a 598.

FORMULES INTEGRALES POUR LES FORMES DIFFERERAIELLES DE TYPE: (p, q) DANS LES VARIETES DE STEIN

PAR JEAN-PIERRE DEMAILLY ET CHRISTINE LAURENT-THIEBAUT

RÉSUMÉ. – On construit sur toute variété de Stein un noyau global permettant de demontrer des formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour des formes differentielles de tyPe (p, q) quelconque.

ABSTRACT. – We construct on every Stein manifold a global kernel which enables us to prove Koppelman and Koppelman-Leray formulas for differential forms of arbitrary tyPe (p, q).

Introduction

Henkin et Leiterer ont construit dans [2] et ([3], chap. 4) des noyaux globaux sur une variete de Stein grâce auxquels ils demontrent des formules integrales pour les $(0, q)-$ formes differentielles. Dans cet article nous demontrons des formules integrales du type Koppelman et Koppelman-Leray pour les formes differentielles de type (p, q) quelconque sur une variété de Stein. Celles-ci generalisent a la fois les formules demontrees par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes differentielles (*cf.* [2] et [3], chap. 4) et les formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour les (p, q)-formes differentielles dans $\mathbb{C}^n$ (*cf.* [8], [7] et [1]); elles permettent sous certaines conditions de resoudre des problemes de $\overline{\partial}$ avec estimations de croissance ou de régularité.

Dans un premier paragraphe nous construisons des noyaux dont nous donnons une expression globale sur la variete de Stein M; ce sont des formes differentielles continues sur $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ prive' de sa diagonale. La necessite d'avoir des formes differentielles invariantes par changement de coordonnees permettant d'obtenir des formules integrales pour les (p, q)-formcs differentielles nous a amenés dans le cas $p \geqq 1$ a introduire la connexion do Chern du fibre' tangent.

Aux paragraphes 2 et 3 nous nous interessons principalement a un noyau du type précédent qui generalise le noyau de Bochner-Martinelli. II en resulte une formule de Koppelman pour les (p, q)-*formcs* differentielles sur une variété de Stein (theoreme 2.2), et la transformee de Bochner-Martinelli se generalise egalement dans ce contexte (theoreme 3.1).

Le paragraphe 4 est consacre a la démonstration de deux formules de Koppelman- Leray dont on peut deduire des formules de résolution du I pour les (p, q)-*formcs*

ANNALES SC1ENT1F1QUES DE L'ÉCOLE N0RMALE SUPÉRIEURE. – 0012-9593/87/0457920/$ 4.00/ [*eggc*] Gauthier-Villars

differentielles dans un domaine strictement pseudoconvexe d'une variete de Stein. La premiere generalise la formule integrale donnee par Lieb [7] et Φvrelid[8] dans $\mathbb{C}^n$ et la seconde la formule de base de l'article [1] de Andersson et Berndtsson.

Le dernier paragraphe donne une methode, differente de celle utilisee par Henkin et Leiterer ([3], §4. 12), pour obtenir des formules integrales pour les formes differentielles a valeurs dans un fibre' vectoriel holomorphe sur une variete de Stein.

1. Preliminaires

Soit X une variété analytique complexe; si u et v sont des n-uplets de fonctions C^1 definies sur un ouvert de X × X, on pose

$$n$$

$$C\mathrm{D}_{z,\zeta}(u) = \wedge d_{z.\zeta} u_j j = 1$$

$$\overline{\omega}'_{z,\zeta}(v) = \sum_{j=1} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k\neq j} \overline{\partial}_{z,\zeta} v_k$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$$

$[(z,\zeta)$ designent les variables dans X × X].

Le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est alors donne par les expressions suivantes : $\mathrm{K}_{\mathrm{BM}}(z,\zeta) = \dfrac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^n} \dfrac{00'_{z,\zeta}(\overline{z}-\overline{\zeta}) \wedge 0)_{z,\zeta}(z-\zeta)-}{|z-\zeta|^{2n}}$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\langle \overline{z}-\overline{\zeta}, d_{z,\zeta}(z-\zeta)\rangle \wedge (\langle \overline{\partial}_{z,\zeta}(\overline{z}-\overline{\zeta}), d_{z,\zeta}(z-\zeta)\rangle)^{n-1}}{|z-\zeta|^{2n}}.$$

II permet de demontrer des formules de représentation integrale pour les formes differentielles de bidegre (p,q) quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

Dans [2] et [3], chapitre 4, Henkin et Leiterer construisent des noyaux qui conduisent a la représentation des formes differentielles de bidegre $(0,q)$ dans une variété de Stein.

Precisons maintenant la methode de construction u.tilisée par Henkin et Leiterer.

On considere une variete de Stein M de dimension n dont l'orientation est definie par la condition suivante: si $(z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnees holomorphes locales, la forme differentielle

$$(-\mathrm{i})^n d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d_{\overline{Z_n}\wedge} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = (-1)^{n(n-1)/2}\mathrm{i}^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ . \ . \ . \ \wedge dz_n \wedge d_{\overline{Z_n}}$$

est positive.

On notera T(M) et $\mathrm{T}^*(\mathrm{M})$ les fibrés tangent et cotangent de M et $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$, $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ leurs images reciproques respectives par la projection de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ age $\mathrm{M}, (z,\zeta)\mapsto z$.

Soit $s : \mathrm{M}\times\mathrm{M}\rightarrow\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ la section holomorphe de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ definie par Henkin et Leiterer ([2] et [3], lemme 4.2.4) qui verifie :

$\bullet s(z, z)=0$ pour tout $z\in\mathrm{M}$

$\bullet s(z,\ .\ ) : \mathrm{M}\rightarrow\mathrm{T}_{z}(\mathrm{M})$ est une application biholomorphe d'un voisinage de z dans M sur un voisinage de 0 dans $\mathrm{T}_{z}(\mathrm{M})$.

Rappelons brievement la construction de s. Soit $f : \mathrm{M}\sigma\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ un plongement propre de M dans $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ et soit

$$\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{T}(\mathrm{M})\rightarrow\mathrm{M}\times\mathbb{C}^{\mathrm{N}}\rightarrow\mathrm{N}(\mathrm{M})\rightarrow\mathrm{O}$$

la suite exacte definissant le fibre' normal a M, note N(M).

D'après le theoreme B de Cartan on a $\mathrm{H}^{1}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}(\mathrm{N}(\mathrm{M}), \mathrm{T}(\mathrm{M})))=0$, donc la suite exacte ci-dessus admet un scindage global $g : \mathrm{M}\times\mathbb{C}^{\mathrm{N}}\rightarrow\mathrm{T}(\mathrm{M})$ tel que $g\circ df=\mathrm{Id}_{\mathrm{T}(\mathrm{M})}$. La section s est alors definie par

$$s(z,\zeta)=g(z,f(\zeta)-f(z)).$$

Grace au theoreme B applique sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$, on peut d'autre part construire une fonction φ holomorphe sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$, egale a 1 sur la diagonale $\Delta(\mathrm{M})$ de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ et dont la restrictiqu a $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\backslash\Delta(\mathrm{M})$ appartient au sous-faisceau de $O(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ engendre par s. De plus il existe un entier $\chi\geqq 0$ tel que la fonction $\varphi^{\mathrm{X}}/|s|_{9}^{2}$ soit de classe C^{2} sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\backslash\Delta(\mathrm{M})$ (*cf.* [2] et [3], lemme 4.2.4).

Si D est un ouvert relativement compact de M dont le bord $\partial\mathrm{D}$ est de classe C^{1} par morceaux, on appellera section de Leray pour (D, s, φ) (*cf.* [3], §4. 3.2) un couple (s^{*}, χ^{*}) où χ^{*} est un entier et s^{*} une section de $\tilde{\mathrm{T}}^{*}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ definie sur $\mathrm{D}\times\mathrm{V}_{\partial\mathrm{D}}, \mathrm{V}_{\partial\mathrm{D}}$ etant un voisinage de $\partial\mathrm{D}$ dans M, telle que

@ $\langle s^{*}(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle\neq 0$ pour $z\in\mathrm{D}, \zeta\in\partial\mathrm{D}$ tels que $\varphi(z,\zeta)\neq 0(\langle\ ,\ \rangle$ designe le crochet de dualite' entre $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ et $\tilde{\mathrm{T}}^{*}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))$.

$\bullet\varphi^{\mathrm{x}^{*}}(z,\zeta)/\langle s^{*}(z,\langle\rangle,\ s(z,\zeta)\rangle$ est de classe C^{1} sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$ dans $\mathrm{D}\times$ M.

Si U est un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repere trivialisant holomorphe de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$, nous noterons respectivement u et u^* les expressions de s et s^* dans ce repere et son dual. Henkin et Leiterer posent alors

$$\Omega^0(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s) = \frac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\varphi_*^{\mathrm{v}n}\frac{\overline{\omega}'_{z.\zeta}(u^*)\wedge 0)_\zeta(u)}{\langle u, u\rangle^n}$$

ce qui definit une forme differentielle sur $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$.

Mais ce noyau ne contient que des termes de bidegre $(0, q)$ en z.

Pour passer a la représentation des formes differentielles de type (p, q) quelconque il convient donc de completer ce noyau. La premiere expression du noyau de Bochner- Martinelli conduirait a remplacer $0)_\zeta(u)$ par $\mathrm{rn}_{z,\zeta}(u)$ dans la définition de $\Omega^0(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$

mais cela ne permet plus de definir une forme differentielle invariante par changement de coordonnees car s est une section du fibre vectoriel $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$. Nous devons donc, pour obtenir un noyau defini globalement sur $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$, utiliser une connexion de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$.

Soit 0 une metrique hermitienne C^∞ sur T(M), elle induit une metrique hermitienne, notee encore C) sur $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ et une application antilinéaire σ : $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})\rightarrow\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$, $\xi\mapsto\langle ., \xi\rangle_9$. On appellera D la connexion de Chern de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ relative a 0 et ∇ la connexion de Chern de $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ associee a la metrique $6*$ induite par C) sur $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$.

On notera $\hat{s}$ la section $C^\infty, \mathrm{M}\times\mathrm{M}\rightarrow\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ définie par $\hat{s}=\sigma\circ s$, *il* est facile de voir que $(\hat{s}, \chi)$ est une section de Leray pour (D, s, φ), D etant n'importe quel ouvert relativement compact a bord C^1 par morceaux de M. Remarquons que si 9 est la metrique hermitienne construite par Henkin et Leiterer a l'aide d'une partition de l'unite subordonnee a un recouvrement trivialisant de T(M)∧' alors $\hat{s}$ coincide avec la section $\overline{s}$ qu'ils ont definie dans [2] et [3], §4. 3. 1. De plus s et $\overline{s}$ possedent les memes propriétés.

On peut alors definir la forme differentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$ par

$$\Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi_*^{\mathrm{v}n}\frac{\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla'' s^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}}{\langle s, s\rangle^n}.$$

C'est une forme differentielle continue sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$ dans $\mathrm{D}\times\mathrm{M}$ si (s^*, χ^*) est une section de Leray associee à (D, s, φ) et $\mathrm{v}\geqq\chi^*$. Si de plus $s^*=\hat{s}$, la forme differentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ est de classe C^1 sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\backslash\Delta(\mathrm{M})$ si $\mathrm{v}\geqq\chi$ et admet une singularite d'ordre *2* $n-1$ en $z=\zeta$.

Etudions l'expression de la forme differentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^{*}, s)$ dans des coordonnees locales.

Soient U un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^{n}$ un repere trivialisant holomorphe de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$. La metrique 0 est donnee dans ce repere par une matrice hermitienne definie positive H, C^{∞}, ne dépendant que de la variable z et la metrique induite par 0 sur $\tilde{\mathrm{T}}^{*}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ est donnee dans le repere dual par la matrice $\overline{\mathrm{H}}^{-1}$.

Soient u, u^{*}, $\hat{u}$ les expressions respectives de s, s^{*} et $\hat{s}$ dans les reperes choisis; alors les expressions de $\mathrm{D}s, \nabla s^{*}$ et $\nabla\hat{s}$ dams ces reperes sont donnees classiquement pde $du+(\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge u$, du' $+(\overline{\mathrm{H}}\partial\overline{\mathrm{H}}^{-1})\wedge u^{*}$ et $d\hat{u}+(\overline{\mathrm{H}}\partial\overline{\mathrm{H}}^{-1})$ $\wedge\hat{u}, etpardéfinitiondeona :=\overline{\mathrm{H}}\overline{u}.$

On en deduit que :

$$\langle\nabla'' s^{*}, \mathrm{D}s\rangle=\sum_{j=1}^{n}\overline{\partial}u_j^{*}\wedge(du_j+((\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge u)_j)$$

$$\langle s^{*}, \mathrm{D}s\rangle=\sum_{j=1}^{n}u_j^{*}(du_j+((\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge u)_j).$$

Un calcul analogue a celui du lemme 3 de [1] montre que

$$\langle s^{*}, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla'' s^{*}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}=(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!\ [_{j=1}\sum^{n}(-1)^{j-1}u_j^{*}\bigwedge_{k\neq j}\partial u_k^{*}]$$

$$n$$

$$\wedge\bigwedge_{p=1}(du_p+((\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge\mathcal{U})_p).$$

On a donc pour z et ζ dans des compacts

$$\langle s^{*}, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla''\mathrm{s}^{*}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}=(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!$$
$$[_{\overline{0}0'_{z,\zeta}(u^{*})}\wedge\mathrm{rn}_{z,\zeta}(u)+O(|u|_9)].$$

Dans le cas particulier ou l'on prend comme section s^{*} la section $\overline{s}$ de [3] et pour 0 la metrique intervenant dans la définition de $\overline{s}$ on obtient sur $\mathrm{U}\times\mathrm{V}\backslash\Delta(\mathrm{U})$

$$\tilde{\Omega}(\varphi^{\text{v}}, \overline{s}, s) = \tilde{\mathrm{K}} + O(\frac{1}{|u|_9^{2n-2}})$$

(si z et ζ varient dans des compacts de M).

$\tilde{\mathrm{K}}$ étant le noyau défini localement dans [5] et qui est une solution fondamentale locale du $\mathit{8}$ ([5], §2).

Remarquons d'autre part que si $\mathrm{M} = \mathbb{C}^n$ et si la metrique 0 est la métrique habituelle de $\mathbb{C}^n$ alors les connexions D et ∇ coincident avec la differentielle ordinaire et si on prend :

$$\varphi(z, \zeta) = 1, \ \forall (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$
$$s(z, \zeta) = \mathrm{z} - \zeta \text{ et } s^*(z, \zeta) = \overline{z} - \overline{\zeta}$$

le noyau $\Omega(\varphi^{\text{v}}, \overline{s}, s)$ n'est autre que le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

2. Formule de Koppelman pour les (p,q)-*formes* differentielles

Dans ce paragraphe nous allons etendre au cas des (p, q)-*formcs* differentielles, $0 \leqq p$, $q \leqq n$ la formule de Koppelman donnee dans les varietes de Stein par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes differentielles ([3], theoreme 4. 5.2).

Considerons le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^{\text{v}}, \hat{s}, s)$ defini au paragraphe précédent. Remarquons tout d'abord que s etant holomorphe on a $\mathrm{D}s = \mathrm{D}'s$; les connexions D et ∇ sont d'autre part liées par la relation naturelle $\nabla\hat{s} = \nabla\ (\mathrm{a} \circ s) = \sigma \circ \mathrm{D}s$ ou σ est antilineaire; par suite $\nabla\hat{s} = \nabla''\hat{s}$ et

$$\Omega(\varphi^{\text{v}}, \hat{s}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^{\text{v}n} \frac{\langle \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s \rangle)^{n-1}}{|s|_9^{2n}}.$$

Le noyau $\Omega(\varphi^{\text{v}}, \hat{s}, s)$ admet la décomposition suivante :

$$\tilde{\Omega}(\varphi^{\text{v}}, \hat{s}, s) = \sum_{1 \leqq p \leqq n, 1 \leqq q \leqq n-1} \Omega_q^p(\varphi^{\text{v}}, \hat{s}, s)$$

ou $\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ est de tyPe (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ. On peut remarquer que si $\hat{s}$ coincide avec la section $\overline{s}$ de Henkin et Leiterer, $\sum_{1 \leqq q \leqq n-1} \Omega_q^0(\varphi^{\mathrm{v}}, \overline{s}, s)$ n'est autre que le noyau Ω^{o} defini par Henkin et Leiterer ([2], §2.4 et [3], §4. 5) pour demontrer la formule de Koppelman pour les $(0, q)$-formes differentielles:ceci resulte du fait que la forme de connexion $\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H}$ qui intervient dans la définition de $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ ne dépend que de la variable z. On pose $\Omega_{-1}^0 = \Omega_n^0 = 0$.

Pour simplifier les expressions ulterieures, nous noterons $\tilde{\Omega}$ et Ω_q^p les noyaux $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ et $\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ lorsqu'il ne risque pas d'y avoir de confusion.

Designons par $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = \mathrm{D}^2$ et $c(\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = \nabla^2$ les formes de courbure des fibrés $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$ et $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$ pour les connexions D et ∇; elles sont de bidegré $(1, 1)$ et ne dépendent que de la variable z.

LEMME 2. 1. – *On a sur* $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \backslash \Delta(\mathrm{M})$.

$$\overline{\partial}\Omega = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\varphi^{\mathrm{v}n}}{\langle \hat{s}, s\rangle^n} [\langle \hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}) \wedge s\rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$$

$$+(n-1)\langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle \wedge \langle \nabla\hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge s\rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-2}].$$

et donc ro *a une singularite d'ordre 2* $n-2$ *sur la diagonale.*

Si de plus $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0$ *on a*$\overline{\partial}\tilde{\Omega} = 0$.

Dimonstration. – Calculons tout d'abord

$$d[\frac{\langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s\rangle^n}].$$

On a

$$d\langle \hat{s}, s\rangle = \langle \nabla\hat{s}, s\rangle + \langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle$$
$$d\langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle = \langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle + \langle \hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge S\rangle$$

$$d(\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1} = (n-1)[\langle c(\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M}) \wedge \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle$$

$$-\langle \nabla\hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge S\rangle] \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-2}.$$

D'ou

$$d[\frac{\langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s\rangle^n}] = \frac{1}{(\langle \hat{s}, s\rangle)^{n+1}} [\langle \hat{s}, s\rangle (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^n$$

$$+\langle \hat{s}, s\rangle \langle \hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge s\rangle \wedge (\langle \nabla\hat{s}, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$$
$$-(n-1)\langle \hat{s}, s\rangle \langle \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle c(\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge \hat{s}, \mathrm{D}s\rangle$$

$$-\langle\nabla\hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))\wedge s\rangle)\wedge(\langle\nabla\hat{s},\mathrm{D}s\rangle)^{n-2}$$

$$-n(\langle\nabla\hat{s}, s\rangle+\langle\hat{s},\mathrm{D}s\rangle)\wedge\langle\hat{s},\mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},\mathrm{Ds}\rangle)^{n-1}]$$

or

$$\langle\hat{s},\mathrm{D}s\rangle\wedge\langle\hat{s},\mathrm{D}s\rangle=0$$

$$\langle\hat{s}, s\rangle(\langle\nabla\hat{s},\mathrm{D}s\rangle)^n=n\langle\nabla\hat{s}, s\rangle\wedge\langle\hat{s},\mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},\mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$$

(il suffit de reprendre les calculs du lemme 3 de [1]).

Revenons au noyau $\tilde{\Omega}$, comme φ est holomorphe et $\nabla\hat{s}=\nabla''\hat{s}$, on a pour des raisons de degre' $\overline{\partial}\tilde{\Omega}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}$

$$\times\frac{\left\{\begin{array}{lll}\langle\hat{s} & c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))\wedge & s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s}\quad\mathrm{D}s\rangle)^{n-1}\\ +(n-1)\langle\hat{s} & & \mathrm{D}s\rangle\Lambda\langle\nabla\hat{s}\quad c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))\wedge\quad s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s}\quad\mathrm{D}s\rangle)^{n-2}\end{array}\right\}}{\langle\hat{s}, s\rangle^n},$$

Étudions maintenant la singularite de $\overline{\partial}\Omega$ en $z=\zeta$. Par définition de $\hat{s}$, on a $(\hat{s}, s)=|s|_9$ et si z et ζ varient dans des compacts de M, les formes differentielles $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}),\nabla\hat{s}$ et $\mathrm{D}s$ sont bornees donc : $\overline{\partial}\tilde{\Omega}=O(|s|_9^{-2n+2})$ car $|\hat{s}|=|\sigma s|=O(|s|_9)$.

THÉORÈME 2.2. – *Soient* D *un domaine relativement compact à bord C^1 par morceaux de la variete de Stein* M *et* $\mathrm{v}\geqq 2\chi$. *Si f est une (p,q)-forme différentielle continue sur* $\overline{\mathrm{D}}$, *telle que $\overline{\partial}f$ soit aussi continue sur* $\overline{\mathrm{D}}, 0\leqq p,q\leqq n$, *on a pour* $z\in\mathrm{D}$ (2. 1) $f(z)=(-1)^{p+q}[\displaystyle\int_{\zeta\in\partial\mathrm{D}}f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)-\int_{\zeta\in\mathrm{D}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)$

$$+\overline{\partial}_z\int_{\zeta\in\mathrm{D}}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)+(-1)^{p+q+1}\int_{\zeta\in\mathrm{D}}f(\zeta)\wedge\mathrm{P}_q^p(z,\zeta)]$$

où $\Omega_q^p(z,\zeta)=\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s}, s)(z,\zeta)$ *et* $\mathrm{P}_q^p(z,\zeta)$ *est la partie de bidegre* (p,q) *en* z *de* an.

Remarque 1. – Si $p=0, \mathrm{P}_q^p=0$ car $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))$ est de bidegre $(1,1)$ en z, on retrouve donc la formule (2. 4. 6) de [2].

Remarque 2. – Si la metrique 0 est telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$, on obtient la formule de Koppelman classique pour les (p,q)-*formes* differentielles.

Demonstration. – La methode utilisee 1C1 est la meme que celle de la démonstration du theoreme 4. 5.2 de [3]. II nous a semble plus clair d'en rappeler 1C1 les principales etapes.

II suffit de prouver pour toute forme differentielle g de bidegre $(n-p,n-q), C^\infty$ a support compact dans D, que $\int_{z\in\mathrm{D}} f(z)\wedge g(z)=(-1)^{p+q}[\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{D}\mathrm{x}\partial\mathrm{D}} f(\zeta)\wedge \Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)$

$$-\int_{(z},\zeta\rangle\in\mathrm{DxD}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)]$$

$$+\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{DxD}} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)\wedge\overline{\partial}_z g(z)-\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{DxD}} f(\zeta)\wedge\mathrm{P}_q^p(z,\zeta)\wedge g(z).$$

Par des considérations de bidegre on peut remplacer Ω_q^p et Ω_{q-1}^p par $\tilde{\Omega}, \mathrm{P}_q^p$ par $\overline{\partial}\Omega$ ainsi que ∂f et ∂g par df et dg. On doit donc demontrer l'égalité (2′.2) $\int_{z\in\mathrm{D}} f(z)\wedge g(z)$

$$=(-1)^{p+q}[\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{Dx}\partial\mathrm{D}} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{DxD}} d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)]$$

$$+\int_{(z,\zeta)\mathrm{eDxD}} f(\zeta)\wedge\Omega(z,\zeta)\wedge d_z g(z)-\int_{(z,\zeta)\in\mathrm{DxD}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{z,\zeta}\Omega(Z,\zeta)\wedge g(z).$$

Grice aux propriétés de s, on peut trouver un voisinage $\mathrm{U}_\Delta\subset\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ de la diagonale $\Delta=\{(z,z)|z\in\mathrm{M}\}$ tel que pour tout z fixe dans $\mathrm{M}, s(z,\zeta)$ soit biholomorphe pour tout $\zeta\in\mathrm{M}$ tel que $(z,\zeta)\in\mathrm{U}_\Delta$. On considere les ouverts

$$\mathrm{U}_\epsilon=\{(z,\zeta)\in\mathrm{U}_\Delta\times\mathrm{U}_\Delta||s|_9<\epsilon\},\ \epsilon>0.$$

Comme $\mathrm{D}\subset\subset\mathrm{M}$, pour ϵ assez petit, $\partial\mathrm{U}_\epsilon\cap(\mathrm{D}\times\mathrm{D})$ est lisse.

Nous allons appliquer la formule de Stokes a la forme differentielle $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$ sur l'ouvert $\mathrm{D}_\epsilon=\mathrm{D}\times\mathrm{D}\backslash\mathrm{U}_\epsilon$.

Nous choisissons ϵ pour que

$$\partial \mathrm{D}_\epsilon \cap (\mathrm{supp} g \times \mathrm{M}) = (\mathrm{D} \times \partial \mathrm{D} \cup \partial \mathrm{U}_\epsilon) \cap (\mathrm{supp} g \times \mathrm{M}),$$

alors $\displaystyle\int_{(z,\zeta)\in \mathrm{D}\times\partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in\partial \mathrm{U}_\epsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)$

$$= \int_{(z.\zeta)\in \mathrm{D}_\epsilon} d_{z,\zeta}(f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)).$$

Or $d_{z,\zeta}(f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)) = d_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)$

$$+(-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \Omega(z,\zeta) \wedge d_z g(z)$$

et pour des raisons de bidegre on peut remplacer $d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ par $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$, on en deduit donc que (2. 3) $\displaystyle\int_{(z,\zeta)\in \mathrm{Dx}\partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in\partial \mathrm{U}_\epsilon} f(\zeta) \wedge$ $\tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)$

$$= \int_{(z,\zeta)\in \mathrm{D}_\epsilon} d_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q} \int_{(z,\zeta)\in \mathrm{D}_\epsilon} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)$$

$$+(-1)^{p+q+1} \int_{(z,\zeta)\in \mathrm{D}_\epsilon} f(\zeta) \wedge \Omega(z,\zeta) \wedge d_z g(z).$$

ii est clair que $\tilde{\Omega}$ ayant une singularite d'ordre *2* $n-1$ *au* voisinage de la diagonale et $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ une singularite d'ordre 2 $n-2$, ces deux formes differentielles sont localement integrables sur $\mathrm{D} \times \overline{\mathrm{D}}$ et par conséquent les integrales du second membre de (2. 3) tendent vers les integrales correspondantes de (2.2) quand $\epsilon \to 0$. Il reste donc a montrer que

(2. 4) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \int_{(z,\zeta)\in\partial \mathrm{U}_\epsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z\in \mathrm{D}} f(z) \wedge g(z).$

Après usage d'une partition de l'unite sur le support de g, on peut supposer que le support de g est contenu dans un ouvert de carte U de M. Soit V un ouvert tel qfu suppg $\subset$ V $\subset\subset$ U.

Si ϵ est assez petit, les conditions $z \in \mathrm{V}$ et $(z,\zeta) \in \mathrm{U}_\epsilon$ impliquent $\zeta \in \mathrm{U}$. Avec les notations du paragraphe 1, le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$ admet pour $(z,\zeta) \in \mathrm{V} \times \mathrm{U}$ l'expression en coordon- nees locales

$$\tilde{\Omega}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^{n}}\varphi^{\mathrm{v}n}\frac{\mathrm{eo}'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\zeta}(u)-}{|u|_{9}^{2n}}+O(|u|_{9}^{-2n+2}).$$

En particulier sur $\partial\mathrm{U}_{\epsilon}\cap(\mathrm{V}\times(\mathrm{U}\cap\overline{\mathrm{D}}))$

$$\Omega(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^{n}}\ \mathrm{cp}\ \frac{0)'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge 00_{z,\zeta}(u)-}{\epsilon^{2n}}+O(\epsilon^{-2n+2}).$$

Or la mesure de l'ensemble $\partial\mathrm{U}_{\epsilon}\cap(\mathrm{V}\times\mathrm{U})$ est un 0 (ϵ^{2n-1}), il en resulte que (2.4) se deduira de

(2. 5) $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{(z.\zeta)\in\partial\mathrm{U}_{\epsilon}\cap(\mathrm{VxU})} f(\zeta)\wedge\mathrm{K}(z,\zeta)\wedge g(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in\mathrm{V}} f(z)\wedge g(z)$

ou

$$\mathrm{K}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^{n}}\varphi^{\mathrm{v}n}\frac{0)'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge 0)_{z,\zeta}(u)-}{\epsilon^{2n}}.$$

Or ce resultat est demontre dans ([3], p. *176-177*) pour la section $\overline{s}$ et donc pour $\hat{s}$ car ces deux sections ont les memes propriétés (*cf.* [3], §4. 3. 1).

Le theoreme est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2. 3. – *Le noyau* $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)$ *definit un courant sur* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ *qui vérifie*

$$\overline{\partial}\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)=[\Delta]+\mathrm{P}$$

où $[\Delta]$ *est le courant d'integration sur la diagonale* Δ *de* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ *et* P *la forme différentielle localement integrable qui coiṅcide avec* $\partial\tilde{\Omega}$ *sur* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\backslash\Delta(\mathrm{M})$. *En particulier si* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$, *alors* a0 $(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)=[\Delta]$.

Ce resultat n'est autre que l'interpretation en terme de courants de la formule (2. 1); il montre que le courant d'integration [A] n'est autre que le residu au sens de Griffiths th Harris ([10], p. 369) de la forme différentielle $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)$.

3. Transformee de Bochner-Martinelli

On considere une hypersurface reelle V fermee, orientee de classe $C^{1+\alpha},\alpha>0$, dans un ouvert U de la variete de Stein M, telle que U\V ait exactement deux composantes connexes U^{+} et U^{-}

On suppose que l'orientation sur V est celle obtenue lorsque l'on considere que V est la frontiere de U^+.

Si f est une (p,q)-*formc* differentielle de classe C^1 sur V, a support compact on appelle transformee de Bochner-Martinelli de f la forme differentielle F definie sur U\V par

$$\mathrm{F}(z)=\int_{\zeta\in\mathrm{V}} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)(z,\zeta).$$

Dans [6] nous avons deja etudie les propriétés de F, lorsque f est une $(0,q)$-forme differentielle, les resultats obtenus s'etendent au cas des (p,q)-*formes* differentielles.

Les notations sont celles de [6], §3. On suppose que

$$\mathrm{V}=\{z\in\mathrm{M}/\mathrm{p}(z)=0\},\ \mathrm{p}\in C^{1+\alpha}(\mathrm{M}).$$

Si $f\in C_{p,q\cdot}(\mathrm{V})$ on notera f_t sa projection sur l'espace quotient de $C_{p,q}(\mathrm{V})$ par les formes differentielles normales complexes. Si F est une (p,q)-*formc* differentielle continue sur U^+ ou U^- nous dirons qu'elle se prolonge continument à $\mathrm{U}^\pm\cup\mathrm{V}$ modulo $\overline{\partial}\mathrm{p}$ s'il existe une (p,q)-forme differentielle $\tilde{\mathrm{F}}$ continue sur $\mathrm{U}^\pm\cup\mathrm{V}$ telle que $\mathrm{F}\tilde{-}F=\overline{\partial}\mathrm{p}\wedge\mathrm{G}$ sur $\mathrm{U}^\pm$, G etant une forme differentielle continue sur $\mathrm{U}^\pm$ de bidegre $(p,q-1)$.

THÉORÈME 3. 1. – *Soit f une (p,q)-forme différentielle, C^1 sur* V, *à support compact. La transformee de Bochner-Martinelli de f*

$$\mathrm{F}(z)=\int_{\zeta\in\mathrm{V}} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)(z,\zeta)$$

admet, modulo $\overline{\partial}\mathrm{p}$, *des prolongements continus à* $\mathrm{U}^+\cup\mathrm{V}$ er $\mathrm{U}^-\cup\mathrm{V}$ *notes* F^+ *et* F^- *et on a*

$$\mathrm{F}_t^+-\mathrm{F}_t^-=(-1)^{p+q}f_t.$$

Demonstration. – II s'agit d'un probleme local, on peut donc supposer que U est un domaine de carte de M.

Choisissons des coordonnees et un repere trivialisant de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ sur cet ouvert, on a alors d'aprés le paragraphe 1

(3. 1) $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)=\dfrac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}\dfrac{\overline{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\zeta}(u)}{|u|_9^{2n}}+O(|u|_{\}}^{-2n+2\text{\textquoteleft}})$

si $(z,\zeta)\in\mathrm{U}\times\mathrm{U}\backslash\Delta(\mathrm{U}), z$ et ζ variant dans des compacts de M.

589

Pour des raisons de degre

$$\mathrm{F}(z)=\int_{\zeta\in\mathrm{V}} f(\zeta)\wedge\Omega(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)$$

et par conséquent grace a(3. 1) la forme F est somme d'un terme continu au voisinage de V et de la forme

$$\mathrm{F}_0(z)=\frac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\int_{\zeta\in\mathrm{V}} f(\zeta)\wedge\varphi^{\mathrm{v}n}(z,\zeta)\frac{\overline{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\zeta}(u)}{|u|_9^{2n}}.$$

Le theoreme résulte donc du theoreme analogue montre pour F_0 dans [6] (Prop. 2. 3. 1).

Remarque. – Dans [6] nous avions etudie lorsque f est une $(n,n-q-1)$-forme differentielle

$$\mathrm{G}(\zeta)=\int_{z\in\mathrm{V}} f(z)\wedge\Omega^0_q(\varphi^{\mathrm{v}},\overline{s,}s)(z,\zeta)=\int_{z\in\mathrm{V}} f(z)\wedge\Omega^0(\varphi^{\mathrm{v}},\overline{s,}s)(z,\zeta)$$

où $\Omega^0=\sum\limits_{0\leqq q\leqq n-1}\Omega^0_q$.

II n'est pas surprenant que F et G possedent les memes propriétés au voisinage de V. En effet d'apres (3. 1) et le lemme 2. 3.5de [6], si $\Omega^n=\sum\limits_{0\leqq q\leqq n-1}\Omega^n_q$,

$$\Omega^n(\varphi^{\mathrm{v}},\overline{s},s)(z,\zeta)-\Omega^0(\varphi^{\mathrm{v}},\overline{s},s)(\zeta,z)$$

possede une singularite' d'ordre 2 $n-2$ en $z=\zeta$.

4. Formule de Koppelman-Leray

Sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1]$ on designe par $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$ le fibre' vectoriel image reciproque de $\mathrm{T}^*(\mathrm{M})$ par l'application $(z,\zeta,\lambda)\mapsto z$.

On notera $0*$ la metrique induite par la metrique 0 de T(M) sur ce fibré.

Soit Δ la connexion hermitienne sur $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$ relative a la metrique $\sigma*$, holomorphe en les variables (z,ζ) et invariante par translation dans la direction X.

Si $C^\infty_k(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}')$ designe l'espace des formes differentielles C^∞ de degre k sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1]$ a valeurs dans $\overline{\mathrm{E}}^*=\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$, on a la décomposition suivante

$$C_k^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}') = \bigoplus_{p+q+r=k} C_{p,q,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}')$$

où $C_{p,q,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}^*)$ designe l'espace des formes differentielles de bidegre (p,q) en (z,ζ) et de degre r en X.

La connexion A se décompose en $\Delta'+\Delta''$ ou

$$\Delta' : C_{p,q,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}^*) \to C_{p+1,q,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}')$$

$$\Delta'' : C_{p,q,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}')$$

$$\to C_{p,q+1,r}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}') \oplus C_{p,q,r+1}^\infty(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1],\overline{\mathrm{E}}').$$

Étudions l'expression de Δ en coordonnees locales. Choisissons une trivialisation de $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$ et notons v^* l'expression d'une section t^* de $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$ alsso

$$\Delta' t^* = \overline{\mathrm{H}}(\partial_{z,\zeta}(\overline{\mathrm{H}}^{-1}v^*))$$

011 H est la matrice de la métrique 0 dans la trivialisation correspondante de T(M)

$$\Delta'' t^* = (\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)v^*.$$

Soit D un ouvert relativement compact, a bord C^1 par morceau de M et (s^*,χ^*) une section de Leray pour (D,s,φ) (*cf.* §1).

Comme Henkin et Leiterer ([3], §4. 5), on pose pour tout $\lambda\in[0,1]$, $z\in\mathrm{D}$ et $\zeta\in\mathrm{V}'_{\partial\mathrm{D}}$ tel que $\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle\neq 0$

$$\text{(4.1) } t^*(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)\frac{s^*(z,\zeta)}{\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle} + \lambda\frac{\hat{s}(z,\zeta)}{|s(z,\zeta)|_9^2}.$$

D'apres les proPriétés de φ, s et s^* l'application

$$(z,\zeta,\lambda)\mapsto \varphi^{\max(\chi,\chi^*)}(z,\zeta)t^*(z,\zeta,\lambda)$$

definit une section C^1 de $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0,1])$ sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}\times[0,1]$ dans $\mathrm{D}\times\mathrm{M}\times[0,1]$. On en deduit que pour tout entier $\mathrm{v}\geqq\max(\chi,\chi^*)$ la forme différentielle $\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s) = (-1)^{n-1}/(2\pi)^n\varphi^{\mathrm{v}n}\langle t^*,\mathrm{D}s\rangle\wedge$

$(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$ est continue sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}\times[0,1]$ dans $\mathrm{D}\times\mathrm{M}\times[0,1]$.

LEMME 4. 1. – *On a les egalites suivantes*

$$\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=0} = \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$$

$$\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=1} = \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s).$$

Demonstration. – D'apres l'expression (4. 1) de t^* il suffit de montrer que pour toute fonction μ de classe C^1, définie sur un ouvert de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ contenant le domaine de définition d'une section s^* de $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ on a

$$\langle\mu s^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\Delta''(\mu s^*), \mathrm{D}s\rangle)^{n-1} = \mu^n\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\Delta'' s^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1};$$

on appliquera cette formule successivement avec $\mu = \langle s^*, s\rangle^{-1}$ pour $\lambda = 0$ et $\mu = \langle\hat{s}, s\rangle^{-1} = |s|_9^{-2}, s^* = \hat{s}$ pour $\lambda = 1$.

La formule resulte elle-meme immediatement du fait que

$$\langle\mu s^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge\langle d''\mu\wedge s^*, \mathrm{D}s\rangle = -\mu d''\mu\wedge\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle = 0.$$

LEMME 4. 2. – *Soit* $\mathrm{W}\times[0,1]$ *le domaine de definition de* $\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s), \mathrm{W}\subset\mathrm{D}\times\mathrm{M}$. *Pour tout* $(z,\zeta,\lambda)\in\mathrm{W}\times[0,1]$, *on a* $(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}[\langle t^*, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))\wedge s\rangle\wedge(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$

$$+(n-1)\langle t^*, \mathrm{D}s\rangle\wedge\langle\Delta'' t^*, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))\wedge s\rangle\wedge(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-2}].$$

Si de plus $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})) = 0$, *on* a $(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) = 0$.

Demonstration :

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}[(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^n + \langle t^*, \mathrm{D}^2 s\rangle\wedge(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$$

$$-(n-1)\langle t^*, \mathrm{D}s\rangle(\langle\Delta''^2 t^*, \mathrm{D}s\rangle - \langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}^2 s\rangle)$$

$$\wedge(\langle\Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-2}]$$

or $\Delta''^2 = 0, \mathrm{D}^2 s = c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) \wedge s$.

Considerons une trivialisation de $\overline{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M} \times [0,1])$, soit v^* l'expression de t^* dams cette trivialisation et u l'expression de s dans la trivialisation correspondante de $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$ $\varphi^{\mathrm{v}n}(\langle \Delta'' t^*, \mathrm{D}s \rangle)^n$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} n\ !\ ({}_j\bigwedge_{=1}^{n}(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^{\mathrm{v}} v_j^*)) \wedge \begin{pmatrix} n \\ \wedge du_{\mathrm{k}} + ((\mathrm{H}^{-1}\partial \mathrm{H}) \wedge \quad u)_k \\ k=1 \end{pmatrix}.$$

On reprend alors la démonstration du lemme 4. 5.4 de [3] : on a $\sum_{k=1} \varphi^{\mathrm{v}} v_k^* u_k =$ φ^{v} par définition de t^* les fonctions φ et u_k etant holomorphes en (z, ζ) et independantes de λ, on en deduit

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^{\mathrm{v}} v_k^*) = 0$$

$$n$$

d'ou $k1 \bigwedge_{=} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^{\mathrm{v}} v_k^*) = 0$ car le membre de gauche est continu d'aprés les propriétés des sections de Leray et l'ensemble $\{(z, \zeta, \lambda) \in \mathrm{W} \times [0,1] | s(z,\zeta) \neq 0\}$ est dense dans $\mathrm{W} \times [0,1]$. On a donc : $\varphi^{\mathrm{v}n}(\langle \Delta'' t^*, \mathrm{D}s \rangle)^n = 0$ et le lemme est demontre.

Nous allons maintenant pouvoir generaliser au cas des (p,q)-formes différentielles la formule de Koppelman-Leray donnée par Henkin et Leiterer ([3], theoreme 4. 5.3).

THÉORÈME 4. 3. – *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* C^1 *par morceaux de la variete de Stein* M, (s^*, χ^*) *une section de Leray pour* (D, s, φ) *et* v *un entier plus grand que* $\max(2\chi, \chi^*)$. *On suppose de plus que toutes les derivees de* $(\varphi^{\mathrm{v}} s^* / \langle s^*, s \rangle)(z, \zeta)$ *qui sont d'ordre* $\leqq 2$ *en* z *et d'ordre* $\leqq 1$ *en* ζ *sont continues pour tout* (z, ζ) *dans un voisinage* W *de* $\mathrm{D} \times \partial \mathrm{D}$ *dans* $\mathrm{D} \times$ M. *Alors pour toute* (p,q)*-forme différentielle* f *continue*

sur $\overline{\mathrm{D}}$ *telle que* $\overline{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\overline{\mathrm{D}}, 0 \leqq p, q \leqq n$, *on a*

$$(-l) f(z) = \int_{\zeta \in \partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)(z,\zeta) - \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \overline{\partial}_\zeta \mathrm{f}(\zeta) \wedge \Omega_{\mathrm{q}}^{\mathrm{p}}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z,\zeta)$$
$$- \int_{(\zeta,\lambda) \in \partial \mathrm{D} \mathrm{xl} 0} .1 \mathrm{l} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda)$$

$$+\overline{\partial}_z\Big(\int_{\zeta\in \mathrm{D}} f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial \mathrm{D}\times 10}, 1 1 f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)$$

$$+(-1)^{p+q+1}\Big[\int_{\zeta\in \mathrm{D}} f(\zeta)\wedge \mathrm{P}^p_q(z,\zeta)-\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial \mathrm{D}\mathrm{x}[0,1]} f(\zeta)\wedge \mathrm{Q}^p_q(z,\zeta,\lambda)\Big],\ z\in \mathrm{D},$$

où $\Omega^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,s),\Omega^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s),\overline{\Omega}^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s),\mathrm{P}^p_q$ et $\wedge\mathrm{Q}^p_q$ *designent respectivement les parties de type* (p,q) en z *de* $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,s)$, $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s,s)$, $\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,s,s)$, $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)$, $(\overline{\partial}_{z.\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)$.

Remarque 1. – Si $p=0,\mathrm{P}^p_q=\mathrm{Q}^p_q=0$ car $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))$ est de bidegre $(1,1)$ en z, on retrouve donc la formule (4. 5. 32) de [3].

Remarque 2. – Si la metrique 0 est telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$ alors $\mathrm{P}^p_q=\mathrm{q}=0$ et on obtient la generalisation aux varietes de Stein de la formule de Koppelman-Leray pour les (p,q)-formes differentielles de $\mathbb{C}^n$.

En suivant la methode utilisee par Henkin et Leiterer dans la dimonstration du theoreme 4. 5.3 de [3], il suffit, pour prouver le theoreme 4. 3, d'appliquer la formule de Stokes a la forme differentielle $f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)$.

COROLLAIRE 4.4. – *Sous les hypotheses du theoreme* 4. 3, *si de plus* $s^*(z,\zeta)$ *depend holomorphiquement de* $z\in \mathrm{D},q\geqq 1$ *et* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$, *alors*

$$f(z)=(-1)^{p+q}\Big[\overline{\partial}_Z\Big(\int_{\zeta\in \mathrm{D}} f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^{\mathrm{V}},\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial \mathrm{D}\mathrm{x}[0,1]} f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)-\Big(\int_{\zeta\in \mathrm{D}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial \mathrm{D}\mathrm{x}[0,1]}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)\Big].$$

En particulier pour toute (p,q)-*forme différentielle continue sur* $\overline{\mathrm{D}}$ *telle que* $\overline{\partial}f=0$ *sur* D $g(z)=(-1)^{p+q}\Big(\int_{\zeta\in \mathrm{D}} f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^{\mathrm{v}},\hat{s},s)(z,\zeta)$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial \mathrm{D}\mathrm{x}[0,1]} f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_q(\varphi^{\mathrm{v}},s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)$$

593

est une solution continue de l'equation $\overline{\partial} g = f$ *dans* D.

Demonstration. – Cela se deduit immediatement du theoreme 4. 3 car si $s^*(z, ()$ est holomorphe en $z, \Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s) = 0$ dis que $q \geqq 1$ et comme $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0\mathrm{P}_q^p = \mathrm{Q}_q^p = 0$ d'apres les lemmes 2. 1 et 4.2.

Nous allons maintenant prouver une autre formule de Leray-Koppelman, analogue a celle du theoreme 1 de [1]. Une telle formule pourrait permettre d'aborder des probleras de division dans les ouverts des varietes de Stein comme l'a fait Berndtsson [9] pour lrr ouverts de $\mathbb{C}^n$.

Dans toute la suite du paragraphe, on considerera un domaine D relativement compact a bord C^1 par morceaux de la variété de Stein $\mathrm{M}, (s^*, \chi^*)$ une section de Leray pour (D, s, φ) verifiant :

•s^* est une section de classe C^2 de $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$ definie sur $\overline{\mathrm{D}}\times$ D.

• Pour tout compact L de D, il existe des constantes positives $c_1(\mathrm{L}), c_2(\mathrm{L})$ et $\eta(\mathrm{L})$ telles que si $d(z, \zeta)$ designe la distance entre z, ζ on ait

$$|s^*(z, \zeta)|_{9^*} \leqq c_1(\mathrm{L}) d(z, \zeta)$$

$$|\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle| \geqq c_2(\mathrm{L})(d(z, \zeta))^2$$

si $d(z, \zeta) < \eta(\mathrm{L})$ pour $\zeta \in \overline{\mathrm{D}}$ et $z \in \mathrm{L}$.

Remarquons que de telles sections existent: par exemple $\hat{s}$.

On désignera par K une forme differentielle de classe C^1 sur $\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}} \backslash \Delta(\overline{\mathrm{D}})$ de degre *2* $n - 1$ telle que :

1. $d\mathrm{K} = \mathrm{R}$ sur $\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}} \backslash \Delta(\overline{\mathrm{D}})$, ou R est une forme differentielle localement intégrable sur $\overline{\mathrm{D}}\times$ D.

2. Pour tout compact L de D il existe une constante $c_3(\mathrm{L})$ telle que

$$|\mathrm{K} - \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)| \leqq c_3(\mathrm{L})(d(z, \zeta))^{-2n+2} \text{ si } \zeta \in \overline{\mathrm{D}} \text{ et } z \in \mathrm{L}.$$

3. K est de bidegre $(n, n-1)$.

THÉORÈME 4. 5. – *Sous les hypotheses ci-dessus, si* f *est une* (p, q)*-forme différentielle continue sur* $\overline{\mathrm{D}}$ *telle que* $\overline{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\overline{\mathrm{D}}, 0 \leqq p, q \leqq n$*, on a pour tout* $z \in \mathrm{D}$

$$(-1)^{p+q} f(z) = \int_{\zeta \in \partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{K}_q^p(z, \zeta) - \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \mathrm{K}_q^p(z, \zeta)$$

$$+ \overline{\partial}_z [\int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{K}_{q-1}^p(z, \zeta)] + (-1)^{p+q-1} \int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{R}_q^p(z, \zeta).$$

K^p_q, R^p_q *designant les composantes de bidegre* (p, q) *en* z *et* $(n-p, n-q-1)$ *en* ζ *de* K *et* R, *avec la convention* $K_{p,-1} = 0$.

Demonstration. – La démonstration est analogue a celle de la formule de Koppelman (theoreme 2.2) (*voir* aussi [1] démonstration du theoreme 1).

Grace aux propriétés 1 et 3 du noyau K en appliquant la methode utilisee au début de la démonstration du theoreme 2.2 on se ramene a demontrer la formule 2.4 ou

$\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ est remplace par K, soit en gardant les memes notations

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(z,\zeta) \in \partial U_\epsilon \cap (\mathrm{VxU})} f(\zeta) \wedge K(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z).$$

De plus d'apres la propriété 2 de K, il suffit de demontrer ce resultat pour $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$. Puisque nous l'avons deja demontre lorsque $s^* = \hat{s}$ *il* suffit de prouver que si $I_\epsilon = \int_{(z,\zeta)\in}$ au, $\cap(\mathrm{VxU}) f(\zeta) \wedge \Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)(z, \zeta) \wedge g(z)$

$$- \int_{(z}, \zeta) \in \partial U_\epsilon \cap (\mathrm{VxU}) f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{V}}, \hat{s}, S)(Z, \zeta) \wedge g(z)$$

on a Jim $I_\epsilon = 0$.

$$\epsilon \to 0$$

Dans $V \times U \times [0, 1]$ on considere la variété a bord

$$X_\epsilon = \{(z, \zeta) \in V \times U | d(z, \zeta) = \epsilon\} \times [0, 1]$$

on a

$$\partial X_\epsilon = \{d(z, \zeta) = \epsilon\} \times \{1\} \cup \{d(z, \zeta) = \epsilon\} \times \{0\}.$$

On va appliquer la formule de Stokes a la forme differentielle

$$f(\zeta) \wedge \Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z)$$

et à la variété a bord X_ϵ :

$$\int_{\partial X_\epsilon} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z) =$$
$$\int_{X_\epsilon} d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)).$$

Grace au lemme 4. 1 on a par définition de $\partial \mathrm{X}_\epsilon$

$$\mathrm{I}_\epsilon = -\int_{\partial \mathrm{X}_\epsilon} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Par des considérations de degre on voit que $d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z))$

$$= (\overline{\partial}_{z.\zeta} + d_\lambda)(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z))$$

$$= \partial_\zeta f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) \wedge \partial_z g(z)$$

$$+(-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z).$$

Evaluons $\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ et $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ sur X_ϵ.

Puisque nous sommes sur $\mathrm{V} \times \mathrm{U}$ nous pouvons exprimer $\Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ en coordonnees locales; si u, v, $\hat{u}$, u^* sont les expressions de $s, t^*, \hat{s}, s^*$ dans les coordonnees choisies

on a

$$\Omega(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s) = \frac{(n-1)!}{(2\mathrm{i}\pi)^n} \varphi^{\mathrm{v}n} (\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k \neq j} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k) \wedge \begin{pmatrix} n \\ \wedge du_l + ((\mathrm{H}^{-1}\partial \mathrm{H}) \wedge u)_l \\ l = 1 \end{pmatrix}$$

En fait seule intervient la composante α de $\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ de degre 1 en $d\lambda$.

Puisque

$$v_k = (1-\lambda)\frac{u_k^*}{\langle u^*, u \rangle} + \lambda \frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle},$$

car t^* est definie par (4. 1)

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k = d\lambda (\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle} - \frac{u_k^*}{\langle u, u \rangle}) * + (1-\lambda)\overline{\partial}_{z,\zeta}({}_* \frac{u_k^*}{\langle u, u \rangle}) + \lambda \overline{\partial}_{z,\zeta}(\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle})$$

α verifie alors d'apres les estimations (4.2) et la définition de $\hat{s}$

$$|\alpha| < \mathrm{C}|v||\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u\rangle} - \frac{u_k^*}{\langle u^*, u\rangle}|(d(z,\zeta))^{-2n+4} \leqq \mathrm{C}'(d(z,\zeta))^{-2n+2}$$

pour $\zeta \in \mathrm{U}$ et $z \in \mathrm{V}$ compact de D.

De meme en utilisant l'expression de $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ donnee dans le lemme 4.2 ainsi que la définition de $\hat{s}$ et les estimations (4.2) verifiees par s^*, on voit que la composante β de $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$ de degre 1 en $d\lambda$ vérifie $|\beta| = 0(d(z,\zeta)^{-2n+3})$ sur $\mathrm{V} \times \mathrm{U}$ au voisinage de la diagonale. Par conséquent

$$d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z))$$

est un $O(d(z,\zeta)^{-2\mathrm{n}+2})$ et comme la mesure de X_ϵ est un $O(\epsilon^{2n-1})$, on obtient

$$\mathrm{Jim}\ \mathrm{I}_\epsilon = 0.$$

$$\epsilon \to 0$$

On peut egalement deduire du theoreme 4. 5le corollaire suivant relatif a la résolution du $\overline{\partial}$.

COROLLAIRE 4.6. – *Sous les hypotheses du theoreme* 4. 5, *si de plus* $s^*(z,\zeta)$ *depend holomorphiquement de* $z \in \mathrm{D}$ *et si* $d\mathrm{K} = 0$, *pour toute* (p,q)-*forme différentielle* f *continue sur* $\overline{\mathrm{D}}$ *telle que* $\overline{\partial} f = 0$ *sur* $\mathrm{D}, 0 \leqq p \leqq n, 1 \leqq q \leqq n$,

$$g(z) = (-1)^{p+q}(\int_{\zeta\in\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{K}_{q-1}^p(z,\zeta))$$

est une solution continue de $\overline{\partial} g = f$ *dans* D.

Remarque 3. – Pour obtenir un noyau K verifiant $d\mathrm{K} = 0$, il suffit de prendre $\mathrm{K} = \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$ dans un cas ou la metrique 9 peut-etre choisie telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0$.

Remarque 4. – Henkin et Leiterer ont construit dans [3] une section s^* verifiant les hypothèses du corollaire 4. 4 lorsque le domaine D est suppose' strictement pseudoconvexe de classe C^2.

On peut en deduire par des methodes analogues a celles de Kerzman [4] dans $\mathbb{C}^n$ une section s^* verifiant les hypothéses du corollaire 4. 6et une solution du a verifiant les estimees L^p.

Remarque 5. – Lorsque f est une p-forme differentielle holomorphe le theoreme 4. 5 nous donne si $d\mathrm{K} = 0$ la repre'sentation de Cauchy-Leray suivante de f

$$f(z) = (-1)^p \int_{\partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{K}_0^p(z, \zeta).$$

5. Noyaux pour les formes differentielles
a valeurs dans un fibre vectoriel holomorphe

On considere un fibre vectoriel holomorphe F sur M, et si Π_1 et Π_2 designent les projections de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ sur $\mathrm{M}, (z, \zeta) \mapsto z$ et $(z, \zeta) \mapsto \zeta$, on notera $\mathrm{G} = \mathrm{Hom}(\Pi_2^*\mathrm{F}, \Pi_1^*\mathrm{F})$; c'est un fibre' vectoriel holomorphe sur $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ dont les fibres sont donnees par $\mathrm{G}_{(z,\zeta)} = \mathrm{Hom}(\mathrm{F}_\zeta, \mathrm{F}_z)$.

Nous allons construire un noyau Λ, c'est-à-dire une forme differentielle C^1 sur $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \backslash \Delta(\mathrm{M})$ a valeurs dans le fibre' vectoriel G, qui nous permettra d'obtenir une formule de Koppelman pour les formes differentielles a valeurs dans le fibre F.

LEMME 5. 1. –*Il existe une section holomorphe ψ de* G *vérifiant*

(i) $\psi(z, z) = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}_Z}$ *pour tout* $z \in \mathrm{M}$.

Demonstration. – Appliquons le theoreme B de Cartan au faisceau $\mathrm{G} \otimes J_\Delta$ dans la srnte exacte

$$0 \to \mathrm{G} \otimes J_\Delta \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}|_\Delta \to 0,$$

où J_Δ designe l'idéal de la diagonale. II en resulte que le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M} \times \mathrm{M}, \mathrm{G}) \to \mathrm{H}^0(\Delta, \mathrm{G}|_\Delta) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathrm{F}))$$

est surjectif, d'où le lemme.

PROPOSITION 5.2. – *La forme differentielle* $\mathrm{A}\,(z, \zeta) = \psi(z, \langle\rangle\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta)$ *est de classe C^1 sur* $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \backslash \Delta(\mathrm{M})$ *et* a *valeur dans* G, *elle vérifie*

$$\overline{\partial}\Lambda = [\Delta].\ \mathrm{Id}_\mathrm{F} + \mathrm{P}.\psi$$

où $[\Delta]$ *est le courant d'intégration sur la diagonale* Δ *de* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ *et* P *une forme différentielle localement integrable sur* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ *proportionnelle à* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}))$. *En particulier si* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0$ *on a*$\overline{\partial}\Lambda = [\Delta]\ .\ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

Demonstration. – II suffit d'appliquer le lemme 5. 1et le corollaire 2. 3 pour obtenir la proposition.

Le courant d'integration sur la diagonale [A], apparait donc 1C1 egalement comme le residu de la forme differentielle A.

On en deduit alors immediatement la formule de Koppelman suivante pour les formes differentielles a valeurs dans le fibre' vectoriel F.

COROLLAIRE 5.3. – *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* C^1 *par morceaux de la variete de Stein* M *et* $\mathrm{v} \geqq 2\chi$. *Si* f *est une* $(p,q)-fo$ rme *différentielle continue sur* $\overline{\mathrm{D}}$, *à valeurs dans* F *telle que* $\overline{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\overline{\mathrm{D}}, 0 \leqq p,q \leqq n$, *on a pour* $z \in \mathrm{D}$

$$f(z) = [\int_{\zeta\in\partial\mathrm{D}} \Lambda(z,\zeta) \wedge f(\zeta) - \int_{\zeta\in\mathrm{D}} \Lambda(z,\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)$$

$$+\overline{\partial}_z \int_{\zeta\in\mathrm{D}} \Lambda(z,\zeta) \wedge f(\zeta) + (-1)^{p+q+1} \int_{\zeta\in\mathrm{D}} \mathrm{P}(z,\zeta)\psi(z,\zeta) \wedge f(\zeta)].$$

Remarque. – Le noyau que nous venons de construire pour les formes differentielles a valeurs dans un fibre vectoriel permet de ramener le cas des (p,q)-*formcs* differentielles a celui des $(0,q)$-formes differentielles; en effet

$$C^\infty_{p,q}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \simeq C^\infty_{0,q}(\mathrm{M}, \Lambda^p\mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes \mathrm{F}).$$

Ceci permet de faire disparaitre le terme en courbure P^p_q dans toutes les formules de Koppelman.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDERSSON et B. BERNDTSSON, *Henkin-Ramirez Formulas with Weight Factors* (*Ann. de l'lnst. Fourier*, vol. 32, 1982, P. 91-110).

[2] G. HENKIN et J. LEITERER, *Global Integral Formulas for Solvering the* ∂*-Equation on Stein Manifolds* (*Ann. Pol. Math.*, vol. 39, 1981, P. 93-116).

[3] G. HENKIN et J. LEITERER, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhaüser, Verlag, 1984.

[4] N. KERZMAN, *Hölder and* L^p *Estimates for Solution of* $\overline{\partial} u = f$ *in Strongly Pseudoconvex Domains* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 24, 1971, P. 301-379).

[5] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Formules integrales de Koppelman sur une variete de Stein* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1984, p. 221-225).

[6] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Transformation de Bochner-Martinelli dans une variete de Stein.*

[7] I. LIEB, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten* (*Math. Ann.*, vol. 190, 1971, p. 6-44 et 199, 1972, p. 241-256).

[8] N. φVRELID, *Integral Representation Formulas and* L^p *Estimates for the* ∂*-Equation* (*Math. Scand.*, vol. 29, 1971, P. 137-160).

[9] B. BERNDTSSON, *A Formula for Interpolation and Division in* $\mathbb{C}^n$ (*Math. Ann.*, vol. 263, 1983, p. 393-418).

[10] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.

(Manuscrit reyu le 12 decembre 1986,
revise le 1" juin 1987).

J.-P. Demailly
Universite' de Uscroble I,
Institut Fourier, B.P. 74,
L.A. au C.N.R.S. n°188,
38400 Saint-Martin d'Heres
C. Laurent-Thiebaut
Universite' Paris-VI,
Analyse complexe et géométrie,
L.A. au C.N.R.S. n°213,
4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05.