Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 6

Éléments inversibles et irréductibles dans les anneaux.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1

(Nota: Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'un anneau "bizarre" où la décomposition en facteurs irréductibles n'est pas unique, afin de voir que cette propriété n'est pas une évidence en soi.)

On désigne par $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + bi\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre et que si on définit $N(z) = |z|^2$ alors N définit une application $A \to \mathbb{N}$ telle que $N(zz') = N(z)N(z')$.

2. Déterminer les éléments inversibles z de A (en montrant d'abord qu'un tel élément z vérifie nécessairement $N(z) = 1$).

3. Déterminer explicitement tous les éléments $z \in A$ tels que $N(z) = p$ avec $p = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ (à savoir les diviseurs entiers de 36 autres que 1 et 36).

4. Montrer que l'élément 6 admet dans A les deux décompositions en éléments irréductibles

$$6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5}) \times (1 - i\sqrt{5}),$$

que ces décompositions ne sont pas équivalentes (aux inversibles près), et qu'il n'y a pas d'autres décompositions de 6 dans A (à l'ordre près des facteurs, et à éléments inversibles près).

5. On considère l'ensemble I des éléments $z = a+bi\sqrt{5}$ tels que a et b sont de même parité (tous les deux pairs, ou tous les deux impairs). Montrer que I est un idéal de A et que $I = (2, 1+i\sqrt{5})$. Montrer que I n'est pas un idéal principal (g) (on pourra considérer les valeurs possibles de $N(g)$ et en déduire que $N(g)$ devrait diviser à la fois 4 et 6, ce qui conduit à une contradiction).

Exercice 2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et I un idéal de A. On suppose que I est principal et s'écrit $I = (g)$ ou $I = (g')$ (c'est-à-dire que g et g' sont des générateurs de I). Montrer qu'alors $g' = ug$ avec u inversible, et inversement, que si c'est le cas, alors $(g) = (g')$.

Polynômes.

Exercice 1

1. Faire la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$, puis par $X^2 + 1$, dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2016} + 1$ par $X^2 - 1$ puis par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P.

2. $f_{x_0} : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $P \mapsto P(x_0)$ où $P(x_0)$ désigne l'évaluation du polynôme P en un élément donné $x_0 \in \mathbb{K}$.

3. $f_Q : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto R$ où R désigne le reste de la division euclidienne de P par un élément donné $Q \in \mathbb{K}(X]$.

Exercice 3

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que i est racine du polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{C}$. En déduire une autre racine complexe de P.

2. Donner la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $P(X) = X^5 - 2X^3 + X^2 + aX + b$ est-il divisible par le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$? Dans un tel cas, déterminer le quotient de P par Q.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$.

1. Montrer que 1 et -1 sont racines du polynôme P. En déduire que $X^2 - 1$ divise $P(X)$.

2. Calculer $P'(1)$ et $P'(-1)$ (où P' désigne le polynôme dérivé de P).

3. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 6

Écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles :

a. $2X^2 - X - 1$ **b.** $X^3 + 1$ **c.** $X^6 - 1$ **d.** $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$
e. $(X^2 - X + 2)^2 - 1$ **f.** $X^8 + X^4 + 1$.