Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 4

Permutations.

Exercice 1

Décomposer les permutations suivantes de S_7 en produit de cycles disjoints (c'est-à-dire de supports disjoints) et donner leurs signatures :

1. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

2. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

On considère la permutation σ de S_5 suivante :

$$\sigma = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 5)(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4)(3\ 5).$$

Déterminer la décompostion en produit de cycles disjoints et la signature de σ.

Exercice 3

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que S_n muni de la composée des applications est un groupe.

2. Montrer qu'il y a autant de permutations paires que de permutations impaires dans S_n.

Déterminants.

Exercice 4

Soit $A = (C_1\ C_2\ C_3)$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Exprimer en fonction de $\det A$ les déterminants des matrices suivantes :
a. $(C_1\ \ 2C_2 - C_3\ \ C_3)$. **b.** $(C_2\ \ -C_3\ \ C_1)$. **c.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_1)$.
d. $(C_2 - C_1\ \ C_3 - C_2\ \ C_3)$. **e.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_3 - C_1)$.

Exercice 5

1. Montrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ est un entier multiple de 24.

2. Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer que 13 divise $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Exercice 6

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **e.** $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soient $a, b, c, d, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & a & 0 & b \\ 1 & a & b & 0 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$ **f.** $\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 9

(déterminant de Van der Monde)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Indication : remplacer la colonne C_i par $C_i - a_n C_{i-1}$ pour $i = n, \dots, 2$.