Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**
Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 1

Combinaisons linéaires

Exercice 1

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, on a $\text{vect}((1,1,0),(1,0,1)) = \text{vect}((1,1,0)) + \text{vect}((1,0,1))$.

2. Si A, B sont des parties d'un espace vectoriel E, on définit $A+B = \{u+v \;/\; u \in A,\; v \in B\}$. Si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que si A, B sont des parties de E, on a $\text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B)$.

Exercice 2

1. Soient (e_1, e_2, e_3) des vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{vect}(e_2, e_2)$ si et seulement si e_3 est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$. Montrer que $(e_1, ..., e_n, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $e_1, ..., e_n$.

Somme directe, supplémentaire.

Exercice 3

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivant sont-ils en somme directe ?

1. $E = \text{vect}((1,1,0))$, $F = \text{vect}((-1,0,1))$

2. $E = \text{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \text{vect}((-1,0,1),(0,0,1))$

3. $E = \text{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \text{vect}((-1,0,1))$

4. $E = \text{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \text{vect}((-1,1,0)$

Exercice 4

Donner un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ des sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{R}^3$ suivants :
a. $E = \text{vect}((1,1,0),(-1,0,1))$ **b.** $E = \text{vect}((1,-1,0))$
c. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.

Exercice 5

1. On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$ et $G = \text{vect}((1,-1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F et donner un supplémentaire de G dans F.

2. Même question avec $F = \text{vect}((0,1,1),(-1,1,0))$ et $G = \text{vect}((1,0,1))$.

Exercice 6

(cours)
Soit $u : E \to F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}\, u$ dans E.

1. Montrer que l'application linéaire u' induite par restriction de u à G au départ et à $\text{Im}\, u$ à l'arrivée est un isomorphisme.

2. En déduire le théorème du rang.

Exercice 7

Soit F un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe avec F.

2. Montrer que F possède un supplémentaire dans E.

Exercice 8

Soient F, G des sous-espaces vectoriels stricts d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe à la fois avec F et avec G.

Exercice 9

Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que F, G, H sont en somme directe si et seulement si G, H sont en somme directe et F est en somme directe avec $G \oplus H$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel et F_i, $1 \leq i \leq s$ des sous-espaces de E de dimensions finies n_i, $b_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i})$ une base de F_i, et $F = \sum F_i$.

1. Si les F_i sont en somme directe et $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$, montrer que la famille b obtenue en "concaténant" les familles b_i est une base de F et en déduire que $\dim F = \sum n_i = \sum \dim F_i$.

2. Si les F_i ne sont pas en somme directe, montrer que b est une famille génératrice liée de F, et en déduire que $\dim F < \sum \dim F_i$.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\dim F$ pour que la somme $\sum F_i$ soit directe.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer que si E est de dimension finie et si des sous-espaces vectoriels F, G vérifient $F \cap G = \{0\}$, alors $\dim F + \dim G \leq \dim E$.

2. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, G_1, G_2 vérifient $E = F_1 \oplus F_2$, $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ et $G_1 \cap G_2 = \{0\}$?

3. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k, G_1, \ldots, G_k$ vérifient $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$, $F_1 \subset G_1$,..., $F_k \subset G_k$?

Exercice 12

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2. En déduire une décomposition de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 13

On note $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner des lois $+$ et $.$ qui font de $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{A}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$.

3. Donner un supplémentaire de F dans $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$.