Corrigé de l'examen final

le 10 janvier 2019, durée : 2 heures

appareils électroniques interdits

une feuille A4 manuscrite de résumé de cours autorisée

Exercice 1 (Questions de cours)

a) Donner la définition de la signature d'une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, notée $\varepsilon(\sigma)$, et une formule permettant de la calculer.

On définit le nombre d'inversions d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ comme étant le nombre de paires $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ inversées par σ :

$$N(\sigma) = \operatorname{card}\Big\{\{i, j\} \in P_n \;/\; \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} < 0\Big\}.$$

La signature $\varepsilon(\sigma)$ de la permutation σ est alors la valeur ± 1 définie par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}.$$

Elle est aussi donnée par la formule

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

étendue à l'ensemble P_n des paires d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Démontrer que si σ, τ sont deux permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on a $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau)$.

D'après a), il vient

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

Dans le premier produit du membre de droite, faisons le changement de variable bijectif $P_n \to P_n$, $\{i, j\} \mapsto \{u, v\} = \{\tau(i), \tau(j)\}$ (d'inverse $\{u, v\} \mapsto \{i, j\} = \{\tau^{-1}(u), \tau^{-1}(v)\}$). Ceci donne

$$\prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} = \prod_{\{u,v\} \in P_n} \frac{\sigma(v) - \sigma(u)}{v - u}.$$

Par conséquent

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \prod_{\{u,v\} \in P_n} \frac{\sigma(v) - \sigma(u)}{v - u} \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau).$$

c) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton et en déduire le lien qui existe entre le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un endomorphisme.

Rappelons que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ est défini par $\chi_f(X) = \det(X \operatorname{Id}_E - f) = (-1)^n \det(f - X \operatorname{Id}_E)$, si $n = \dim E$. Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que χ_f est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire que $\chi_f(f) = 0$. Par définition, le polynôme minimal μ_f est le générateur unitaire de l'idéal annulateur de f. Le théorème de Cayley-Hamilton équivaut à dire que $\chi_f \in \langle \mu_f \rangle$, c'est-à-dire que μ_f divise χ_f.

Exercice 2 (Arithmétique entière)

a) Dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, calculer $d = \mathrm{pgcd}(91, 66)$ (avec $d > 0$), et déterminer des éléments $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $91\,u + 66\,v = d$.

On utilise l'algorithme d'Euclide. Des divisions successives fournissent

$$\begin{aligned} 91 &= 1 \times 66 + 25, \\ 66 &= 2 \times 25 + 16, \\ 25 &= 1 \times 16 + 9, \\ 16 &= 1 \times 9 + 7, \\ 9 &= 1 \times 7 + 2, \\ 7 &= 3 \times 2 + 1, \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

on a donc $d = \mathrm{pgcd}(91, 66) = 1$ (comme il résulte aussi des décompositions en facteurs premiers $91 = 7 \times 13$, $66 = 2 \times 3 \times 11$). On obtient ainsi l'identité de Bézout cherchée

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \times 2 = 7 - 3 \times (9 - 1 \times 7) \\ &= 4 \times 7 - 3 \times 9 = 4 \times (16 - 1 \times 9) - 3 \times 9 \\ &= 4 \times 16 - 7 \times 9 = 4 \times 16 - 7 \times (25 - 1 \times 16) \\ &= 11 \times 16 - 7 \times 25 = 11 \times (66 - 2 \times 25) - 7 \times 25 \\ &= 11 \times 66 - 29 \times 25 = 11 \times 66 - 29 \times (91 - 1 \times 66) \\ &= -29 \times 91 + 40 \times 66, \end{aligned}$$

ce qui donne $91\,u + 66\,v = 1$ pour $u = -29$ et $v = 40$.

b) Résoudre le système de congruences simultanées

$$x \equiv \alpha \mod \langle 91 \rangle, \qquad x \equiv \beta \mod \langle 66 \rangle$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ sont donnés et où $x \in \mathbb{Z}$ est l'inconnue. Traduire ce résultat en termes d'isomorphisme d'anneaux.

L'identité de Bézout du a) implique

$$\begin{aligned} 66\,v &\equiv 1 \mod \langle 91 \rangle, \qquad & 66\,v &\equiv 0 \mod \langle 66 \rangle, \\ 91\,u &\equiv 0 \mod \langle 91 \rangle, \qquad & 91\,u &\equiv 1 \mod \langle 66 \rangle. \end{aligned}$$

En prenant la combinaison linéaire $x_0 = 66\,v\,\alpha + 91\,u\,\beta = 2640\,\alpha - 2639\,\beta$, on obtient donc

$$x_0 \equiv \alpha \mod \langle 91 \rangle, \qquad x_0 \equiv \beta \mod \langle 66 \rangle.$$

Comme $\mathrm{pgcd}(91, 66) = 1$, le théorème des restes chinois entraîne que la solution est une unique congruence

$$x \equiv 2640\,\alpha - 2639\,\beta \mod \langle 91 \times 66 \rangle$$

i.e. modulo $91 \times 66 = 6006$. En d'autres termes, on voit qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/(91 \times 66)\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/91\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/66\,\mathbb{Z}, \quad \overset{\bullet}{x} \mod \langle 91 \times 66 \rangle \mapsto (\overset{\bullet}{x} \mod \langle 91 \rangle, \overset{\bullet}{x} \mod \langle 66 \rangle)$$

dont l'inverse est

$$\mathbb{Z}/91\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/66\,\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(91 \times 66)\mathbb{Z}, \quad (\overset{\bullet}{\alpha} \mod \langle 91 \rangle, \overset{\bullet}{\beta} \mod \langle 66 \rangle) \mapsto (2640\,\alpha - 2639\,\beta)^{\bullet} \mod \langle 91 \times 66 \rangle.$$

Exercice 3 (Factorisation des polynômes)

a) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$ (où P' désigne le polynôme dérivé de P) si et seulement si P n'a pas de racine(s) multiple(s).

Si $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$, l'identité de Bézout implique l'existence de polynômes $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$. Il ne peut donc exister de nombre complexe z tel que $P(z) = P'(z) = 0$, sinon on aurait $1 = U(z)P(z) + V(z)P'(z) = 0$, contradiction. Réciproquement, supposons que P et P' n'aient pas de racines communes et soit $D = \mathrm{pgcd}(P, P')$. Alors D divise P et D divise P', donc toute racine de D serait une racine commune de P et P'. Ceci implique que D n'a pas de racines, et donc que D est une constante non nulle (en effet, dans $\mathbb{C}[X]$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme non constant a au moins une racine) ; en d'autres termes, on a bien $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$.

b) On considère $S(X) = X^6 - 4X^4 + X^2 + 6$. En observant que S est de la forme $T(X^2)$ pour un certain polynôme $T \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 3 dont on déterminera les racines, déterminer la décomposition de $S(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement.

On a effectivement $S(X) = T(X^2)$ avec $T(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$. Le polynôme T admet la racine évidente $x_0 = -1$, ce qui donne dans $\mathbb{Z}[X]$ la factorisation

$$T(X) = (X + 1)(X^2 - 5X^2 + 6).$$

Comme on le voit rapidement, le trinôme $X^2 - 5X^2 + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et admet les racines $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, d'où la factorisation

$$T(X) = (X + 1)(X - 2)(X - 3).$$

On en déduit dans $\mathbb{Q}[X]$ (et même dans $\mathbb{Z}[X]$) une décomposition

$$(*) \qquad S(X) = T(X^2) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)(X^2 - 3).$$

Aucun des facteurs $X^2 + 1, X^2 - 2, X^2 - 3$ n'a de racines dans $\mathbb{Q}$, donc $(*)$ est la décomposition en facteurs irréductibles de S dans $\mathbb{Q}[X]$. Dans $\mathbb{R}$, $X^2 + 1$ n'a pas de racines mais $X^2 - 2$, $X^2 - 3$ admettent les racines respectives $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, ce qui implique dans $\mathbb{R}[X]$ la décomposition en facteurs irréductibles

$$S(X) = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}).$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^2 + 1$ se scinde en $(X - i)(X + i)$, et on a donc la décomposition

$$S(X) = (X - i)(X + i)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}).$$

Exercice 4 (Réduction des endomorphismes) On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k, \ell)$, et on considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. On notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur $v \in E$ quelconque dans la base $\mathcal{B}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f. On montrera qu'il existe une valeur propre λ_1 triple et une valeur propre λ_2 simple.

Par définition du polynôme caractéristique, nous avons

$$\chi_f(X) = \det(XI_4 - M) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & X-3 & -1 & 0 \\ -a & 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la dernière ligne donne

$$\chi_f(X) = (X-3)\begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -a & 1 & X-1 \end{vmatrix},$$

puis, par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= (X-3)(X-2)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X-3)((X-1)(X-3)+1) \\ &= (X-2)(X-3)(X^2-4X+4) \\ &= (X-2)^3(X-3). \end{aligned}$$

On a donc une racine triple $\lambda_1 = 2$ et une racine simple $\lambda_2 = 3$.

b) Déterminer le sous-espace propre E_{f,λ_2} associé à la valeur propre simple λ_2 et une base de ce sous-espace.

L'espace propre E_{f,λ_2} est l'ensemble des vecteurs v tels que

$$(M-3I_4)V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-t=0 \\ x+z=0 \\ ax-y-2z+t=0. \end{cases}$$

Les deux premières conditions équivalent à $x=-t$, $z=-x=t$ et la troisième équivaut à $y = ax-2z+t = -(a+1)t$, d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -(a+1) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que E_{f,λ_2} est la droite vectorielle de vecteur directeur

$$w\begin{pmatrix} -1 \\ -(a+1) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer qu'il existe exactement une valeur α du paramètre $a \in \mathbb{R}$ telle que le sous-espace propre E_{f,λ_1} associé à la valeur propre λ_1 soit de dimension $d_1 > 1$. Déterminer une base de E_{f,λ_1} suivant que $a=\alpha$ ou $a \neq \alpha$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

L'espace propre E_{f,λ_1} est l'ensemble des vecteurs v tels que

$$(**) \qquad (M-2I_4)V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t=0 \\ x+y+z=0 \\ ax-y-z=0. \end{cases}$$

En ajoutant les deux dernières équations, on obtient la condition $(a+1)x = 0$. Si $a \neq -1$, on doit donc avoir $x = 0$, ce qui implique aussi $y + z = 0$, et E_{f,λ_1} est alors caractérisé par les trois conditions $x = 0$, $t = 0$, $y + z = 0$, ce qui entraîne que E_{f,λ_1} est la droite vectorielle de vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = \alpha = -1$, les deux dernières équations du système $(**)$ sont équivalentes, et E_{f,λ_1} est caractérisé par les deux conditions $t = 0$, $x + y + z = 0$. Il s'agit d'un plan vectoriel, admettant pour base le système de vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, $\dim E_{f,\lambda_1} = 1$ ou 2 est strictement inférieure à la multiplicité $m_1 = 3$ de la valeur propre $\lambda_1 = 2$, donc f n'est jamais diagonalisable, quelle que soit la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

d) On pose $h = f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E$. Calculer les vecteurs $v_p = h^p(i)$ (où i est le premier vecteur de la base $\mathcal{B}$) pour tout $p \in \mathbb{N}$. Si $a \neq \alpha$, montrer que l'on peut compléter le système de vecteurs (v_0, v_1, v_2) avec un vecteur propre w de E_{f,λ_2} afin d'obtenir une base $\mathcal{B}' = (v_0, v_1, v_2, w)$ de E dans laquelle la matrice M' de f est une matrice triangulaire de Jordan. Déterminer alors le polynôme minimal de f et ses sous-espaces caractéristiques C_{f,λ_j}.

La matrice H de h est donnée par

$$H = M - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on obtient

$$v_0 = i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = h(i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = h^2(i) \begin{pmatrix} 0 \\ a+1 \\ -(a+1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = h^3(i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

par conséquent $v_p = h^p(i) = 0$ pour $p \geq 3$. Le déterminant du sytème de vecteurs (v_0, v_1, v_2, w) relativement à $\mathcal{B}$ vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & -(a+1) \\ 0 & a & -(a+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & -(a+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1) - a(a+1) = -(a+1)^2.$$

On voit donc que $\mathcal{B}' = (v_0, v_1, v_2, w)$ est une base de E si $a \neq \alpha = -1$. Nous avons $h(v_0) = v_1$, $h(v_1) = v_2$, $h(v_2) = 0$ et donc, comme $f = h + 2\operatorname{Id}_E$, on obtient $f(v_i) = 2v_i + h(v_i)$, d'où

$$f(v_0) = 2v_0 + v_1, \quad f(v_1) = 2v_1 + v_2, \quad f(v_2) = 2v_2.$$

On a par ailleurs $f(w) = 3w$ puisque $w \in E_{f,\lambda_2}$. Il en résulte que la matrice M' de f dans $\mathcal{B}'$ prend la forme réduite de Jordan

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

comportant un bloc cyclique 3×3 de valeur propre 2 et un bloc 1×1 de valeur propre 3. La théorie générale nous dit que le polynôme minimal de f est donné par

$$\mu_f(X) = \chi_f(X) = (X-2)^3(X-3),$$

et que les sous-espaces caractéristiques de f sont

$$C_{f,\lambda_1} = \mathrm{vect}(v_0, v_1, v_2), \quad C_{f,\lambda_2} = E_{f,\lambda_2} = \mathbb{R}w.$$

Dans ce cas, on peut aussi observer que f est un endomorphisme cyclique, E étant engendré par les itérés $f^p(v_0+w)$, $p = 0, 1, 2, 3$, comme on le vérifiera aisément (en travaillant sur la réduite de Jordan M', c'est beaucoup plus simple de le voir, on observe par exemple que $(f-2\,\mathrm{Id}_E)^3(v_0+w)$ est égal à w, et donc v_0, v_1, v_2 sont aussi obtenus par combinaison des vecteurs $f^p(v_0+w)$).

e) Si $a = \alpha$, déterminer une base $\mathcal{B}'' = (v_0, v_1, u, w)$ de E telle que (v_1, u) soit une base de E_{f,λ_1}. Exprimer alors la matrice M'' de f dans la base $\mathcal{B}''$ et calculer le polynôme minimal de f.

Pour $a = \alpha = -1$, nous avons $v_2 = 0$ et

$$v_0 = i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = h(i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme E_{f,λ_1} est dans ce cas le plan vectoriel d'équations $x + y + z = t = 0$ qui contient v_1, on peut compléter v_1 en une base (v_1, u) de E_{f,λ_1} en prenant

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système de vecteurs $\mathcal{B}'' = (v_0, v_1, u, w)$ a pour déterminant relativement à $\mathcal{B}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

donc il s'agit bien de nouveau d'une base de E. Comme $f(u) = 2u$, la matrice M'' de f dans $\mathcal{B}''$ s'écrit

$$M'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit encore d'une forme réduite de Jordan, mais qui comporte cette fois 3 blocs de tailles respectives 2×2, 1×1, 1×1. Le polynôme minimal de f est ici donné par

$$\mu_f(X) = (X-2)^2(X-3), \quad \deg \mu_f = 3 < \deg \chi_f = 4,$$

et les sous-espaces caractéristiques de f sont

$$C_{f,\lambda_1} = \mathrm{vect}(v_0, v_1, u) = E_{f,\lambda_1} \oplus \mathbb{R}v_0, \quad C_{f,\lambda_2} = E_{f,\lambda_2} = \mathbb{R}w.$$

Dans ce cas, l'endomorphisme f n'est pas cyclique.