Contrôle continu n°1

le 24 octobre 2018, durée : 2 heures
appareils électroniques interdits
une feuille A4 manuscrite de résumé de cours autorisée

Exercice 1 (Questions de cours)

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$.

a) Rappeler la définition du déterminant $\det(u)$ d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ et expliquer pourquoi $\det(u)$ ne dépend pas du choix d'une base de E.

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de n vecteurs de E et $X_1, \ldots, X_n$ sont les vecteurs colonnes coordonnées de $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$, on note

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(X_1, \ldots, X_n),$$

Maintenant, le déterminant de u est défini comme l'unique scalaire $\det(u)$ tel que

$$(\dagger) \qquad \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

L'existence de ce scalaire résulte du théorème caractérisant les formes n-multilinéaires alternées comme étant les multiples du déterminant dans une base. L'indépendance de $\det(u)$ vis-à-vis de la base vient de ce que dans une autre base $\mathcal{B}'$, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$ est proportionnel à $\det_{\mathcal{B}}$, et du fait que le facteur $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ se simplifie alors dans $(\dagger)$.

b) Montrer que pour tous endomorphismes $u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ on a $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

Fixons une base $\mathcal{B}$, et considérons des vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ quelconques. Par définition, on a d'une part

$$\det_{\mathcal{B}}((u \circ v)(x_1), \ldots, (u \circ v)(x_n)) = \det(u \circ v) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n),$$

et d'autre part cette quantité est aussi égale à

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}\Big(u(v(x_1)), \ldots, u(v(x_n))\Big) &= \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \\ &= \det(u) \times \det(v) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

La formule $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$ s'en déduit en prenant $(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{B}$, de sorte que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Exercice 2

On se place dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$ de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et on considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

dans cette base, où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

a) Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ que l'on explicitera, tel que $f \circ f = \lambda f$.

Un calcul donne

$$M \times M = \begin{pmatrix} 1 + a^2 + b^2 & a + a^3 + ab^2 & b + a^2 b + b^3 \\ a + a^3 + ab^2 & a^2 + a^4 + a^2 b^2 & ab + a^3 b + ab^3 \\ b + a^2 b + b^3 & ab + a^3 b + ab^3 & b^2 + a^2 b^2 + b^4 \end{pmatrix} = (1 + a^2 + b^2) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $M \times M = (1 + a^2 + b^2)M$, ce qui implique $f \circ f = \lambda f$ avec $\lambda = 1 + a^2 + b^2$.

b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi que les dimensions respectives de ces sous-espaces, et vérifier que l'on a $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$.

On voit que

$$f(e_1)\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}, \quad f(e_2) = a\,f(e_1), \quad f(e_3) = b\,f(e_1),$$

ce qui entraîne que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est la droite vectorielle $\mathbb{C}\,f(e_1)$ (dimension 1 sur $\mathbb{C}$). Le noyau est l'ensemble des vecteurs

$$v\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

tels que

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ ax + a^2y + abz = 0 \\ bx + aby + b^2z = 0. \end{cases}$$

Comme les deux dernières équations sont proportionnelles à la première (avec des facteurs respectifs a et b), on voit que $\mathrm{Ker}(f)$ est déterminé par l'équation $x+ay+bz = 0$. Il s'agit d'un hyperplan de E, donc d'un plan vectoriel complexe (dimension 2 sur $\mathbb{C}$). Pour que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ soient en somme directe, il faut et il suffit que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, ce qui a lieu si et seulement $f(e_1) \notin \mathrm{Ker}(f)$. Cette condition est que $1 + a^2 + b^2 = \lambda \neq 0$.

c) À quelle condition f est-il un projecteur ? Quelle est alors la nature précise de ce projecteur ?

La condition pour être un projecteur est que $f \circ f = f$, et donc il faut et il suffit que $\lambda f = f$. Comme $f \neq 0$, ceci est équivalent à la condition $\lambda = 1 + a^2 + b^2 = 1$. Dans ce cas, f est une projection sur la droite vectorielle $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}\,f(e_1)$ parallèlement au plan $\mathrm{Ker}(f) = \{v \,/\, x + ay + bz = 0\}$ (qui, dans ce cas, est bien supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ d'après le cours).

d) Dans le cas $\lambda \neq 0$, déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ composée d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (dans cet ordre), et expliciter la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Comme on l'a déjà vu, le vecteur

$$u = f(e_1)\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$$

constitue une base de $\mathrm{Im}(f)$. D'autre part, tout vecteur $v \in \mathrm{Ker}(f) = \{x + ay + bz = 0\}$ est représenté dans $\mathcal{B}$ par une matrice colonne

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-ay - bz\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-b\\0\\1\end{pmatrix},$$

donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est formée des deux vecteurs indépendants

$$v\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w\begin{pmatrix}-b\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E, ce dont on peut aussi s'assurer en observant que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de déterminant $\det(P') = 1+a^2+b^2 = \lambda \neq 0$. Comme $f(u) = f(f(e_1)) = \lambda\, f(e_1) = \lambda u$ et $f(v) = f(w) = 0$, on voit (sans calcul !) que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Comment sont situés $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ lorsque $\lambda = 0$? Dans ce cas, montrer que l'on peut trouver un vecteur $t \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $\mathcal{B}'' = (e_1, f(e_1), t)$ soit une base de E. Expliciter alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$.

Dans ce cas on a $f \circ f = 0$, ce qui entraîne de façon évidente que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (en effet si $v = f(h) \in \mathrm{Im}(f)$ alors $f(v) = f \circ f(h) = 0$, donc $v \in \mathrm{Ker}(f)$). La droite $\mathrm{Im}(f)$ est contenue dans le plan $\mathrm{Ker}(f)$, et ces sous-espaces ne peuvent donc pas être supplémentaires. On observe que le vecteur

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{pmatrix}$$

est dans $\mathrm{Ker}(f)$, et le système $\mathcal{B}'' = (e_1, f(e_1), t)$ est défini par la matrice de passage

$$P'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $\det(P'') = -a^2 - b^2 = 1$ (du fait que $\lambda = 1 + a^2 + b^2 = 0$). Il en résulte que $\mathcal{B}''$ est bien une base. Comme $f(f(e_1)) = f(t) = 0$ on voit, de nouveau sans calcul, que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$ est

$$M'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ la permutation $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 9 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer une décomposition de σ en cycles disjoints, et calculer σ^2, σ^3, σ^4.

En calculant les itérés successifs $\sigma^k(j)$, on trouve

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 7 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 1, \\ &3 \mapsto 8 \mapsto 3, \\ &4 \mapsto 9 \mapsto 6 \mapsto 4, \end{aligned}$$

et on déduit que est le produit commutatif de cycles

$$\sigma = (1\ 7\ 2\ 5) \circ (3\ 8) \circ (4\ 9\ 6).$$

Comme le produit est commutatif, on en déduit que pour tout entier k on a

$$\sigma^k = (1\ 7\ 2\ 5)^k \circ (3\ 8)^k \circ (4\ 9\ 6)^k,$$

avec en particulier

$$\begin{cases} (1\ 7\ 2\ 5)^2 = (1\ 2) \circ (5\ 7), \quad (1\ 7\ 2\ 5)^3 = (1\ 5\ 2\ 7), \quad (1\ 7\ 2\ 5)^4 = \mathrm{Id}, \\ (3\ 8)^2 = \mathrm{Id}, \quad (3\ 8)^3 = (3\ 8), \quad (3\ 8)^4 = \mathrm{Id}, \\ (4\ 9\ 6)^2 = (4\ 6\ 9), \quad (4\ 9\ 6)^3 = \mathrm{Id}, \quad (4\ 9\ 6)^4 = (4\ 9\ 6). \end{cases}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1\ 2) \circ (5\ 7) \circ (4\ 6\ 9), \\ \sigma^3 &= (1\ 5\ 2\ 7) \circ (3\ 8), \\ \sigma^4 &= (4\ 9\ 6). \end{aligned}$$

b) Déterminer l'ordre et la signature de σ.
On voit que $\sigma^{12} = (4\,9\,6)^3 = \mathrm{Id}$, et en fait 12 est le ppcm des ordres des cycles de longueur respectives $4, 2, 3$ qui composent σ, donc l'ordre de σ est 12. La signature est le produit des signatures de ces cycles, à savoir

$$\varepsilon(\sigma) = (-1) \times (-1) \times 1 = 1.$$

c) Calculer $\sigma^{2018}(5)$.
On a $2018 = 12 \times 168 + 2$, donc $\sigma^{2018} = (\sigma^{12})^{168} \circ \sigma^2 = \sigma^2$. D'après le calcul de σ^2 fait ci-dessus, ceci donne

$$\sigma^{2018}(5) = \sigma^2(5) = 7.$$

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & b \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(M)$ (par exemple en faisant intervenir la combinaison linéaire $L_1 + L_3 - 2L_2$ des 3 premières lignes). A quelle condition M est-elle inversible ? Quel est alors le rang de M ?
La ligne indiquée vaut

$$L_1 + L_3 - 2L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} = -(1-a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1-3a & -a & 0 \end{vmatrix}$$

où la dernière égalité est obtenue en remplaçant la dernière ligne L'_3 par $L'_3 - aL'_1$. On obtient alors

$$\det(M) = (a-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1-3a & -a \end{vmatrix} = (a-1)(-2a + (3a-1)) = (a-1)^2.$$

La matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) = (a-1)^2 \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 1$. Le rang de M vaut alors 4 (il s'agit d'une matrice 4×4 inversible).

b) Calculer le déterminant mineur $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$. Que peut-on dire du rang de M si $D \neq 0$?

En faisant des combinaisons linéaires sur les lignes, à savoir en remplaçant L_3 par $L_3 - aL_1$, on trouve

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ -a & 0 & b-a^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & b-a^2 \end{vmatrix} = -b.$$

Si $b \neq 0$, on a un mineur d'ordre 3 qui est non nul, on sait alors d'après le cours que $\mathrm{rang}(M) \geq 3$.

c) Déterminer le rang de M en fonction de a et b.

Si $a \neq 1$, on a vu que $\mathrm{rang}(M) = 4$. Si $a = 1$ et $b \neq 0$, le rang est strictement inférieur à 4, mais $\mathrm{rang}(M) \geq 3$ d'après b), donc $\mathrm{rang}(M) = 3$. Si $a = 1$ et $b = 0$, M se réduit à la matrice entièrement explicite

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $(C_j)_{1 \leq j \leq 4}$ ses colonnes. Il est apparent que

$$C_2 = C_3 + C_4 \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 + C_4 = C_3 + 2C_4,$$

donc $\mathrm{vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{vect}(C_3, C_4)$, et par ailleurs il est évident que C_3, C_4 sont linéairement indépendantes. On en conclut que $\mathrm{rang}(M) = 2$.

Exercice 5 (Questions bonus facultatives)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme et $M = (m_{i,j})$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On note ${}^{\mathrm{ad}}u$ l'endomorphisme, dit adjoint de u, dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice adjointe

$${}^{\mathrm{ad}}M := {}^{t}(\mathrm{comat}(M)) = (\widetilde{m}_{j,i})$$

où les $\widetilde{m}_{i,j}$ sont les cofacteurs de M (a priori, ${}^{\mathrm{ad}}u$ semble donc dépendre du choix de la base $\mathcal{B}$).

Exercice plus théorique, mais en fait essentiellement trivial !

a) Montrer que

$$\widetilde{m}_{i,j} = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_{j-1}), e_i, u(e_{j+1}), \ldots, u(e_n)).$$

Le développement du déterminant $n \times n$ par rapport à la j-ième colonne donne un seul terme associé à la ligne i, on obtient le signe $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ restant, ce qui est précisément la définition du cofacteur $\widetilde{m}_{i,j}$.

b) Montrer que si $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, n\}$ sont des indices quelconques, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_{j_1}), \ldots, u(e_{j_{n-1}}), e_{j_n}) = \det_{\mathcal{B}}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-1}}, {}^{\mathrm{ad}}u(e_{j_n}))$$

[on pourra étudier d'abord le cas où deux des indices j_k, j_ℓ, $k, \ell \leq n-1$ sont confondus, puis le cas où ils sont 2 à 2 distincts, en sorte que $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{j\}$ pour un certain indice j ; on posera aussi $i = j_n$].

Si deux des indices $j_1, \ldots, j_{n-1}$ sont confondus, les déterminants des membres de gauche et de droite sont tous les deux nuls (puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée). Si les indices $j_1, \ldots, j_{n-1}$ sont tous distincts, leur ensemble $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ est le complémentaire d'un certain indice $j \in \{1, \ldots, n\}$. En permutant les indices $j_1, \ldots, j_{n-1}$ pour avoir $j_1 < \cdots < j_{n-1}$, on introduit à gauche et à droite un même signe, qui n'est autre que la signature de la permution de $\mathfrak{S}_{n-1}$ mise en jeu. On se ramène ainsi au cas $j_1 < \cdots < j_{n-1}$, et en notant $i = j_n$, il faut alors vérifier que

$$(*) \quad \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), ..., u(e_{j-1}), u(e_{j+1}), ..., u(e_n), e_i) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n, {}^{\mathrm{ad}}u(e_i)).$$

En replaçant le dernier vecteur en position j (ce qui, de nouveau, introduit un même changement de signe à gauche et à droite), on doit vérifier que

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), ..., u(e_{j-1}), e_i, u(e_{j+1}), ..., u(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_{j-1}, {}^{\mathrm{ad}}u(e_i), e_{j+1}, ..., e_n).$$

Mais le membre de gauche est $\widetilde{m}_{i,j}$ d'après a), tandis que l'égalité ${}^{\mathrm{ad}}u(e_j) = \sum_{i=1}^n c_{i,j} e_i$ avec $c_{i,j} = \widetilde{m}_{j,i}$ implique par échange des rôles de i et j

$${}^{\mathrm{ad}}u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{m}_{i,j} e_j.$$

On voit alors que le membre de droite de $(*)$ est aussi égal à $\widetilde{m}_{i,j}$, CQFD.

c) Montrer que pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u(x_n)),$$

puis que si un endomorphisme $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ vérifie pour tous les $x_i \in E$ la relation

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, v(x_n)),$$

alors on a nécessairement $v = {}^{\mathrm{ad}}u$.

Pour la première égalité on note $x_i = \sum_{j_i=1}^n x_{i,j_i} e_{j_i}$, $1 \leq j_i \leq n$, et par un développement multilinéaire il vient

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq n} x_{1,j_1} \cdots x_{n,j_n} \det_{\mathcal{B}}(u(e_{j_1}), \ldots, u(e_{j_{n-1}}), e_{j_n}).$$

De même, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u(x_n)) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq n} x_{1,j_1} \cdots x_{n,j_n} \det_{\mathcal{B}}(e_{j_1}), \ldots, e_{j_{n-1}}, {}^{\mathrm{ad}}u(e_{j_n})).$$

L'identité démontrée en b) implique bien que

$$(**) \qquad \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u(x_n)).$$

Maintenant, pour ce qui est de l'unicité, on voit que l'endomorphisme $w = v - {}^{\mathrm{ad}}u$ vérifie

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, w(x_n)) = 0.$$

En prenant $x_n = e_j$ et $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{e_1, \ldots, e_n\} \smallsetminus \{e_i\}$ on en déduit que la i-ième composante de $w(e_j)$ est nulle, et comme ceci a lieu pour tout i, on obtient par conséquent $w(e_j) = 0$. De nouveau, ceci a lieu pour tout j, donc $w = 0$ et $v = {}^{\mathrm{ad}}u$.

d) Déduire de c) que ${}^{\mathrm{ad}}u$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie pour le définir.

On a vu que la première identité du c) caractérise l'endomorphisme ${}^{\mathrm{ad}}u$. Mais si on remplace $\mathcal{B}$ par une base $\mathcal{B}'$, on a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$, et on en déduit que les identités formulées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$ sont équivalentes, au facteur $\det_{cB'}(\mathcal{B}) \neq 0$ près. Ceci montre bien que ${}^{\mathrm{ad}}u$ ne dépend pas de la base choisie, même si sa définition en termes de cofacteurs dans une base $\mathcal{B}$ donnée semble le faire dépendre de la base $\mathcal{B}$.

e) Redémontrer directement (i.e. sans utiliser les résultats du cours reliant M et ${}^{\mathrm{ad}}M$) que ${}^{\mathrm{ad}}u \circ u = \det(u)\,\mathrm{Id}_E$, et en déduire alors que ${}^{\mathrm{ad}}M \times M = \det(M)\,I_n$.

Puisque $(**)$ a lieu pour tous n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, on peut remplacer x_n par $u(x_n)$ dans $(**)$. Ceci donne

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), u(x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u \circ u(x_n)).$$

Mais le membre de gauche est égal à $\det u \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ par définition du déterminant. On en déduit alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u \circ u(x_n) - \det(u)\,x_n) = 0.$$

Le raisonnement du e) appliqué à $w = {}^{\mathrm{ad}}u \circ u - \det(u)\,\mathrm{Id}_E$ implique $w = 0$, d'où ${}^{\mathrm{ad}}u \circ u - \det(u)\,\mathrm{Id}_E$. En termes matriciels, ceci signifie que ${}^{\mathrm{ad}}M \times M = \det(M)\,I_n$ (résultat qu'on avait démontré en cours de manière plus calculatoire).

f) Montrer que ${}^{\mathrm{ad}}({}^tM) = {}^t({}^{\mathrm{ad}}M)$, et déduire du e), en prenant $N = {}^tM$, que l'on a aussi $M \times {}^{\mathrm{ad}}M = \det(M)\,I_n$ et $u \circ {}^{\mathrm{ad}}u = \det(u)\,\mathrm{Id}_E$.

Rayer la ligne i et la colonne j de M revient à rayer la colonne i et la ligne j de ${}^tM$, et les déterminants qui en résultent sont égaux, affectés du même signe $(-1)^{i+j}$. Les matrices de cofacteurs associées sont donc transposées l'une de l'autre, ce qui donne bien la formule

$${}^{\mathrm{ad}}({}^tM) = {}^t({}^{\mathrm{ad}}M).$$

Maintenant, si on transpose l'égalité matricielle du e), on en déduit

$${}^tM \times {}^t({}^{\mathrm{ad}}M) = \det(M)\,I_n \quad \text{d'où} \quad {}^tM \times {}^{\mathrm{ad}}({}^tM) = \det(M)\,I_n.$$

Mais comme ceci est vrai pour toute matrice M, on peut remplacer M par ${}^tM$ pour obtenir

$$M \times {}^{\mathrm{ad}}M = \det(M)\,I_n.$$

Si on en revient aux endomorphismes, ceci signifie que

$$u \circ {}^{\mathrm{ad}}u = \det(u)\ \mathrm{Id}_E\,.$$

L'intérêt de cette identité est qu'elle ne dépend plus de quelque base que ce soit. Si $\det(u) \neq 0$, on retrouve ainsi que u est inversible et que

$$u^{-1} = \frac{1}{\det(u)}\ {}^{\mathrm{ad}}u.$$