Université Joseph Fourier Grenoble I **L2, semestre 4**

MAT244 : Contrôle continu n°2 du jeudi 2 mai 2013

Durée 1h30 – documents et appareils électroniques interdits

Question de cours. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien de dimension finie. On rappelle qu'un endomomorphisme $u : E \to E$ est dit *unitaire* si u préserve le produit scalaire hermitien.

a) Écrire ce que signifie précisément cette condition, et la traduire en termes d'une propriété liant u et son adjoint u^*.

b) Montrer que les valeurs propres de u sont des nombres complexes de module 1 et que des vecteurs propres x, y de u correspondant à des valeurs propres distinctes $\lambda \neq \mu$ sont orthogonaux.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire, on considère l'endomorphisme u défini dans la base canonique par la matrice carrée réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u. En déduire que l'on peut trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ce fait était-il prévisible ?

b) On considère dans $\mathbb{R}^2$ la conique (C) d'équation

$$-x^2 + 2y^2 + 4xy - 3x + 9y - \frac{7}{8} = 0.$$

Montrer que cette conique possède un centre (x_0, y_0) et déterminer la nouvelle équation dans les coordonnées $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. Déterminer la nature de cette conique et ses caractéristiques géométriques (nature, axes de symétrie, excentricité).

c) En faisant le moins possible de calculs (c'est-à-dire si possible aucun...) trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, pour le produit scalaire standard, dans laquelle on peut diagonaliser l'endomorphisme de matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $\beta \in]0, \pi[$ un réel fixé. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paire* et *de période* 2π, telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0, \beta[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\beta, \pi]$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n de f.

b) Expliciter la somme de la série de Fourier de f et expliciter sa somme $S(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$. On rappellera l'énoncé des théorèmes fondamentaux utilisés pour conclure.

c) Déduire de ce qui précède la valeur des sommes infinies

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\beta)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\beta)}{n^2}$$

pour tout réel β, en rappelant les résultats généraux utilisés.