Corrigé de l'examen du 13 mai 2013

Exercice 1. [10 points] Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note φ la forme bilinéaire et q la forme quadratique associées à A dans la base canonique.

1. [1] Si on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, nous obtenons alors aussitôt

$$\varphi(x,y) = 7x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2,$$
$$q(x) = \varphi(x,x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

2. [3] Appliquons l'algorithme de Gauss pour effectuer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires. En regroupant les x_1 puis les x_2 on trouve successivement

$$\begin{aligned}
q(x) &= 7\Big(x_1^2 + \frac{2}{7}x_1x_2 + \frac{2}{7}x_1x_3\Big) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 12x_2x_3 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 - \Big(\frac{1}{7}x_2^2 + \frac{1}{7}x_3^2 + \frac{2}{7}x_2x_3\Big) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 12x_2x_3 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 + \frac{13}{7}x_2^2 + \frac{13}{7}x_3^2 + \frac{82}{7}x_2x_3 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 + \frac{13}{7}\Big(x_2^2 + \frac{82}{13}x_2x_3\Big) + \frac{13}{7}x_3^2 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 + \frac{13}{7}\Big(x_2 + \frac{41}{13}x_3\Big)^2 - \frac{41^2}{7\times 13}x_3^2 + \frac{13}{7}x_3^2 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 + \frac{13}{7}\Big(x_2 + \frac{41}{13}x_3\Big)^2 - \frac{41^2}{7\times 13}x_3^2 + \frac{13}{7}x_3^2 \\
&= 7\Big(x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\Big)^2 + \frac{13}{7}\Big(x_2 + \frac{41}{13}x_3\Big)^2 - \frac{216}{13}x_3^2.
\end{aligned}$$

3. [0,5] On sait que les formes linéaires non nulles données par la méthode de Gauss

$$\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3, \quad \ell_2(x) = x_2 + \frac{41}{13}x_3, \quad \ell_3(x) = x_3$$

sont nécessairement indépendantes. On voit que

$$q(x) = 7\,\ell_1(x)^2 + \frac{13}{7}\,\ell_2(x)^2 - \frac{216}{13}\,\ell_3(x)^2$$

est de rang 3 et de signature $(2,1)$ (2 coefficients > 0, 1 coefficient < 0).

4. [3] Si $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, un calcul immédiat donne $AU_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9U$. On voit donc que le vecteur U_1 est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 9$. D'autre part

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 6 \\ 1 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 & 1 \\ 9-\lambda & 2-\lambda & 6 \\ 9-\lambda & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

comme on le voit en ajoutant les colonnes 2 et 3 à la première (cette opération étant évidemment suggérée par le fait que U est vecteur propre). Ceci donne par linéarité

$$\det(A-\lambda I) = (9-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 6 \\ 1 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

(la deuxième égalité est obtenue en soustrayant la colonne 1 aux colonnes 2 et 3). Par suite

$$\det(A-\lambda I) = (9-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 5^2\big) = (9-\lambda)(6-\lambda)(-4-\lambda).$$

Les deux autres valeurs propres sont donc $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = -4$ (la matrice étant symétrique, on savait a priori qu'on devait obtenir des valeurs propres réelles). Les vecteurs propres s'obtiennent en résolvant les systèmes linéaires $(A-\lambda_j)X = 0$ correspondants, soit

$$(\lambda_2 = 6) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\lambda_3 = -4) \quad \begin{cases} 11x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Le premier système implique par soustraction des équations 2 et 3 que $-10x_2 + 10x_3 = 0$, d'où $x_2 = x_3$, $x_1 = -2x_3$ et par suite

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les 2 premières équations du deuxième système donnent aussitôt $x_1 = 0$, d'où $x_2 = -x_3$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve ainsi la base de vecteurs propres

$$(\lambda_1 = 9) \;\; U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda_2 = 6) \;\; U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda_3 = -4) \;\; U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette base est orthogonale mais non orthonormée. Une base orthonormée de vecteurs propres est donnée en divisant ces vecteurs par leurs normes, ce qui donne

$$\widehat{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \widehat{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \widehat{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

pour les valeurs propres respectives 9, 6, -4.

5. [2] Si $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$, $\widehat{x}_3$ sont les coordonnées dans la base $(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2, \widehat{U}_3)$, la matrice de q se diagonalise dans ces coodonnées et on a $q(x) = 9\widehat{x}_1^2 + 6\widehat{x}_2^2 - 4\widehat{x}_3^2$ d'après la question 4. Comme $\widehat{x}_j = X \cdot \widehat{U}_j$, ceci donne

$$\begin{aligned} q(x) &= 9\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 6\Big(\frac{-2x_1+x_2+x_3}{\sqrt{6}}\Big)^2 - 4\Big(\frac{-x_2+x_3}{\sqrt{2}}\Big)^2 \\ &= 3\big(x_1+x_2+x_3\big)^2 + \big(-2x_1+x_2+x_3\big)^2 - 2\big(-x_2+x_3\big)^2 \end{aligned}$$

6. [0,5] La quadrique $q(x) = 1$ s'écrit encore $9\widehat{x}_1^2 + 6\widehat{x}_2^2 - 4\widehat{x}_3^2 = 1$, c'est un hyperboloïde à une nappe (qui n'est pas de révolution suivant l'axe $O\widehat{x}_3 = \mathbb{R}\widehat{U}_3$, les sections $\widehat{x}_3 = \mathrm{Cte}$ sont des ellipses).

Exercice 2. [11 points]

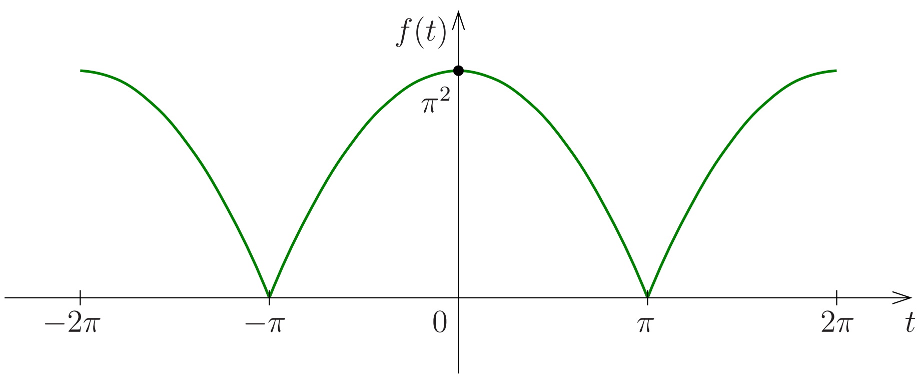
1. [1] Par définitions les coefficients de Fourier $a_n(g)$, $b_n(g)$ et $c_n(g)$ d'une fonction g supposée 2π-périodique et continue par morceaux sont donnés par

$$a_n(g) = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,\cos(n\omega t)\,dt, \qquad b_n(g) = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,\sin(n\omega t)\,dt,$$
$$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,e^{-in\omega t}\,dt$$

avec $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ et t_0 arbitraire. Lorsque la fonction est paire ou impaire il est avantageux de prendre $t_0 = -\frac{T}{2}$, d'où $t_0 = -\pi$, $t_0 + T = \pi$ ici.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = \pi^2 - t^2$, $t \in [-\pi, \pi]$.

2. [1] Le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ a l'allure suivante :



Il s'agit d'une parabole sur $[-\pi, \pi]$, qu'on reproduit par périodicité sur $[-\pi, \pi] + 2k\pi$.

3. [3] Calculons les coefficients $c_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Comme la fonction f est paire nous avons déjà $b_n(f) = 0$. D'autre part

$$c_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - t^2)dt = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Les coefficients $a_n(f)$, $n \geq 1$, s'obtiennent au moyen de deux intégrations par parties

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - t^2)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi^2 - t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2t\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right) = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\,\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[-t\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\,(-\pi)\,\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 = -4\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

4. [2] La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et de classe C^1 par morceaux, avec des points anguleux en $t = 2k\pi$ (dérivée à gauche -2π, dérivée à droite 2π). D'après le théorème de Dirichlet, on sait que la série de Fourier converge en tout point vers $f(t)$ (la convergence étant même uniforme sur $\mathbb{R}$). Comme f est paire, nous en déduisons

$$f(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\,\cos(nt) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nt)$$

en tout point de $\mathbb{R}$.

5. [2] En particulier, sur $[-\pi, \pi]$ nous avons

$$\pi^2 - t^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nt),$$

ce qui donne encore la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nt) = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{t^2}{4}.$$

En prenant successivement $t = 0$ et $t = \pi$ on trouve les valeurs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. [2] D'après l'identité de Parseval-Bessel, on a

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|^2\,dt = |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

ce qui implique ici, comme f est paire et réelle,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,dt = c_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2.$$

On a d'une part

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-t^2)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^4-2\pi^2t^2+t^4)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\pi^5-\frac{2}{3}\pi^5+\frac{\pi^5}{5}\Big) = \frac{8\pi^4}{15}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$|c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2 = \frac{4\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

En égalant ces deux quantités, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\Big(\frac{8\pi^4}{15}-\frac{4\pi^4}{9}\Big) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3. (4 points) Étudions la nature de la conique d'équation

$$P(x,y) = 4x^2+4y^2+12xy-8x-12y+1 = 0.$$

Nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 8x+12y-8, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 12x+8y-12.$$

On voit alors immédiatement que les équations $8x+12y-8 = 12x+8y-12 = 0$ admettent la solution unique $(x,y) = (1,0)$. S'il s'agit d'une conique à centre, le centre est donc le point $\Omega = (1,0)$. Si on utilise Ω comme nouvelle origine il faut poser $X = x-1$, $Y = y$, soit encore $x = X+1$, $y = Y$. Ceci donne

$$\begin{aligned}P(x,y) &= 4(X+1)^2+4Y^2+12(X+1)Y-8(X+1)-12Y+1\\ &= 4X^2+4Y^2+12XY-3.\end{aligned}$$

Des calculs faciles montrent que la matrice $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(\lambda-4)^2-6^2 = (\lambda-10)(\lambda+2)$, d'où les valeurs propres 10 et -2 correspondant à la base orthonormée de vecteurs propres $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$. Ceci donne la décomposition en carrés

$$4X^2+4Y^2+12XY = 10\widehat{X}^2-2\widehat{Y}^2 \qquad \text{où } \widehat{X} = \tfrac{X+Y}{\sqrt{2}} = \tfrac{x+y-1}{\sqrt{2}},\ \ \widehat{Y} = \tfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} = \tfrac{-x+y+1}{\sqrt{2}}.$$

Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation devient

$$10\widehat{X}^2-2\widehat{Y}^2-3 = 0 \Longleftrightarrow \frac{\widehat{X}^2}{3/10}-\frac{\widehat{Y}^2}{3/2} = 1.$$

Il s'agit d'une hyperbole d'axes $\Omega\widehat{X}$ et $\Omega\widehat{Y}$, à savoir les droites perpendiculaires passant par $(1,0)$ dirigées par les vecteurs propres, on a donc $\Omega\widehat{X} = \{y{=}x{-}1\}$, $\Omega\widehat{Y} = \{y{=}1{-}x\}$. Les asymptotes sont données par $\widehat{Y} = \pm\sqrt{5}\widehat{X}$, soit encore $(-x+y+1) = \pm\sqrt{5}(x+y-1)$, ou, si on veut, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}(x-1)$, $y = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}(x-1)$. Les pentes respectives valent

$$\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq -2,618, \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,382$$

(ces pentes sont aussi les solutions de l'équation $4p^2 + 12p + 4 = 0 \Leftrightarrow p^2 + 3p + 1 = 0$). Les paramètres de l'hyperbole sont

$$a = \sqrt{\frac{3}{10}}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{6} \simeq 2,449.$$

On obtient la représentation graphique suivante.