Question de cours.

(i) Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Rappeler l'identité du parallélogramme. **Réponse :** Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$, autrement dit, dans la cas de la forme quadratique euclidienne usuelle, la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés. Pour le démontrer, soit φ la forme bilinéaire symétrique associée à q. On écrit

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x,y),$$
$$q(x-y) = \varphi(x-y, x-y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) - 2\varphi(x,y) = q(x) + q(y) - 2\varphi(x,y),$$

et la somme donne le résultat voulu.

ii) Si F est un sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel euclidien $(E, \langle,\rangle)$, et $(a_1, \ldots, a_p)$ une base orthogonale de F, rappeler la formule permettant de calculer la projection orthogonale $\pi_F(x)$ sur le sous espace F en termes du produit scalaire. **Réponse :** on doit avoir $\pi_F(x) = \sum_{\beta=1}^p \lambda_\beta a_\beta$ puisque $\pi_F(x)$ doit être dans F. Faisons le produit scalaire de $x = \pi_F(x) + y$ où $y \in F^\perp$ avec a_β. Alors $\langle x, a_\beta\rangle = \langle \pi_F(x), a_\beta\rangle$ puisque $y \in F^\perp$. Comme la base est orthogonale $\langle \pi_F(x), a_\beta\rangle = \lambda_\beta \langle a_\beta, a_\beta\rangle$ et donc $\lambda_\beta = \dfrac{\langle x, a_\beta\rangle}{\langle a_\beta, a_\beta\rangle}$ et donc

$$\pi_F(x) = \sum_{\beta=1}^{p} \frac{\langle x, a_\beta\rangle}{\langle a_\beta, a_\beta\rangle} a_\beta \ .$$

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sauf dans la question $v)$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{K}^3$ telle que

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 7z^2 + 4xy + 2xz - 2yz \ .$$

i) Donner la matrice A de q dans la base canonique. Réponse : $q(x,y,z) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

ii) Expliciter l'expression définissant la forme bilinéaire symétrique associée $\varphi((x,y,z),(x',y',z'))$. Réponse : $\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

iii) En utilisant la méthode de Gauss, trouver une décomposition de q en carré de forme linéaires. Quelle est la signature de q. **Réponse :**

$$q(x,y,z) = x^2+3y^2-7z^2+4xy+2xz-2yz = x^2+2x(2y+z)+3y^2-7z^2-2yz = (x+(2y+z))^2-(2y+z)^2+3y^2-7z^2-2yz$$

$$= (x+2y+z)^2-(4y^2+4yz+z^2)+3y^2-7z^2-2yz = (x+2y+z)^2-y^2-8z^2-6yz = (x+2y+z)^2-\left(y^2+2y.3z\right)-8z^2$$

$$= (x+2y+z)^2 - \left((y+3z)^2 - 9z^2\right) - 8z^2 = (x+2y+z)^2 - (y+3z)^2 + z^2 \ .$$

et donc la signature de q est “deux signe $+$, un signe moins, pas de zéro”.

iv) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, déduire de la question précédente une base ortogonale $\mathcal{B}$ pour φ, et expliciter la matrice de passage P et la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. La forme bilinéaire φ peut-elle posséder une base orthonormée sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? **Réponse :** posons $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Dans un changement linéaire de coordonnées, la matrice de passage exprime les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, donc notre changement de coordonnées correspond à une matrice de passage telle que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Recherchons

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et effectuons le produit $P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & (a+2) & (b+2c+1) \\ 0 & 1 & c+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $a=-2,\ c=-3,\ b=5$ conviennent. Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage qui contient en colonnes les composantes de la nouvelle base dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc la nouvelle base est $((1,0,0),(-2,1,0),((5,-3,1)) = \mathcal{B}$ et dans cette base on obtient $q = X^2 - Y^2 + Z^2 = (X\ Y\ Z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et la matrice de φ dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme elle est diagonale, cela signifie que les produits pour φ de deux vecteurs distincts quelconques de cette base est nul pour φ et donc que cette base est orthogonale pour φ. Si la forme bilinéaire φ possédait une base orthonormée pour φ dans cette base la matrice qui représente φ serait la matrice identité et donc la signature de φ serait “trois signes plus” ce qui n'est pas possible. Donc la forme bilinéaire φ ne peut posséder une base orthonormée sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
v) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on peut trouver une base orthonormée, c'est à dire une base dans laquelle la matrice de φ est la matrice unité. **Réponse** : posons $\tilde{Y} = iY$, alors on obtient $q = X^2 + \tilde{Y}^2 + Z^2 = \begin{pmatrix} X & \tilde{Y} & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \tilde{Y} \\ Z \end{pmatrix}$ et donc en inversant $\begin{pmatrix} X \\ \tilde{Y} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & i & 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on obtient une base orthonormée (formée de vecteurs dont les composantes sont des complexes, donc des vecteurs de $\mathbb{C}^3$) pour φ.

Exercice 2. On se place sur l'espace $\mathbb{R}[X]_2$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la forme φ définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_1^1 |x|P(x)Q(x)dx\ .$$

i) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]_2$, et expliciter la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ [on se ramènera à des calculs sur $[0,1]$ en tenant compte de la parité ou de l'imparité des fonctions.]. **Réponse :** par linéarité de l'intégrale φ est bien linéaire par rapport à chacun de ses arguments, et comme $P.Q = Q.P$, φ est aussi symétrique. Est-elle définie positive ? Pour cela considérons $\varphi(P,P) = \int_{-1}^1 |x| \left(P(x)\right)^2 dx$. Comme nous intégrons une fonction (continue) positive ou nulle le résultat est positif ou nul et donc on a bien $\varphi(P,P) \geq 0$. Supposons maintenant que $\varphi(P,P) = 0 = \int_{-1}^1 |x| \left(P(x)\right)^2 dx$. On intègre sur un intervalle fermé borné une fonction continue positive ou nulle. Alors le résultat est nul si et seulement si la fonction intégrée est identiquement nulle donc si pour tout x de $[-1,1]$ on a $|x|(P(x))^2 = 0$ et donc si $x \in [-1,0[\cup]0,1]$ on obtient $P(x) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines et donc c'est le polynôme nul. Donc $\varphi(P,P) \geq 0$ et $\varphi(P,P) = 0$ implique que $P = 0$. Donc φ est un produit scalaire. Calculons

$$\varphi(1,1) = \int_{-1}^1 |x|dx = 2\int_0^1 xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1\ ,$$

$$\varphi(1,X) = \int_{-1}^1 |x|xdx = 0 \text{ (on intègre une fonction impaire)}\ ,$$

$$\varphi(1,X^2) = \int_{-1}^1 |x|x^2dx = 2\int_0^1 x^3dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\varphi(X,X) = \int_{-1}^1 |x|x.xdx = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\varphi(X,X^2) = \int_{-1}^1 |x|x.x^2dx = 0 \text{ (on intègre une fonction impaire)},$$

$$\varphi(X^2,X^2) = \int_{-1}^1 |x|x^4dx = 2\int_0^1 x^5dx = 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

et donc la matrice qui représente φ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

ii) Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ afin que $\mathcal{B}' = (P_0,P_1,P_2) = \left(1, X+a, X^2+bX+c\right)$ soit une base φ-orthogonale. **Réponse :** en notant $\varphi(v,w) = \langle v,w\rangle$ alors $\langle 1, a+X\rangle = \langle 1,a\rangle + \langle 1,X\rangle = a\langle 1,1\rangle + \langle 1,X\rangle = a+0$ est nul si $a=0$. Donc $\mathcal{B}' = (P_0,P_1,P_2) = \left(1,X,X^2+bX+c\right)$. Ensuite $\left\langle 1, c+bX+X^2\right\rangle = c\langle 1,1\rangle + b\langle 1,X\rangle + \left\langle 1,X^2\right\rangle = c+\frac{1}{2}$ doit être nul, donc $c = -\frac{1}{2}$. Puis $\left\langle X, c+bX+X^2\right\rangle = c\langle X,1\rangle + b\langle X,X\rangle + \left\langle X,X^2\right\rangle = b\frac{1}{2}$ doit être nul donc $b=0$. Donc $\mathcal{B}' = (P_0,P_1,P_2) = \left(1,X,X^2-\frac{1}{2}\right)$ est une base φ-orthogonale.

iii) En déduire une base orthonormé. Réponse : comme $\langle X,X\rangle = \frac{1}{2}$ le polynôme $X\sqrt{2}$ est de norme 1. Ensuite $\left\langle -\frac{1}{2}+X^2, -\frac{1}{2}+X^2\right\rangle = \left(-\frac{1}{2}\ 0\ 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\ 0\ 1\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3.2^2}$ et donc $2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+X^2\right) = -\sqrt{3}+2\sqrt{3}X^2$ est de norme 1. Donc $\left(1, X\sqrt{2}, -\sqrt{3}+2\sqrt{3}X^2\right)$ est une base φ-orthonormée.

Exercice 3. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ et on considère dans E la forme quadratique $q(u) = l_1(u)^2 - 4l_2(u)^2$ où $u = (x,y,z,t) \in E$ et où l_1, l_2 désignent les formes linéaires telles que

$$l_1(u) = x+y+z+t, \quad l_2(u) = y+t \ .$$

i) Ecrire la matrice de q dans la base canonique. **Réponse :**

$$q = (x+y+z+t)^2 - 4(y+t)^2 = x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt-4(y^2+t^2+2yt)$$

$$= x^2-3y^2+z^2-3t^2+2xy+2xz+2xt+2yz-6yt+2zt = (x\ y\ z\ t\ )\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

ii) On utilise le changement de coordonnées $X = x+y+z+t,\ Y = y+t,\ Z = z,\ T = t$. Ecrire l'expression de $q(u)$ et de la forme bilinéaire symétrique $(u,u') \to \varphi(u,u')$ associée à q dans ces nouvelles coordonnées. Préciser le rang et la signature de φ. **Réponse :** $q = X^2 - 4Y^2 = (X\ Y\ Z\ T)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$ et l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes. Donc φ devient $(X\ Y\ Z\ T)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = XX' - 4YY'$. Le rang de φ est donc 2 et sa signature est "un signe plus, un signe moins, deux zéros".

iii) Déterminer le noyau de φ et le cône isotrope de q, dans les deux systèmes de coordonnées (X,Y,Z,T) et (x,y,z,t). **Réponse :** dans les coordonnées (X,Y,Z,T) trouver le noyau revient à trouver le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est donc caractérisé par $X = Y = 0$ ou bien par $x+y+z+t = y+t = 0$. Le cône isotrope de q dans le système de coordonnées (X,Y,Z,T) est caractérisé par $\varphi(u,u) = 0$ donc par $X^2 - 4Y^2 = 0$. Dans le système de coordonnées (x,y,z,t) le cône isotrope est caractérisé par $(x+y+z+t)^2 - 4(y+t)^2 = 0$.

iv) Montrer que la droite $D = \mathbb{R}(1,1,1,1)$ est isotrope et que $H = D^\perp$ est un hyperplan de E. A-t-on $E = D \oplus D^\perp$? **Réponse :** $\varphi((1,1,1,1),(1,1,1,1)) = (1+1+1+1)^2 - 4(1+1)^2 = 4^2 - 4.4 = 0$ et donc tout élément de D est de la forme $\lambda(1,1,1,1)$ vérifie $\varphi(\lambda(1,1,1,1), \lambda(1,1,1,1)) = \lambda^2\varphi((1,1,1,1),(1,1,1,1)) = 0$ et donc est isotrope. Donc D est isotrope. Soit $v \in D^\perp$ alors $\varphi(v,(1,1,1,1)) = 0$. C'est à dire $(x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 4\\ -4\\ 4\\ -4\end{pmatrix} = 4(x-y+z-t) = 0$. Donc $H = D^{\perp}$ est caractérisé par $x-y+z-t=0$, une relation linéaire sur les quatre coordonnées x, y, z et t, donc $D^{\perp}$ est un espace vectoriel de dimension 3, de codimension 1, donc un hyperplan. Si $v \in D \cap D^{\perp}$ alors $v = \lambda(1,1,1,1)$ donc $x = y = z = t = \lambda$ et aussi $x-y+z-t = \lambda(1-1+1-1) = 0$ et cela n'impose pas $\lambda = 0$. Donc $D \cap D^{\perp} \neq \{0\}$ et donc D et $D^{\perp}$ ne sont pas en somme directe. On voit même que $D \subset D^{\perp}$, donc $D + D^{\perp} = D^{\perp} \subsetneq E$.

v) Montrer que $H = D \oplus \ker(\varphi)$ et déterminer $H^{\perp}$. **Réponse :** soit $v \in D \cap \ker(\varphi)$ alors $v = \lambda(1,1,1,1)$ et aussi comme $v \in \ker(\varphi)$ on doit avoir $x+y+z+t = y+t = 0$ donc $x+z = y+t = 0$ donc $\lambda = 0$. Donc $D \cap \ker(\varphi) = \{0\}$. Une base de $\ker(\varphi)$ est $((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$ et $((1,1,1,1))$ est une base de D. Par conséquent $((1,0,-1,0),(0,1,0,-1),(1,1,1,1))$ est une base de $D \oplus \ker(\varphi)$. Chacun des vecteurs de cette base est dans H qui est de dimension 3. Donc c'est une base de H et donc cette base engendre et $D \oplus \ker(\varphi)$ et H.

Donc $H = D \oplus \ker(\varphi)$. Un vecteur est dans $H^{\perp}$ s'il est orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de H. Donc $(x,y,z,t) \in H^{\perp}$ si et seulement si $\varphi((x,y,z,t),(1,0,-1,0)) = (x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = 0$ (toujours vrai) et $\varphi((x,y,z,t),(0,1,0,-1)) = (x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = 0$ (toujours vrai) et $\varphi((x,y,z,t),(1,1,1,1)) = (x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = 4(x-y+z-t) = 0$. Cela conduit pour $H^{\perp}$ à l'unique équation $x-y+z-t=0$. On voit que $H^{\perp} = H$, l'hyperplan H est son propre orthogonal !